MỤC LỤC

A. HỆ THỐNG ĐỀ THI

PHÒNG GD&ĐT QUẬN HÀ ĐÔNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

Bài 1 (2,0 điểm). Thực hiện phép tính:

a) $A = 9 + 3\sqrt{\frac{50}{9}} + 3\sqrt{8} - \sqrt[3]{27}$.

b) $B = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} - 6\sqrt{\frac{16}{3}}$.

Bài 2 (2,0 điểm). Giải phương trình

a) $5\sqrt{9x+9} - 2\sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} = 36$.

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x + 1$.

Bài 3 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4x}{4-x}$ và $B = \frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0;\ x \neq 4$.

a) Tính giá trị của B tại $x = 9$.

b) Chứng minh rằng: $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

c) Cho $M = \frac{A}{B}$. So sánh M và $\sqrt{M}$.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao $AH\ \left(H \in BC\right)$.

a) Biết $HB = 4\,\text{cm}$, $HC = 9\,\text{cm}$. Tính AH và số đo $\widehat{ABC}$ (số liệu chỉ dử dụng cho câu a).

b) Gọi D là hình chiếu của H trên AB, E là hình chiếu của H trên AC.

Chứng minh: $CE.BD.AC.AB = AH^4$.

c) Kẻ AI vuông góc với ED $\left(I \in BC\right)$. Chứng minh I là trung điểm của BC.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho ba số thực dương $x;\ y;\ z$ thay đổi thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2023xz} + \frac{1}{2023yz}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

TRƯỜNG THCS PHƯƠNG MAI

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1,5 điểm). Tính giá trị biểu thức:

a) $4\sqrt{5}-3\sqrt{20}+\sqrt{45}$.

b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}-15\sqrt{\dfrac{1}{3}}+1$.

Bài 2 (1,5 điểm). Giải phương trình

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{9x-27}-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-12}=6$.

b) $\sqrt{x^2-2x+1}+2=5$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x>0;\ x\neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=64$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Đặt $P=B:A$. So sánh P với 2.

Bài 4 (4,5 điểm).

1) Tính chiều cao của một cột tháp (làm tròn đến mét), biết rằng lúc tia sáng của mặt trời tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc bằng 51° thì bóng của nó trên mặt đất dài 48m (kết quả làm tròn đến mét).

2) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AH $(H\in BC)$. Vẽ HM vuông góc với AB tại M, HN vuông góc với AC tại N.

a) Cho biết $AB=6\,\text{cm}$, $AC=8\,\text{cm}$. Tính các độ dài BC, AH và số đo các góc B, C.

b) Chứng minh: $AM.AB=AN.AC$.

c) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt BC tại D. Chứng minh D là trung điểm của BC.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số thực dương a, b thoả mãn $ab>2021a+2022b$.

Chứng minh: $a+b>\left(\sqrt{2021}+\sqrt{2022}\right)^2$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (3,0 điểm).

a) Thực hiện phép tính và thu gọn các biểu thức sau:

$A=\left(3\sqrt{18}+\sqrt{6}-2\sqrt{32}\right).\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$

$B=\left(\dfrac{4}{1-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}-\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right).\left(\sqrt{5}-6\right).$

b) Giải phương trình: $\sqrt{9x-45}-14\sqrt{\dfrac{x-5}{49}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{4x-20}=3.$

Bài 2 (2,5 điểm). Với $x\ge 0;\ x\ne 4,$ cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x-2\sqrt{x}}{4-x}.$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{1}{4}.$

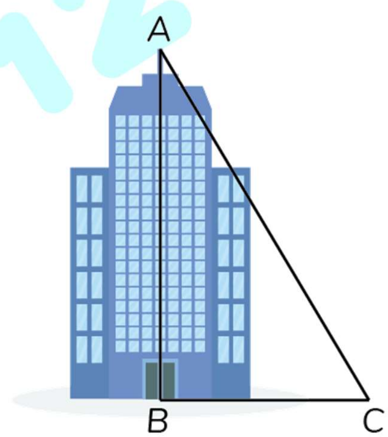
b) Rút gọn biểu thức $B.$

c) Cho $C=\dfrac{B}{A}.$ Tìm các giá trị nguyên của x để $C^2<\dfrac{1}{4}.$

Bài 3 (1,0 điểm). Một người trình sát đứng cách toà nhà BITEXCO (Thành phố Hồ Chí Minh) khoảng $151\text{m}.$ Góc nâng từ chỗ người đó đứng đến nóc toà nhà là $\widehat{BCA}=60^\circ.$

a) Tính chiều cao của toà nhà (kết quả làm tròn đến mét).

b) Biết toà nhà có 68 tầng, hãy tính chiều cao của mỗi tầng trong toà nhà (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại $A,$ đường cao $AH.$ Biết $HB=9\,\text{cm},\ HC=16\,\text{cm}.$

a) Tính độ dài $AC,\ AH,\ AB.$

b) Lấy D là điểm đối xứng với A qua $H.$ Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O và tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 5 (0,5 điểm). Giải phương trình: $x^2-1=2\sqrt{2x+1}.$

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGUYỄN CÔNG TRỨ

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1,5 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48}$.

b) $B = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$.

c) $C = 2\sin 30^\circ \sin^2 28^\circ + 2\sin^2 62^\circ \cos 60^\circ - \dfrac{\tan 13^\circ}{\cot 77^\circ}$.

Bài 2 (2,0 điểm). Giải các phương trình sau

a) $3\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+16} = 15 - \sqrt{16x+64}$.

b) $\sqrt{x^2-2x+5} = x+3$.

Bài 3 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ với $x \ge 0;\ x \ne 4;\ x \ne 9$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{A}{B}$.

c) Tìm số tự nhiên x để $P < 0$.

Bài 4 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, đường cao AH.

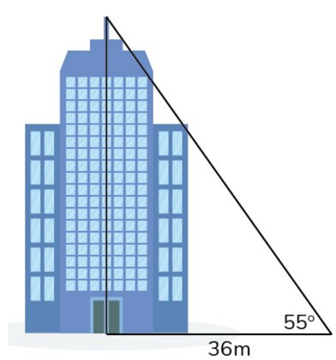
a) Giả sử $AB = 5\,cm$, $AC = 12\,cm$. Tính độ dài BC, AH và số đo $\widehat{ABC}$ (làm tròn đến phút).

b) Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng: $AD.AB = AE.AC$.

c) Lấy điểm G nằm giữa E và C. Kẻ AK vuông góc với BG tại K.

Chứng minh rằng: $\sin\widehat{AGB}.\cos\widehat{ABC} = \dfrac{HK}{CG}$.

Bài 5 (1,0 điểm). Tại một thời điểm trong ngày, tia nắng mặt trời hợp với mặt đất một góc bằng 55°. Một toà nhà đổ bóng xuống mặt đường một đoạn có độ dài $36m$. Tìm chiều cao của toà nhà (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Bài 6 (0,5 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{x^2-1} - \sqrt{3x^2+4x+1} = (8-2x)\sqrt{x+1}$.

----------------------------- HẾT -----------------------------

TRƯỜNG THCS TRƯNG VƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài I (2,0 điểm).

1) Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{2}{5}\sqrt{75}+\sqrt{12}-\frac{4}{3}\sqrt{27}$.

2) Tìm x thoả mãn $5x-3\sqrt{x}-2=0$.

Bài II (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $P=\frac{x+1}{\sqrt{x}+3}$ và $Q=\frac{6-8\sqrt{x}}{x-9}+\frac{2}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=4$.

2) Chứng minh $Q=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm x để $P\leq 2Q$.

Bài III (2,0 điểm). Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3$ với $m\neq 3$.

1) Trong trường hợp $m=3$:

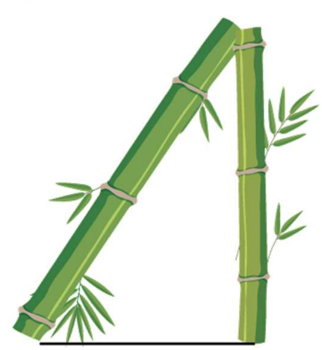
a) Vẽ đường thẳng (d) trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d).

2) Tìm m để đường thẳng (d) tạo với hai trục Ox và Oy một tam giác vuông cân.

Bài IV (3,5 điểm).

1) Một cây tre thẳng đứng bị gãy gập trong một cơn bão. Ngọn cây vừa chạm đất và cách gốc cây $4,5\text{m}$. Phần bị gãy tạo với phương thẳng đứng một góc $35°$. Hỏi điểm gãy cách gốc cây bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



2) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ và AH là đường cao. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AH. Từ B kẻ tiếp tuyến BE đến đường tròn (A) với E là tiếp điểm và E không nằm trên BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, B, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $HK\perp AC$ tại K và đường thẳng HK cắt đường tròn (A) tại điểm F khác H. Chứng minh CF là tiếp tuyến của đường tròn (A) và ba điểm E, A, F thẳng hàng.

c) Nối CE cắt đường tròn (A) tại điểm I khác E. Chứng minh: $\widehat{IKC}=\widehat{AEC}$.

Bài V (0,5 điểm). Cho $a, b, c, d\geq 0$ và $a+b+c+d=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=ab+bc+cd$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS HUỲNH THÚC KHÁNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (3,0 ĐIỂM)

Câu 1. $\sqrt{48}=?$

A. $16\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{12}$. D. $12\sqrt{3}$.

Câu 2. Căn bậc hai số học của 25 là

A. -5. B. 5. C. 25. D. ± 5.

Câu 3. Hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=?$

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 4. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH thì $AH^2=?$

A. $BC.BH$. B. $BC.AC$. C. $BC.HC$. D. $BH.HC$.

Câu 5. Kết quả của phép tính: $\sqrt{0,4}.\sqrt{0,9}.\sqrt{100}$ là

A. $3,6$. B. 36. C. 60. D. 6.

Câu 6. Biểu thức $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$ có giá trị là

A. -1. B. $2-\sqrt{3}$. C. 1. D. $\sqrt{3}-2$.

Câu 7. Tam giác ABC vuông tại A, có $AB=3\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$ thì $\sin B$ bằng

A. $0,8$. B. $0,6$. C. $0,75$. D. $0,5$.

Câu 8. $\sqrt{3x-2}$ có nghĩa khi

A. $x\ge\frac{2}{3}$. B. $x<-\frac{3}{2}$. C. $x\le-\frac{3}{2}$. D. $x<\frac{2}{3}$.

Câu 9. $\sin 30^\circ=?$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10. Kết quả của phép tính $\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ là

A. 4. B. -2. C. 2. D. -4.

Câu 11. Tính $\sqrt{5^2}+\sqrt{(-5)^2}$ có kết quả là

A. 0. B. 10. C. 50. D. -10.

Câu 12. $\sqrt[3]{-125}=?$

A. 25. B. -25. C. -5. D. 5.

II. PHẦN TỰ LUẬN (7,0 ĐIỂM)

Bài 1 (1,5 điểm). Rút gọn

a) $5\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{80}$.

b) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}+3\sqrt{\dfrac{16}{3}}$.

Bài 2 (1,5 điểm). Tìm x, biết

a) $\sqrt{x-2}=5$.

b) $\sqrt{25x+25}-2\sqrt{16x+16}+7\sqrt{x+1}=15$.

Bài 3 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{1}{x-1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị của x để $P>8$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x-P$.

Bài 4 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=6\,\text{cm}$, $AC=8\,\text{cm}$ và đường cao AH. Tính AH, HC.

Bài 5 (1,0 điểm). Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $BC=8\,\text{cm}$ và $\widehat{B}=30^\circ$.

Bài 6 (1,0 điểm). Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. Tính $A=\dfrac{5\cos\alpha}{2\tan\alpha-\cot\alpha}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS TRẦN ĐĂNG NINH

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1,5 điểm). Tính

a) $2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+2\sqrt{125}$.

b) $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Bài 2 (2,0 điểm). Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2+6x+9}=3$.

b) $3\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+4\sqrt{\dfrac{9x-8}{4}}=14$.

c) $3\sqrt[3]{x-2}=-6$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{7\sqrt{x}-13}{x-2\sqrt{x}-3}$ với $x\ge 0,\ x\ne 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.

b) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$.

c) Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm tất cả các số tự nhiên x để $P\le 1$.

Bài 4 (4,0 điểm).

