MỤC LỤC

HỆ THỐNG ĐỀ THI

ĐỀ SỐ 1:

PHÒNG GD&ĐT QUẬN BA ĐÌNH
TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ

ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 16/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I(2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P=A.B$ nhận giá trị là số nguyên

Bài II: (2,0 điểm) *Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình*

Hai người thợ, nếu cùng làm chung một công việc thì sau 15 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\dfrac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người cần bao lâu sẽ xong công việc đó?

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2}{x+2}+\sqrt{y-1}=3\\ \dfrac{1}{x+2}-3\sqrt{y-1}=-2\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2+5x+k-2=0$ (k là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $k=-4$.

b) Tìm điều kiện của tham số k để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài IV:(3,0 điểm) Cho đường tròn (O) có dây AB không là đường kính, gọi D là điểm thuộc tia đối của tia AB. Kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) vuông góc với dây AB tại C (P thuộc cung lớn AB). Tia DP cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác P), các đường thẳng AB và QM cắt nhau tại K.

a) Chứng minh bốn điểm P,C,K,M cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ tiếp tuyến DE của đường tròn (O) (E là tiếp điểm và E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm P). Chứng minh $DM.DP=DE^2$

c) Cho ba điểm A,B,D cố định, gọi F là giao điểm của PK và QD. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm A và B thì $DK.DC=DE^2$ và $KP.KF$ không đổi.

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực dương x,y thoả mãn: $x+\dfrac{3}{y}\le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\dfrac{3xy}{x^2+9y^2}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 2
TRƯỜNG THCS ARCHIMEDES

ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 11/02/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right)$ với $x>0; x\neq 1$

1) Tính A biết $x=16$ 2) Chứng minh rằng $B=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x>0\,; x\neq 1$

3) Tìm giá trị nguyên của x để $P=A:B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Ở một siêu thị, giá niêm yết ban đầu của một cái bàn là và một cái quạt máy có tổng số tiền là 850 000 đồng. Sau đó siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của một cái bàn là và một cái quạt máy trên đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết ban đầu. Do đó khách hàng tiết kiệm hơn được 125 000 đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá niêm yết ban đầu của mỗi sản phẩm trên là bao nhiêu ?

2) Ông An muốn sơn bên ngoài một toà nhà hình hộp chữ nhật có chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao 15m (không sơn trần). Biết diện tích các cửa chiếm 10% diện tích xung quanh toà nhà và giá tiền sơn $1m^2$ tường là 20 000 đồng. Hỏi ông An dự kiến sơn toà nhà hết bao nhiêu tiền?

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{8}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=5\\ \frac{4}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=3\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+1=0\ (1)$ (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

c) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{5}$.

Bài IV:(3,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi AC cắt BD tại O. Điểm K thuộc đoạn thẳng AD (K khác A, D). Kẻ DI vuông góc với CK tại I.

1) Chứng minh tứ giác $DIOC$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $\Delta COI \backsim \Delta CKA$

3) Cho đường thẳng OI và đường thẳng CD cắt nhau tại L.

a) Chứng minh $LD.IC=LC.ID$

b) Chứng minh B,K,L thẳng hàng.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+2c=1.$ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+ac-4bc.$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 3

UBND QUẬN ĐỐNG ĐA
TRƯỜNG THCS ĐỐNG ĐA

ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 18/02/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{13\sqrt{x}+2}{x-4}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0; x\neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) Cho $P=A.B$. Tìm x để $|P|>P$

Bài II: (2,0 điểm) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Theo kế hoạch, hai xí nghiệp A và B phải làm tổng cộng 750 đơn hàng. Thực tế, xí nghiệp A làm nhiều hơn 10% và xí nghiệp B làm ít hơn 5% so với dự định nên cả hai xí nghiệp làm được 765 đơn hàng. Tìm số đơn hàng mà mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{y}=-2\\ \dfrac{5}{x-2}-\dfrac{2}{y}=7\end{cases}$

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-y=3\\ (m^2+1)x-2my=6\end{cases}$ (m là tham số)

Tìm tất cả các số nguyên m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho x và y là các số nguyên.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm D. Gọi điểm M là trung điểm của dây BC.

1) Chứng minh: Bốn điểm A,D,O,M cùng thuộc một đường tròn

2) Tia OM cắt đường tròn (O) tại điểm E, hai đoạn thẳng AE và BC cắt nhau tại điểm G. Chứng minh: Điểm E nằm chính giữa cung BC và $AB.AC=AE.AG$.

3) Tia phân giác của góc ABC cắt AE tại điểm I. Giả sử dây AB cố định và điểm C di chuyển trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$. Chứng tỏ điểm I luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Bài V: (0,5 điểm) Cho hai số thực $a\geq 16$ và $b\geq 25$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{a\sqrt{b-25}+b\sqrt{a-16}}{ab}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 4

UBND QUẬN CẦU GIẤY
TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ THI THỬ VÀO 10

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 19/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho các biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\, x\ne 1;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=16$.

2) Chứng minh $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

3) Với $x>1, x\ne 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A.B$

Bài II: (1,5 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai tổ cùng làm một công việc trong 15 giờ thì xong. Nếu tổ (I) làm trong 3 giờ, tổ (II) làm trong 5 giờ thì được 25% công việc. Hỏi mỗi tổ làm riêng trong bao lâu thì xong công việc đó?

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\frac{1}{y-2}=3\\ 3\sqrt{x-1}-\frac{2}{y-2}=4\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: y=2x+3$ và Parabol $P: y=x^2$

a) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ toạ độ Oxy

b) Tính diện tích tam giác OAB với A và E là các giao điểm của d với (P). (Biết hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B.)

Bài IV: (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB=2R$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B. Gọi I là trung điểm của OA, E là điểm thay đổi trên (O) sao cho E không trùng với A và B. Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt d_1, d_2 lần lượt ở M và N.

1) Chứng minh bốn điểm A, M, E, I thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

2) Chứng minh rằng : a) $IN.IE=EN.IM$. b) $IB.NE=3IE.NB$.

3) Khi E thay đổi, chứng minh tích $AM.BN$ có giá trị không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMNI theo R.

Bài V: (0,5 điểm) Giải phương trình $5x^2-12x+6-2\sqrt[3]{\left(x^3-2\right)^2}+5\sqrt[3]{x^3-2}=0$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 5

UBND QUẬN ĐỐNG ĐA
TRƯỜNG THCS THÁI THỊNH

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 24/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0; x\neq 4; x\neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=36$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài II: (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người cùng làm một công việc thì sau 7 giờ 12 phút hoàn thành xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\dfrac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc ?

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2}\\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2\end{cases}$

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=4\\ x-my=1\end{cases}$ (với m là tham số)

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thoả mãn x và y là hai số đối nhau.

Bài IV: (3,5 điểm) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Kẻ $OH\perp d$ tại H. Điểm A thuộc d và không trùng với điểm H. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B và C là các tiếp điểm). BC cắt OA, OH lần lượt tại M và N. Đoạn thẳng OA cắt (O) tại I

1) Chứng minh 4 điểm O,B,A,C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $OM.OA=ON.OH$.

3) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

4) Chứng minh rằng khi điểm A di động trên đường thẳng d thì đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V: (0,5 điểm) Cho $x>0$, $y>0$ và $x+y\leq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{y^2+xy}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 6

UBND QUẬN NAM TỪ LIÊM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 10/03/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x\ge 0; x\ne 4$

1) Tính giá trị của A khi $x=64$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

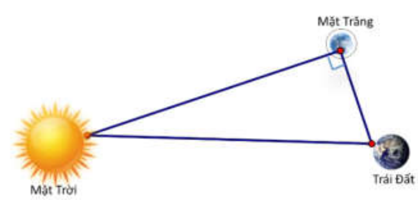
3) Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P\ge \dfrac{2}{x+2}$

Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu tăng chiều rộng thêm 2m, giảm chiều dài đi 1m thì diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó

2) Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là khoảng cách lý tưởng giúp Trái Đất nhận được lượng nhiệt và ánh sáng phù hợp, từ đó giúp sự sống trên Trái Đất tồn tại và phát triển

Trong một số trường hợp của thiên văn học, người ta xem Trái Đất, Mặt Trời, Mặt Trăng là ba chất điểm. Khi Trái Đất E , Mặt Trăng M và Mặt trời S tạo thành một góc vuông $\widehat{EMS}$ thì người ta đo được góc $\widehat{SEM}=89,85^\circ$. Biết khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng là 384400 *km.* Em hãy tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời. *(Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*



Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4\left|x+2\right|-\dfrac{3}{y-1}=1 \\ \left|x+2\right|+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=2x-1$ và $(d'): y=-mx+5$, với m là tham số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng trên cắt nhau

b) Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau. Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d'). Tìm tất cả các giá trị của m để x và y là hai số đối nhau

Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). AD,BE,CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh bốn điểm A,F,H,E cùng thuộc một đường tròn.

2) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O). Chứng minh $AD.AM=AB.AC$

3) Gọi P là giao điểm của AH và EF. I là giao điểm của AM và BC. K là trung điểm của BC. Chứng minh: H,K,M thẳng hàng và $PI//HK$.

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm a,b thoả mãn $a+b=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b+1}+\sqrt{b^2+a+1}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 7

UBND QUẬN LONG BIÊN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: .../05/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $Q=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 1$

1) Tính giá trị của Q khi $x=16$

2) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\leq Q$.

Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Phát động thi đua chào mừng 20 năm ngày thành lập quận Long Biên, hai phường Ngọc Thụy và Phúc Đồng tham gia lắp đặt camera để đảm bảo an ninh đô thị. Trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera. Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên cả hai phường đã lắp được 200 chiếc. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi phường lắp được bao nhiêu chiếc camera?
2) Một hộp sữa đặc có dạng một hình trụ với đường kính đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Tính thể tích của hộp sữa đó. (Lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{2}=4\\ \dfrac{4}{x}-3\sqrt{y-2}=-2\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=(3-2m)x-4$.

a) Chứng minh rằng (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (P) và (d).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\left(1-x_1^2\right)\left(1-x_2^2\right)-2x_1-2x_2$.

Bài IV: (3,0 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD với (O) sao cho $MC<MD$ và tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Kẻ AB cắt MD tại I, cắt MO tại H. Chứng minh $EA.EB=EI.EM$ và $\widehat{MHC}=\widehat{OCE}$.

3) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt AE tại K. Chứng minh $IK // AC$.

Bài V: (0,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3}{b+4}\leq\dfrac{c+1}{c+3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=(a+1)(b+1)(c+1)$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 8

UBND QUẬN HAI BÀ TRƯNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: .../05/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{16}{4-x}\right).\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

2) Chứng minh $B=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

3) Tìm x để biểu thức $P=A.B$ nhận giá trị là số nguyên dương.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Sân vận động Morodok Techo ở thủ đô PhnomPenh của Campuchia có sức chứa 60 000 chỗ ngồi là nơi phục vụ cho SEA Games 32. Một đơn vị được giao nhiệm vụ in vé vào sân. Thực tế mỗi ngày đơn vị đó đã in được nhiều hơn 2000 tấm vé so với kế hoạch. Vì thế đơn vị đã hoàn thành sớm công việc trước 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đơn vị đó phải in bao nhiêu tấm vé? (Giả sử số tấm vé mỗi ngày đơn vị sản xuất đó in là như nhau).

2) Một hình nón có bán kính đáy bằng $5cm$ và diện tích xung quanh là $65\pi\,cm^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x-3}+4(y-1)^2=5\\ 2\sqrt{x-3}-y^2+2y=2\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=4x+m^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm các giá trị của m để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $x_1(1-2x_2)+x_2(1-2x_1)=4m+3$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến MA tới đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn (O) tại điểm C khác A. Đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại B, K là trung điểm dây cung BC.

1) Chứng minh tứ giác $OMAK$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $MA^2=MB.MC$ và tam giác ABK vuông tại A.

3) Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Chứng minh tam giác ACK đồng dạng với tam giác EMO.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$

ĐỀ SỐ 9

UBND QUẬN BA ĐÌNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 10/05/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0, x\neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

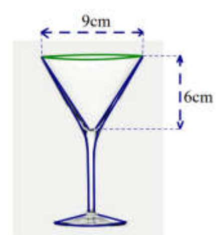
3) Cho $P=A:B$. Tìm số tự nhiên x để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất.

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai bạn Minh và An xuất phát cùng một lúc từ địa điểm A để đi đến địa điểm B bằng phương tiện xe đạp điện. Mỗi giờ bạn Minh đi nhanh hơn bạn An 2 km nên bạn Minh đến B sớm hơn bạn An 2,5 phút. Biết quãng đường AB dài $13\ km$, tính vận tốc xe của mỗi người. Hỏi Minh và An đi như vậy có đúng vận tốc quy định hay không nếu căn cứ theo quy định vận tốc tối đa của xe đạp điện là $25\ km/h$.

2) Một ly rượu bằng thuỷ tinh, phần đựng rượu dạng hình nón có đường kính miệng ly là $9\ cm$, chiều cao hình nón (như hình vẽ) là $6\ cm$. Hỏi ly đó có thể chứa đầy được bao nhiêu mililiter (ml) rượu? (Lấy $\pi\approx 3,14$ và coi độ dày thành ly là không đáng kể).



Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\dfrac{2}{|x-1|}+3y=5\\[2mm] \dfrac{1}{|x-1|}-2y=-1\end{cases}$

2) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=2(m-1)x-m^2+3m$ và Parabol $(P): y=x^2$.

a) Với $m=3$, tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P)

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là số đo chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\dfrac{7}{4}$ (đvdt)

Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cắt đoạn thẳng BC tại điểm thứ hai là D. Kẻ đường thẳng AH vuông góc với đường thẳng OC tại điểm H; đường thẳng AH cắt đoạn thẳng BC tại điểm M.

1) Chứng minh tứ giác $ACDH$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $OH.OC=R^2$ và tam giác OHB đồng dạng với tam giác OBC.

3) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại K. Chứng minh HM là tia phân giác của góc DHB và $MB.MD=MK.MC$.

