

TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI - AMSTERDAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

Năm học: 2023 - 2024

Môn: Toán lớp 8

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

BÀI I (2,5 ĐIỂM).

1) Rút gọn biểu thức $A = (x+2)^3 + 2x(2x-1)(2x+1) - (3x-1)(2x+1) - 9x$.

2) Tìm x thỏa mãn $(3x+1)^2 - 4(3x+1)(x+2) = -4(x+2)^2$.

3) Cho các số a, b thỏa mãn $a+b=2$. Tính giá trị biểu thức $P = 2a^3 + 2b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2$.

BÀI II (2,5 ĐIỂM).

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = 4x^4 - 37x^2 + 9$.

b) $B = x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$.

2) Tìm các hằng số a, b, c sao cho đa thức $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho đa thức $x+1$ và khi chia cho đa thức $x^2 - 4$ thì được dư $4x+3$.

BÀI III (1,0 ĐIỂM).

Bảng sau cho biết điểm bài kiểm tra giữa kì môn Toán của lớp 8H

Mức điểm	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu
Số học sinh	15	12	6	3

Lựa chọn biểu đồ phù hợp để biểu diễn bảng thống kê trên rồi vẽ biểu đồ đó.

BÀI IV (3,5 ĐIỂM).

Cho hình thang cân $ABCD$, CD là đáy lớn. Hạ AH vuông góc với CD tại H . Gọi M và N lần lượt là trung điểm AC và AD . Tia HN và tia BA cắt nhau tại T .1) Chứng minh rằng $AT = DH$ và tứ giác $AHDT$ là một hình chữ nhật.2) Chứng minh rằng tứ giác $BTHC$ là một hình bình hành.3) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CD , cắt tia DM ở E . Cho $AD = CD$, chứng minh rằng

$\widehat{DBE} = \widehat{TMH}$.

BÀI V (0,5 ĐIỂM).

Cho các số a, b, x, y khác 0, thỏa mãn $x+y = a+b$ và $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.Chứng minh rằng $x^{2023} + y^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT



**TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI - AMSTERDAM**
ĐỀ CHÍNH THỨC
ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

Năm học: 2023 - 2024

Môn: Toán lớp 8

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài I (2,5 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $A = (x+2)^3 + 2x(2x-1)(2x+1) - (3x-1)(2x+1) - 9x$.

2) Tìm x thỏa mãn $(3x+1)^2 - 4(3x+1)(x+2) = -4(x+2)^2$.

3) Cho các số a, b thỏa mãn $a+b=2$. Tính giá trị biểu thức $P = 2a^3 + 2b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Ta có: } A &= (x+2)^3 + 2x(2x-1)(2x+1) - (3x-1)(2x+1) - 9x \\
 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 2x(4x^2 - 1) - (6x^2 + 3x - 2x - 1) - 9x \\
 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x^3 - 2x - 6x^2 - 3x + 2x + 1 - 9x \\
 &= (x^3 + 8x^3) + (6x^2 - 6x^2) + (12x - 2x - 3x - 9x + 2x) + (8 + 1) \\
 &= 9x^3 + 9
 \end{aligned}$$

Vậy $A = 9x^3 + 9$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Ta có: } &(3x+1)^2 - 4(3x+1)(x+2) = -4(x+2)^2 \\
 \Rightarrow &9x^2 + 6x + 1 - 4(3x^2 + 6x + x + 2) = -4(x^2 + 4x + 4) \\
 \Rightarrow &9x^2 + 6x + 1 - 12x^2 - 24x - 4x - 8 = -4x^2 - 16x - 16 \\
 \Rightarrow &9x^2 + 6x + 1 - 12x^2 - 24x - 4x - 8 + 4x^2 + 16x + 16 = 0 \\
 \Rightarrow &(9x^2 - 12x^2 + 4x^2) + (6x - 24x - 4x + 16x) + (1 - 8 + 16) = 0 \\
 \Rightarrow &x^2 - 6x + 9 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x-3=0$$

$$\Rightarrow x=3.$$

Vậy $x=3$.

$$\begin{aligned}
 3) \text{ Ta có: } P &= 2a^3 + 2b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2 = 2(a^3 + b^3) + 3ab(a^2 + b^2 + 2ab) \\
 &= 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)^2 = 4(a^2 - ab + b^2) + 12ab \text{ (do } a+b=2) \\
 &= 4(a^2 + 2ab + b^2) = 4(a+b)^2 = 16 \text{ (do } a+b=2).
 \end{aligned}$$

Vậy $P = 16$.

Bài II (2,5 điểm).

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = 4x^4 - 37x^2 + 9$.

b) $B = x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$.