1) Một toà nhà có chiều cao $h\,(\text{m})$. Khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 55° thì bóng của toà nhà trên mặt đất dài 15m. Tính chiều cao h của toà nhà (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

2) Cho tam giác MNP vuông tại M, đường cao $MI\ (I\in NP)$.

a) Biết $MN=12\text{cm}$, $NP=20\text{cm}$. Tính MP, MI và $\widehat{MNP}$ (làm tròn đến độ).

b) Kẻ IE vuông góc với MN tại E, IF vuông góc với MP tại F.

Chứng minh: $MI=EF$ và $ME.EN+MF.FP=MI^2$.

c) Chứng minh: $\tan^3 P=\dfrac{NE}{PF}$.

Bài 5 (0,5 điểm). Giải phương trình: $4x^2-5x-4\sqrt{x-1}-2=0$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGỌC LÂM

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 ĐIỂM)

Câu 1. Kết quả phép tính $\sqrt{(-8)^2+6^2}$ là

A. -10. **B.** 10. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 2. Giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{-125}$ là

A. -5. **B.** 5. **C.** ± 5. **D.** 25.

Câu 3. Điều kiện xác định của biểu thức $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ là

A. $x \ge 0,\ x \ne 1$. **B.** $x > 0,\ x \ne 9$. **C.** $x \ge 0,\ x \ne 1,\ x \ne 9$. **D.** $x \ge 0,\ x \ne 9$.

Câu 4. Kết quả của phép tính $\sqrt{12+6\sqrt{3}}-\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** 6. **D.** $-2\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho ΔDEF vuông tại D, đường cao DH. Khẳng định nào **sai**?

A. $\dfrac{1}{DH^2}=\dfrac{1}{EH^2}+\dfrac{1}{HF^2}$. **B.** $DH.EF = DE.DF$. **C.** $DE^2 = EH.EF$. **D.** $DH^2 = EH.HF$.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. $\sin B$ bằng

A. $\dfrac{AB}{BC}$. **B.** $\dfrac{AC}{BC}$. **C.** $\dfrac{AH}{BH}$. **D.** $\dfrac{BH}{AB}$.

Câu 7. Cho góc nhọn α. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. **C.** $\tan\alpha.\cot\alpha=1$. **D.** $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Câu 8. Biết $\tan\alpha = 0,658$. Vậy số đo của góc α (làm tròn đến phút) là

A. $33°34'$. **B.** $33°35'$. **C.** $33°20'$. **D.** $33°21'$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 ĐIỂM)

Bài 1 (1,0 điểm). Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{45}-7\sqrt{125}+16\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

b) $\dfrac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}+\dfrac{3}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{6\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}$.

Bài 2 (1,0 điểm). Tìm x biết

a) $2\sqrt{9x^2+6x+1}=14$.

b) $\sqrt{16x+48}-7\sqrt{x+3}+\dfrac{3}{4}\sqrt{4x+12}=-6$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-9}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 9$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để hiệu $A-B$ đạt giá trị nguyên.

Bài 4 (1,0 điểm). Một cầu trượt trong công viên có độ cao là $2{,}1\,\text{m}$ được đặt nghiêng so với mặt đất một góc 28°. Tính độ dài của mặt cầu trượt.

Bài 5 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại C có độ dài cạnh AC và BC lần lượt là $15\,\text{cm}$ và $20\,\text{cm}$. Vẽ đường cao CH, kẻ HE vuông góc với AC tại E; HF vuông góc với BC tại F.

a) Tính số đo góc A, độ dài AB và EF.

b) Chứng minh rằng: $AC.EC=BC.FC$.

c) Chứng minh rằng: $\dfrac{S_{CBA}}{S_{CEF}}=\dfrac{1}{\sin^2\widehat{CAB}}+\dfrac{1}{\cos^2\widehat{HCB}}$.

Bài 6 (0,5 điểm). Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGỌC THUỴ

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 ĐIỂM)

Câu 1. Điều kiện để biểu thức $\frac{x+3}{\sqrt{x-4}}$ có giá trị xác định là

A. $x \geq 4$. **B.** $x > 4$. **C.** $x \neq 4$. **D.** $x \neq 4;\ x \neq -3$.

Câu 2. Sau khi trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\frac{26}{4-\sqrt{3}}$ thì ta được kết quả là

A. $2\left(4+\sqrt{3}\right)$. **B.** $2\left(4-\sqrt{3}\right)$. **C.** $4+\sqrt{3}$. **D.** $26\left(4+\sqrt{3}\right)$.

Câu 3. Tính $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}$

A. $2-\sqrt{7}$. **B.** $-2-\sqrt{7}$. **C.** $2+\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{7}-2$.

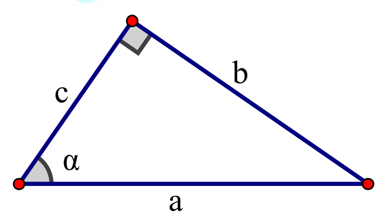
Câu 4. Kết quả của phép tính $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{27}$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 5. Biết $\sqrt{x-3}=5$ thì x bằng

A. 28. **B.** 8. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 6. Cho hình vẽ bên, khẳng định nào sau đây đúng?



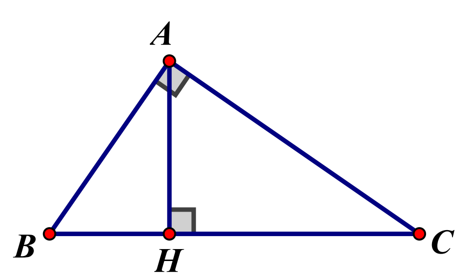
A. $\cot\alpha=\frac{c}{a}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{b}{a}$.

C. $\tan\alpha=\frac{b}{c}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{c}{a}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Biết $AB=3\,cm$, $AC=4\,cm$. Độ dài cạnh AH là

A. $3{,}75\,cm$. **B.** $\frac{20}{3}cm$. **C.** $\frac{3}{20}cm$. **D.** $2{,}4\,cm$.

Câu 8. Cho hình vẽ bên, tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chọn khẳng định đúng



A. $AB.AC=AH^2$. **B.** $AB.BC=AH^2$.

C. $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$. **D.** $AB^2=HC.BC$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 ĐIỂM)

Bài 1 (1,0 điểm). Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{2}-2\sqrt{50}+5\sqrt{32}$.

b) $\sqrt{5}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}}$.

Bài 2 (1,5 điểm). Giải phương trình

a) $\sqrt{x+3}=7$.

b) $2\sqrt{9x-18}-\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-8}=18$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0;\ x\ne 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

b) Chứng minh $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$.

c) Đặt $P=A-6B$. Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để $P<0$.

Bài 4 (3,0 điểm).

1) Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 6m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng $40°$. Tính chiều cao của cột đèn (làm tròn đến mét).

2) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH.

a) Cho biết $AB=3\,\text{cm}$, $AC=4\,\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, HB, AH.

b) Vẽ HE vuông góc với AB tại E, HF vuông góc với AC tại F. Chứng minh $AE.EB=EH^2$ và $AE.EB+AF.FC=EF^2$.

c) Chứng minh $BE=BC.\cos^3 B$.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho $0<x<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{4}{x}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS CHƯƠNG DƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1,5 điểm). Tính giá trị của biểu thức:

a) $\sqrt{27}-2\sqrt{3}-2\sqrt{48}+3\sqrt{75}$.

b) $\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^4}-4\sqrt{\dfrac{15}{2}}+\dfrac{5}{1-\sqrt{6}}$.

Bài 2 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x>0;\ x\neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

b) Rút gọn B.

c) So sánh biểu thức $P=\dfrac{A}{B}$ với 2.

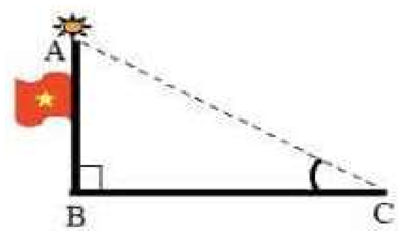
Bài 3 (2,0 điểm). Cho hàm số bậc nhất $y=(m-1)x+2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $P(2;4)$.

b) Với m tìm được ở câu a, hãy vẽ (d) trên hệ trục toạ độ Oxy.

c) Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B. Tìm m để khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{2}$.

Bài 4 (1,0 điểm). Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc $\hat{C}=35^\circ$ và bóng BC của cột cờ AB trên mặt đất dài 12m. Tính chiều cao của cột cờ AB (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Bài 5 (3,0 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Lấy điểm C trên nửa đường tròn (O) sao cho $AC>BC$ $(C\neq A, B)$. Gọi E là trung điểm của dây cung AC. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với AB, cắt tia AC tại điểm D.

a) Chứng minh $OE\perp AC$ và hai điểm B, E đều thuộc đường tròn đường kính OD.

b) Đường tròn đường kính OD cắt nửa đường tròn (O) tại F. Chứng minh tam giác FOD vuông tại F, từ đó chứng minh $DF=DB$.

c) Chứng minh: $\widehat{DFA}=\widehat{DCF}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHÒNG GD&ĐT QUẬN HÀ ĐÔNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (2,0 điểm). Thực hiện phép tính:

a) $A=9+3\sqrt{\frac{50}{9}}+3\sqrt{8}-\sqrt[3]{27}$.

b) $B=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}-6\sqrt{\frac{16}{3}}$.

Lời giải

a) $A=9+3\sqrt{\frac{50}{9}}+3\sqrt{8}-\sqrt[3]{27}=9+3\cdot\frac{5}{3}\sqrt{2}+3.2\sqrt{2}-3=9+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-3=6+11\sqrt{2}$.

b) $B=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}-6\sqrt{\frac{16}{3}}=\left|2-\sqrt{3}\right|+\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}-6\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$=\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}-8\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1-8\sqrt{3}=1-8\sqrt{3}$.

Bài 2 (2,0 điểm). Giải phương trình

a) $5\sqrt{9x+9}-2\sqrt{4x+4}+\sqrt{x+1}=36$.

b) $\sqrt{4x^2-4x+1}=x+1$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có: $5\sqrt{9x+9}-2\sqrt{4x+4}+\sqrt{x+1}=36$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{9\left(x+1\right)}-2\sqrt{4\left(x+1\right)}+\sqrt{x+1}=36$

$\Leftrightarrow 5.3\sqrt{x+1}-2.2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=36$

$\Leftrightarrow 15\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=36$

$\Leftrightarrow 12\sqrt{x+1}=36$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=3$

$\Leftrightarrow x+1=9$

$\Leftrightarrow x=8$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{8\}$.

b) Ta có: $\sqrt{4x^2-4x+1}=x+1\Leftrightarrow\sqrt{\left(2x-1\right)^2}=x+1$

$\Leftrightarrow\left|2x-1\right|=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=x+1\\2x-1=-x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;2\}$.

Bài 3 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\frac{4x}{4-x}$ và $B=\frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của B tại $x=9$.

b) Chứng minh rằng: $A=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

c) Cho $M=\frac{A}{B}$. So sánh M và $\sqrt{M}$.