Bài V: (0,5 điểm) Cho a,b là các số thực không âm thoả mãn $a+b=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(a+1)}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 10

UBND QUẬN HOÀN KIẾM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 24/05/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}+14}{4-x}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Xét biểu thức $P=A.B$. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $\sqrt{2P+3}=P$.

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng $12m$ và diện tích mảnh đất bằng $85m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất theo đơn vị mét?

2) Một quả địa cầu hành chính có đường kính bằng $33cm$. Tính diện tích bề mặt của quả địa cầu, lấy $\pi\approx 3{,}14$.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=4\\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+m^2+4$

a) Với $m=2$, tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại điểm $A(x_1;y_1)$ nằm bên trái trục tung và điểm $B(x_2;y_2)$ nằm bên phải trục tung sao cho $|x_1|-|x_2|=3$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường kính AD, lấy I là trung điểm của đoạn thẳng MO, gọi C là hình chiếu vuông góc của I lên AO.

1) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn

2) Đường thẳng vuông góc với MO tại điểm I cắt đường thẳng OB tại điểm E. Chứng minh $OB.OE=\dfrac{1}{2}OM^2$.

3) Chứng minh ΔIME đồng dạng với ΔCOI và $CE\perp MD$.

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm x,y,z thoả mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{y}{2-y}+\dfrac{z}{2-z}$

--------------------------- HẾT ---------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ SỐ 1

TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ

ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 16/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I(2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$. 2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P=A.B$ nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có: $A=\dfrac{7\left(\sqrt{9}+2\right)}{\sqrt{9}+3}=\dfrac{7(3+2)}{3+3}=\dfrac{35}{6}$

Vậy với $x=9$ thì $A=\dfrac{35}{6}$.

2) $B=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3\sqrt{x}-3-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

3) $P=A.B=\dfrac{7\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\sqrt{x}+3\ge 3>0\forall x\ge 0;x\ne 4\Leftrightarrow 0<\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}\le\dfrac{7}{3}$

Mà $P\in\mathbb{Z}\Rightarrow P\in\left\{1;2\right\}$

Với $P=1\Leftrightarrow\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=7\Leftrightarrow\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=16$ (tm)

Với $P=2\Leftrightarrow\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}=2\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (tm)

Vậy $x\in\left\{\dfrac{1}{4};16\right\}$

Bài II: (2,0 điểm) *Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình*

Hai người thợ, nếu cùng làm chung một công việc thì sau 15 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\dfrac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người cần bao lâu sẽ xong công việc đó?

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x ($x>15$; giờ)

Thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y ($y>15$; giờ)

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 giờ cả hai người thợ làm chung được $\frac{1}{15}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$

Trong 3 giờ người thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 5 giờ người thứ hai làm được $\frac{5}{y}$ (công việc)

Vì người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\frac{1}{4}$ công việc nên ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{y}=\frac{1}{20}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=40\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{40}=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=40\\ \frac{3}{x}=\frac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=40\\ x=24\end{cases}$ (tm)

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 24 giờ, người thứ hai làm một mình xong công việc trong 40 giờ.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{2}{x+2}+\sqrt{y-1}=3\\ \frac{1}{x+2}-3\sqrt{y-1}=-2\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2+5x+k-2=0$ (k là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $k=-4$.

b) Tìm điều kiện của tham số k để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\neq -2$; $y\geq 1$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+2}+\sqrt{y-1}=3 \\ \dfrac{1}{x+2}-3\sqrt{y-1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x+2}+3\sqrt{y-1}=9 \\ \dfrac{1}{x+2}-3\sqrt{y-1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{x+2}=7 \\ \dfrac{1}{x+2}-3\sqrt{y-1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ 1-3\sqrt{y-1}=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 3\sqrt{y-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \text{(tm)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;2)$.

2a) Với $k=-4$ phương trình (1) trở thành $x^2+5x-6=0$

$\Delta=5^2-4.1.(-6)=49>0$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{49}}{2}=1$; $x_2=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{2}=-6$

Vậy PT có tập nghiệm $S=\{1;-6\}$

b) $x^2+5x+k-2=0$

Ta có $\Delta=5^2-4(k-2)=33-4k$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 33-4k>0 \Leftrightarrow k<\dfrac{33}{4}$

Vậy $k<\dfrac{33}{4}$

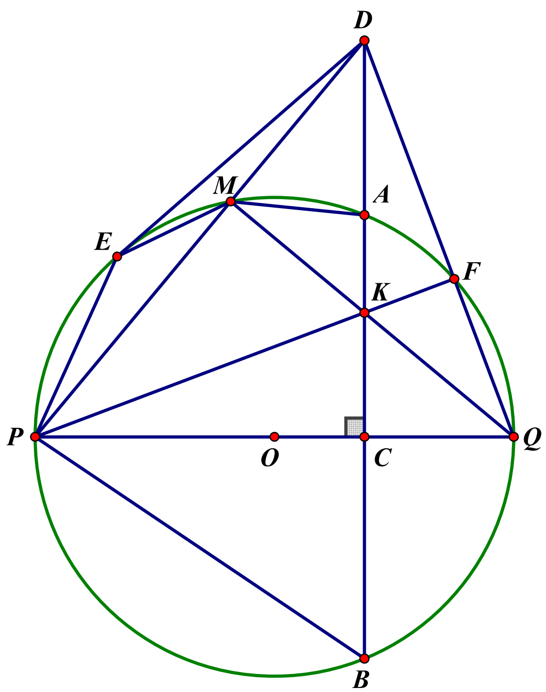
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) có dây AB không là đường kính, gọi D là điểm thuộc tia đối của tia AB. Kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) vuông góc với dây AB tại C (P thuộc cung lớn AB). Tia DP cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác P), các đường thẳng AB và QM cắt nhau tại K.

a) Chứng minh bốn điểm P,C,K,M cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ tiếp tuyến DE của đường tròn (O) (E là tiếp điểm và E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm P). Chứng minh $DM.DP=DE^2$.

c) Cho ba điểm A,B,D cố định, gọi F là giao điểm của PK và QD. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm A và B thì $DK.DC=DE^2$ và $KP.KF$ không đổi.

Lời giải



a) ΔPMQ nội tiếp đường tròn (O) đường kính PQ

$\Rightarrow \Delta PMQ$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{PMK} = 90^\circ$

Lại có $AB \perp PQ$ tại $C \Rightarrow \widehat{PCK} = 90^\circ$

Xét tứ giác $PMKC$ có $\widehat{PMK} + \widehat{PCK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra $PMKC$ là tứ giác nội tiếp

b) Ta có $\widehat{DEM} = \widehat{EPM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{EM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cung EM)

Xét ΔDEM và ΔDPE có: $\widehat{DEM} = \widehat{DPE}$; $\widehat{EDP}$ chung

$\Rightarrow \Delta DEM \backsim \Delta DPE$ $(g.g) \Rightarrow \frac{DE}{DP} = \frac{DM}{DE} \Leftrightarrow DM.DP = DE^2$

c) Xét ΔDMK và ΔDCP có $\widehat{DMK} = \widehat{DCP} = 90^\circ$; $\widehat{PDC}$ chung

$\Rightarrow \Delta DMK \backsim \Delta DCP$ $(g.g) \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{DK}{DP} \Leftrightarrow DM.DP = DC.DK$

Mà $DM.DP = DE^2$ (cmt) $\Rightarrow DK.DC = DE^2$

Dễ dàng chứng minh được K là trực tâm ΔPDQ

$\Rightarrow PK \perp DQ \Rightarrow \widehat{PFQ} = 90^\circ$

Chứng minh được $\Delta DAM \backsim \Delta DPB$ $(g.g) \Rightarrow \frac{DA}{DP} = \frac{DM}{DB} \Rightarrow DA.DB = DM.DP = DK.DC \Rightarrow DK = \frac{DA.DB}{DC}$

Vì đường kính PQ vuông góc với AB tại C nên C là trung điểm AB

$\Rightarrow D, A, B, C$ cố định nên K cố định

Ta dễ dàng chứng minh được $\Delta KCP \backsim \Delta KFD$ $(g.g) \Rightarrow \dfrac{KC}{KF} = \dfrac{KP}{KD}$

$\Leftrightarrow KP.KF = KC.KD$ không đổi do K, C, D cố định

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực dương x, y thoả mãn: $x + \dfrac{3}{y} \le 2.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{3xy}{x^2 + 9y^2}.$

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{x^2+9y^2}{3xy} = \dfrac{x}{3y} + \dfrac{3y}{x} = \left(\dfrac{x}{3y} + \dfrac{y}{27x}\right) + \dfrac{80}{27}.\dfrac{y}{x}$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương ta có $\dfrac{x}{3y} + \dfrac{y}{27x} \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{3y}.\dfrac{y}{27x}} = \dfrac{2}{9}$

Áp dụng BĐT Cosi cho ba số dương ta có $\dfrac{y}{x} + 3x + \dfrac{9}{y} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}.3x.\dfrac{9}{y}} = 3.3 = 9$

$\Rightarrow \dfrac{y}{x} + 3.2 \ge \dfrac{y}{x} + 3\left(x + \dfrac{3}{y}\right) \ge 9 \Rightarrow \dfrac{y}{x} \ge 9 - 3.2 = 3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{Q} = \left(\dfrac{x}{3y} + \dfrac{y}{27x}\right) + \dfrac{80}{27}.\dfrac{y}{x} \ge \dfrac{2}{9} + \dfrac{80}{27}.3 = \dfrac{82}{9} \Rightarrow Q \le \dfrac{9}{82}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x + \dfrac{3}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{3y} = \dfrac{y}{27x} \\ \dfrac{y}{x} = 3x = \dfrac{9}{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1\,;\, y = 3$

Vậy GTLN của $Q = \dfrac{9}{82}$ khi $x = 1\,;\, y = 3.$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 2

TRƯỜNG THCS ARCHIMEDES

ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 11/02/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)$ với $x>0;\ x\neq 1$

1) Tính A biết $x=16$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x>0\,;\,x\neq 1$

3) Tìm giá trị nguyên của x để $P=A:B$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}}=\dfrac{4+1}{4}=\dfrac{5}{4}$

Vậy với $x=16$ thì $A=\dfrac{5}{4}$.

2) $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}:\dfrac{\sqrt{x}-1+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}-1}{1}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

3) $P=A:B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}:\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

Vì $x\in\mathbb{Z}, x>0, x\neq 1\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow \sqrt{x}\geq\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\geq\sqrt{2}-1\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\Leftrightarrow P\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

Dấu "=" xảy ra khi $x=2$

Vậy GTLN của $P=\sqrt{2}+1$ khi $x=2$

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Ở một siêu thị, giá niêm yết ban đầu của một cái bàn là và một cái quạt máy có tổng số tiền là $850\,000$ đồng. Sau đó siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của một cái bàn là và một cái quạt máy trên đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết ban đầu. Do đó khách hàng tiết kiệm hơn được $125\ 000$ đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá niêm yết ban đầu của mỗi sản phẩm trên là bao nhiêu ?

2) Ông An muốn sơn bên ngoài một toà nhà hình hộp chữ nhật có chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao 15m (không sơn trần). Biết diện tích các cửa chiếm 10% diện tích xung quanh toà nhà và giá tiền sơn $1m^2$ tường là $20\ 000$ đồng. Hỏi ông An dự kiến sơn toà nhà hết bao nhiêu tiền?

Lời giải

1) Gọi giá niêm yết của bàn là và quạt máy lần lượt là x , y $(0 < x , y < 850\ 000 ;$ đồng)

Vì tổng giá niêm yết của bàn là và quạt máy là $850\ 000$ nên ta có phương trình

$x + y = 850\ 000$

Bàn là được giảm giá 10% tương ứng số tiền là $10\%x = 0{,}1x$ (đồng)

Quạt máy được giảm 20% tương ứng số tiền là $20\%y = 0{,}2y$ (đồng)

Vì khách hàng đã tiết kiệm được $125\ 000$ đồng nên ta có phương trình

$0{,}1x + 0{,}2y = 125\ 000$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 850\ 000 \\ 0{,}1x + 0{,}2y = 125\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1x + 0{,}1y = 85\ 000 \\ 0{,}1x + 0{,}2y = 125\ 000 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1y = 40\ 000 \\ 0{,}1x + 0{,}2y = 125\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 400\ 000 \\ 0{,}1x + 0{,}2.400\ 000 = 125\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 400\ 000 \\ 0{,}1x = 45\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 400\ 000 \\ x = 450\ 000 \end{cases}$

(tm)

Vậy giá niêm yết ban đầu của bàn là là 450 000 đồng và giá niêm yết ban đầu của chiếc quạt máy là $400\ 000$ đồng

2) Diện tích xung quanh của toà nhà (tính cả các cửa) là $2(10+5).15 = 450\ (m^2)$

Diện tích cần sơn (không tính cửa) là $450.(1-10\%) = 405\ (m^2)$

Số tiền cần sơn nhà là $20\ 000.405 = 8\ 100\ 000$ (đồng)

Vậy số tiền cần sơn nhà là $8\ 100\ 000$ đồng.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 5 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 3 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0\ (1)$ (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

c) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1 , x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{5}$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 9 ; y \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=5 \\ \frac{8}{\sqrt{x}-3}+\frac{2}{2y-1}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2y-1}=1 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1=1 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3}+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \sqrt{x}-3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \sqrt{x}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=25 \end{cases} (tm)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(25;1)$

2) $x^2-2(m+1)x+2m+1=0 \ (1)$

a) Với $m=3$ PT (1) trở thành $x^2-8x+7=0$

Ta có $\Delta'=(-4)^2-1.7=16-7=9>0$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{4+\sqrt{9}}{1}=7$; $x_2=\frac{4-\sqrt{9}}{1}=1$

Vậy với $m=3$ PT có tập nghiệm là $S=\{7;1\}$.

b) Ta có $\Delta'_{(1)}=[-(m+1)]^2-1.(2m+1)=m^2+2m+1-2m-1=m^2$

Để PT(1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta_{(1)}>0 \Leftrightarrow m^2>0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Vậy với $m=0$ thì PT (1) có hai nghiệm phân biệt

c) Vì x_1 ; x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên $m \neq 0$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1.x_2=2m+1 \end{cases}$

Vì x_1, x_2 là độ dài các cạnh của tam giác nên $x_1>0; x_2>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1.x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1)>0 \\ 2m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$$

Vì x_1 , x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{5}$

$$\Rightarrow {x_1}^2+{x_2}^2=5 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-2(2m+1)=5 \Leftrightarrow 4(m^2+2m+1)-4m-2=5 \Leftrightarrow 4m^2+4m-3=0$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)(2m+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \ (tm) \\ m=-\frac{3}{2} \ (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$

Bài IV:(3,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi AC cắt BD tại O. Điểm K thuộc đoạn thẳng AD (K khác A, D). Kẻ DI vuông góc với CK tại I.

