MỤC LỤC

A. PHẦN ĐỀ THI

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải phương trình $x^2-x+2=2\sqrt{x^2-x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+xy=1 \\ 3x+y=y^2+3 \end{cases}$.

Câu II.

1) Tìm chữ số tận cùng của số $13^{13}+6^6+2009^{2009}$.

2) Với a, b là những chữ số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}.$$

Câu III. Cho hình thoi $ABCD$. Gọi H là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng a và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng b.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{a}{b}$.

2) Tính diện tích hình thoi $ABCD$ theo các bán kính a, b.

Câu IV. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải phương trình $14\sqrt{x+35}+6\sqrt{x+1}=84+\sqrt{x^2+36x+35}$.

2) Chứng minh rằng $\frac{1}{4+1^4}+\frac{3}{4+3^4}+...+\frac{2n-1}{4+(2n-1)^4}=\frac{n^2}{4n^2+1}$ với mọi n nguyên dương.

Câu II.

1) Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số $n+1, n+5, n+7, n+13, n+17, n+25, n+37$ đều là nguyên tố.

2) Mỗi lần cho phép thay thế cặp số $(a;b)$ thuộc tập hợp $M=\{\{16;2\};(4;32);(6;62);(78;8)\}$ bằng cặp số $(a+c;b+d)$ trong đó cặp số $(c;d)$ cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số $M_1=\{(2018;702);(844;2104);(1056;2176);(2240;912)\}$ hay không?

Câu III. Cho đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên đường thẳng AB ta lấy một điểm M bất kỳ sao cho điểm A nằm trong đoạn BM $(M\neq A)$. Từ điểm M kẻ tới đường tròn (O') các tiếp tuyến MC và MD (C và D là các tiếp điểm, C nằm ngoài (O)). Đường thẳng AC cắt lần thứ hai đường tròn (O) tại điểm P và đường thẳng AD cắt lần thứ hai đường tròn (O) tại Q. Đường thẳng CD cắt PQ tại K.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BCD và BPQ đồng dạng.

2) Chứng minh rằng khi M thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp tam giác KCP luôn đi qua điểm cố định.

Câu IV. Giả sử x, y, z là những số thực thoả mãn điều kiện $0\le x, y, z\le 2$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $M=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+8y^2+12xy=23 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$.

Câu II.

1) Tìm tất cả các số nguyên không âm $(x;y)$ thoả mãn đẳng thức

$$(1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25.$$

2) Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có $\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+...\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n.$

Câu III. Cho đường tròn (O) với đường kính $AB=2R$. Trên đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A ta lấy điểm C sao cho $\widehat{ACB}=30^\circ$. Gọi H là giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với đường tròn (O).

1) Tính độ dài đường thẳng AC, BC và khoảng cách từ A đến đường thẳng BC theo R.

2) Với mỗi điểm M trên đoạn thẳng AC, đường thẳng BM cắt đường tròn $(O$ tại điểm N (khác B). Chứng minh rằng bốn điểm C, M, N, H nằm trên cùng một đường tròn và tâm đường tròn đó luôn chạy trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên đoạn thẳng AC.

Câu IV. Với a, b là các số thực thoả mãn đẳng thức $(1+a)(1+b)=\frac{9}{4}$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy=26 \\ 3x+(2x+y)(x-y)=11 \end{cases}$.

Câu II.

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n để n^2+391 là số chính phương.

2) Giả sử x, y, z là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \ge 1$.

Câu III. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là điểm nằm trong tam giác. Kí hiệu H là hình chiếu của M trên cạnh BC và P, Q, E, F lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MB, MC, AB, AC. Giả sử bốn điểm P, Q, E, F thẳng hàng.

1) Chứng minh rằng M là trực tâm của tam giác ABC.

2) Chứng minh rằng $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu IV. Trong dãy số gồm 2010 số thực khác 0 được sắp xếp theo thứ tự $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2010}$ ta đánh dấu tất cả các số dương và tất cả các số mà tổng của nó với một số liên tiếp liền ngay sau nó là một số dương. Chứng minh rằng nếu trong dãy số đã cho có ít nhất một số dương thì tổng của tất cả các số được đánh dấu là một số dương.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)y^2+x+y=3\\(y-2)x^2+y=x+1\end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2(x+1)}$.

Câu II.

1) Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức:

$$x^4+y^4=7z^4+5.$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$.