Lời giải

a) Với $x=9$ thoả mãn điều kiện $x\ge 0;\, x\ne 4.$

Thay $x=9$ vào biểu thức $B=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}$, ta được: $B=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{4\left(\sqrt{9}+2\right)}{\sqrt{9}-2}=\dfrac{4\left(3+2\right)}{3-2}=20.$

Vậy $B=20$ với $x=9.$

b) Với $x\ge 0;\, x\ne 4,$ ta có:

$$A=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\frac{4x}{4-x}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{4x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x}+4-x+4\sqrt{x}-4+4x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{4x+8\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

Vậy với $x\ge 0;\, x\ne 4$ thì $A=\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ (điều phải chứng minh).

c) Với $x\ge 0;\, x\ne 4,$ ta có: $M=\dfrac{A}{B}=\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-2}{4\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$

Vì $x\ge 0;\, x\ne 4$ nên $\sqrt{x}\ge 0$ và $\sqrt{x}+2>0\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\ge 0\Rightarrow \sqrt{M}$ xác định với $x\ge 0;\, x\ne 4.$

Xét $M-1=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-1=\dfrac{-2}{\sqrt{x}+2}<0,\ \forall x\ge 0;\, x\ne 4.$

Do đó: $M<1\Rightarrow \sqrt{M}<1.$

Xét $M-\sqrt{M}=\sqrt{M}\left(\sqrt{M}-1\right).$

Vì $\sqrt{M}\ge 0;\, \sqrt{M}-1<0$ nên $M-\sqrt{M}\le 0\Leftrightarrow M\le \sqrt{M}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0.$

Vậy $M\le \sqrt{M}.$

Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại $A,$ đường cao $AH\left(H\in BC\right).$

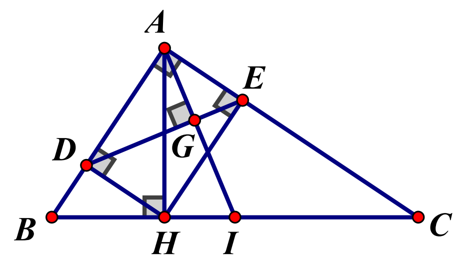
a) Biết $HB=4\,\text{cm},\ HC=9\,\text{cm}.$ Tính AH và số đo $\widehat{ABC}$ (số liệu chỉ dử dụng cho câu a).

b) Gọi D là hình chiếu của H trên $AB,$ E là hình chiếu của H trên $AC.$

Chứng minh: $CE.BD.AC.AB=AH^4.$

c) Kẻ AI vuông góc với ED $\left(I\in BC\right).$ Chứng minh I là trung điểm của $BC.$

Lời giải



a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại $A,$ đường cao $AH,$ ta có: $AH^2=HB.HC=4.9=36$

$\Rightarrow AH=\sqrt{36}=6\ (\text{cm}).$

Xét tam giác ABH vuông tại $H,$ ta có: $\tan\widehat{ABH}=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABH}\approx 56^\circ 19'.$

Vậy $\widehat{ABC}\approx 56^\circ 19'.$

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào các tam giác:

- Tam giác ABH vuông tại H, đường cao HD, ta có: $BH^2 = BD.AB$.
- Tam giác ACH vuông tại H, đường cao HE, ta có: $CH^2 = CE.AC$.
- Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có: $AH^2 = HB.HC$.

Suy ra $CE.BD.AC.AB = BH^2.CH^2 = (BH.CH)^2 = AH^4$ (điều phải chứng minh).

c) Gọi G là giao điểm của AI và DE.

Xét tam giác ADG vuông tại G, có $\widehat{GAD} = 90^\circ - \widehat{ADG}$. (1)

Vì D, E là hình chiếu của H trên AB, AC nên $\widehat{HDA} = \widehat{HEA} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{DAE} = \widehat{HDA} = \widehat{HEA} = 90^\circ$

$\Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AE = DH$ (tính chất)

Xét tam giác ADH và tam giác DAE có:

$\widehat{ADH} = \widehat{DAE} = 90^\circ$; AD chung; $AE = DH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ADH = \Delta DAE\ (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{ADG} = \widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{ABH}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{GAD} = \widehat{ABH} \Rightarrow \Delta ABI$ cân tại $I \Rightarrow IA = IB$.

Chứng minh tương tự, ta được: $IA = IC \Rightarrow IB = IC \Rightarrow I$ là trung điểm BC (điều phải chứng minh).

Bài 5 (0,5 điểm). Cho ba số thực dương $x; y; z$ thay đổi thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{2023xz} + \dfrac{1}{2023yz}$.

Lời giải

Ta có: $P = \dfrac{1}{2023xz} + \dfrac{1}{2023yz} = \dfrac{1}{2023z}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Ta chứng minh bất đẳng thức: Với mọi x, y dương, ta có: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$. (1)

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng với mọi $x; y > 0$).

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Suy ra $P \ge \dfrac{4}{2023z(x+y)} = \dfrac{4}{2023z(1-z)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có: $z + (1-z) \ge 2\sqrt{z(1-z)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{z(1-z)} \le 1 \Leftrightarrow z(1-z) \le \dfrac{1}{4}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $z = 1 - z \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $P \ge \dfrac{4}{2023.\frac{1}{4}} = \dfrac{16}{2023}$.

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{16}{2023}$ khi $x = y = \dfrac{1}{4}; z = \dfrac{1}{2}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS PHƯƠNG MAI

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1,5 điểm). Tính giá trị biểu thức:

a) $4\sqrt{5}-3\sqrt{20}+\sqrt{45}$. b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\frac{6}{\sqrt{3}}-15\sqrt{\frac{1}{3}}+1$.

Lời giải

a) $4\sqrt{5}-3\sqrt{20}+\sqrt{45}=4\sqrt{5}-3.2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{5}-6\sqrt{5}+3\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\frac{6}{\sqrt{3}}-15\sqrt{\frac{1}{3}}+1=\left|\sqrt{3}-1\right|+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+1=\sqrt{3}-1-3\sqrt{3}+1=-2\sqrt{3}$.

Bài 2 (1,5 điểm). Giải phương trình

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{9x-27}-\frac{1}{2}\sqrt{4x-12}=6$ b) $\sqrt{x^2-2x+1}+2=5$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\ge 3$.

Ta có: $\sqrt{x-3}+\sqrt{9x-27}-\frac{1}{2}\sqrt{4x-12}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}+\sqrt{9\left(x-3\right)}-\frac{1}{2}\sqrt{4\left(x-3\right)}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}+3\sqrt{x-3}-\frac{1}{2}.2\sqrt{x-3}=6$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-3}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=2$

$\Leftrightarrow x-3=4$

$\Leftrightarrow x=7$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{7\right\}$.

b) Ta có: $\sqrt{x^2-2x+1}+2=5\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2}=3\Leftrightarrow\left|x-1\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=3\\x-1=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-2;4\right\}$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x>0;\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=64$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Đặt $P=B:A$. So sánh P với 2.

Lời giải

a) Với $x=64$ thoả mãn điều kiện xác định.

Thay $x=64$ vào biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$, ta được: $A=\frac{\sqrt{64}+4}{\sqrt{64}}=\frac{8+4}{8}=\frac{3}{2}$.

Vậy với $x=64$ thì $A=\frac{3}{2}$.

b) Với $x>0;\ x\neq 4,$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x>0;\ x\neq 4.$

c) Với $x>0;\ x\neq 4,$ ta có: $P=B:A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4}.$

Xét $P-2=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4}-2=\dfrac{\sqrt{x}-2-2\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{-\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+4}.$

Với $x>0;\ x\neq 4,$ ta có: $\sqrt{x}>0\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{x}-10<0\\ \sqrt{x}+4>0\end{cases}\Rightarrow P-2=\dfrac{-\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+4}<0\Leftrightarrow P<2.$

Vậy $P<2.$

Bài 4 (4,5 điểm).

1) Tính chiều cao của một cột tháp (làm tròn đến mét), biết rằng lúc tia sáng của mặt trời tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc bằng 51° thì bóng của nó trên mặt đất dài $48\,\text{m}$ (kết quả làm tròn đến mét).

2) Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AB<AC\right)$, đường cao AH $\left(H\in BC\right)$. Vẽ HM vuông góc với AB tại M, HN vuông góc với AC tại N.

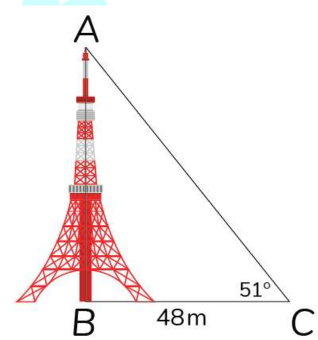
a) Cho biết $AB=6\,\text{cm},\ AC=8\,\text{cm}.$ Tính các độ dài $BC,\ AH$ và số đo các góc $B,\ C.$

b) Chứng minh: $AM.AB=AN.AC.$

c) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt BC tại $D.$ Chứng minh D là trung điểm của $BC.$

Lời giải

1) Gọi A là đỉnh tháp, B là chân tháp, C là bóng của điểm A trên mặt đất khi tia sáng mặt trời chiếu xuống.



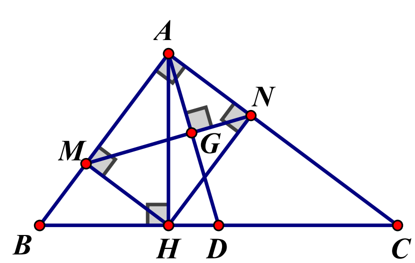
Khi đó AB là chiều cao của tháp, BC là độ dài bóng của tháp và $\widehat{ACB}$ là góc tạo bởi tia sáng mặt trời và phương nằm ngang của mặt đất. Suy ra: $BC=48\,\text{cm},\ \widehat{ACB}=51^\circ.$

Xét tam giác ABC vuông tại $B,$ ta có: $\tan\widehat{ACB}=\dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow\tan 51^\circ=\dfrac{AB}{48}\Rightarrow AB=48.\tan 51^\circ\approx 60\ \left(\text{m}\right).$

Vậy chiều cao của cột tháp là $60\,\text{m}.$

2a) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại $A,$ ta có: $BC^2=AB^2+AC^2=6^2+8^2=100\Rightarrow BC=\sqrt{100}=10\ \left(\text{cm}\right).$



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABC vuông tại $A,$ đường cao $AH,$ ta có: $AB.AC=AH.BC$

$\Rightarrow 6.8=AH.10\Rightarrow AH=\dfrac{48}{10}=4{,}8\ \left(\text{cm}\right).$

Xét tam giác ABC vuông tại $A,$ ta có: $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\widehat{BAC}\approx 53^\circ 8';$

$\sin\widehat{ACB}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\widehat{BAC}\approx 36^\circ 52'.$

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác AHB vuông tại H, đường cao HM, ta có: $AH^2 = AM.AB$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác AHC vuông tại H, đường cao HN, ta có: $AH^2 = AN.AC$.

Suy ra: $AM.AB = AN.AC$ (điều phải chứng minh).

c) Gọi G là giao điểm của AD và MN.

Xét tam giác AMG vuông tại G, có $\widehat{AMG} = 90^\circ - \widehat{GAM}$. $\quad (1)$

Vì M, N là hình chiếu của H trên AB, AC nên $\widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AMHN$ có $\widehat{MAN} = \widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$

$\Rightarrow AMHN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AN = MH$ (tính chất).

Xét tam giác AMH và tam giác MAN có:

$\widehat{AMH} = \widehat{MAN} = 90^\circ$; AM chung; $AN = MH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AMH = \Delta MAN\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMG} = \widehat{MAH} = 90^\circ - \widehat{ABH}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{GAM} = \widehat{ABH} \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại $D \Rightarrow DA = DB$.

Chứng minh tương tự, ta được: $DA = DC \Rightarrow DB = DC \Rightarrow D$ là trung điểm BC (điều phải chứng minh).

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số thực dương a, b thoả mãn $ab > 2021a + 2022b$.

Chứng minh: $a + b > \left(\sqrt{2021} + \sqrt{2022}\right)^2$.

Lời giải

Ta có: $ab > 2021a + 2022b \Leftrightarrow ab - 2021a - 2022b > 0 \Leftrightarrow (a - 2022)(b - 2021) > 2021.2022$.

Ta chứng minh bất đẳng thức: Với mọi số thực x, y, ta có: $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$. $\quad (1)$

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Áp dụng, ta có: $(a - 2022)(b - 2021) \le \dfrac{(a + b - 2021 - 2022)^2}{4}$

$\Rightarrow 2021.2022 < \dfrac{(a + b - 2021 - 2022)^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{2021.2022} < \dfrac{a + b - 2021 - 2022}{2}$

$\Leftrightarrow a + b - 2021 - 2022 > 2\sqrt{2021.2022} \Leftrightarrow a + b > 2021 + \sqrt{2021.2022} + 2022$

$\Leftrightarrow a + b > \left(\sqrt{2021} + \sqrt{2022}\right)^2$ (điều phải chứng minh).

