TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI - AMSTERDAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

Năm học: 2023 - 2024

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

Bài I (3,0 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2}{x-1}$ với $x\geq 0$ và $x\neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các giá trị của x thoả mãn điều kiện để $P=A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét đường thẳng $(d): y=mx-3$ với $m\neq 0$.

1) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) và trục Oy. Tìm toạ độ của điểm A.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm B sao cho $OA=2OB$.

Bài III (1,0 điểm).

Một máy bay cất cánh với vận tốc $100m/s$ và bay lên theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc $30°$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì máy bay đạt được độ cao so với mặt đất là $4500m$. Giả sử mặt đất bằng phẳng và vận tốc máy bay không đổi.

Bài IV (3,5 điểm).

Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ C lên AB, đường thẳng qua O vuông góc với CM tại E cắt cạnh AC tại P.

1) Chứng minh các điểm A, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn và tứ giác $OBME$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh rằng hai tam giác MBO và BOP đồng dạng.

3) Gọi F là giao điểm của BP với OM. Chứng minh: $\widehat{FBC}=\widehat{FOA}$ và $\widehat{AFC}=90°$.

Bài V (0,5 điểm).

Với các số thực không âm a, b thoả mãn $a+b\leq 3$, tìm giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI - AMSTERDAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

Năm học: 2023 - 2024

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Không kể thời gian giao đề*)

Bài I (3,0 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2}{x-1}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các giá trị của x thoả mãn điều kiện để $P=A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Với $x=4$ thoả mãn điều kiện $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

Thay $x=4$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4}$, ta được: $A=\dfrac{\sqrt{4}+1}{4+4}=\dfrac{3}{8}$.

Vậy với $x=4$ thì $A=\dfrac{3}{8}$.

2) Với $x\ge 0$ và $x\ne 1$, ta có

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{\sqrt{x}+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-2\left(\sqrt{x}-1\right)-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x\ge 0$ và $x\ne 1$ thì $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3) Với $x\ge 0$ và $x\ne 1$, ta có $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+4}$.

Xét hiệu: $P-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4\sqrt{x}-x-4}{4\left(x+4\right)}=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{4\left(x+4\right)}$.

Với $x\ge 0$ và $x\ne 1$ thì $\left(\sqrt{x}-2\right)^2\ge 0;\ x+4>0\Rightarrow \dfrac{-\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x+4}\le 0\Rightarrow P-\dfrac{1}{4}\le 0\Leftrightarrow P\le\dfrac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$ khi $x=4$.

Bài II (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét đường thẳng $(d): y=mx-3$ với $m \neq 0$.

1) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) và trục Oy. Tìm toạ độ của điểm A.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm B sao cho $OA=2OB$.

Lời giải

1) Vì A thuộc trục Oy nên toạ độ điểm A là $A(0;a)$.

Vì $A(0;a)$ thuộc đường thẳng $(d): y=mx-3$ nên $a=m.0-3 \Rightarrow a=-3$.

Vậy $A(0;-3)$.

2) Vì B thuộc trục Ox nên toạ độ điểm B là $B(b;0)$.

Vì $B(b;0)$ thuộc đường thẳng $(d): y=mx-3$ nên $0=m.b-3 \Rightarrow b=\frac{3}{m}$ với $m \neq 0$.

Khi đó: $OA=|-3|=3$ và $OB=\left|\frac{3}{m}\right|=\frac{3}{|m|}$ với $m \neq 0$.

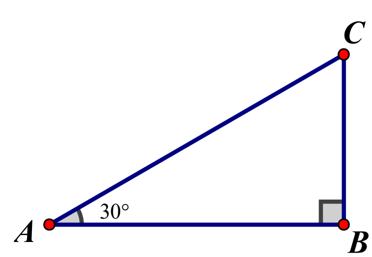
Theo bài ra, ta có: $OA=2OB \Rightarrow 3=\frac{6}{|m|} \Leftrightarrow |m|=2 \Leftrightarrow m \in \{-2;2\}$ (thoả mãn $m \neq 0$).