1) Chứng minh tứ giác $DIOC$ là tứ giác nội tiếp

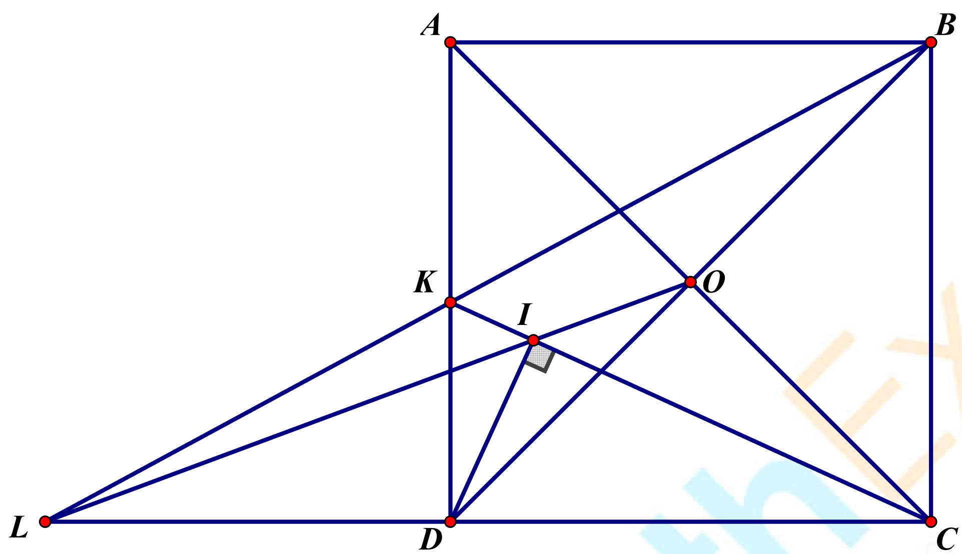
2) Chứng minh $\Delta COI \backsim \Delta CKA$

3) Cho đường thẳng OI và đường thẳng CD cắt nhau tại L.

a) Chứng minh $LD.IC = LC.ID$

b) Chứng minh B, K, L thẳng hàng.

Lời giải



1) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ tại $O \Rightarrow \widehat{DOC} = 90^\circ$

Lại có $DI \perp KC \Rightarrow \widehat{DIC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $DIOC$ có $\widehat{DOC} = \widehat{DIC} = 90^\circ$

Mà I, O là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh DC

$\Rightarrow DIOC$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Vì $DIOC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OIC} = \widehat{ODC}$ (góc nội tiếp chắn cung OC) (1)

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AD = DC \text{ , } AD \perp CD \\ DC = BC \text{ , } DC \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ADC$ vuông cân tại D và ΔBCD vuông cân tại C

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BDC} = 45^\circ$ hay $\widehat{KAC} = \widehat{ODC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{OIC} = \widehat{KAC}$

Xét ΔCOI và ΔCKA có $\widehat{OIC} = \widehat{KAC}$; $\widehat{ACK}$ chung

$\Rightarrow \Delta COI \backsim \Delta CKA\,(g.g)$

3a) ΔADC vuông cân tại D (cmt) $\Rightarrow \widehat{ACD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{OCL} = 45^\circ$ Mà $\widehat{OIC} = \widehat{ODC} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OCL} = \widehat{OIC} = 45^\circ$

Xét ΔOIC và ΔOCL có $\widehat{OIC}=\widehat{OCL}$; $\widehat{IOC}$ chung

$\Rightarrow \Delta OIC \backsim \Delta OCL$ $(g.g) \Rightarrow \dfrac{IC}{LC}=\dfrac{OC}{OL}$ (3)

Lại có $DIOC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OCD}=\widehat{LID}$ (tính chất)

Xét ΔLID và ΔLCO có $\widehat{LID}=\widehat{OCL}$; $\widehat{OLC}$ chung

$\Rightarrow \Delta LID \backsim \Delta LCO$ $(g.g) \Rightarrow \dfrac{ID}{OC}=\dfrac{LD}{OL} \Leftrightarrow \dfrac{ID}{LD}=\dfrac{OC}{OL}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{IC}{LC}=\dfrac{ID}{LD} \Leftrightarrow LD.IC=LC.ID$

b) Ta có $LD.IC=LC.ID \Leftrightarrow \dfrac{LD}{LC}=\dfrac{ID}{IC}$ (5)

ΔDIC vuông tại $I \Rightarrow \dfrac{ID}{IC}=\tan\widehat{ICD}=\tan\widehat{KCD}$ (6)

ΔKCD vuông tại $D \Rightarrow \tan\widehat{KCD}=\dfrac{KD}{CD}$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow \dfrac{ID}{IC}=\dfrac{KD}{CD}=\dfrac{KD}{BC}$ (do $BC=CD$) (8)

Từ (5) và (8) $\Rightarrow \dfrac{LD}{LC}=\dfrac{KD}{BC}$

Khi đó chứng minh được $\Delta LDK \backsim \Delta LCB$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{DLK}=\widehat{CLB}$

$\Rightarrow$ Ba điểm L,K,B thẳng hàng.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+2c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+ac-4bc$.

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có $a(b+2c)\le\left(\dfrac{a+b+2c}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow P=ab+ac-4bc\le ab+ac\le ab+2ac=a(b+2c)\le\dfrac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=b+2c \\ a+b+2c=1 \\ bc=0 \\ ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}$

Vậy GTLN của $P=\dfrac{1}{4}$ khi $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{2};c=0$

Ta có $b+2c\ge 2\sqrt{2bc}\Leftrightarrow \sqrt{2bc}\le \dfrac{b+2c}{2}\Leftrightarrow 2bc=\left(\dfrac{b+2c}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4bc\le 2\left(\dfrac{b+2c}{2}\right)^2\le 2\left(\dfrac{a+b+2c}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow P=ab+ac-4bc\ge -4bc\ge -\dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=0\\ b=2c\\ a+b+2c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=0;\, b=\dfrac{1}{2};\, c=\dfrac{1}{4}$

Vậy GTNN của $P=-\dfrac{1}{2}$ khi $a=0;\, b=\dfrac{1}{2};\, c=\dfrac{1}{4}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 3

TRƯỜNG THCS ĐỐNG ĐA

ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 18/02/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{13\sqrt{x}+2}{x-4}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0; x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) Cho $P=A.B$. Tìm x để $|P|>P$

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}}=\dfrac{3+1}{3}=\dfrac{4}{3}$

Vậy với $x=9$ thì $A=\dfrac{4}{3}$

2) $B=\dfrac{13\sqrt{x}+2}{x-4}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{13\sqrt{x}+2+3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{13\sqrt{x}+2+3x-6\sqrt{x}-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{3x+6\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}$

Để $|P|>P\Leftrightarrow P<0\Leftrightarrow \dfrac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}<0$

Vì $3\left(\sqrt{x}+1\right)>0\forall x>0; x\ne 4$ nên $\sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

Kết hợp ĐKXĐ ta có $0<x<4$

Vậy $0<x<4$

Bài II: (2,0 điểm) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Theo kế hoạch, hai xí nghiệp A và B phải làm tổng cộng 750 đơn hàng. Thực tế, xí nghiệp A làm nhiều hơn 10% và xí nghiệp B làm ít hơn 5% so với dự định nên cả hai xí nghiệp làm được 765 đơn hàng. Tìm số đơn hàng mà mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Lời giải

Gọi số đơn hàng xí nghiệp A và B phải làm theo kế hoạch lần lượt là x và y (đơn hàng) $\left(x, y \in \mathbb{N}^*;\ x, y < 750\right)$

Vì cả hai xí nghiệp làm được 750 đơn hàng nên ta có phương trình $x + y = 750$

Thực tế xí nghiệp A làm được $x + 10\%x = (1 + 10\%)x = 1{,}1x$ (đơn hàng)

Thực tế xí nghiệp B làm được $y - 5\%y = (1 - 5\%)y = 0{,}95y$ (đơn hàng)

Vì theo thực tế cả hai xí nghiệp làm được 765 đơn hàng nên ta có phương trình $1{,}1x + 0{,}95y = 765$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 750 \\ 1{,}1x + 0{,}95y = 765 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}1x + 1{,}1y = 825 \\ 1{,}1x + 0{,}95y = 765 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 750 \\ 0{,}15y = 60 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 750 - y \\ y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 \\ y = 400 \end{cases}$ (tm)

Vậy theo kế hoạch xí nghiệp A phải làm 350 đơn hàng, xí nghiệp B phải làm 400 đơn hàng.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{y} = -2 \\ \dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2}{y} = 7 \end{cases}$

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3 \\ (m^2 + 1)x - 2my = 6 \end{cases}$ (m là tham số)

Tìm tất cả các số nguyên m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho x và y là các số nguyên.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 2$; $y \neq 0$

$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{y} = -2 \\ \dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{15}{y} = -10 \\ \dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{17}{y} = -17 \\ \dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2}{-1} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \dfrac{5}{x-2} + 2 = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \dfrac{5}{x-2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (tm)

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y) = (3;-1)$

2) $\begin{cases} x - y = 3 \\ (m^2 + 1)x - 2my = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ (m^2 + 1)x - 2m(x - 3) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ (m^2 + 1 - 2m)x + 6m = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ (m-1)^2 x = 6 - 6m \end{cases} (*)$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (m-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6-6m}{(m-1)^2} = \dfrac{-6}{m-1} \\ y = x-3 = \dfrac{-6}{m-1} - 3 \end{cases}$$

HPT có nghiệm (x,y) sao cho $x,y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{6}{m-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-1 \in \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$

$\Rightarrow m \in \{-5;-2;-1;0;2;3;4;7\}$ (tm)

Vậy $m \in \{-5;-2;-1;0;2;3;4;7\}$

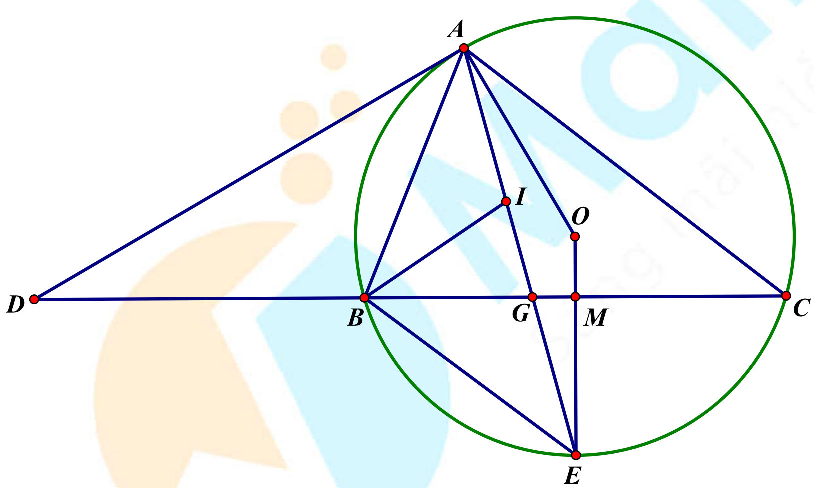
Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm D. Gọi điểm M là trung điểm của dây BC.

1) Chứng minh: Bốn điểm A,D,O,M cùng thuộc một đường tròn

2) Tia OM cắt đường tròn (O) tại điểm E, hai đoạn thẳng AE và BC cắt nhau tại điểm G. Chứng minh: Điểm E nằm chính giữa cung BC và $AB.AC = AE.AG$.

3) Tia phân giác của góc ABC cắt AE tại điểm I. Giả sử dây AB cố định và điểm C di chuyển trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Chứng tỏ điểm I luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải



1) AD là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow DA \perp AO$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{DAO} = 90^\circ$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính OD

Xét (O) có M là trung điểm của dây cung $BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMD} = 90^\circ$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OD

Vậy A,D,M,O thuộc đường tròn đường kính OD.

2) Vì $\left.\begin{matrix} OM \perp BC \\ BM = MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM$ là đường trung trực của BC.

$\Rightarrow BE = EC$ (tính chất) $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BE} =$ sđ $\overset{\frown}{EC}$

$\Rightarrow E$ nằm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

Ta có $\widehat{BAE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BE}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BE}$) và $\widehat{CAE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CE}$ (góc nội tiếp)

Mà sđ $\overset{\frown}{BE} =$ sđ $\overset{\frown}{EC}$ $(cmt) \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAG}$

Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACG}$

Xét ΔBAE và ΔGAC có

$\widehat{AEB} = \widehat{ACG}\ (cmt)$; $\widehat{BAE} = \widehat{CAG}\ (cmt)$

$\Rightarrow \Delta BAE \backsim \Delta GAC\ (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AG} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow AB.AC = AE.AG$

c) BI là phân giác $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

Ta có sđ $\overset{\frown}{BE} =$ sđ $\overset{\frown}{EC} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

$$\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{BAI} - \widehat{IBA} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{ACB}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{AIB} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{AOB}}{4}$$

Vì A, B, O không đổi nên $\widehat{AOB}$ cố định

Vậy I thuộc cung chứa góc $90^\circ + \frac{\widehat{AOB}}{4}$ không đổi dựng trên đoạn AB

Bài V: (0,5 điểm) Cho hai số thực $a \geq 16$ và $b \geq 25$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{a\sqrt{b-25} + b\sqrt{a-16}}{ab}$

Lời giải

$$M = \frac{a\sqrt{b-25} + b\sqrt{a-16}}{ab} = \frac{\sqrt{b-25}}{b} + \frac{\sqrt{a-16}}{a}$$

Ta có $a \geq 16$ và $b \geq 25 \Rightarrow a - 16 \geq 0 ; b - 25 \geq 0$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương ta có: $(b-25) + 25 \geq 2\sqrt{25(b-25)} = 10\sqrt{b-25}$

$$\Rightarrow b \geq 10\sqrt{b-25} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b-25}}{b} \leq \frac{1}{10} \quad (1)$$

Tương tự ta có $(a-16) + 16 \geq 2\sqrt{16(a-16)} = 8\sqrt{a-16} \Leftrightarrow a \geq 8\sqrt{a-16} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-16}}{a} \leq \frac{1}{8}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M \le \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{9}{40}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} b - 25 = 25 \\ a - 16 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 50 \\ a = 32 \end{cases}$

Vậy GTLN của $M = \frac{9}{40}$ khi $a = 32$; $b = 50$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 4

TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ THI THỬ VÀO 10

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 19/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho các biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\, x\ne 1;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=16$.