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

Bài 1 (3,0 điểm).

a) Thực hiện phép tính và thu gọn các biểu thức sau:

$A=\left(3\sqrt{18}+\sqrt{6}-2\sqrt{32}\right).\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$

$B=\left(\dfrac{4}{1-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}-\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right).\left(\sqrt{5}-6\right).$

b) Giải phương trình: $\sqrt{9x-45}-14\sqrt{\dfrac{x-5}{49}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{4x-20}=3.$

Lời giải

a) $A=\left(3\sqrt{18}+\sqrt{6}-2\sqrt{32}\right).\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\left(9\sqrt{2}+\sqrt{6}-8\sqrt{2}\right).\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right).\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

$=2+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2.$

$B=\left(\dfrac{4}{1-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}-\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right).\left(\sqrt{5}-6\right)$

$=\left[\dfrac{4\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}+\dfrac{2-\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}-\dfrac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}\right].\left(\sqrt{5}-6\right)$

$=\left[\dfrac{4\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5}+\dfrac{2-\sqrt{5}}{4-5}-\dfrac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}\right].\left(\sqrt{5}-6\right)$

$=\left[-\left(1+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)-\left(3+\sqrt{5}\right)\right].\left(\sqrt{5}-6\right)$

$=\left(-1-\sqrt{5}-2+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-6\right)$

$=\left(-\sqrt{5}-6\right)\left(\sqrt{5}-6\right)=-\left(\sqrt{5}+6\right)\left(\sqrt{5}-6\right)=-\left(5-36\right)=31.$

b) Điều kiện: $x\ge 5.$

Ta có: $\sqrt{9x-45}-14\sqrt{\dfrac{x-5}{49}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{4x-20}=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{9\left(x-5\right)}-14\sqrt{\dfrac{1}{49}\left(x-5\right)}+\dfrac{1}{4}\sqrt{4\left(x-5\right)}=3$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-5}-14\cdot\dfrac{1}{7}\sqrt{x-5}+\dfrac{1}{4}\cdot 2\sqrt{x-5}=3$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-5}-2\sqrt{x-5}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-5}=3$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\sqrt{x-5}=3\Leftrightarrow \sqrt{x-5}=2\Leftrightarrow x-5=4\Leftrightarrow x=9$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{9\right\}.$

Bài 2 (2,5 điểm). Với $x \ge 0;\ x \ne 4,$ cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{x-2\sqrt{x}}{4-x}.$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \dfrac{1}{4}.$

b) Rút gọn biểu thức $B.$

c) Cho $C = \dfrac{B}{A}.$ Tìm các giá trị nguyên của x để $C^2 < \dfrac{1}{4}.$

Lời giải

a) Với $x = \dfrac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện $x \ge 0;\ x \ne 4.$

Thay $x = \dfrac{1}{4}$ vào biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2},$ ta được: $A = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}}+2}{\sqrt{\frac{1}{4}}-2} = \dfrac{\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}-2} = \dfrac{-5}{3}.$

Vậy với $x = \dfrac{1}{4}$ thì $A = \dfrac{-5}{3}.$

b) Với $x \ge 0;\ x \ne 4,$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} + \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} - \frac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

Vậy với $x \ge 0;\ x \ne 4$ thì $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$

c) Với $x \ge 0;\ x \ne 4,$ ta có: $C = \dfrac{B}{A} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$

Với $x \ge 0;\ x \ne 4,$ ta có: $\sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \ge 2 \Rightarrow C = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0.$

Ta có: $C^2 < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow C^2 - \dfrac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \left(C - \dfrac{1}{2}\right)\left(C + \dfrac{1}{2}\right) < 0.$

Mà $C > 0$ nên $C + \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow C - \dfrac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow C < \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} < 0.$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \le x < 4.$

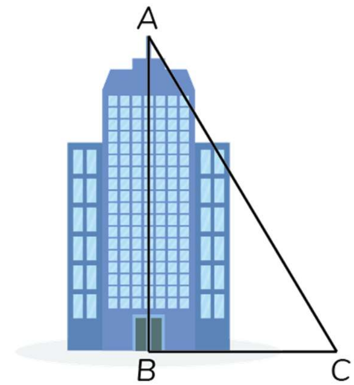
Kết hợp với điều kiện $x \ge 0;\ x \ne 4,$ ta được: $0 \le x < 4.$

Vậy với $0 \le x < 4$ thì $C^2 < \dfrac{1}{4}.$

Bài 3 (1,0 điểm). Một người trình sát đứng cách toà nhà BITEXCO (Thành phố Hồ Chí Minh) khoảng $151\,\text{m}$. Góc nâng từ chỗ người đó đứng đến nóc toà nhà là $\widehat{BCA} = 60^\circ$.

a) Tính chiều cao của toà nhà (kết quả làm tròn đến mét).

b) Biết toà nhà có 68 tầng, hãy tính chiều cao của mỗi tầng trong toà nhà (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

a) Xét tam giác ABC vuông tại B có $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = BC.\tan\widehat{ACB} = 151.\tan 60^\circ = 151\sqrt{3} \approx 262\ (\text{m})$.

Vậy chiều cao của tháp là $262\,\text{m}$.

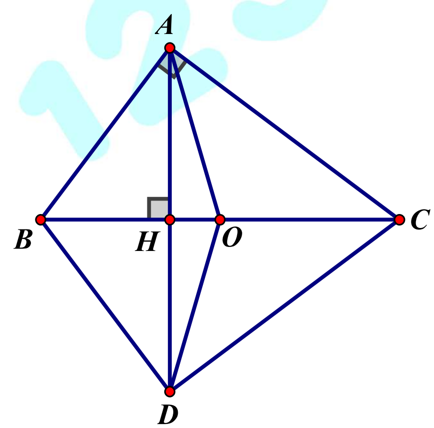
b) Chiều cao của mỗi tầng trong toà nhà là: $\dfrac{151\sqrt{3}}{68} \approx 3{,}85\ (\text{m})$.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $HB = 9\,\text{cm}$, $HC = 16\,\text{cm}$.

a) Tính độ dài AC, AH, AB.

b) Lấy D là điểm đối xứng với A qua H. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O và tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



a) Ta có: $BC = HB + HC = 9 + 16 = 25\ (\text{cm})$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có:

$AH^2 = HB.HC = 9.16 = 144 \Rightarrow AH = \sqrt{144} = 12\ (\text{cm})$.

$AB^2 = BH.BC = 9.25 = 225 \Rightarrow AB = \sqrt{225} = 15\ (\text{cm})$.

$AC^2 = CH.BC = 16.25 = 400 \Rightarrow AB = \sqrt{400} = 20\ (\text{cm})$.

b) Gọi O là trung điểm của BC.

Vì D là điểm đối xứng với A qua H nên BC là trung trực của đoạn thẳng AD.

Mà O thuộc BC nên $OA = OD$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến $AO \Rightarrow OA = OB = OC = \dfrac{1}{2}BC = 12{,}5\ (\text{cm})$.

Suy ra $OA = OB = OC = OD \Rightarrow 4$ điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm O là trung điểm BC và bán kính bằng $12{,}5\,\text{cm}$.

Bài 5 (0,5 điểm). Giải phương trình: $x^2-1=2\sqrt{2x+1}$.

Lời giải

Điều kiện: $2x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2-1=2\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x^2+2x+1=2x+1+2\sqrt{2x+1}+1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=\sqrt{2x+1}+1 \\ x+1=-\sqrt{2x+1}-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2x+1} \\ -x-2=\sqrt{2x+1} \end{array}\right..$$

Trường hợp 1: $x=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ (x-1)^2=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}.$

Trường hợp 2: $-x-2=\sqrt{2x+1}\Rightarrow -x-2\ge 0\Leftrightarrow x\le -2$ (vô lí vì $x\ge -\dfrac{1}{2}$).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGUYỄN CÔNG TRỨ

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I
Năm học: 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 90 phút
(*Không kể thời gian giao đề*)

Bài 1 (1,5 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=5\sqrt{27}-3\sqrt{3}+2\sqrt{48}$.

b) $B=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$.

c) $C=2\sin 30^\circ \sin^2 28^\circ+2\sin^2 62^\circ \cos 60^\circ-\dfrac{\tan 13^\circ}{\cot 77^\circ}$.

Lời giải

a) $A=5\sqrt{27}-3\sqrt{3}+2\sqrt{48}=15\sqrt{3}-3\sqrt{3}+8\sqrt{3}=20\sqrt{3}$.

b) $B=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}+\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-3\right)}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4-3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

c) $C=2\sin 30^\circ \sin^2 28^\circ+2\sin^2 62^\circ \cos 60^\circ-\dfrac{\tan 13^\circ}{\cot 77^\circ}$

$=2\cos 60^\circ \cos^2 62^\circ+2\sin^2 62^\circ \cos 60^\circ-\dfrac{\tan 13^\circ}{\tan 77^\circ}$

$=2\cos 60^\circ\left(\cos^2 62^\circ+\sin^2 62^\circ\right)-1$

$=2.\dfrac{1}{2}.1-1=0$.

Bài 2 (2,0 điểm). Giải các phương trình sau

a) $3\sqrt{x+4}-\sqrt{4x+16}=15-\sqrt{16x+64}$.

b) $\sqrt{x^2-2x+5}=x+3$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\geq -4$.

Ta có: $3\sqrt{x+4}-\sqrt{4x+16}=15-\sqrt{16x+64}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}-\sqrt{4\left(x+4\right)}=15-\sqrt{16\left(x+4\right)}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+4}=15-4\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+4}+4\sqrt{x+4}=15$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x+4}=15 \Leftrightarrow \sqrt{x+4}=3 \Leftrightarrow x+4=9 \Leftrightarrow x=5$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{5\}$.

b) Ta có: $\sqrt{x^2-2x+5}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\geq 0 \\ x^2-2x+5=\left(x+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x^2-2x+5=x^2+6x+9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ 8x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài 3 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4;\ x\ne 9$.

a) Tính giá trị của A khi $x=25$.

b) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{A}{B}$.

c) Tìm số tự nhiên x để $P<0$.

Lời giải

a) Với $x=25.$ thoả mãn điều kiện $x\ge 0;\ x\ne 4;\ x\ne 9$.

Thay $x=25.$ vào biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, ta có: $A=\dfrac{1}{\sqrt{25}+1}=\dfrac{1}{5+1}=\dfrac{1}{6}$

Vậy với $x=25.$ thì $A=\dfrac{1}{6}$.

b) Với $x\ge 0;\ x\ne 4;\ x\ne 9$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x-9-\left(x-4\right)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$P=\frac{A}{B}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

c) Với $x\ge 0;\ x\ne 4;\ x\ne 9$ ta có: $\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+1>0$

Để $P<0\Rightarrow \sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

Vậy với $0\le x<4$ thì $P<0$.

Bài 4 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AB<AC\right)$, đường cao AH.

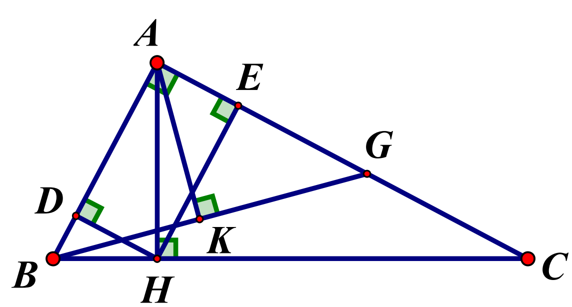
a) Giả sử $AB=5\,\text{cm}$, $AC=12\,\text{cm}$. Tính độ dài BC, AH và số đo $\widehat{ABC}$ (làm tròn đến phút).

b) Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng: $AD.AB=AE.AC$.

c) Lấy điểm G nằm giữa E và C. Kẻ AK vuông góc với BG tại K.

Chứng minh rằng: $\sin\widehat{AGB}.\cos\widehat{ABC}=\dfrac{HK}{CG}$.