2) Tìm các hằng số a, b, c sao cho đa thức $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho đa thức $x+1$ và khi chia cho đa thức $x^2 - 4$ thì được dư $4x + 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1a) \quad A &= 4x^4 - 37x^2 + 9 = 4x^4 - x^2 - 36x^2 + 9 = x^2(4x^2 - 1) - 9(4x^2 - 1) \\ &= (4x^2 - 1)(x^2 - 9) = (2x - 1)(2x + 1)(x - 3)(x + 3). \end{aligned}$$

Vậy $A = (2x - 1)(2x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} b) \quad B &= x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024 = (x^4 - x) + (2024x^2 + 2024x + 2024) \\ &= x(x^3 - 1) + 2024(x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2024(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 - x)(x^2 + x + 1) + 2024(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2024). \end{aligned}$$

Vậy $B = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2024)$.

2) Đặt $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

Vì đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho đa thức $x+1$ nên đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = -1$

$$\Rightarrow P(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c = 0 \Rightarrow -a + b + c = 0. \quad (1)$$

Vì khi chia đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ cho đa thức $x^2 - 4$ thì được dư $4x + 3$ nên

$$P(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 4x + 3. \quad (*)$$

Thay $x = 2$ vào $(*)$, ta được $P(2) = 11 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c = 11 \Rightarrow 8a + 4b + c = 11. \quad (2)$

Thay $x = -2$ vào $(*)$, ta được $P(-2) = -5 \Rightarrow a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c = -5 \Rightarrow -8a + 4b + c = -5. \quad (3)$

Lấy (2) trừ (3) theo vế với vế, ta được: $16a = 16 \Rightarrow a = 1$.

Thay $a = 1$ vào (1) , ta được: $-1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 1. \quad (4)$

Thay $a = 1$ vào (2) , ta được: $8 + 4b + c = 11 \Rightarrow 4b + c = 3. \quad (5)$

Lấy (5) trừ (4) theo vế với vế, ta được: $3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \Rightarrow c = 1 - b = \frac{1}{3}$.

Vậy $a = 1; b = \frac{2}{3}; c = \frac{1}{3}$.



Bài III (1,0 điểm).

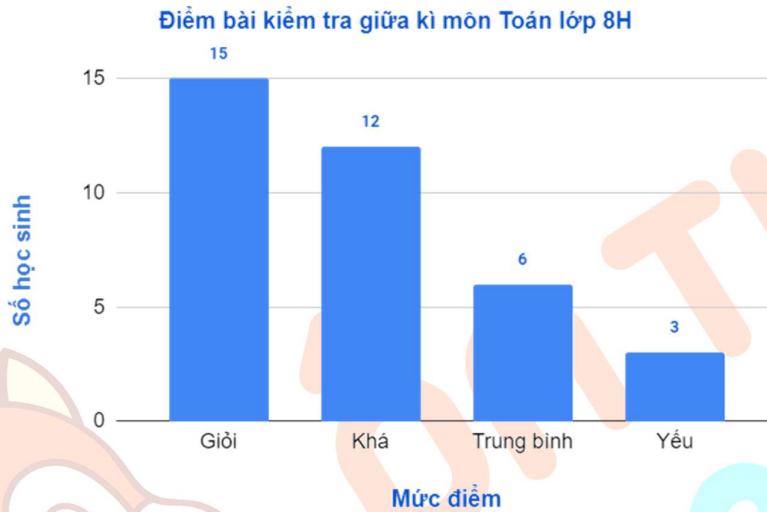
Bảng sau cho biết điểm bài kiểm tra giữa kì môn Toán của lớp 8H

Mức điểm	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu
Số học sinh	15	12	6	3

Lựa chọn biểu đồ phù hợp để biểu diễn bảng thống kê trên rồi vẽ biểu đồ đó.

Lời giải

Ta có thể lựa chọn biểu đồ cột để biểu diễn bảng thống kê trên:



Bài IV (3,5 điểm).

Cho hình thang cân ABCD, CD là đáy lớn. Hạ AH vuông góc với CD tại H. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AC và AD. Tia HN và tia BA cắt nhau tại T.

- 1) Chứng minh rằng $AT = DH$ và tứ giác AHDT là một hình chữ nhật.
- 2) Chứng minh rằng tứ giác BTHC là một hình bình hành.
- 3) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CD, cắt tia DM ở E. Cho $AD = CD$, chứng minh rằng $\widehat{DBE} = \widehat{TMH}$.

Lời giải

1) Vì ABCD là hình thang cân có đáy lớn CD nên $AB \parallel CD$

$\Rightarrow AT \parallel DH \Rightarrow \widehat{TAN} = \widehat{NDH}$ (hai góc ở vị trí so le trong).

Xét $\triangle ATN$ và $\triangle DHN$ có: $\widehat{TAN} = \widehat{NDH}$ (chứng minh trên);

$NA = ND$ (do N là trung điểm AD); $\widehat{ANT} = \widehat{DNH}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle ATN = \triangle DHN$ (g.c.g)

$\Rightarrow AT = DH$ (hai cạnh tương ứng).