2) Chứng minh $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

3) Với $x>1, x\ne 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A.B$

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức B ta có $B=\frac{16+3}{\sqrt{16}-2}=\frac{19}{4-2}=\frac{19}{2}$

Vậy với $x=16$ thì $B=\frac{19}{2}$

2) $A=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-1-2\left(\sqrt{x}+2\right)+x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x-4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

3) $P=A.B=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}.\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(x-1\right)+4}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1+\frac{4}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}-1+\frac{4}{\sqrt{x}-1}+2$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có

$\sqrt{x}-1+\frac{4}{\sqrt{x}-1}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right).\frac{4}{\sqrt{x}-1}}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1+\frac{4}{\sqrt{x}-1}+2\ge 6$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-1=\frac{4}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2=4\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=2\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (tm)

Vậy GTNN của $P=6$ khi $x=9$.

Bài II: (1,5 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai tổ cùng làm một công việc trong 15 giờ thì xong. Nếu tổ (I) làm trong 3 giờ, tổ (II) làm trong 5 giờ thì được 25% công việc. Hỏi mỗi tổ làm riêng trong bao lâu thì xong công việc đó?

Lời giải

Gọi thời gian tổ (I) và tổ (II) làm riêng xong công việc là x và y (giờ) $(x, y > 15)$

Trong 1 giờ tổ (I) làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ tổ (II) làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 giờ cả hai tổ làm chung được $\frac{1}{15}$ (công việc)

Ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$

Trong 3 giờ tổ (I) làm được $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 5 giờ tổ (II) làm được $\frac{5}{y}$ (công việc)

Vì tổ (I) làm trong 3 giờ, tổ (II) làm trong 5 giờ thì được $25\% = \frac{1}{4}$ (công việc)

Ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15} \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5} \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{y}=\frac{1}{20} \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=40 \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{40}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=40 \\ \frac{3}{x}=\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=40 \\ x=24 \end{cases}$ (tm)

Vậy thời gian tổ (I) làm một mình xong công việc là 24 giờ

Thời gian tổ (II) làm một mình xong công việc là 40 giờ

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\frac{1}{y-2}=3 \\ 3\sqrt{x-1}-\frac{2}{y-2}=4 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: y=2x+3$ và Parabol $P: y=x^2$

a) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ toạ độ Oxy

b) Tính diện tích tam giác OAB với A và B là các giao điểm của d với (P). (Biết hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B.)

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \geq 1$; $y \neq 2$

Đặt $\sqrt{x-1}=a$; $\dfrac{1}{y-2}=b$ $\quad (a\ge 0;\, b\ne 0)$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 3a-2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ 3(3-b)-2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ 9-3b-2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ -5b=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ (tm)

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \dfrac{1}{y-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ (tm). Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;3)$.

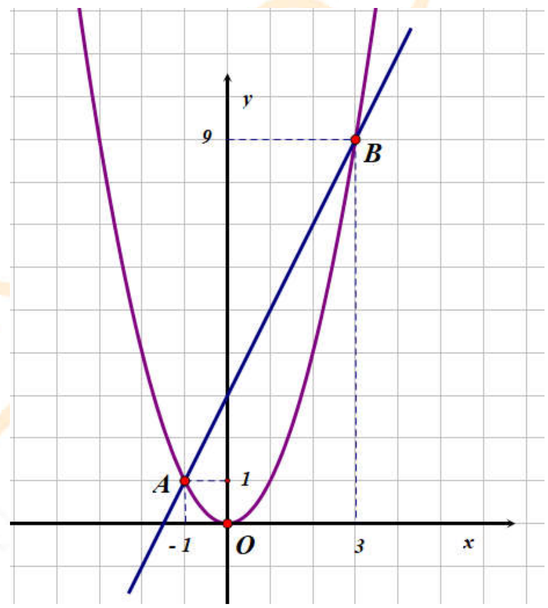
2a) Ta có bảng giá trị:

x	0	1	-1	2	-2
$y=x^2$	0	1	1	4	4

Vậy Parabol (P) đi qua 5 điểm $(0;0)$; $(1;1)$; $(-1;1)$; $(2;4)$; $(-2;4)$

x	0	1
$y=2x+3$	3	5

Vậy đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;3)$ và $(1;5)$



2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(-1;1)$

Với $x=3 \Rightarrow y=9 \Rightarrow B(3;9)$

Vậy giao điểm của (d) và (P) là $A(-1;1)$ và $B(3;9)$

Gọi C là giao điểm của (d) và trục $Oy \Rightarrow C(0;3) \Rightarrow OC=3$

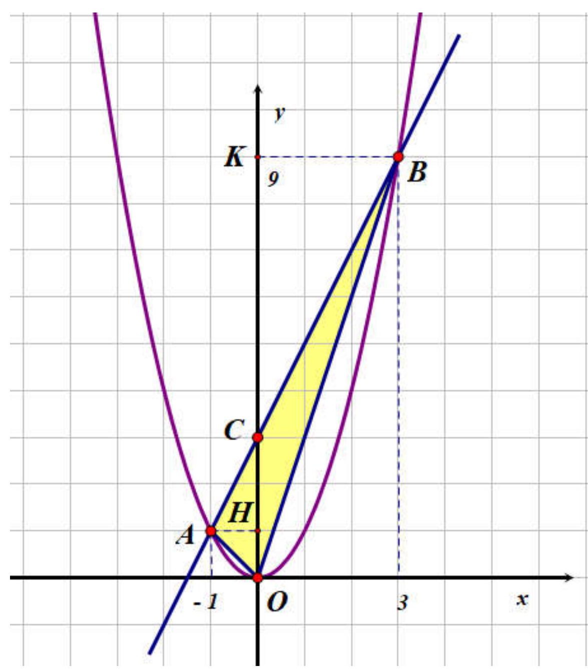
Kẻ $AH\perp CO$ và $BK\perp CO$ $\Rightarrow AH=|-1|=1$; $BK=|3|=3$

$\Rightarrow S_{OAC}=\dfrac{1}{2}AH.CO=\dfrac{1}{2}.1.3=\dfrac{3}{2}$ (đvdt)

$S_{OCB}=\dfrac{1}{2}BK.CO=\dfrac{1}{2}.3.3=\dfrac{9}{2}$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{OAB}=S_{OAC}+S_{OBC}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ (đvdt)

Vậy $S_{OAB}=6$ (đvdt)



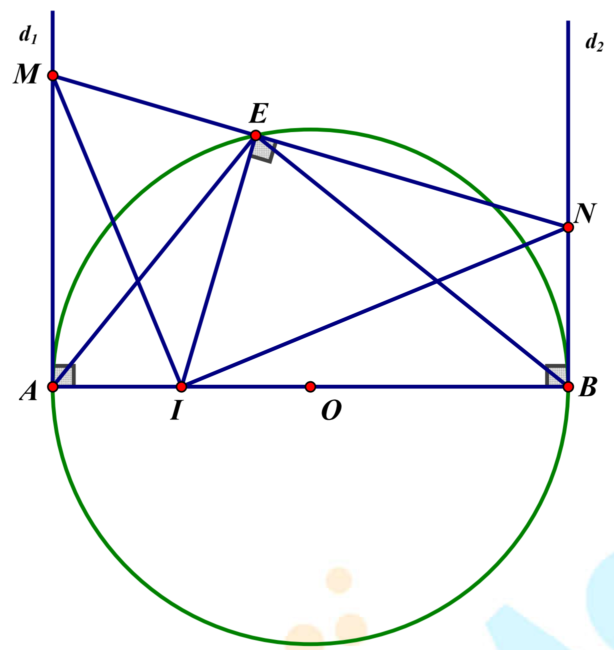
Bài IV: (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB=2R$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B. Gọi I là trung điểm của OA, E là điểm thay đổi trên (O) sao cho E không trùng với A và B. Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt d_1, d_2 lần lượt ở M và N.

1) Chứng minh bốn điểm A,M,E,I thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

2) Chứng minh rằng : a) $IN.IE=EN.IM.$ b) $IB.NE=3IE.NB.$

3) Khi E thay đổi, chứng minh tích $AM.BN$ có giá trị không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMNI theo R.

Lời giải



1) d_1, d_2 là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow d_1 \perp AO$; $d_2 \perp BO$

$\Rightarrow \widehat{MAI}=90^\circ \Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính MI

Lại có $EI \perp d$ tại $E \Rightarrow \widehat{MEI}=90^\circ \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính MI

Suy ra E,I,M,A thuộc đường tròn có tâm là trung điểm MI, bán kính $\dfrac{MI}{2}$.

2a) Dễ dàng chứng minh được $IENB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{EI}$) $\Rightarrow \widehat{ENI}=\widehat{EBA}$ (1)

Xét (O) có $\widehat{EBA}=\widehat{MAE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AE}$) (2)

Lại có $AIEM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MAE}=\widehat{MIE}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{ME}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MIE}=\widehat{ENI}$

Xét ΔMIE và ΔINE có $\widehat{MIE}=\widehat{ENI}$; $\widehat{MEI}=\widehat{IEN}=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta MIE \backsim \Delta INE\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{MI}{IN} = \dfrac{IE}{EN} \Leftrightarrow MI.NE = IN.IE$

2b) $IENB$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ENB} = \widehat{EIA}$ (tính chất) (4)

Xét (O) có $\widehat{EAI} = \widehat{EAB} = \widehat{NBE}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BE}$) (5)

Xét ΔAIE và ΔBNE có: $\widehat{EIA} = \widehat{ENB}\ (cmt)$; $\widehat{EAI} = \widehat{NBE}\ (cmt)$

$\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta BNE\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AI}{BN} = \dfrac{IE}{NE} \Leftrightarrow AI.NE = IE.BN$ (*)

Ta có $OI = AI = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{R}{2}$; $BI = AB - IA = 2R - \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2} \Rightarrow BI = 3AI$

Từ (*) suy ra $3AI.NE = 3IE.NB \Rightarrow BI.NE = 3IE.NB$

3) * $AMEI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EIM} = \widehat{EAM}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{EM}$)

Xét (O) có $\widehat{EAM} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Tương tự ta có $\widehat{EIN} = \widehat{EBN}$ và $\widehat{EBN} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{EB}$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{EIM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AE} \\ \widehat{EIN} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{EB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EIM} + \widehat{EIN} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{AE} + \text{sđ } \overset{\frown}{EB}\right) \Rightarrow \widehat{MIN} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AB} = \dfrac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$ (do AB là đường kính)

ΔAMI vuông tại $A \Rightarrow \widehat{AMI} + \widehat{AIM} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AMI} + \widehat{AIM} = 90^\circ$ mà $\widehat{AIM} + \widehat{NIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{NIB}$

Xét ΔMAI và ΔIBN có $\widehat{AMI} = \widehat{NIB}\ (cmt)$; $\widehat{MAI} = \widehat{NBI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta IBN\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{BI} = \dfrac{AI}{NB} \Leftrightarrow MA.NB = AI.BI = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$ (không đổi)

$* S_{MIN} = \dfrac{1}{2}MI.IN$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \ge \left(ac + bd\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \ge a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(ad - bc\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ad = bc$

Áp dụng BĐT trên ta có

$S_{MIN}{}^2 = \dfrac{1}{4}MI^2.NI^2 = \dfrac{1}{4}\left(MA^2 + AI^2\right)\left(NB^2 + IB^2\right) \ge \dfrac{1}{4}\left(MA.NB + IA.IB\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3R^2}{4} + \dfrac{3R^2}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{3R^2}{4}\right)^2$

$\Rightarrow S_{MIN} \geq \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow$ GTNN của $S_{MIN} = \dfrac{3R^2}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $MA.IB = NB.IA \Rightarrow \dfrac{AM}{NB} = \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NB = 3AM$

Mà $AM.NB = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow 3AM.AM = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow AM^2 = \dfrac{R^2}{4} \Rightarrow AM = \dfrac{R}{2}$

$\Rightarrow \Delta AMI$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMI} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{AMI} = 45^\circ$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AI}$)

Vậy GTNN của $S_{MIN} = \dfrac{3R^2}{4}$ khi E thuộc (O) sao cho $\widehat{AEI} = 45^\circ$

Bài V: (0,5 điểm) Giải phương trình $5x^2 - 12x + 6 - 2\sqrt[3]{(x^3-2)^2} + 5\sqrt[3]{x^3-2} = 0.$ (1)

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x^3-2} \Rightarrow x^3 - 2 = t^3$ (2)

Từ (1) trở thành $5x^2 - 12x + 6 - 2t^2 + 5t = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 6 = 2t^2 - 5t$ (3)

Lấy (2) trừ (3) ta có: $x^3 - 5x^2 + 12x - 8 = t^3 - 2t^2 + 5t$

$\Leftrightarrow (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + x^2 = (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + t^2 + 2t + 1$

$\Leftrightarrow (x-2)^3 + x^2 = (t-1)^3 + (t+1)^2$ (4)

Đặt $\begin{cases} a = x-2 \\ b = t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a+2 \\ t = b+1 \end{cases}$

Suy ra (4) trở thành $a^3 + (a+2)^2 = b^3 + (b+2)^2$

$\Leftrightarrow a^3 - b^3 + (a+2)^2 - (b+2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)(a+b+4) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + a + b + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(2a^2 + 2ab + 2b^2 + 2a + 2b + 8) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left[(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) + 6\right] = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)\underbrace{\left[(a+b)^2 + (a+1)^2 + (b+1)^2 + 6\right]}_{>0\ \forall a,b} = 0$

$\Rightarrow a = b$

Với $a = b$ ta có $x - 2 = t - 1 \Leftrightarrow t = x - 1$

Với $t = x - 1$ ta có $\sqrt[3]{x^3-2} = x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2 = (x-1)^3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$

Vậy PT có tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{6}\right\}$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 5

TRƯỜNG THCS THÁI THỊNH

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 24/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;\,x\neq 4;\,x\neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=36$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

1) Thay $x=36$ (tmdk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{36-3\sqrt{36}+16}{\sqrt{36}-3}=\dfrac{36-18+16}{6-3}=\dfrac{34}{3}$

Vậy với $x=36$ thì $A=\dfrac{34}{3}$

2) $B=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$

3) $P=A.B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}-3}.\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-3+\dfrac{16}{\sqrt{x}}$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương ta có $\sqrt{x}+\dfrac{16}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{16}{\sqrt{x}}}=8\Leftrightarrow \sqrt{x}+\dfrac{16}{\sqrt{x}}-3\geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}=\dfrac{16}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=16$ (tm)

Vậy GTNN của $P=5$ khi $x=16$.