Lời giải



a) Xét ΔABC vuông tại A:

$BC^2=AB^2+AC^2$ (định lý Pitago)

$\Rightarrow BC^2=5^2+12^2=25+144=169\Rightarrow BC=13\ \left(cm\right)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào ΔABC vuông tại A, đường cao AH:

$AH.BC=AB.AC\Rightarrow AH.13=5.12\Leftrightarrow AH=\dfrac{60}{13}\ \left(cm\right)$

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào các tam giác:

- ΔAHB vuông tại H, đường cao HD: $AH^2 = AD.AB\ (1)$
- ΔAHC vuông tại H, đường cao HE: $AH^2 = AE.AC\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AD.AB = AE.AC$ (điều phải chứng minh).

c) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào các tam giác:

- ΔABG vuông tại A, đường cao AK: $AB^2 = BK.BG$ (1)
- ΔABC vuông tại A, đường cao AH: $AB^2 = BH.BC$ (2)

Từ (1) Và (2) suy ra: $BK.BG = BH.BC \Leftrightarrow \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BH}{BG}$

Xét ΔBHK và ΔBCG có: $\hat{B}$ chung; $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BH}{BG}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta BCG\ (c.g.c) \Rightarrow \dfrac{HK}{CG} = \dfrac{BK}{BG}$ (3)

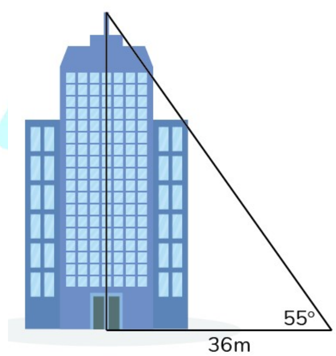
HS tự chứng minh $\Delta ABG \backsim \Delta KBA\ (g.g) \Rightarrow \widehat{AGB} = \widehat{KAB}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AGB} = \sin\widehat{KAB} = \dfrac{BK}{AB}$; $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AGB}.\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BK}{AB}.\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BK}{BC}\ (4)$

Từ (3) và (4) suy ra ĐPCM.

Bài 5 (1,0 điểm). Tại một thời điểm trong ngày, tia nắng mặt trời hợp với mặt đất một góc bằng 55°. Một toà nhà đổ bóng xuống mặt đường một đoạn có độ dài $36m$. Tìm chiều cao của toà nhà (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Gọi chiều cao của tòa nhà đó là h (đơn vị: m)

Theo hình vẽ ta có: $\tan 55^\circ = \dfrac{h}{36} \Rightarrow h = 36.\tan 55^\circ \approx 51,41\ (m)$

Vậy chiều cao của tòa nhà đó là $51,41\ m$.

Bài 6 (0,5 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x^2+4x+1}=(8-2x)\sqrt{x+1}$.

Lời giải

Điều kiện $x\ge -1$

Ta có: $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x^2+4x+1}=(8-2x)\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x^2+4x+1}=(8-2x)\sqrt{x+1}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x-1)}-\sqrt{(x+1)(3x+1)}-(8-2x)\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+1}+2x-8\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{3x+1}+2x-8=0\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\ (TM)$

Trường hợp 2: $\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+1}+2x-8=0$ (ĐK: $x\ge 1$)

$\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+1}+2x-8=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+(2x-10)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}-\dfrac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+2(x-5)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}-4}+2\right)=0$

Với $x\ge 1$ ta có $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}-4}+2>0$

$\Rightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5\ (TM)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;5\}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS TRƯNG VƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài I (2,0 điểm).

1) Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{2}{5}\sqrt{75}+\sqrt{12}-\frac{4}{3}\sqrt{27}.$

2) Tìm x thoả mãn $5x-3\sqrt{x}-2=0.$

Lời giải

1) $A=\frac{2}{5}\sqrt{75}+\sqrt{12}-\frac{4}{3}\sqrt{27}=\frac{2}{5}\cdot 5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}=0.$

2) Điều kiện: $x\ge 0.$

Đặt $\sqrt{x}=t\ (t\ge 0)$, ta được: $5t^2-3t-2=0\Leftrightarrow 5t^2-5t+2t-2=0$

$$\Leftrightarrow 5t(t-1)+2(t-1)=0\Leftrightarrow (t-1)(5t+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 5t+2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{2}{5} \end{array}\right..$$

Vì $t\ge 0$ nên $t=1$ thoả mãn.

Suy ra $\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1.$

Vậy $x=1.$

Bài II (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $P=\frac{x+1}{\sqrt{x}+3}$ và $Q=\frac{6-8\sqrt{x}}{x-9}+\frac{2}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\ne 9.$

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=4.$

2) Chứng minh $Q=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.$

3) Tìm x để $P\le 2Q.$

Lời giải

1) Với $x=4$ (thoả mãn điều kiện xác định).

Thay $x=4$ vào biểu thức $P=\frac{x+1}{\sqrt{x}+3}$, ta được: $P=\frac{4+1}{\sqrt{4}+3}=\frac{5}{2+3}=1.$

Vậy với $x=4$ thì $P=1.$

2) Với $x>0,\ x\ne 9,$ ta có:

$$Q=\frac{6-8\sqrt{x}}{x-9}+\frac{2}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=\frac{6-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}+\frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{6-8\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6+x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.$$

Vậy với $x>0,\ x\ne 9$ thì $Q=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ (điều phải chứng minh).

3) Để $P \le 2Q$ thì $\frac{x+1}{\sqrt{x}+3} \le \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}+3} \le 0.$

Vì $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \ge 0;\ \sqrt{x}+3>0$ với mọi $x>0,\ x \ne 9$ nên để $\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}+3} \le 0$ thì $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy với $x=1$ thì $P \le 2Q.$

Bài III (2,0 điểm). Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy,$ cho đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3$ với $m \ne 3.$

1) Trong trường hợp $m=3$:

a) Vẽ đường thẳng (d) trên mặt phẳng toạ độ $Oxy.$

b) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng $(d).$

2) Tìm m để đường thẳng (d) tạo với hai trục Ox và Oy một tam giác vuông cân.

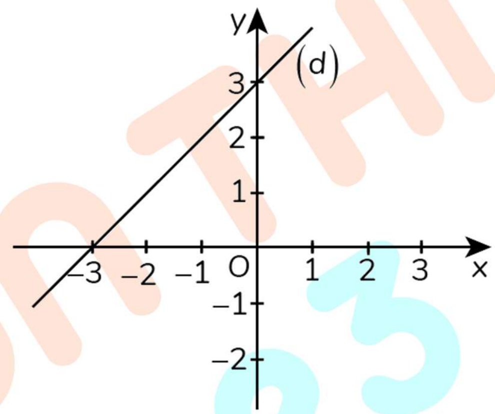
Lời giải

1a) Với $m=3,$ ta có: $(d): y=x+3.$

Ta có bảng:

x	0	-3
y	3	0

Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm $(-3;0)$ và cắt trục Oy tại điểm $(0;3)$. Đồ thị hàm số như hình vẽ.



b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d) với Ox và $Oy.$

Khi đó: $A(-3;0)$ và $B(0;3)$. Ta có: $OA=|x_A|=|-3|=3;\ OB=|y_B|=|3|=3.$

Kẻ $OH \perp (d)$ tại $H \Rightarrow$ Khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) bằng $OH.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác OAB vuông tại $O,$ đường cao $OH,$ ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{2}{9} \Rightarrow OH^2=\frac{9}{2} \Rightarrow OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Vậy khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

2) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d) với Ox và $Oy.$

Khi đó: $M\left(\frac{-3}{m-2};0\right)$ và $N(0;3).$

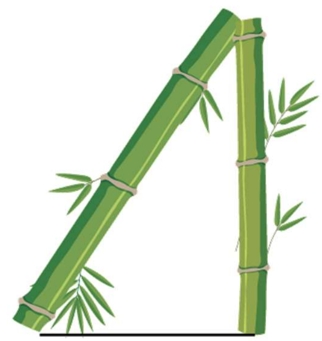
Ta có: $OM=|x_M|=\left|\frac{-3}{m-2}\right|=\frac{3}{|m-2|};\ ON=|y_N|=|3|=3.$

Để tam giác OMN là tam giác vuông cân thì $OM=ON \Leftrightarrow \frac{3}{|m-2|}=3 \Leftrightarrow |m-2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right..$

Vậy với $m \in \{1;3\}$ thì đường thẳng (d) tạo với hai trục Ox và Oy một tam giác vuông cân.

Bài IV (3,5 điểm).

1) Một cây tre thẳng đứng bị gãy gập trong một cơn bão. Ngọn cây vừa chạm đất và cách gốc cây $4,5\text{m}$. Phần bị gãy tạo với phương thẳng đứng một góc $35°$. Hỏi điểm gãy cách gốc cây bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



2) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ và AH là đường cao. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AH. Từ B kẻ tiếp tuyến BE đến đường tròn (A) với E là tiếp điểm và E không nằm trên BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, B, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $HK \perp AC$ tại K và đường thẳng HK cắt đường tròn (A) tại điểm F khác H. Chứng minh CF là tiếp tuyến của đường tròn (A) và ba điểm E, A, F thẳng hàng.

c) Nối CE cắt đường tròn (A) tại điểm I khác E. Chứng minh: $\widehat{IKC} = \widehat{AEC}$.

Lời giải

1) Gọi A là vị trí gốc cây, B là ngọn cây chỗ chạm đất, C là thân cây chỗ bị gãy.

Do ngọn cây vừa chạm đất và cách gốc cây $4,5\text{m}$ nên $AB = 4,5\text{m}$.

Do phần bị gãy tạo với phương thẳng đứng một góc $35°$ nên $\widehat{ACB} = 35°$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có:

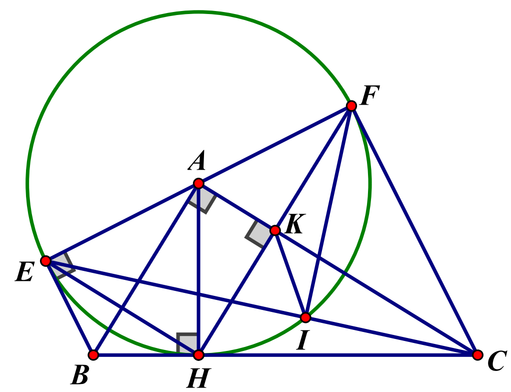
$$\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \tan 35° = \frac{4,5}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{4,5}{\tan 35°} \approx 6,43\,(\text{m}).$$

Vậy điểm gãy cách gốc cây xấp xỉ $6,43\text{m}$.

2a) Vì $AH \perp BC$ nên ΔABH vuông tại H

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính AB.



Vì BE là tiếp tuyến của (A) nên $\widehat{AEB} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AEB$ vuông tại E

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AB.

Suy ra bốn điểm A, E, B, H cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

b) Xét tam giác AHF có $AH = AF$ (do H, F cùng thuộc đường tròn tâm A)

$\Rightarrow \Delta AHF$ cân tại A.

Mà $AK \perp HF$ (giả thiết) nên AK là tia phân giác của $\widehat{HAF} \Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{FAC}$.

Xét tam giác AHC và tam giác AFC có: AC là cạnh chung; $\widehat{HAC} = \widehat{FAC}$; $AH = AF$

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta AFC\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{AHC} = 90°$

$\Rightarrow AF \perp FC \Rightarrow CF$ là tiếp tuyến của đường tròn (A) (điều phải chứng minh).

Xét tam giác HAC vuông tại H có: $\widehat{HAC}=90^\circ-\widehat{ACH}$.

Mà $\widehat{HAC}=\widehat{FAC}$ nên $\widehat{HAF}=2\widehat{HAC}=2\left(90^\circ-\widehat{ACH}\right)$.

Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{HAE}=2\left(90^\circ-\widehat{ABH}\right)$.

Suy ra $\widehat{HAF}+\widehat{HAE}=360^\circ-2\left(\widehat{ACH}+\widehat{ABH}\right)=360^\circ-2.90^\circ=360^\circ-180^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow E,\ A,\ F$ là ba điểm thẳng hàng.

c) Theo chứng minh câu b, ta có ba điểm $E,\ A,\ F$ thẳng hàng

$\Rightarrow EF$ là đường kính của đường tròn $(A)\Rightarrow\widehat{EIF}=90^\circ\Rightarrow FI\perp EC$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào các tam giác:

- Tam giác EFC vuông tại F, đường cao FI, ta có: $CF^2=CI.CE$.
- Tam giác AFC vuông tại F, đường cao FK, ta có: $CF^2=CK.CA$.

Suy ra $CI.CE=CK.CA\Rightarrow\dfrac{CI}{CA}=\dfrac{CK}{CE}$.

Xét ΔCIK và ΔCAE có: $\widehat{ACE}$ chung; $\dfrac{CI}{CA}=\dfrac{CK}{CE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow\Delta CIK\backsim\Delta CAE\ (\text{c.g.c})\Rightarrow\widehat{IKC}=\widehat{AEC}$.

Bài V (0,5 điểm). Cho $a,\ b,\ c,\ d\ge 0$ và $a+b+c+d=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=ab+bc+cd$.