Vậy $m \in \{-2;2\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài III (1,0 điểm).

Một máy bay cất cánh với vận tốc 100m/s và bay lên theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc $30°$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì máy bay đạt được độ cao so với mặt đất là 4500m. Giả sử mặt đất bằng phẳng và vận tốc máy bay không đổi.

Lời giải



Gọi A là vị trí máy bay bắt đầu bay lên, C là điểm mà máy bay đạt được độ cao 4500m so với mặt đất, B là hình chiếu của C lên mặt đất. Khi đó góc tạo bởi hướng bay lên của máy bay so với mặt đất là $\widehat{BAC}$.

Do đó $\widehat{BAC}=30°$ và $BC=4500\text{m}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $\sin\widehat{BAC}=\frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow AC = \dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{4500}{\sin 30^\circ} = 9000\,(m).$

Thời gian từ lúc cất cánh đến khi máy bay đạt được độ cao so với mặt đất là $4500m$ là:

$$9000 : 100 = 90 \text{ (giây)} = 1,5 \text{ (phút)}$$

Vậy sau 1,5 (phút) kể từ lúc cất cánh, máy bay đạt được độ cao so với mặt đất là $4500m$.

Bài IV (3,5 điểm).

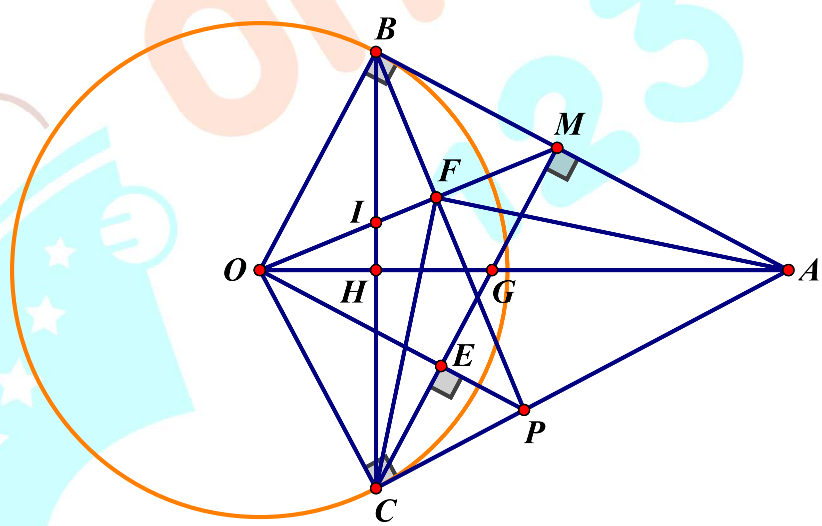
Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ C lên $AB,$ đường thẳng qua O vuông góc với CM tại E cắt cạnh AC tại $P.$

1) Chứng minh các điểm A, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn và tứ giác $OBME$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh rằng hai tam giác MBO và BOP đồng dạng.

3) Gọi F là giao điểm của BP với $OM.$ Chứng minh: $\widehat{FBC} = \widehat{FOA}$ và $\widehat{AFC} = 90^\circ.$

Lời giải



1) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta OAB, \Delta OAC$ lần lượt vuông tại B và $C.$

Do đó B, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA hay các điểm $A, B, O,\ C$ cùng nằm trên một đường tròn.

Vì $CM \perp AB$ nên $\widehat{BME} = 90^\circ.$

Vì $OE \perp CM$ nên $\widehat{OEM} = 90^\circ.$

Xét tứ giác $OBME$ có $\widehat{MBO} = \widehat{BME} = \widehat{OEM} = 90^\circ$

$\Rightarrow OBME$ là hình chữ nhật.

2) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác OPC vuông tại $C,$ đường cao $CE,$ ta có: $OC^2 = OE.OP.$

Mà $OC = OB$ và $OBME$ là hình chữ nhật (chứng minh trên) nên $OE = BM$

$\Rightarrow OB^2 = BM.OP \Rightarrow \dfrac{BM}{OB} = \dfrac{OB}{OP}$.

Vì $OBME$ là hình chữ nhật nên $\widehat{BOP} = 90°$.

Xét ΔMBO và ΔBOP có: $\widehat{OBM} = \widehat{BOP} = 90°$; $\dfrac{BM}{OB} = \dfrac{OB}{OP} \Rightarrow \Delta MBO \backsim \Delta BOP\ (\text{c.g.c})$.

3) Gọi H là giao điểm của OA và BC; I là giao điểm của OF và BH.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AB = AC$.

Mà $OB = OC$ nên OA là trung trực của đoạn thẳng $BC \Rightarrow OA \perp BC$ tại H.

Theo chứng minh câu 2, ta có: $\Delta MBO \backsim \Delta BOP \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{OPB}$

$\Rightarrow \widehat{BOM} + \widehat{OBP} = \widehat{OPB} + \widehat{OBP} = 90° \Rightarrow \widehat{OFB} = 90°$.

Xét ΔBIF vuông tại F và ΔOIH vuông tại H có $\widehat{BIF} = \widehat{OIH}$ (đối đỉnh) nên $\Delta BIF \backsim \Delta OIH\ (\text{g.g})$

$\Rightarrow \widehat{IOH} = \widehat{IBF} \Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{FOA}$. $\quad (1)$

Gọi G là giao điểm của MC và OA.

Vì $MC \perp OP$ và $OB \perp OP$ nên $OB // CG \Rightarrow \dfrac{OH}{HG} = \dfrac{BH}{CH}$.

Mà OA là trung trực của BC nên $BH = CH \Rightarrow OH = HG \Rightarrow OG = 2OH$.

Xét ΔOHB và ΔGEO có: $\widehat{BHO} = \widehat{GEO} = 90°$; $\widehat{OBH} = \widehat{GOE}$ (cùng phụ với $\widehat{BOG}$)

$\Rightarrow \Delta OHB \backsim \Delta GEO\ (\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{OB}{OG} = \dfrac{BH}{OE} \Rightarrow OB.OE = BH.OG = BH.2.OH = BC.OH$.

Mà $OE = BM$ nên $OB.BM = BC.OH \Rightarrow BF.OM = BC.OH \Rightarrow \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{BF}{BC}$.

Lại có: $OB^2 = OF.OM = OH.OA \Rightarrow \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OF}{OA}$.

Suy ra $\dfrac{BF}{BC} = \dfrac{OF}{OA}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\Delta OAF \backsim \Delta BCF\ (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{OFA} = \widehat{BFC} \Rightarrow \widehat{CFA} = \widehat{OFB} = 90°$.

Bài V (0,5 điểm).

Với các số thực không âm a, b thoả mãn $a + b \le 3$, tìm giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3}$.

Lời giải

Vì a, b là các số thực không âm và $a+b\le 3$ nên $\begin{cases}0\le a\le 3\\0\le b\le 3\end{cases}$.

Vì $0\le a\le 3$ nên $a\left(a-3\right)\le 0\Leftrightarrow a^2\le 3a$.

Vì $0\le b\le 3$ nên $b\left(b-3\right)\le 0\Leftrightarrow b^2\le 3b$.

Suy ra $\sqrt{3}P=\sqrt{3a^2+9}+\sqrt{3b^2+9}\le\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{b^2+6b+9}=a+3+b+3\le 9$

$\Rightarrow P\le 3\sqrt{3}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=0; b=3$ hoặc $a=3; b=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $3\sqrt{3}$ khi $a=0; b=3$ hoặc $a=3; b=0$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------