Bài II: (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người cùng làm một công việc thì sau 7 giờ 12 phút hoàn thành xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\dfrac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc ?

Lời giải

Đổi 7 giờ 12 phút $=\dfrac{36}{5}$ (giờ)

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là x , y (giờ) $\left(x,y>\dfrac{36}{5}\right)$

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 giờ cả hai người làm chung được $\dfrac{5}{36}$ (công việc)

Ta có phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{36}$

Trong 5 giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{5}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ người thứ hai làm được $\dfrac{6}{y}$ (công việc)

Vì người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\dfrac{3}{4}$ công việc nên ta có phương trình $\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{36}\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12}\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12\\ \dfrac{5}{12}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=12\\ \dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12\\ y=18\end{cases}$ (tm)

Vậy thời gian người thứ nhất làm riêng xong công việc là 12 giờ, thời gian người thứ hai làm riêng xong công việc là 18 giờ

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2}\\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2\end{cases}$

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=4\\ x-my=1\end{cases}$ (với m là tham số)

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thoả mãn x và y là hai số đối nhau.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 4$; $y \geq -1$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{4}{x-4}-2\sqrt{y+1}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{x-4}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2 \\ \dfrac{2}{2}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2 \\ 1-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ \sqrt{y+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y+1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=(6;8)$.

2) Để HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thì $\dfrac{m}{1} \neq \dfrac{1}{-m} \Leftrightarrow m^2 \neq -1$ (luôn đúng)

$$\begin{cases} mx+y=4 \\ x-my=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ x-my=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ x-m(4-mx)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ (1+m^2)x=4m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ x=\dfrac{4m+1}{m^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-m.\dfrac{4m+1}{m^2+1} \\ x=\dfrac{4m+1}{m^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4-m}{m^2+1} \\ x=\dfrac{4m+1}{m^2+1} \end{cases}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{4m+1}{m^2+1};\dfrac{4-m}{m^2+1}\right)$.

Vì x và y là hai số đối nhau nên $x+y=0 \Leftrightarrow \dfrac{4m+1}{m^2+1}+\dfrac{4-m}{m^2+1}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3m+5}{m^2+1}=0 \Leftrightarrow 3m+5=0 \Leftrightarrow m=-\frac{5}{3}$$

Vậy $m=-\dfrac{5}{3}$ thoả mãn yêu cầu bài toán

Bài IV: (3,5 điểm) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Kẻ $OH \perp d$ tại H. Điểm A thuộc d và không trùng với điểm H. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B và C là các tiếp điểm). BC cắt OA, OH lần lượt tại M và N. Đoạn thẳng OA cắt (O) tại I

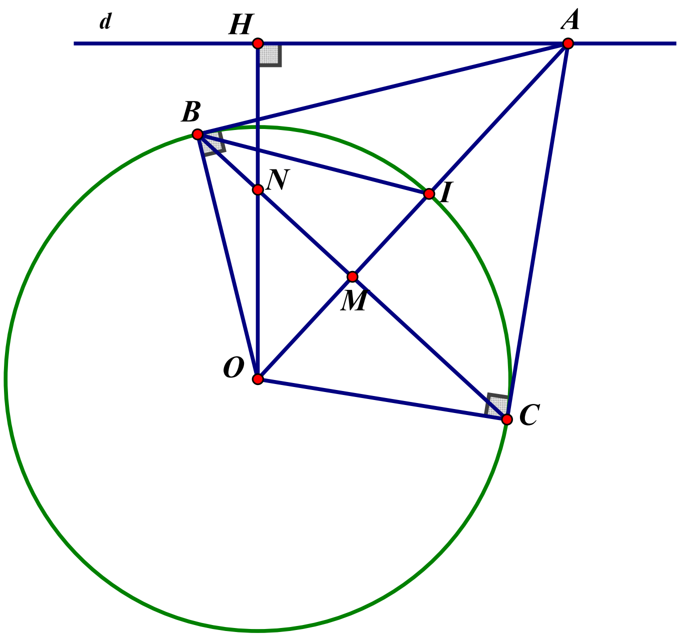
1) Chứng minh 4 điểm O, B, A, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $OM.OA = ON.OH$.

3) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

4) Chứng minh rằng khi điểm A di động trên đường thẳng d thì đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



1) AB, AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AB \perp BO$; $AC \perp CO$

$\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$

$\Rightarrow B$, C thuộc đường tròn đường kính OA

Vậy O, B, A, C thuộc đường tròn đường kính OA

2) Vì AB , AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $A \Rightarrow AB = AC$

Lại có $OB = OC \Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OA \perp BC$ tại $M \Rightarrow \widehat{OMN} = 90^\circ$

Xét ΔOMN và ΔOHA có $\widehat{OMN} = \widehat{OHA} = 90^\circ$; $\widehat{HOA}$ chung

$\Rightarrow \Delta OMN \backsim \Delta OHA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{OM}{OH} = \dfrac{ON}{OA} \Leftrightarrow OM.OA = ON.OH$

3) Ta có AB , AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

$\Rightarrow AO$ là phân giác $\widehat{BAC}$ (1)

Ta có $\begin{cases} \widehat{ABI} + \widehat{OBI} = 90^\circ \\ \widehat{IBC} + \widehat{OIB} = 90^\circ \end{cases}$ mà $\widehat{OBI} = \widehat{OIB}$ (ΔOBI cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \Rightarrow BI$ là phân giác $\widehat{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

4) Xét ΔOAB vuông tại B, $BM \perp OA$

$\Rightarrow OB^2 = OM.OA$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà $OM.OA = ON.OH \Rightarrow OB^2 = ON.OH \Leftrightarrow ON = \dfrac{OB^2}{OH} = \dfrac{R^2}{OH}$

Do d cố định , O cố định nên OH không đổi, điểm H cố định

$\Rightarrow ON$ không đổi, điểm $N \in OH$ cố định

Suy ra BC luôn đi qua điểm N cố định khi A di động trên đường thẳng d.

Bài V: (0,5 điểm) Cho $x>0$, $y>0$ và $x+y\le 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{y^2+xy}$.

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

Với $a,b>0$ ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab}\ge\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 4ab$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $T=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{y^2+xy}\ge\dfrac{4}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{4}{(x+y)^2}\ge\dfrac{4}{1^2}=4$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+xy}=\dfrac{1}{y^2+xy}\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y^2\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy GTNN của $T=4$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 6

UBND QUẬN NAM TỪ LIÊM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 10/03/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x\ge 0;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị của A khi $x=64$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P\ge \dfrac{2}{x+2}$

Lời giải

1) Thay $x=64$ (tmdk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{2}{\sqrt{64}-2}=\dfrac{2}{8-2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

Vậy với $x=64$ thì $A=\dfrac{1}{3}$.

2) $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$$=\dfrac{3\sqrt{x}+6+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$$

3) $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$

Để $P\ge\dfrac{2}{x+2}\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\ge\dfrac{2}{x+2}$

Do $2>0;\, \sqrt{x}+2>0\,;\, x+2>0\ \forall x\ge 0\,;\, x\ne 4$

$\Rightarrow \sqrt{x}+2\le x+2\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\ge 0$

TH1: $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ (tm)

TH2: $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)>0$. Do $\sqrt{x}\ge 0$ $\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$ hoặc $x\ge 1;x\ne 4$

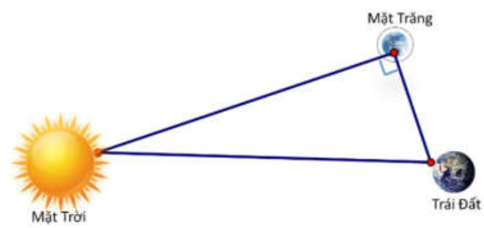
Vậy $x=0$ hoặc $x\ge 1;x\ne 4$

Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu tăng chiều rộng thêm 2m, giảm chiều dài đi 1m thì diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

2) Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là khoảng cách lý tưởng giúp Trái Đất nhận được lượng nhiệt và ánh sáng phù hợp, từ đó giúp sự sống trên Trái Đất tồn tại và phát triển

Trong một số trường hợp của thiên văn học, người ta xem Trái Đất, Mặt Trời, Mặt Trăng là ba chất điểm. Khi Trái Đất E , Mặt Trăng M và Mặt trời S tạo thành một góc vuông $\widehat{EMS}$ thì người ta đo được góc $\widehat{SEM}=89,85^\circ$. Biết khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng là $384400\ km$. Em hãy tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời. *(Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*



Lời giải

1) Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là x và y $(x>y>0\,;\,m)$

Diện tích của mảnh đất là $xy\ (m^2)$

Vì chu vi của mảnh đất là 56m nên ta có phương trình $2(x+y)=56$

Nếu tăng chiều rộng và giảm chiều dài thì:

+ Chiều dài của mảnh đất khi đó là $x-1\ (m)$

+ Chiều rộng của mảnh đất khi đó là $y+2\ (m)$

+ Diện tích mảnh đất khi đó là $(x-1)(y+2)\ (m^2)$

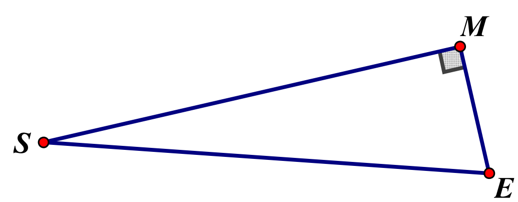
Theo đề bài, diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$ nên ta có phương trình $(x-1)(y+2)-xy=18$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}2(x+y)=56\\(x-1)(y+2)-xy=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=28\\xy+2x-y-2-xy=18\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=28\\2x-y=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=28\\3x=48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=12\\x=16\end{cases}$ (tm)

Vậy chiều dài của mảnh đất là 16m , chiều rộng của mảnh đất là 12m

2) Bài toán được cho theo mô hình sau



Xét ΔSME vuông tại M có

$\cos\widehat{SEM}=\dfrac{ME}{SE}\Rightarrow SE=\dfrac{ME}{\cos\widehat{SEM}}$

$\Rightarrow SE=\dfrac{384400}{\cos 89,85^\circ}\approx 146830152\ (km)$

Vậy khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời khoảng 146 830 152 (km)

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4\left|x+2\right|-\dfrac{3}{y-1}=1 \\ \left|x+2\right|+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=2x-1$ và $(d'): y=-mx+5$, với m là tham số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng trên cắt nhau

b) Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau. Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d'). Tìm tất cả các giá trị của m để x và y là hai số đối nhau

Lời giải

1) ĐKXĐ: $y \neq 1$

Đặt $a=\left|x+2\right|$; $b=\dfrac{1}{y-1}$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a-3b=1 \\ a+b=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-3b=1 \\ 3a+3b=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=\dfrac{7}{2} \\ a+b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}+b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \left|x+2\right|=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y-1}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2=\dfrac{1}{2} \\ x+2=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ y=4 \end{cases}$ (tm)

Vậy HPT có hai nghiệm là $\left(-\dfrac{3}{2};4\right)$ và $\left(-\dfrac{5}{2};4\right)$

2a) Để (d) và (d') cắt nhau thì $-m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq -2$

Vậy với $m=-2$ thì (d) và (d') cắt nhau

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') ta có

$$2x-1=-mx+5 \Leftrightarrow (2+m)x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{m+2} \Rightarrow y=2.\frac{6}{m+2}-1=\frac{10-m}{m+2}$$

Vậy $M\left(\dfrac{6}{m+2};\dfrac{10-m}{m+2}\right)$

Vì x và y là hai số đối nhau nên $x+y=0$

$$\Rightarrow \frac{6}{m+2}+\frac{10-m}{m+2}=0 \Leftrightarrow \frac{16-m}{m+2}=0 \Rightarrow 16-m=0 \Leftrightarrow m=16 \text{ (tm)}$$

Vậy $m=16$.

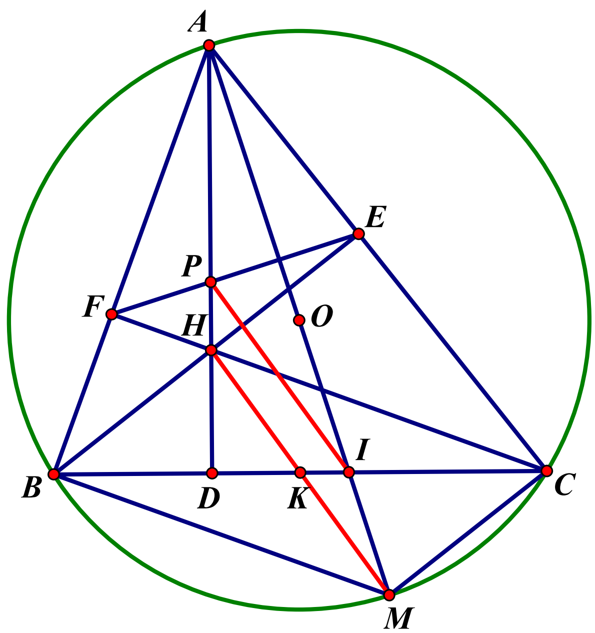
Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). AD,BE,CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh bốn điểm A,F,H,E cùng thuộc một đường tròn.

2) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O). Chứng minh $AD.AM = AB.AC$

3) Gọi P là giao điểm của AH và EF. I là giao điểm của AM và BC. K là trung điểm của BC. Chứng minh: H,K,M thẳng hàng và $PI//HK$.

Lời giải



1) Vì $BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AH

Vì $CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AH

Suy ra 4 điểm A,F,H,E thuộc đường tròn đường kính AH

2) Xét (O) có $\widehat{ABD} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACM} = 90^\circ$

Xét ΔADB và ΔACM có $\widehat{ABD} = \widehat{AMC}$; $\widehat{ADB} = \widehat{ACM}$

$$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACM\ (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AM} \Leftrightarrow AD.AM = AB.AC$$

3) Ta có $BH//CM$ (cùng vuông góc với AC)

$CH//MB$ (cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BHCM$ là hình bình hành (dhnb)

Vì K là trung điểm $BC \Rightarrow K$ là trung điểm HM

Vậy H, K, M thẳng hàng.

Vì $\Delta ADB \backsim \Delta ACM$ $(cmt) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAI}$

Tự chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABI}$

$\Rightarrow \Delta APE \backsim \Delta AIB$ $(g.g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AE}{AB}$

Chứng minh $\Delta AHE \backsim AMB$ $(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AE}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow \dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AI}{AM} \Rightarrow PI // HM$ (Định lý Talet đảo)

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm a, b thoả mãn $a + b = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a^2 + b + 1} + \sqrt{b^2 + a + 1}$.

Lời giải

* Tìm GTLN

Từ giả thiết suy ra $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$

Do đó $a(a-1) \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le a$ và $b(b-1) \le 0 \Leftrightarrow b^2 \le b$

Khi đó $P = \sqrt{a^2 + b + 1} + \sqrt{b^2 + a + 1} \le \sqrt{a + b + 1} + \sqrt{a + b + 1} = 2\sqrt{a + b + 1} = 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1$ và $b = 0$ hoặc $a = 0$ và $b = 1$.

Vậy GTLN của $P = 2\sqrt{2}$ khi $a = 1$ và $b = 0$ hoặc $a = 0$ và $b = 1$.

* Tìm GTNN

Ta có $P^2 = \left(\sqrt{a^2 + b + 1} + \sqrt{b^2 + a + 1}\right)^2 \ge 4\sqrt{(a^2 + b + 1)(b^2 + a + 1)}$

$$= 4\sqrt{(ab)^2 + (a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) + ab + (a + b) + 1}$$

$$= 4\sqrt{(ab)^2 + (a + b)^3 - 3ab(a + b) + (a + b)^2 - 2ab + ab + (a + b) + 1}$$

$$= 4\sqrt{(ab)^2 - 4ab + 4} = 4\sqrt{\left(ab - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{2}ab + \frac{63}{16}}$$

$$\ge 4\sqrt{0 - \frac{7(a + b)^2}{8} + \frac{63}{16}} = 7$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

Vậy GTNN của $P = \sqrt{7}$ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 7

UBND QUẬN LONG BIÊN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: .../05/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $Q=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 1$

1) Tính giá trị của Q khi $x=16$

2) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\le Q$.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmdk) vào biểu thức Q ta được: $Q=\dfrac{7\sqrt{16}-2}{16+2\sqrt{16}}=\dfrac{7.4-2}{16+2.4}=\dfrac{26}{24}=\dfrac{13}{12}$

Vậy $Q=\dfrac{13}{12}$ khi $x=16$.

2) $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left[\dfrac{x-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right].\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$=\left[\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right].\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Để $P\le Q$ thì $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\le\dfrac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}-\dfrac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\le 0$

Mà $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)>0$ (với $x>0, x\neq 1$)

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (tmđk)

Vậy $x=4$

Bài II: (2,5 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Phát động thi đua chào mừng 20 năm ngày thành lập quận Long Biên, hai phường Ngọc Thụy và Phúc Đồng tham gia lắp đặt camera để đảm bảo an ninh đô thị. Trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera. Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên cả hai phường đã lắp được 200 chiếc. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi phường lắp được bao nhiêu chiếc camera?

2) Một hộp sữa đặc có dạng một hình trụ với đường kính đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Tính thể tích của hộp sữa đó. (Lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi số camera phường Ngọc Thụy và phường Phúc Đồng lắp được trong tháng thứ nhất lần lượt là x (chiếc) và y (chiếc) (ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x < 180$; $y < 180$).

Do trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera nên ta có phương trình: $x + y = 180 \quad (1)$

Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên:

Số camera phường Ngọc Thụy lắp được trong tháng thứ hai là: $x + 10\%x = 1{,}1x$ (chiếc).

Số camera phường Phúc Đồng lắp được trong tháng thứ hai là: $y + 12\%y = 1{,}12y$ (chiếc)

Do tháng thứ hai cả hai phường lắp được 200 chiếc nên ta có phương trình: $1{,}1x + 1{,}12y = 200$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 180 \\ 1{,}1x + 1{,}12y = 200 \end{cases}$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} x = 80 \\ y = 100 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy trong tháng thứ nhất, phường Ngọc Thụy lắp được 80 chiếc camera, phường Phúc Đồng lắp được 100 chiếc camera.

2) Bán kính đáy hộp sữa là: $R = \dfrac{6}{2} = 3$ (cm)

Thể tích hộp sữa đó là: $V = \pi R^2 h \approx 3{,}14.3^2.9 = 254{,}34 \ \left(cm^3\right)$

Vậy thể tích của hộp sữa đó khoảng $254{,}34 \ cm^3$.

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{\sqrt{y-2}}{2} = 4 \\ \dfrac{4}{x} - 3\sqrt{y-2} = -2 \end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = (3 - 2m)x - 4$.

a) Chứng minh rằng (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (P) và (d).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right) - 2x_1 - 2x_2$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 0$; $y \geq 2$

Đặt $\dfrac{1}{x} = a$; $\sqrt{y-2} = b$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a + \dfrac{b}{2} = 4 \\ 4a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18a + 3b = 24 \\ 4a - 3b = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 22a = 22 \\ 4a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \sqrt{y-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$ (tm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (1;6)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có:

$-x^2 = (3-2m)x - 4 \Leftrightarrow x^2 + (3-2m)x - 4 = 0$ (I)

Ta có: $\Delta = (2m-3)^2 + 16 > 0$ với mọi m (do $(2m-3)^2 \geq 0$ với mọi m)

$\Rightarrow$ Phương trình (I) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Vậy (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Xét PT hoành độ giao điểm: $x^2 + (3-2m)x - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 3 & (1) \\ x_1x_2 = -4 & (2) \end{cases}$

Theo bài ra, ta có: $K = (1-x_1^2)(1-x_2^2) - 2x_1 - 2x_2 = 1 - (x_1^2 + x_2^2) + (x_1x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)$

$= 1 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)$ (3)

Thay (1), (2) vào (3), ta có: $K = 1 - (2m-3)^2 + 2.(-4) + (-4)^2 - 2.(2m-3)$

$K = -4m^2 + 8m + 6 = -(2m-2)^2 + 10 \leq 10$ do $(2m-2)^2 \geq 0$ với mọi m.

Vậy giá trị lớn nhất của K là 10 $\Leftrightarrow (2m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

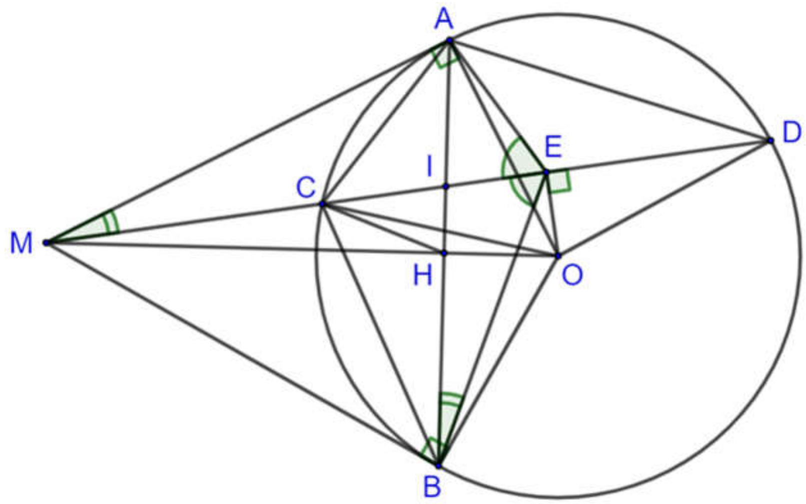
Bài IV: (3,0 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD với (O) sao cho $MC < MD$ và tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Kẻ AB cắt MD tại I, cắt MO tại H. Chứng minh $EA.EB = EI.EM$ và $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$.

3) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt AE tại K. Chứng minh $IK // AC$.

Lời giải



1) Xét (O) có: MA, MB là hai tiếp tuyến

$\Rightarrow MA \perp OA, MB \perp OB$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{MBO} = 90^0$.

Xét (O) có: E là trung điểm của dây $CD \Rightarrow OE \perp CD$ (định lí) $\Rightarrow \widehat{MEO} = 90^0$

Ta có: $\widehat{MEO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Ta có: $\widehat{MAO} = \widehat{MEO} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MAEO$ nội tiếp

Mà tứ giác $MEOB$ nội tiếp (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM

Xét (O) có: MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $M \Rightarrow MA = MB$ (tính chất)

Xét đường tròn đường kính OM có: $MA = MB \Rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{BEM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

và $\widehat{EMA} = \widehat{EBI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Suy ra $\Delta EAM \backsim \Delta EIB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EA}{EI} = \dfrac{EM}{EB} \Rightarrow EA.EB = EI.EM$ (điều phải chứng minh).

Ta có $AB \perp OM$ tại H (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Xét ΔOAM vuông tại A, đường cao AH có: $MH.MO = MA^2$ (hệ thức lượng) (1)

Xét ΔMAC và ΔMDA có: $\widehat{MAC} = \widehat{MDA} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{AMC}$ chung

$\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow MC.MD = MA^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow MH.MO = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$.

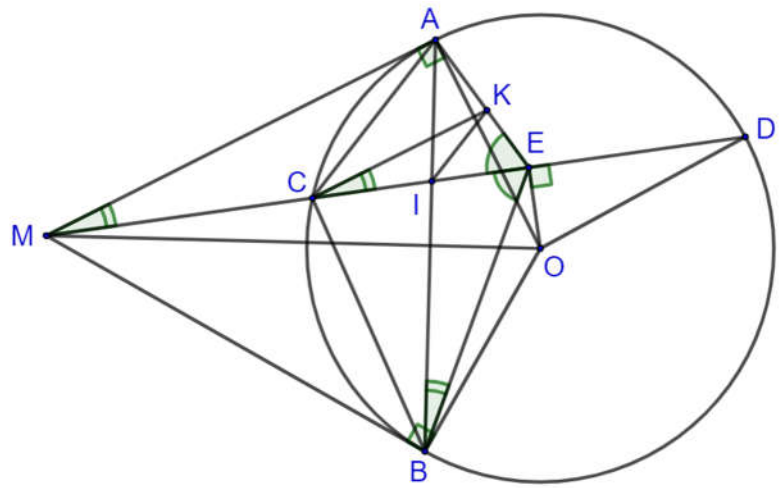
Xét ΔMCH và ΔMOD có: $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$ và $\widehat{HMC}$ chung

$\Rightarrow \Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

Xét ΔOCD có: $OC = OD$ (bán kính) $\Rightarrow \Delta OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{OCE}$.

Vậy $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$ (điều phải chứng minh).

3)



Do $CK//MA \Rightarrow \widehat{ECK}=\widehat{EMA}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{EMA}=\widehat{EBI}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{ECK}=\widehat{EBI}$

Xét ΔEKC và ΔEIB có: $\widehat{ECK}=\widehat{EBI}$ và $\widehat{KEC}=\widehat{IEB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta EKC \backsim \Delta EIB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EK}{EI}=\dfrac{CK}{BI}$ (3)

Ta có: $\widehat{EKC}=\widehat{EIB}$ (do $\Delta EKC \backsim \Delta EIB$) và $\widehat{EKC}+\widehat{AKC}=180^0$; $\widehat{EIB}+\widehat{CIB}=180^0 \Rightarrow \widehat{AKC}=\widehat{CIB}$.

Lại có: $\widehat{ACK}=\widehat{CAM}$ (do $CK//MA$); $\widehat{CAM}=\widehat{CBI}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{ACK}=\widehat{CBI}$.

Suy ra $\Delta ACK \backsim \Delta CBI$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CK}{BI}=\dfrac{AK}{CI}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{EK}{EI}=\dfrac{AK}{CI} \Rightarrow \dfrac{EK}{AK}=\dfrac{EI}{CI} \Rightarrow IK//AC$ (định lí Ta-lét đảo).

Bài V: (0,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3}{b+4}\le\dfrac{c+1}{c+3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=(a+1)(b+1)(c+1)$.

Lời giải

* Xét bất đẳng thức: $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (*) với $x\ge 0,\ y\ge 0$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$).