Lời giải

Giả sử a là số lớn nhất trong 4 số $a,\ b,\ c,\ d$.

Ta có: $T=ab+bc+cd\le ab+ac+ad=a(b+c+d)\le\left(\dfrac{a+b+c+d}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Trường hợp $b;\ c;\ d$ là các số lớn nhất ta chứng minh tương tự.

Vậy GTLN của T là $\dfrac{1}{4}$ khi chẳng hạng $a=b=\dfrac{1}{2};\ c=d=0$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

TRƯỜNG THCS HUỲNH THÚC KHÁNG

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (3,0 ĐIỂM)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	B	C	D	D	B	A	A	D	A	B	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (7,0 ĐIỂM)

Bài 1 (1,5 điểm). Rút gọn

a) $5\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{80}$.

b) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}+3\sqrt{\dfrac{16}{3}}$.

Lời giải

a) $5\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{80}=10\sqrt{5}-3\sqrt{5}+12\sqrt{5}=19\sqrt{5}$.

b) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}+3\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\left|2-\sqrt{3}\right|+\sqrt{3}+\sqrt{48}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2+4\sqrt{3}$.

Bài 2 (1,5 điểm). Tìm x, biết

a) $\sqrt{x-2}=5$.

b) $\sqrt{25x+25}-2\sqrt{16x+16}+7\sqrt{x+1}=15$.

Lời giải

a) Điều kiện $x\ge 2$

Ta có: $\sqrt{x-2}=5\Leftrightarrow x-2=25\Leftrightarrow x=27\ (TM)$

Vậy $x=27$.

b) Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có: $\sqrt{25x+25}-2\sqrt{16x+16}+7\sqrt{x+1}=15$

$\Leftrightarrow \sqrt{25(x+1)}-2\sqrt{16(x+1)}+7\sqrt{x+1}=15$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x+1}-8\sqrt{x+1}+7\sqrt{x+1}=15$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}=15\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\dfrac{15}{4}\Leftrightarrow x+1=\dfrac{225}{16}\Leftrightarrow x=\dfrac{209}{16}$ (thoả mãn).

Vậy $x=\dfrac{209}{16}$.

Bài 3 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{1}{x-1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị của x để $P>8$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x-P$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1,$ ta có:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} : \frac{1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} = 2\sqrt{x}.$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $P = 2\sqrt{x}$.

b) Ta có: $P > 8 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 8 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16.$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1,$ ta được: $x > 16.$

Vậy với $x > 16$ thì $P > 8.$

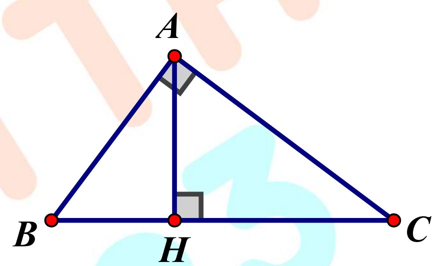
c) Với $x \geq 0, x \neq 1,$ ta có: $A = x - P = x - 2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}-1\right)^2 - 1 \geq -1.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (KTM).

Vậy A không có giá trị nhỏ nhất với $x \geq 0, x \neq 1$

Bài 4 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 8\,\text{cm}$ và đường cao AH. Tính AH, HC.

Lời giải



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{25}{576}$$

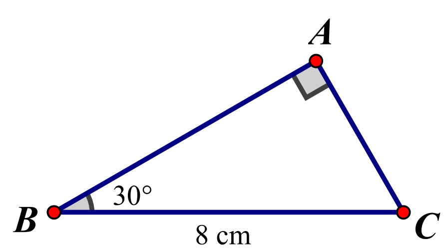
$$\Rightarrow AH^2 = \frac{576}{25} \Rightarrow AH = 4{,}8\,(\text{cm}).$$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác AHC vuông tại H, ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 8^2 - 4{,}8^2 = 40{,}96 \Rightarrow HC = 6{,}4\,(\text{cm}).$$

Bài 5 (1,0 điểm). Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $BC = 8\,\text{cm}$ và $\hat{B} = 30°$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90° - \hat{B} = 90° - 30° = 60°.$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$

$$\Rightarrow AC = BC.\sin\hat{B} = 8.\sin 30° = 8.\frac{1}{2} = 4\,(\text{cm}).$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$

$$\Rightarrow AB = BC.\cos\hat{B} = 8.\cos 30° = 8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

Bài 6 (1,0 điểm). Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Tính $A = \frac{5\cos\alpha}{2\tan\alpha - \cot\alpha}$.

Lời giải

Ta có: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ và $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Thay vào biểu thức A, ta có:

$$A = \frac{5\cos\alpha}{2\tan\alpha - \cot\alpha} = \frac{5\cos\alpha}{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{5\cos\alpha}{\frac{2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{5\sin\alpha\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}.$$

Lại có: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Suy ra $A = \frac{5\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{25}}{2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25}} = 24$.

Vậy $A = 24$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS TRẦN ĐĂNG NINH

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1,5 điểm). Tính

a) $2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+2\sqrt{125}$.

b) $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) $2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+2\sqrt{125}=2.2\sqrt{5}-3.3\sqrt{5}+2.5\sqrt{5}=4\sqrt{5}-9\sqrt{5}+10\sqrt{5}=5\sqrt{5}$.

b) $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\sqrt{5}-\left|\sqrt{5}+1\right|=\sqrt{5}-\sqrt{5}-1=-1$.

Bài 2 (2,0 điểm). Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2+6x+9}=3$.

b) $3\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+4\sqrt{\dfrac{9x-8}{4}}=14$.

c) $3\sqrt[3]{x-2}=-6$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2+6x+9}=3\Leftrightarrow\sqrt{(x+3)^2}=3\Leftrightarrow|x+3|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=3\\x+3=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-6\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-6;0\}$.

b) Điều kiện: $x\ge 2$.

Ta có: $3\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+4\sqrt{\dfrac{9x-18}{4}}=14$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}-\sqrt{4(x-2)}+4\sqrt{\dfrac{9}{4}(x-2)}=14$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{x-2}+4\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{x-2}=14$

$\Leftrightarrow 7\sqrt{x-2}=14\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=2\Leftrightarrow x-2=4\Leftrightarrow x=6\ (TM)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{6\}$.

c) Ta có: $3\sqrt[3]{x-2}=-6\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-2}=-2\Leftrightarrow x-2=-8\Leftrightarrow x=-6$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-6\}$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{7\sqrt{x}-13}{x-2\sqrt{x}-3}$ với $x\ge 0$, $x\ne 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.

b) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$.

c) Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm tất cả các số tự nhiên x để $P\le 1$.

Lời giải

a) Với $x=36$ thoả mãn điều kiện xác định.

Thay $x=36$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, ta được: $A=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}+1}=\dfrac{6}{6+1}=\dfrac{6}{7}$.

Vậy với $x=36$ thì $A=\dfrac{6}{7}$.

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 9,$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{\sqrt{x}-3}-\frac{7\sqrt{x}-13}{x-2\sqrt{x}-3}=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{7\sqrt{x}-13}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x-9+2\sqrt{x}+2-7\sqrt{x}+13}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x-5\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x\ge 0,\ x\ne 9$ thì $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (điều phải chứng minh).

c) Với $x\ge 0,\ x\ne 9,$ ta có: $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}:\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

Để $P\le 1$ thì $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\le 1\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-1\le 0\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\le x<4$.

Kết hợp với $x\ge 0,\ x\ne 9$ và x là số tự nhiên, ta được $x\in\left\{0;1;2;3\right\}$.

Vậy với $x\in\left\{0;1;2;3\right\}$ thì $P\le 1$.

Bài 4 (4,0 điểm).

1) Một toà nhà có chiều cao $h\ (\text{m})$. Khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 55° thì bóng của toà nhà trên mặt đất dài 15m. Tính chiều cao h của toà nhà (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

2) Cho tam giác MNP vuông tại $M,$ đường cao $MI\ \left(I\in NP\right)$.

a) Biết $MN=12\text{cm},\ NP=20\text{cm}$. Tính $MP,\ MI$ và $\widehat{MNP}$ (làm tròn đến độ).

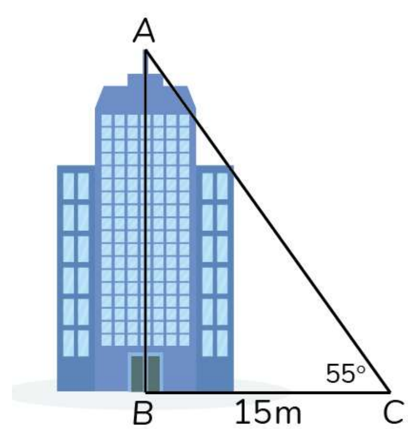
b) Kẻ IE vuông góc với MN tại $E,$ IF vuông góc với MP tại F.

Chứng minh: $MI=EF$ và $ME.EN+MF.FP=MI^2$.

c) Chứng minh: $\tan^3 P=\dfrac{NE}{PF}$.

Lời giải

1) Gọi A là đỉnh toà nhà, B là chân toà nhà, C là bóng của đỉnh toà nhà khi ánh mặt trời chiếu xuống.

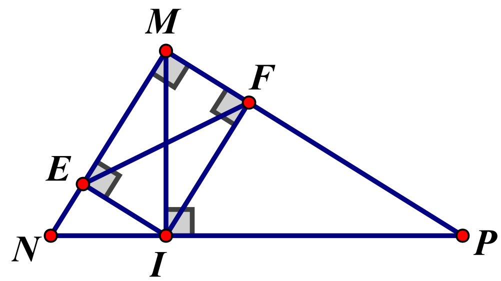


Khi đó, ta có: $AB=h,\ BC=15\text{m},\ \widehat{ACB}=55^\circ$.

Xét tam giác ABC vuông tại $B,$ ta có: $\tan\widehat{ACB}=\dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow h=AB=BC.\tan\widehat{ACB}=15.\tan 55^\circ\approx 21,42\ (\text{m})$.

Vậy chiều cao của toà nhà là $h=21,42\text{m}$.



2a) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác MNP vuông tại M, ta có: $NP^2 = MN^2 + MP^2$

$\Rightarrow MP^2 = NP^2 - MN^2 = 20^2 - 12^2 = 256$

$\Rightarrow MP = \sqrt{256} = 16\,(\text{cm})$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác MNP vuông tại M, đường cao MI, ta có: $\dfrac{1}{MI^2} = \dfrac{1}{MN^2} + \dfrac{1}{MP^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{MI^2} = \dfrac{1}{12^2} + \dfrac{1}{16^2} = \dfrac{25}{2304} \Rightarrow MI = \sqrt{\dfrac{2304}{25}} = 9{,}6\,(\text{cm})$.

Xét tam giác MNP vuông tại M, có: $\tan\widehat{MNP} = \dfrac{MP}{NP} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \widehat{MNP} \approx 39°$.

b) Vì $IE \perp MN$ nên $\widehat{IEM} = 90°$.

Vì $IF \perp MP$ nên $\widehat{IFM} = 90°$.

Vì tam giác MNP vuông tại M nên $\widehat{EMF} = 90°$.

Xét tứ giác $MEIF$ có: $\widehat{IEM} = \widehat{IFM} = \widehat{EMF} = 90°$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MEIF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow MI = EF$ (tính chất).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào các tam giác:

- Tam giác MIN vuông tại I, đường cao IE, ta có: $ME.EN = IE^2$.
- Tam giác MIP vuông tại I, đường cao IF, ta có: $MF.FP = IF^2$.

Suy ra $ME.EN + MF.FP = IE^2 + IF^2$.

Lại có $MEIF$ là hình chữ nhật (chứng minh trên) nên $\widehat{EIF} = 90° \Rightarrow \Delta EIF$ vuông tại I.

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác IEF vuông tại I, ta có: $IE^2 + IF^2 = EF^2$.

Mà $EF = MI$ (chứng minh trên) nên $ME.EN + MF.FP = EF^2 = MI^2$ (điều phải chứng minh).

c) Xét tam giác IPF vuông tại F có $\tan P = \dfrac{IF}{FP}$.

Ta có: $\widehat{IME} = \hat{P}$ (cùng phụ với $\widehat{IMP}$).