Câu III. Cho hình bình hành $ABCD$ với $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O khác C. Kẻ đường thẳng d đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng d lần lượt cắt các đường thẳng CB, CD tại E, F.

1) Chứng minh rằng $\Delta OBE=\Delta ODC$.

2) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

3) Gọi giao điểm của OC và BD là I, chứng minh rằng $IB.BE.EI=ID.DF.FI$.

Câu IV. Với x; y là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}.$$

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ (x+y)(1-xy)=4x^2y^2 \end{cases}$.

Câu II.

1) Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

2) Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}$.

Câu III. Cho hình thang $ABCD$ với BC song song AD. Các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CDA}$ là các góc nhọn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. P là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng BC (P không trùng với B; C). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BIP cắt đoạn thẳng PA tại M khác P và đường tròn ngoại tiếp tam giác CIP cắt đoạn thẳng PD tại N khác P.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, M, I, N, D cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là (K).

2) Giả sử các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại Q, chứng minh rằng Q cũng nằm trên đường tròn (K).

3) Trong trường hợp P, I, Q thẳng hàng, chứng minh rằng $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{CA}$.

Câu IV. Giả sử A là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi x thuộc A $(x\neq 1)$ luôn tồn tại $a; b$ cũng thuộc A sao cho $x=a+b$ (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải phương trình $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases}$.

Câu II.

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y+1)(xy+x+y)=5+2(x+y).$$

2) Giả sử $(x;y)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1)\geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác $B; C$ và AM không đi qua O). Giả sử P là một điểm thuộc đoạn thẳng AM sao cho đường tròn đường kính MP cắt cung nhỏ BC tại điểm N khác M.

1) Gọi D là điểm đối xứng với điểm M qua O. Chứng minh rằng ba điểm N, P, D thẳng hàng.

2) Đường tròn đường kính MP cắt MD tại điểm Q khác M. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Câu IV. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\leq b\leq 3;\ c\geq b+1;\ a+b\geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ 9xy(3x-y)+6=26x^3-2y^3 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x$.

Câu II.

1) Tìm hai chữ số tận cùng của số $A=41^{106}+57^{2012}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}$, với $\frac{1}{2}\le x\le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC $(AB>AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử M, N là hai điểm thuộc cung nhỏ BC sao cho MN song song với BC và tia AN nằm giữa hai tia AM, AB. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm C trên AN và Q là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB.

1) Giả sử CP cắt QM tại điểm T. Chứng minh T nằm trên đường tròn (O).

2) Gọi giao điểm của NQ và (O) là R khác N. Giả sử AM cắt PQ tại S. Chứng minh rằng bốn điểm A, R, Q, S cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV. Với mỗi số n nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 cố định, xét các tập n số thực đôi một khác nhau $X=\{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Kí hiệu $C(X)$ là số các giá trị khác nhau của tổng x_i+x_j $(1\le i<j\le n)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $C(X)$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=xy+\dfrac{1}{xy} \end{cases}.$

Câu II.

1) Cho các số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}.$$

2) Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101?

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A.

1) Chứng minh rằng tam giác BDM và tam giác BCF đồng dạng.

2) Chứng minh rằng EF vuông góc với AC.

Câu IV. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc+bcd+cda+dab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9d^3$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1+y-x+xy \\ 7xy+y-x=7 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$.

Câu II.

1) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $5x^2+8y^2=20412$.

2) Với $(x;y)$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y\le 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\sqrt{1+x^2y^2}.$$

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC (P khác B, C và H) và nằm trong tam giác ABC. PB cắt (O) tại M khác B, PC cắt (O) tại N khác C. BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A.

1) Chứng minh rằng ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

2) Giả sử AP là phân giác $\widehat{MAN}$. Chứng minh rằng khi đó PQ đi qua trung điểm của BC.

Câu IV. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1\le x_2\le\ldots\le x_{192}$ thỏa mãn các điều kiện $x_1+x_2+\ldots+x_{192}=0$ và $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{192}|=2013$. Chứng minh rằng $x_{192}-x_1\ge\frac{2013}{96}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=8.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}.$

Câu II. 1) Giả sử x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz.$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{2y}{1+y^2}+\dfrac{3z}{1+z^2}=\dfrac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y+3+xy.$

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<BC$. Gọi D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực của AB tại F.