* Ta có: $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3}{b+4}\le\dfrac{c+1}{c+3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3}{b+4}+\dfrac{2}{c+3}\le 1$ (1)

Áp dụng (1) và (*), ta có: $\dfrac{a+1}{a+2}=1-\dfrac{1}{a+2}\ge\dfrac{3}{b+4}+\dfrac{2}{c+3}\ge 2\sqrt{\dfrac{6}{(b+4)(c+3)}}$

$$\dfrac{b+1}{b+4}=1-\dfrac{3}{b+4}\ge\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{2}{c+3}\ge 2\sqrt{\dfrac{2}{(a+2)(c+3)}}$$

$$\dfrac{c+1}{c+3}=1-\dfrac{2}{c+3}\ge\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3}{b+4}\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{(a+2)(b+4)}}$$

* Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a+2)(b+4)(c+3)} \ge 8.\frac{6}{(a+2)(b+4)(c+3)} \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) \ge 48$$

Vậy min $Q = 48 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{3}{b+4} = \frac{2}{c+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=3 \end{cases}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 8

UBND QUẬN HAI BÀ TRƯNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: .../05/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{16}{4-x}\right).\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

2) Chứng minh $B=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

3) Tìm x để biểu thức $P=A.B$ nhận giá trị là số nguyên dương.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmdk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}+2}{2\sqrt{16}+1}=\dfrac{4+2}{2.4+1}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

Vậy với $x=16$ thì $A=\dfrac{2}{3}$.

2) $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{16}{4-x}\right).\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2-\left(\sqrt{x}-2\right)^2-16}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}$

$=\dfrac{\left(x+4\sqrt{x}+4\right)-\left(x-4\sqrt{x}+4\right)-16}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}=\dfrac{8\sqrt{x}-16}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}$

$=\dfrac{8\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{7\sqrt{x}-2}{8}=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}.\dfrac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$

$\Rightarrow 2P=\dfrac{14\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{7\left(2\sqrt{x}+1\right)-11}{2\sqrt{x}+1}=7-\dfrac{11}{2\sqrt{x}+1}$

Với $x\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\ge 0\Rightarrow 2P<7\Rightarrow P<\dfrac{7}{2}$

Để P nhận giá trị nguyên dương thì $P\in\left\{1;2;3\right\}$

+ Với $P=1\Rightarrow \dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow 7\sqrt{x}-2=2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{25}$ (tm)

+ Với $P=2 \Rightarrow \dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=2 \Leftrightarrow 7\sqrt{x}-2=2\left(2\sqrt{x}+1\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{16}{9}$ (tm)

+ Với $P=3 \Rightarrow \dfrac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=3 \Leftrightarrow 7\sqrt{x}-2=3\left(2\sqrt{x}+1\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=25$ (tm)

Vậy $x \in \left\{\dfrac{9}{25};\dfrac{16}{9};25\right\}$

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Sân vận động Morodok Techo ở thủ đô PhnomPenh của Campuchia có sức chứa 60 000 chỗ ngồi là nơi phục vụ cho SEA Games 32. Một đơn vị được giao nhiệm vụ in vé vào sân. Thực tế mỗi ngày đơn vị đó đã in được nhiều hơn 2000 tấm vé so với kế hoạch. Vì thế đơn vị đã hoàn thành sớm công việc trước 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đơn vị đó phải in bao nhiêu tấm vé? (Giả sử số tấm vé mỗi ngày đơn vị sản xuất đó in là như nhau).

2) Một hình nón có bán kính đáy bằng $5cm$ và diện tích xung quanh là $65\pi\,cm^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Lời giải

1) Gọi số vé đơn vị sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (vé) $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Thời gian dự kiến in xong 60 000 tấm vé là $\dfrac{60\,000}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày đơn vị sản xuất in được số tấm vé là $x+2000$ (vé)

Thời gian thực tế mà đơn vị đó in xong 60 000 tấm vé là $\dfrac{60\,000}{x+2000}$ (ngày)

Do làm vượt kế hoạch trước 1 ngày nên ta có phương trình $\dfrac{60\,000}{x}-\dfrac{60\,000}{x+2000}=1$

$x^2+2000x-120\,000\,000=0$. Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x=10000\ \ (tm) \\ x=-12000\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày đơn vị sản xuất phải in được 10 000 tấm vé

2) Gọi h, l lần lượt là chiều cao và đường sinh của hình nón đó

Theo đề bài cho diện tích xung quanh là $65\pi\,cm^2$, ta có $S_{xq}=\pi.R.l=65\pi \Leftrightarrow 5\pi l=65\pi \Leftrightarrow l=13\ (cm)$

Độ dài chiều cao hình nón là $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\ (cm)$

Thể tích của hình nón đó là: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2 h=\dfrac{1}{3}\pi.5^2.12=100\pi\ \left(cm^3\right)$

Vậy thể tích hình nón là $100\pi\ cm^3$.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x-3}+4(y-1)^2=5\\2\sqrt{x-3}-y^2+2y=2\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=4x+m^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm các giá trị của m để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $x_1(1-2x_2)+x_2(1-2x_1)=4m+3$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\ge 3$

$$\begin{cases}\sqrt{x-3}+4(y-1)^2=5\\2\sqrt{x-3}-y^2+2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-3}+4(y-1)^2=5\\2\sqrt{x-3}-(y-1)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x-3}+8(y-1)^2=10\\2\sqrt{x-3}-(y-1)^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9(y-1)^2=9\\2\sqrt{x-3}-(y-1)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-1)^2=1\\2\sqrt{x-3}-1^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-1)^2=1\\\sqrt{x-3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-1)^2=1\\x-3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y-1=1\\x-3=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}y-1=-1\\x-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=4\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}y=0\\x=4\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $(x;y)$ là $(4;2)$ và $(4;0)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có

$x^2=4x+m^2\Leftrightarrow x^2-4x-m^2=0\ (1)$

$\Delta=(-4)^2-4.1.(-m^2)=16+4m^2>0\ \forall m$

Suy ra PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1.x_2=-m^2\end{cases}$

Theo đề bài có $x_1(1-2x_2)+x_2(1-2x_1)=4m+3\Leftrightarrow(x_1+x_2)-4x_1x_2=4m+3$

$$\Rightarrow 4-4(-m^2)=4m+3\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=0\Leftrightarrow(2m-1)^2=0\Leftrightarrow 2m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$.

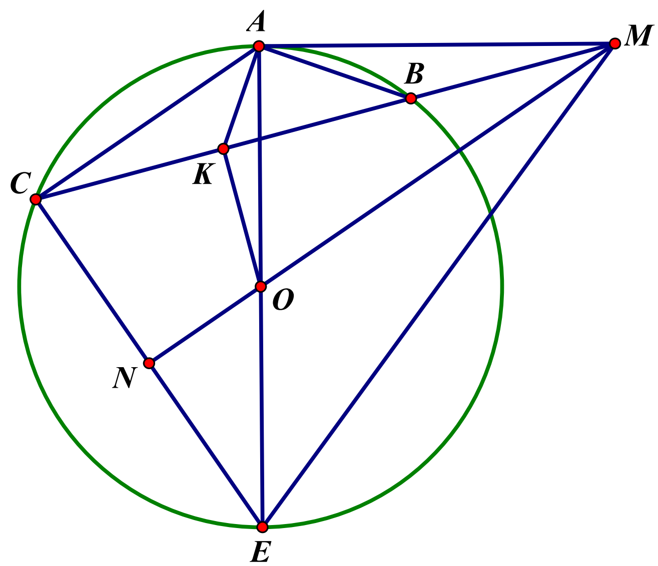
Bài IV: (3,0 điểm) Cho một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến MA tới đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn (O) tại điểm C khác A. Đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại B, K là trung điểm dây cung BC.

1) Chứng minh tứ giác $OMAK$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $MA^2=MB.MC$ và tam giác ABK vuông tại A.

3) Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Chứng minh tam giác ACK đồng dạng với tam giác EMO.

Lời giải



1) Vì AM là tiếp tuyến của (O) nên $AM \perp AO \Rightarrow \widehat{OAM} = 90^\circ$

Xét (O) có K là trung điểm dây $BC \Rightarrow OK \perp BC \Rightarrow \widehat{OKM} = 90^\circ$

Xét tứ giác $OMAK$ có $\widehat{OAM} = \widehat{OKM} = 90^\circ$

Mà A, K là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh OM

Suy ra tứ giác $OMAK$ là tứ giác nội tiếp

2) Ta có : $\widehat{MAB} = \widehat{MCA} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Xét ΔMAB và ΔMCA có $\widehat{AMC}$ chung và $\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta MCA\ (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MB.MC$

Vì $AC // MO \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{OMK}$ (2 góc so le trong) (2)

Tứ giác $OMAK$ nội tiếp nên $\widehat{OMK} = \widehat{OAK}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{OK}$) (3)

Từ (1) , (2) , (3) suy ra $\widehat{OAK} = \widehat{MAB}$ và $\widehat{OAM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KAB} = 90^\circ$

Vậy ΔABK vuông tại A.

3) Ta có $\widehat{ACE} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CE$ mà $MO // AC \Rightarrow MO \perp CE$

Suy ra MO đi qua trung điểm N của CE hay ΔMCE cân tại $M \Rightarrow \widehat{NME} = \widehat{CMN}$

Và $\widehat{ACK} = \widehat{CMN}$ (so le trong) nên $\widehat{OME} = \widehat{ACK}$ (4)

Lại có $\widehat{AKC} + \widehat{AKM} = 180^\circ$ và $\widehat{AOM} + \widehat{MOE} = 180^\circ$

Tứ giác $OMAK$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AKM} = \widehat{AOM}$

Suy ra $\widehat{AKC} = \widehat{MOE}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \Delta ACK \backsim \Delta EMO\ (g.g)$

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$

Lời giải

Vì $a\geq 0;b\geq 0;c\geq 0$; $a+b+c=1$ suy ra $a\leq 1;b\leq 1;c\leq 1\Rightarrow a^2\leq a$; $b^2\leq b$; $c^2\leq c$

Ta có $P=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\geq\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{b^2+2b+1}+\sqrt{c^2+2c+1}$

$\Leftrightarrow P\geq\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(c+1)^2}=|a+1|+|b+1|+|c+1|=(a+b+c)+3=1+3=4$

Vậy GTNN của $P=4$. Dấu "=" xảy ra khi $(a;b;c)=(1;0;0)$ và các hoán vị

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 9

UBND QUẬN BA ĐÌNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 10/05/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0,\ x\neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

3) Cho $P=A:B$. Tìm số tự nhiên x để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}}=\dfrac{3+2}{3}=\dfrac{5}{3}$

Vậy với $x=9$ thì $A=\dfrac{5}{3}$.

2) $B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{x-3\sqrt{x}+4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ (đpcm)

3) $P=A:B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=1+\dfrac{4}{\sqrt{x}-2}$

TH1: $0<x<4\Rightarrow P<0$

TH2: $x>4\ ;\ x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\geq 5\Leftrightarrow \sqrt{x}\geq\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2\geq\sqrt{5}-2\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x}-2}\leq\dfrac{4}{\sqrt{5}-2}$

$\Leftrightarrow P\leq\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=9+4\sqrt{5}$

Kết hợp 2 TH $\Rightarrow$ GTLN của $P=9+4\sqrt{5}$ khi $x=5$ (tmđk)

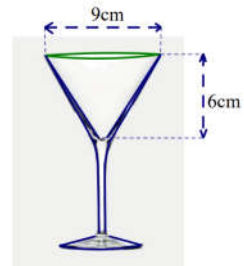
Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai bạn Minh và An xuất phát cùng một lúc từ địa điểm A để đi đến địa điểm B bằng phương tiện xe đạp điện. Mỗi giờ bạn Minh đi nhanh hơn bạn An 2 km nên bạn Minh đến B sớm hơn bạn An $2{,}5$ phút.

Biết quãng đường AB dài 13 km, tính vận tốc xe của mỗi người. Hỏi Minh và An đi như vậy có đúng vận tốc quy định hay không nếu căn cứ theo quy định vận tốc tối đa của xe đạp điện là 25 km/h.

2) Một ly rượu bằng thuỷ tinh, phần đựng rượu dạng hình nón có đường kính miệng ly là 9 cm, chiều cao hình nón (như hình vẽ) là 6 cm. Hỏi ly đó có thể chứa đầy được bao nhiêu mililiter (ml) rượu? (Lấy $\pi \approx 3{,}14$ và coi độ dày thành ly là không đáng kể).



Lời giải

1) Đổi 2,5 phút $= \dfrac{1}{24}$ giờ

Gọi vận tốc xe của bạn An là x (km/h ; $x > 0$)

Khi đó vận tốc xe của bạn Minh là $x+2$ (km/h)

Thời gian bạn An đi hết quãng đường AB là $\dfrac{13}{x}$ (giờ)

Thời gian bạn Minh đi hết quãng đường AB là $\dfrac{13}{x+2}$ (giờ)

Vì bạn Minh đến nơi sớm hơn bạn An 2,5 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{13}{x} - \frac{13}{x+2} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 624 = 0$$

Giải PT ta được $x = 24$ (tmdk) hoặc $x = -26$ (loại)

Vậy vận tốc xe của bạn An là 24 km/h ; vận tốc xe của bạn Minh là 26 km/h

Vậy bạn An đi đúng vận tốc quy định , còn bạn Minh đi không đúng vận tốc quy định.