Xét tam giác IME vuông tại E có $\tan\widehat{IME} = \dfrac{IE}{ME} \Rightarrow \tan P = \dfrac{IE}{ME}$.

Ta có: $\widehat{EIN} = \hat{P}$ (cùng phụ với $\hat{N}$).

Xét tam giác INE vuông tại E có $\tan\widehat{EIN} = \dfrac{NE}{EI} \Rightarrow \tan P = \dfrac{NE}{EI}$.

Suy ra $\tan^3 P = \dfrac{IF.IE.NE}{FP.ME.EI} = \dfrac{IF.NE}{FP.ME}$.

Mà $IF = ME$ (do $MEIF$ là hình chữ nhật) nên $\tan^3 P = \dfrac{NE}{PF}$ (điều phải chứng minh).

Bài 5 (0,5 điểm). Giải phương trình: $4x^2-5x-4\sqrt{x-1}-2=0$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$.

Ta có: $4x^2-5x-4\sqrt{x-1}-2=0\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x-1+4\sqrt{x-1}+4$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=\sqrt{x-1}+2\\2x-1=-\sqrt{x-1}-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=\sqrt{x-1}\\-2x-1=\sqrt{x-1}\end{array}\right..$$

Trường hợp 1: $2x-3=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\4x^2-12x+9=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\ (TM)\\x=\dfrac{5}{4}\ (KTM)\end{array}\right.$

Trường hợp 2: $-2x-1=\sqrt{x-1}$ (vô nghiệm do $x\ge 1$ thì $VT<0$).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGỌC LÂM

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 ĐIỂM)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	A	D	A	A	B	B	D

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 ĐIỂM)

Bài 1 (1,0 điểm). Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{45}-7\sqrt{125}+16\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

b) $\dfrac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}+\dfrac{3}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{6\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) $3\sqrt{45}-7\sqrt{125}+16\sqrt{9-4\sqrt{5}}=3.3\sqrt{5}-7.5\sqrt{5}+16.\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=9\sqrt{5}-35\sqrt{5}+16\left|\sqrt{5}-2\right|$

$=-26\sqrt{5}+16\left(\sqrt{5}-2\right)=-26\sqrt{5}+16\sqrt{5}-32=-10\sqrt{5}-32.$

b) $\dfrac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}+\dfrac{3}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{6\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}=\dfrac{7\left(\sqrt{12}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{12}+\sqrt{5}\right)}+\dfrac{3\left(2+\sqrt{5}\right)}{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}+\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{7\left(\sqrt{12}+\sqrt{5}\right)}{12-5}+\dfrac{3\left(2+\sqrt{5}\right)}{4-5}+6+2\sqrt{5}=\sqrt{12}+\sqrt{5}-3\left(2+\sqrt{5}\right)+6+2\sqrt{5}$

$=2\sqrt{3}+\sqrt{5}-6-3\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}=2\sqrt{3}.$

Bài 2 (1,0 điểm). Tìm x biết

a) $2\sqrt{9x^2+6x+1}=14.$

b) $\sqrt{16x+48}-7\sqrt{x+3}+\dfrac{3}{4}\sqrt{4x+12}=-6.$

Lời giải

a) $2\sqrt{9x^2+6x+1}=14\Leftrightarrow\sqrt{(3x+1)^2}=7\Leftrightarrow|3x+1|=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+1=7\\3x+1=-7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{8}{3}\end{array}\right..$

Vậy $x\in\left\{-\dfrac{8}{3};2\right\}$.

b) Điều kiện: $x\geq -3$.

Ta có: $\sqrt{16x+48}-7\sqrt{x+3}+\dfrac{3}{4}\sqrt{4x+12}=-6$

$\Leftrightarrow\sqrt{16(x+3)}-7\sqrt{x+3}+\dfrac{3}{4}\sqrt{4(x+3)}=-6$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+3}-7\sqrt{x+3}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x+3}=-6$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\sqrt{x+3}=-6\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=4\Leftrightarrow x+3=16\Leftrightarrow x=13$ (thoả mãn).

Vậy $x=13$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-9}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 9$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để hiệu $A-B$ đạt giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x=16$ thoả mãn điều kiện xác định.

Thay $x=16$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$, ta được: $A=\dfrac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}-3}=\dfrac{4+1}{4-3}=5.$

Vậy với $x=16$ thì $A=5$.

b) Với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 9,$ ta có

$$B=\left(\frac{2}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-5}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=\left[\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-6-\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-3}.$$

Vậy với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 9$ thì $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$.

c) Đặt $P=A-B$.

Với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 9,$ đặt $P=A-B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}=1+\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}.$

Để $P\in\mathbb{Z}$ thì $\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-3\in\left\{-3;-1;1;3\right\}$

$\Rightarrow\sqrt{x}\in\left\{0;2;4;6\right\}\Rightarrow x\in\left\{0;4;16;36\right\}.$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được $x\in\left\{0;4;16;36\right\}$.

Vậy với $x\in\left\{0;4;16;36\right\}$ thì $A-B$ là số nguyên.

Bài 4 (1,0 điểm). Một cầu trượt trong công viên có độ cao là $2,1\text{m}$ được đặt nghiêng so với mặt đất một góc 28°. Tính độ dài của mặt cầu trượt.

Lời giải

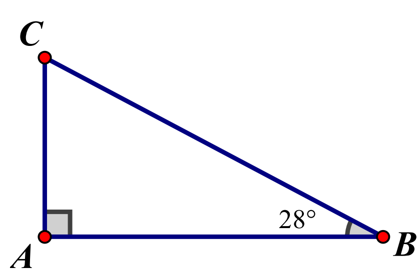
Gọi AC là chiều cao của cầu trượt, BC là độ dài của mặt cầu trượt (như hình vẽ).

Khi đó $\widehat{ABC}=28^\circ$.

Xét tam giác ABC vuông tại $A,$ ta có: $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}$

$\Rightarrow BC=\dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}}=\dfrac{2,1}{\sin 28^\circ}\approx 4,47\ (\text{m}).$

Vậy độ dài mặt cầu trượt là $4,47\text{m}$.



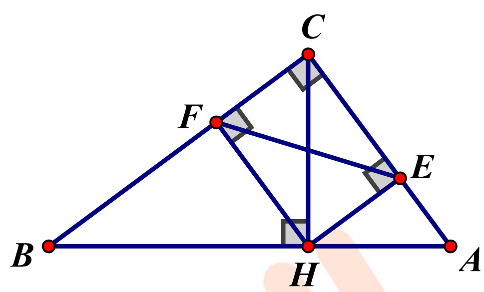
Bài 5 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại C có độ dài cạnh AC và BC lần lượt là 15cm và 20cm. Vẽ đường cao CH, kẻ HE vuông góc với AC tại E; HF vuông góc với BC tại F.

a) Tính số đo góc A, độ dài AB và EF.

b) Chứng minh rằng: $AC.EC = BC.FC$.

c) Chứng minh rằng: $\dfrac{S_{CBA}}{S_{CEF}} = \dfrac{1}{\sin^2 \widehat{CAB}} + \dfrac{1}{\cos^2 \widehat{HCB}}$.

Lời giải



a) Xét tam giác ABC vuông tại C có $\tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 53°8'$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại C, ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$

$\Rightarrow AB = \sqrt{625} = 25\,(\text{cm})$.

Xét tứ giác $CEHF$ có $\widehat{HEC} = \widehat{HFC} = \widehat{ECF} = 90°$

$\Rightarrow CEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow EF = CH$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABC vuông tại C, đường cao CH, ta có: $AB.CH = BC.AC \Rightarrow CH = \dfrac{BC.AC}{AB} = \dfrac{20.15}{25} = 12\,(\text{cm})$.

Suy ra $EF = 12\,\text{cm}$.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào

- Tam giác BCH vuông tại H, đường cao HF, ta có: $CH^2 = BC.FC$.

- Tam giác ACH vuông tại H, đường cao HE, ta có: $CH^2 = AC.EC$.

Suy ra $AC.EC = BC.FC$.

c) Ta có: $\widehat{CAB} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ACH}$)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \widehat{CAB}} + \frac{1}{\cos^2 \widehat{HCB}} = \frac{1}{\sin^2 \widehat{CAB}} + \frac{1}{\cos^2 \widehat{CAB}} = \frac{\sin^2 \widehat{CAB} + \cos^2 \widehat{CAB}}{\sin^2 \widehat{CAB} \cos^2 \widehat{CAB}} = \left(\frac{1}{\sin \widehat{CAB} \cos \widehat{CAB}}\right)^2.$$

Xét tam giác ABC vuông tại C, ta có: $\sin \widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos \widehat{CAB} = \dfrac{AC}{AB}$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sin^2 \widehat{CAB}} + \dfrac{1}{\cos^2 \widehat{HCB}} = \left(\dfrac{1}{\dfrac{BC}{AB} \cdot \dfrac{AC}{AB}}\right)^2 = \left(\dfrac{AB^2}{BC.AC}\right)^2$.

Lại có: $BC.AC = AB.CH$ (chứng minh câu a)

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin^2 \widehat{CAB}} + \dfrac{1}{\cos^2 \widehat{HCB}} = \left(\dfrac{AB^2}{AB.CH}\right)^2 = \left(\dfrac{AB}{CH}\right)^2 = \left(\dfrac{AB}{EF}\right)^2$ (do $EF = CH$ chứng minh câu a). (1)

Theo chứng minh câu b, ta có: $AC.EC = BC.FC \Rightarrow \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{FC}{AC}$.

Xét tam giác ABC và tam giác FEC có: $\widehat{ACB}$ chung; $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{FC}{AC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta FEC\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \dfrac{S_{CBA}}{S_{CEF}} = \left(\dfrac{AB}{EF}\right)^2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{S_{CBA}}{S_{CEF}} = \dfrac{1}{\sin^2 \widehat{CAB}} + \dfrac{1}{\cos^2 \widehat{HCB}}$ (điều phải chứng minh).

Bài 6 (0,5 điểm). Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14\Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)+\left(x+1-4\sqrt{x+1}+4\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-3\right)^2=0\\ \left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x-3=0\\ \sqrt{x+1}-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3 \text{ (thoả mãn)}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGỌC THUỴ

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 ĐIỂM)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	A	D	B	A	C	D	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 ĐIỂM)

Bài 1 (1,0 điểm). Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{2}-2\sqrt{50}+5\sqrt{32}$.

b) $\sqrt{5}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) $3\sqrt{2}-2\sqrt{50}+5\sqrt{32}=3\sqrt{2}-2.5\sqrt{2}+5.4\sqrt{2}=3\sqrt{2}-10\sqrt{2}+20\sqrt{2}=13\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{5}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\dfrac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}+\dfrac{\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)}{2-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5}-\dfrac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}+\sqrt{5}=\sqrt{5}-2\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{5}=2$.

Bài 2 (1,5 điểm). Giải phương trình

a) $\sqrt{x+3}=7$.

b) $2\sqrt{9x-18}-\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-8}=18$.

Lời giải

a) Điều kiện $x\ge -3$

Ta có: $\sqrt{x+3}=7\Leftrightarrow x+3=49\Leftrightarrow x=46$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{46\}$.

b) Điều kiện: $x\ge 2$.

Ta có: $2\sqrt{9x-18}-\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-8}=18$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{9\left(x-2\right)}-\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4\left(x-2\right)}=18$

$\Leftrightarrow 2.3\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x-2}=18$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}=18$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2}=18\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=3\Leftrightarrow x-2=9\Leftrightarrow x=11$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{11\}$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0;\ x\ne 25.$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9.$

b) Chứng minh $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}.$

c) Đặt $P=A-6B.$ Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để $P<0.$

Lời giải

a) Với $x=9$ thoả mãn điều kiện xác định.

Thay $x=9$ vào biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$, ta được: $A=\dfrac{2\sqrt{9}}{3+\sqrt{9}}=\dfrac{2.3}{3+3}=1.$

Vậy với $x=9$ thì $A=1.$

b) Với $x\ge 0;\ x\ne 25,$ ta có:

$$B=\left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\frac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}=\left[\frac{15-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}+\frac{2\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}\right]\cdot\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$ (điều phải chứng minh).

c) Với $x\ge 0;\ x\ne 25,$ ta có: $P=A-6B=\dfrac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-6\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{2\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3}.$

Để $P<0$ thì $\dfrac{2\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3}<0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-6<0$ (do $\sqrt{x}+3>0$ với mọi $x\ge 0;\ x\ne 25$)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}<6\Leftrightarrow \sqrt{x}<3\Leftrightarrow 0\le x<9.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0;\ x\ne 25,$ ta được $0\le x<9$ thoả mãn.