Xét tứ giác AHDT có $AT = DH$ và $AT \parallel DH$ nên tứ giác AHDT là hình bình hành.

Mà $\widehat{AHD} = 90^\circ$ (do AH vuông góc với CD) nên tứ giác AHDT là một hình chữ nhật.

2) Xét $\triangle AHD$ vuông tại H, có trung tuyến HN ứng với cạnh huyền AD nên $HN = ND = NA$

$\Rightarrow \triangle DHN$ cân tại N $\Rightarrow \widehat{NDH} = \widehat{NHD}$ hay $\widehat{ADC} = \widehat{DHT}$.

Vì ABCD là hình thang cân có đáy lớn CD nên $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{THD} = \widehat{BCD}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $TH \parallel BC$.

Xét tứ giác BTHC có $TH \parallel BC$ và $TB \parallel CH$ nên tứ giác BTHC là một hình bình hành.

3) Vì $AD = CD$ (giả thiết) nên $\triangle ACD$ cân tại D.

Mà M là trung điểm AC nên DM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao kẻ từ D của $\triangle ACD$

$\Rightarrow DM \perp AC$ tại M

$\Rightarrow \triangle AMD$ vuông tại M có trung tuyến MN ứng với cạnh huyền AD nên $MN = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, theo chứng minh câu 1, ta có tứ giác AHDT là hình chữ nhật nên $AD = TH$

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}TH = NT = NH \Rightarrow \triangle TMH$ vuông tại M $\Rightarrow \widehat{TMH} = 90^\circ$. (1)

Gọi I là trung điểm của DE.

Vì $\triangle ACD$ cân tại D có DM là trung tuyến nên DM là phân giác của $\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CDE}$.

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CDE$ có: $AD = CD$ (giả thiết); $\widehat{ADE} = \widehat{CDE}$ (chứng minh trên); DE là cạnh chung

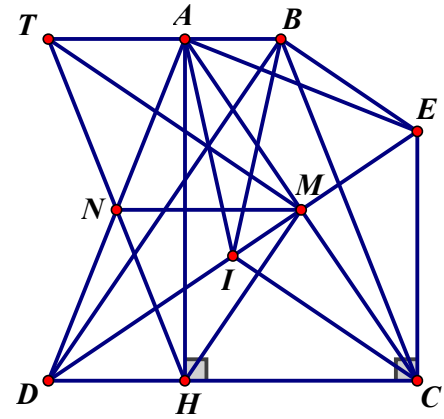
$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{DCE} = 90^\circ$.

Xét hai tam giác ADE vuông tại A và CDE vuông tại C lần lượt có trung tuyến AI, CI ứng với

cạnh huyền DE nên $IA = ID = IC = \frac{1}{2}DE$ (2)

$\Rightarrow \triangle ICD$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{ICD}$.

Lại có: $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ (do ABCD là hình thang cân) nên $\widehat{ADC} - \widehat{IDC} = \widehat{BCD} - \widehat{ICD} \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{BCI}$.



Xét $\triangle AID$ và $\triangle BIC$ có: $ID = IC$ (chứng minh trên); $\widehat{ADI} = \widehat{BCI}$ (chứng minh trên); $AD = BC$ (do $ABCD$ là hình thang cân)

$$\Rightarrow \triangle AID = \triangle BIC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow IA = IB. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra $IB = \frac{1}{2}DE = ID = IE \Rightarrow \triangle BDE$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{DBE} = 90^\circ. \quad (4)$

Từ (1) và (4), suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{TMH}$.

Bài V (0,5 điểm).

Cho các số a, b, x, y khác 0, thỏa mãn $x + y = a + b$ và $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Chứng minh rằng $x^{2023} + y^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{(a+b)^2}{ab}$.

* Trường hợp 1: $x + y = a + b = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} y = -x \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{2023} = -x^{2023} \\ b^{2023} = -a^{2023} \end{cases} \Rightarrow x^{2023} + y^{2023} = a^{2023} + b^{2023} = 0$.

* Trường hợp 2: $x + y \neq 0; a + b \neq 0 \Rightarrow xy = ab$ (do $x + y = a + b$).

Lại có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow (x - y)^2 = (a - b)^2 \Rightarrow \begin{cases} x - y = a - b \\ x - y = -(a - b) \end{cases}$$

+) Nếu $x - y = a - b \Rightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ x - y = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2a \\ 2y = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

$$\Rightarrow x^{2023} + y^{2023} = a^{2023} + b^{2023}.$$

+) Nếu $x - y = -(a - b) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ x - y = b - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2b \\ 2y = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$

$$\Rightarrow x^{2023} + y^{2023} = a^{2023} + b^{2023}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

HẾT