2) Thể tích hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.(9:2)^2.6 = 40{,}5\pi \approx 127{,}17\ (cm^3)$

$\Rightarrow V \approx 127{,}17\ ml.$

Vậy ly có thể chứa đầy khoảng $127{,}17\ ml$ rượu.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{2}{|x-1|} + 3y = 5 \\ \dfrac{1}{|x-1|} - 2y = -1 \end{cases}$

2) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - m^2 + 3m$ và Parabol $(P): y = x^2$.

a) Với $m = 3$, tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P)

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là số đo chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\dfrac{7}{4}$ (đvdt)

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 1$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{|x-1|}+3y=5\\ \dfrac{1}{|x-1|}-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{|x-1|}+3y=5\\ \dfrac{2}{|x-1|}-4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7y=7\\ \dfrac{2}{|x-1|}-4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ \dfrac{2}{|x-1|}-4=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ \dfrac{2}{|x-1|}=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ |x-1|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x-1=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}y=1\\ x-1=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}y=1\\ x=0\end{cases}\text{ (tm)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(2;1)$ và $(0;1)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$2(m-1)x-m^2+3m=x^2 \Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0$ (*)

Thay $m=3$ vào (*) ta có

$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$

Với $x=0 \Rightarrow y=0$

Với $x=4 \Rightarrow y=16$

Vậy với $m=3$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(0;0)$ và $B(4;16)$

b) Xét PT (*) $x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0$

$\Delta'=(m-1)^2-(m^2-3m)=(m^2-2m+1)-(m^2-3m)=m+1$

Suy ra (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi $\Delta'>0 \Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m-2\\ x_1.x_2=m^2-3m\end{cases}$

Vì x_1 , x_2 là số đo chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật nên $x_1>0$ và $x_2>0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2>0\\ x_1.x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-2>0\\ m^2-3m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ \left[\begin{array}{l}m>3\\ m<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>3$$

Vì hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{7}{4}$ (đvdt) nên $x_1.x_2=\frac{7}{4}\Leftrightarrow m^2-3m=\frac{7}{4}\Leftrightarrow 4m^2-12m-7=0$

$\Leftrightarrow(2m+1)(2m-7)=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (ktm) hoặc $m=\frac{7}{2}$ (tm)

Vậy $m=\frac{7}{2}$

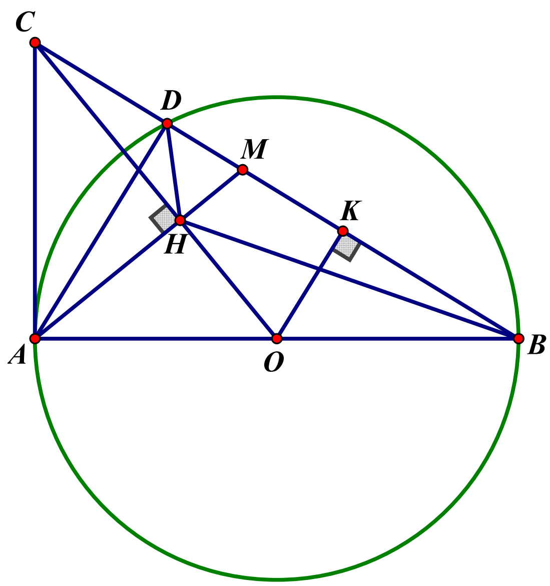
Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cắt đoạn thẳng BC tại điểm thứ hai là D. Kẻ đường thẳng AH vuông góc với đường thẳng OC tại điểm H; đường thẳng AH cắt đoạn thẳng BC tại điểm M.

1) Chứng minh tứ giác $ACDH$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $OH.OC = R^2$ và tam giác OHB đồng dạng với tam giác OBC.

3) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại K. Chứng minh HM là tia phân giác của góc DHB và $MB.MD = MK.MC$.

Lời giải



1) Ta có ΔADB nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB

$\Rightarrow \Delta ADB$ vuông tại $D \Rightarrow \widehat{ADB} = 90°$

Lại có $AH \perp OC \Rightarrow \widehat{CHA} = 90°$

Xét tứ giác $AHDC$ có $\widehat{ADC} = \widehat{CHA} = 90°$

Mà D,H là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC

Suy ra $AHDC$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Xét ΔOAC vuông tại A có $AH \perp OC$

$\Rightarrow OH.OC = OA^2 = R^2$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà $OA = OB \Rightarrow OB^2 = OH.OC \Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OB}$

Xét ΔOHB và ΔOBC có $\widehat{HOB}$ chung ; $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OB}$

$\Rightarrow \Delta OHB \backsim \Delta OBC$ $(c.g.c)$

3) Vì $\Delta OHB \backsim \Delta OBC$ $(cmt) \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OBC}$

Ta có $AHDC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CAD} = \widehat{CHD}$

Lại có $\widehat{CAD} = \widehat{OBC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$)

Suy ra $\widehat{OHB} = \widehat{CHD}$

Từ đó ta có $\widehat{DHM} = \widehat{BHM}$ hay HM là phân giác của $\widehat{BHD}$

Xét ΔDHB có HM là phân giác $\widehat{BHD} \Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{HD}{HB}$

Vì $HC \perp HM \Rightarrow HC$ là phân giác góc ngoài $\Delta DHB \Rightarrow \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{HD}{HB}$

Vậy $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{CD}{CB} \Leftrightarrow MD.BC = MB.CD$

Vì $OK \perp BD$ tại K nên K là trung điểm BD

Từ đó suy ra $MD(MB+MC) = MB(MC-MD)$

$\Rightarrow 2MD.MB = MC(MB-MD)$

$\Rightarrow 2MD.MB = 2MK.MC$

$\Rightarrow MD.MB = MK.MC$

Bài V: (0,5 điểm) Cho a,b là các số thực không âm thoả mãn $a+b=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(a+1)}$.

Lời giải

* Tìm GTLN

Ta có $2\sqrt{3}P = 2\sqrt{3a(b+1)} + 2\sqrt{3b(a+1)}$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số không âm $3a, b+1$ ta có: $2\sqrt{3a(b+1)} \le 3a+b+1$

Tương tự có $2\sqrt{3b(a+1)} \le 3b+a+1$

Suy ra $2\sqrt{3}P \le 3a+b+1+3b+a+1 \Rightarrow 2\sqrt{3}P \le 4a+4b+2 = 6 \Rightarrow P \le \sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a,\, b \ge 0 \\ a+b=1 \\ 3a = b+1 \\ 3b = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$

Vậy GTLN của $P = \sqrt{3}$ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

* Tìm GTNN

Vì $a,b \ge 0 \Rightarrow ab \ge 0$. Ta có $\sqrt{a(b+1)} = \sqrt{ab+a} \Rightarrow \sqrt{a(b+1)} \ge \sqrt{a}$

Tương tự có $\sqrt{b(a+1)} \ge \sqrt{b}$

Suy ra $P \ge \sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a+b} \Rightarrow P \ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a,\, b \ge 0 \\ a+b=1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

Vậy GTNN của $P = 1$ khi $a=1, b=0$ hoặc $a=0, b=1$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 10

UBND QUẬN HOÀN KIẾM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9 – Ngày KT: 24/05/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}+14}{4-x}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Xét biểu thức $P=A.B.$ Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $\sqrt{2P+3}=P$.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}+2}{\sqrt{16}-2}=\dfrac{4+2}{4-2}=\dfrac{6}{2}=3$

Vậy với $x=16$ thì $A=3$

2) $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}+14}{4-x}=\dfrac{5\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(3\sqrt{x}+14\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{5\sqrt{x}+10-3\sqrt{x}-14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$

Theo đề bài $\sqrt{2P+3}=P\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 0\\2P+3=P^2\end{cases}\Leftrightarrow P=3$

Với $P=3$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{64}{9}$ (tmdk)

Vậy với $x=\dfrac{64}{9}$ thì $\sqrt{2P+3}=P$.

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng $12m$ và diện tích mảnh đất bằng $85m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất theo đơn vị mét?

2) Một quả địa cầu hành chính có đường kính bằng $33cm.$ Tính diện tích bề mặt của quả địa cầu, lấy $\pi\approx 3{,}14$.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là x $\left(x>0;\,m\right)$

Chiều dài của mảnh đất là $x+12\ (m)$

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $x(x+12)\ (m^2)$

Vì diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $85m^2$ nên ta có phương trình:

$x(x+12)=85 \Leftrightarrow x^2+12x-85=0$

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x=5\ (tm) \\ x=-17\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy chiều rộng của mảnh đất là $5m$, chiều dài là $17m$.

2) Bán kính của quả địa cầu là $33:2=16{,}5\ (cm)$

Diện tích bề mặt của quả địa cầu là: $S=4\pi R^2 \approx 4.3{,}14.16{,}5^2=3419{,}46\ (cm^2)$

Vậy diện tích bề mặt của quả địa cầu là $3419{,}46\ cm^2$

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=4 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+m^2+4$

a) Với $m=2$, tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại điểm $A(x_1;y_1)$ nằm bên trái trục tung và điểm $B(x_2;y_2)$ nằm bên phải trục tung sao cho $|x_1|-|x_2|=3$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\ge -1;\ y\ne 1$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=4 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1}+\dfrac{2}{y-1}=8 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{x+1}=15 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=3 \\ 3.3-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=9 \\ \dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \text{(tm)}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(8;2)$.

2a) Với $m=2$ phương trình đường thẳng (d) trở thành $(d): y=2x+8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=2x+8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$\Delta=(-2)^2-4.1.(-8)=36>0$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{2+\sqrt{36}}{2.1}=4$ và $x_2=\dfrac{2-\sqrt{36}}{2.1}=-2$

Với $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 16$

Với $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 4$

Vậy toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là $(-2;4)$; $(4;16)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = mx + m^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - m^2 - 4 = 0$ (*)

Ta thấy $a.c = 1.(-m^2 - 4) = -m^2 - 4 < 0$

Suy ra PT (*) có hai nghiệm trái dấu $\forall m$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m^2 - 4 \end{cases}$

Vì $A(x_1;y_1)$ nằm bên trái trục tung và điểm $B(x_2;y_2)$ nằm bên phải trục tung nên $x_1 < 0 < x_2$

Mà theo đề bài $|x_1| - |x_2| = 3 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -3 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm

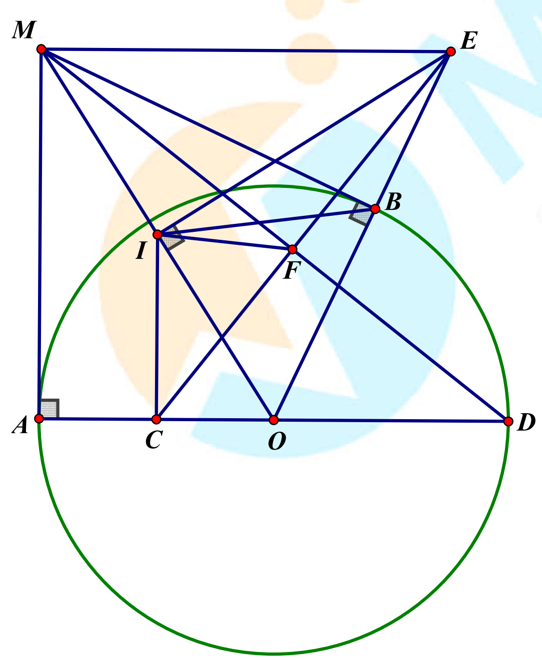
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MA , MB với đường tròn $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường kính AD, lấy I là trung điểm của đoạn thẳng MO, gọi C là hình chiếu vuông góc của I lên AO.

1) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn

2) Đường thẳng vuông góc với MO tại điểm I cắt đường thẳng OB tại điểm E. Chứng minh $OB.OE = \frac{1}{2}OM^2$.

3) Chứng minh ΔIME đồng dạng với ΔCOI và $CE \perp MD$.

Lời giải



1) Vì MA , MB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$

Xét tứ giác $OAMB$ có $\widehat{OAM}+\widehat{OBM}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$
Mà hai góc này đối nhau
Suy ra $OAMB$ là tứ giác nội tiếp
Vậy M,A,O,B cùng thuộc đường tròn tâm I, đường kính MO

2) Vì $EI\perp OM\Rightarrow\widehat{OIE}=90^\circ$
Xét ΔOIE và ΔOBM có
$\widehat{MOE}$ chung và $\widehat{OIE}=\widehat{OBM}=90^\circ$

$\Rightarrow\Delta OIE\backsim\Delta OBM\ (g.g)\Rightarrow\dfrac{OE}{OM}=\dfrac{OI}{OB}\Leftrightarrow OB.OE=OI.OM=\dfrac{1}{2}OM.OM=\dfrac{1}{2}OM^2$

Vậy $OB.OE=\dfrac{1}{2}OM^2$

3) * Ta có I là trung điểm MO và $EI\perp MO$
Suy ra EI là đường trung trực của $MO\Rightarrow EM=EO\Rightarrow\Delta EMO$ cân tại E
$\Rightarrow\widehat{EMO}=\widehat{EOM}$ (1)
Xét (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M
Suy ra OM là phân giác $\widehat{AOB}\Rightarrow\widehat{MOA}=\widehat{MOB}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IOC}=\widehat{EMI}$
Từ đó chứng minh được $\Delta IME\backsim\Delta COI\ (g.g)$
* Gọi F là giao điểm của CE và MD
Ta có $IC\,//\,MA$ (cùng vuông góc với AO) và I là trung điểm MO.
Từ đó chứng minh được IC là đường trung bình của ΔOMA

Suy ra C là trung điểm $OA\Rightarrow OC=AC=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}OD$

Vì $\Delta IME\backsim\Delta COI\ (cmt)\Rightarrow\dfrac{IC}{IE}=\dfrac{CO}{IM}=\dfrac{\frac{1}{2}OD}{\frac{1}{2}OM}=\dfrac{OD}{OM}\Rightarrow\dfrac{IC}{OD}=\dfrac{IE}{OM}$

Lại có $\widehat{CIE}=90^\circ+\widehat{CIO}=90^\circ+\widehat{AMO}$
Mà $\widehat{MOD}=90^\circ+\widehat{AMO}$ (tính chất góc ngoài của ΔAMO)
Xét ΔICE và ΔODM có $\dfrac{IC}{OD}=\dfrac{IE}{OM}\ (cmt)$; $\widehat{CIE}=\widehat{MOD}$

$\Rightarrow\Delta ICE\backsim\Delta ODM\ (c.g.c)\Rightarrow\widehat{OMD}=\widehat{IEC}$ hay $\widehat{IMF}=\widehat{IEF}$

Suy ra tứ giác $IMEF$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MFE}=\widehat{MIE}=90^\circ$
Vậy $CE\perp MD$

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm x,y,z thoả mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{y}{2-y}+\dfrac{z}{2-z}$

Lời giải

Theo giả thiết x,y,z không âm và $x+y+z=1$

Ta có $\frac{1}{2-x}\le 1 \Rightarrow \frac{x}{2-x}\le x$

Chứng minh tương tự $\frac{y}{2-y}\le y$; $\frac{z}{2-z}\le z$

Ta có $P=\frac{x}{2-x}+\frac{y}{2-y}+\frac{z}{2-z}\le x+y+z=1$

Vậy GTLN của $P=1$ khi $\left(x;y;z\right)=\left(1;0;0\right)$ và các hoán vị.

---------------------------- HẾT ----------------------------