Vậy với $0\le x<9$ thì $P<0.$

Bài 4 (3,0 điểm).

1) Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $6\text{m}.$ Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng $40^\circ.$ Tính chiều cao của cột đèn (làm tròn đến mét).

2) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH.$

a) Cho biết $AB=3\,\text{cm},\ AC=4\,\text{cm}.$ Tính độ dài các đoạn thẳng $BC, HB, AH.$

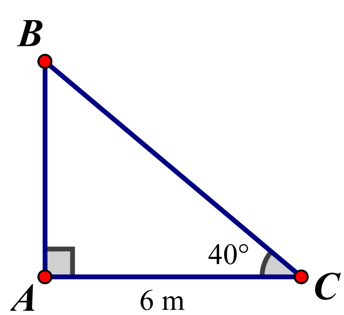
b) Vẽ HE vuông góc với AB tại $E,$ HF vuông góc với AC tại $F.$ Chứng minh $AE.EB=EH^2$ và $AE.EB+AF.FC=EF^2.$

c) Chứng minh $BE=BC.\cos^3 B.$

Lời giải

1) Gọi A là chân cột đèn, B là đỉnh cột đèn, C là bóng của đỉnh cột đèn khi tia nắng chiếu xuống.

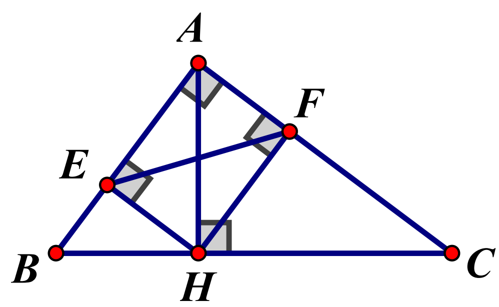
Khi đó: AB là chiều cao của cột đèn, AC là độ dài bóng trên mặt đất của cột đèn, $\widehat{ACB}$ là góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất. Suy ra $AC=6\text{m},\ \widehat{ACB}=40^\circ.$



Xét tam giác ABC vuông tại $A,$ ta có: $\tan\widehat{ACB}=\dfrac{AB}{AC}$

$\Rightarrow AB=AC.\tan\widehat{ACB}=6.\tan 40^\circ\approx 5\left(\text{m}\right).$

Vậy cột đèn cao $5\text{m}.$



2a) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại A, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5\left(cm\right)$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có:

$AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{3^2}{5} = 1{,}8\left(cm\right)$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABH vuông tại H, ta có: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3^2 - 1{,}8^2 = 5{,}76 \Rightarrow AH = 2{,}4\left(cm\right)$.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABH vuông tại H, đường cao HE, ta có: $AE.EB = EH^2$. $\quad(1)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ACH vuông tại H, đường cao HF, ta có: $AF.FC = FH^2$. $\quad(2)$

Xét tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{HEA} = \widehat{HFA} = \widehat{EAF} = 90^\circ$

$\Rightarrow AEHF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{EHF} = 90^\circ \Rightarrow \Delta EHF$ vuông tại $H \Rightarrow HE^2 + HF^2 = EF^2$ (định lý Pythagore). $\quad(3)$

Từ $(1), (2)$ và (3), suy ra $AE.EB + AF.FC = EH^2 + FH^2 = EF^2$ (điều phải chứng minh).

c) Xét tam giác BEH vuông tại E có: $\cos B = \dfrac{BE}{BH} \Rightarrow BE = BH.\cos B$.

Xét tam giác ABH vuông tại H có: $\cos B = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB.\cos B$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có: $\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC.\cos B$.

Suy ra $BE = BC.\cos^3 B$ (điều phải chứng minh).

Bài 5 (0,5 điểm). Cho $0 < x < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{4}{x}$.

Lời giải

Ta có: $M = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{4}{x} = \left(\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{4}{x} - 8\right) + 8 = \dfrac{9x^2 - 12x + 4}{(1-x)x} + 8 = \dfrac{(3x-2)^2}{(1-x)x} + 8$.

Vì $0 < x < 1$ nên $(1-x)x > 0$.

Lại có: $(3x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(3x-2)^2}{(1-x)x} \geq 0 \Rightarrow A \geq 8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ (thoả mãn).

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8 khi $x = \dfrac{2}{3}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

TRƯỜNG THCS CHƯƠNG DƯƠNG

Bài 1 (1,5 điểm). Tính giá trị của biểu thức:

a) $\sqrt{27}-2\sqrt{3}-2\sqrt{48}+3\sqrt{75}$.

b) $\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^4}-4\sqrt{\dfrac{15}{2}}+\dfrac{5}{1-\sqrt{6}}$.

Lời giải

a) $\sqrt{27}-2\sqrt{3}-2\sqrt{48}+3\sqrt{75}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+15\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^4}-4\sqrt{\dfrac{15}{2}}+\dfrac{5}{1-\sqrt{6}}=\left|\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2\right|-4\dfrac{\sqrt{30}}{2}+\dfrac{5\left(1+\sqrt{6}\right)}{\left(1-\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)}$

$$=11+2\sqrt{30}-2\sqrt{30}-1-\sqrt{6}=10-\sqrt{6}.$$

Bài 2 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x>0;\ x\neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

b) Rút gọn B.

c) So sánh biểu thức $P=\dfrac{A}{B}$ với 2.

Lời giải

a) Với $x=16$ thoả mãn điều kiện xác định.

Thay $x=16$ vào biểu thức $A=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$, ta được: $A=\dfrac{16+3}{\sqrt{16}-2}=\dfrac{19}{2}$.

Vậy với $x=16$ thì $A=\dfrac{19}{2}$.

b) Với $x>0;\ x\neq 4$, ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;\ x\neq 4$.

c) Với $x>0;\ x\neq 4,$ ta có: $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}.$

Xét $P-2=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}-2=\dfrac{x-2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2}{\sqrt{x}}.$

Với $x>0;\ x\neq 4$ thì $\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2\geq 2>0;\ \sqrt{x}>0\Rightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2}{\sqrt{x}}>0.$

Suy ra $P-2>0\Leftrightarrow P>2.$

Vậy $P>2.$

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hàm số bậc nhất $y=(m-1)x+2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $P(2;4)$.

b) Với m tìm được ở câu a, hãy vẽ (d) trên hệ trục toạ độ Oxy.

c) Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B. Tìm m để khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

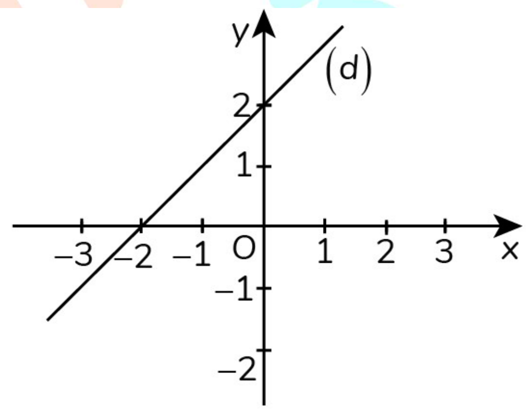
a) Để đường thẳng (d) đi qua điểm $P(2;4)$ thì $4=(m-1).2+2\Leftrightarrow 2(m-1)=2\Leftrightarrow m=2.$

Vậy với $m=2$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $P(2;4)$.

b) Với $m=2$ thì hàm số trở thành: $y=x+2.$

Ta có bảng:

x	0	-2
y	2	0



Đồ thị hàm số là đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm $(-2;0)$ và cắt trục tung tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị hàm số như hình vẽ

c) Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B nên $A\left(\dfrac{-2}{m-1};0\right)$ và $B(0;2)$.

Kẻ OH vuông góc với (d) tại $H\Rightarrow$ Khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) là OH

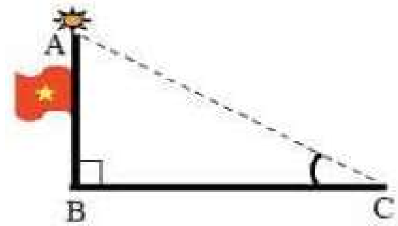
Theo bài ra $OH=\sqrt{2}.$

Ta có: $OA=\left|x_A\right|=\left|\dfrac{-2}{m-1}\right|=\dfrac{2}{|m-1|};\ OB=\left|y_B\right|=|2|=2.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác OAB vuông tại O, đường cao OH, ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}\Rightarrow\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{|m-1|}\right)^2}+\dfrac{1}{2^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{(m-1)^2}{4}+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right..$

Vậy với $m\in\{0;2\}$ thì khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{2}$.

Bài 4 (1,0 điểm). Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc $\widehat{C} = 35°$ và bóng BC của cột cờ AB trên mặt đất dài $12\,m$. Tính chiều cao của cột cờ AB (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Xét tam giác ABC vuông tại B có $\tan C = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = BC.\tan C = 12.\tan 35° \approx 8,4\,(m)$.

Vậy chiều cao của cột cờ là $8,4\,m$.

Bài 5 (3,0 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Lấy điểm C trên nửa đường tròn (O) sao cho $AC > BC$ $(C \neq A, B)$. Gọi E là trung điểm của dây cung AC. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với AB, cắt tia AC tại điểm D.

a) Chứng minh $OE \perp AC$ và hai điểm B, E đều thuộc đường tròn đường kính OD.

b) Đường tròn đường kính OD cắt nửa đường tròn (O) tại F. Chứng minh tam giác FOD vuông tại F, từ đó chứng minh $DF = DB$.

c) Chứng minh: $\widehat{DFA} = \widehat{DCF}$.

Lời giải

a) Xét (O) có: OE là một phần của đường kính;

AC là dây cung không đi qua tâm;

$OE \cap AC = \{E\}$ và $AE = EC$

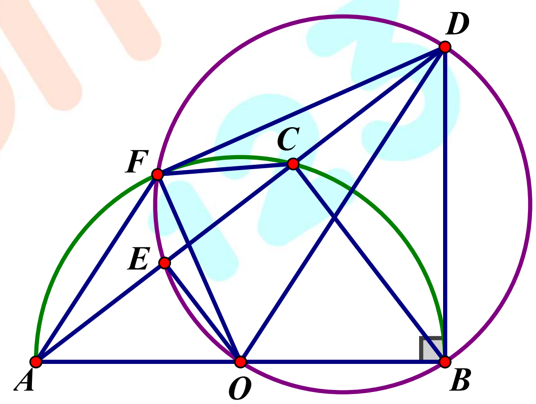
$\Rightarrow OE \perp AC$ tại E (định lý) $\Rightarrow \Delta OED$ vuông tại E

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính OD. (1)

Vì $BD \perp AB \Rightarrow \Delta OBD$ vuông tại B

$\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính OD. (2)

Từ (1) và (2), suy ra B, E đều thuộc đường tròn đường kính OD.



b) Vì F thuộc đường tròn đường kính OD nên $\widehat{OFD} = 90° \Rightarrow \Delta FOD$ vuông tại F.

Xét tam giác OFD và tam giác OBD có: $\widehat{OFD} = \widehat{OBD} = 90°$; OD là cạnh chung; $OF = OB$ (vì B, F cùng thuộc nửa đường tròn (O), đường kính AB).

Suy ra $\Delta OFD = \Delta OBD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)p$\Rightarrow DF = DB$ (hai cạnh tương ứng).

c) Vì C thuộc nửa đường tròn (O), đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90° \Rightarrow BC \perp AD$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABD vuông tại B, đường cao BC, ta có: $DB^2 = DC.DA$.

Mà theo chứng minh câu b thì $DF = DB$ nên $DF^2 = DC.DA \Rightarrow \dfrac{DF}{DA} = \dfrac{DC}{DF}$.

Xét tam giác DFC và tam giác DAF có: $\widehat{ADF}$ chung; $\dfrac{DF}{DA} = \dfrac{DC}{DF}$ (chứng minh trên)

$\Delta DFC \backsim \Delta DAF$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{DCF}$ (điều phải chứng minh).

---------------------------- HẾT ----------------------------