1) Chứng minh tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

3) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $2abc(a+b+c)\le\dfrac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2.$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

Câu I. 1) Giả sử x, y là những số thực dương thỏa mãn: $\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4y^4}{x^4+y^4}+\dfrac{8y^4}{x^8-y^4}=4.$

Chứng minh rằng: $5y=4x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12\\6x+x^2y=12+6y+y^2x\end{cases}$.

Câu II. 1) Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng: $x=y$.

2) Giả sử x, y là những số thực không âm thỏa mãn: $x^3+y^3+xy=x^2+y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\dfrac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$.

Câu III. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB=PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh rằng tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB.

Chứng minh rằng: $\widehat{QKL}+\widehat{PAB}=\widehat{QLK}+\widehat{PAC}$.

Câu IV. Cho tập hợp A gồm 31 phần tử và dãy gồm m tập hợp của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp thuộc dãy có ít nhất hai phần tử.

ii) Nếu hai tập hợp thuộc dãy có chung nhau ít nhất hai phần tử thì số phần tử của hai tập hợp này khác nhau.

Chứng minh rằng: $m\le 900$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giả sử $a; b$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$.

a) Chứng minh rằng $a+b=-3$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+3y=5xy\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}$.

Câu II. 1) Tìm các số nguyên $(x;y)$ không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

2) Với $x; y$ là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2+2y+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{3y+1}$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB.

1) Chứng minh rằng EF song song với BC.

2) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, J cùng nằm trên một đường tròn.

3) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Câu IV.

1) Cho bảng ô vuông 2015×2015. Kí hiệu ô $(i;j)$ là ô ở hang thứ i, cột thứ j. Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:

i) Số 1 được viết vào ô $(1;1)$.

ii) Nếu số k được viết vào ô $(i;j)$ $(i>1)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(i-1;j+1)$.

iii) Nếu số k được viết vào ô $(1;j)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(j+1;1)$ (xem hình 1).

1	3	6	10	...
2	5	9	...	
4	8	...		
7	...			
...				

Hình 1

Khi đó số 2015 được viết vào ô $(m;n)$.

Hãy xác định m và n.

2) Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc\le4$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge2(ab+bc+ca)$.

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Với a, b, c là các số thỏa mãn

$$(3a+3b+3c)^3 = 24 + (3a+b-c)^3 + (3b+c-a)^3 + (3c+a-b)^3.$$

Chứng minh rằng $(a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+2y+xy=5 \\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x \end{cases}.$

Câu II. 1) Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ là số chính phương (số chính phương là bình phương của một số nguyên).

2) Tìm $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

3) Giả sử $x; y; z$ là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{y+z-4}} + \frac{y}{\sqrt{z+x-4}} + \frac{z}{\sqrt{x+y-4}}.$$

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn không cân với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2MH.$

1) Chứng minh rằng $BN = AC.$

2) Gọi Q là điểm đối xứng với A qua N. Đường thẳng AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (O).

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G và $D.$ Chứng minh rằng NG song song với $BC.$

Câu IV. Ký hiệu S là tập hợp gồm 2015 điểm phân biệt trên một mặt phẳng. Giả sử tất cả các điểm của S không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng có ít nhất 2015 đường thẳng phân biệt mà mỗi đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm của $S.$

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=4 \\ (xy+1)(x^2+y^2)=4 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x}=\dfrac{8x-3}{5}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các giá tri của m sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 2+mxy^2=3m \\ 2+m(x^2+y^2)=6m \end{cases}$.

2) Với x, y là những số thực thỏa mãn các điều kiện $0<x\le y\le 2;\ 2x+y\ge 2xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)$.

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại E khác A. M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại P khác B. Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của đoạn thẳng AC.

2) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh rằng B và Q đối xứng nhau qua AE.

3) Giả sử đường tròn (K) cắt đường thẳng BM tại M. Chứng minh rằng RA vuông góc RC.

Câu IV. Số nguyên a được gọi là số "đẹp" nếu với mọi cách sắp xếp theo thứ tự tùy ý của 100 số 1, 2, 3,..., 100 luôn tồn tại 10 số hạng liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng a. Tìm số "đẹp" lớn nhất.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2+8xy^2+5x+10y=1 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{5x^2+6x+5}=\dfrac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}$.

Câu II. 1) Với x, y là những số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{y^2-1}{3}$.

Chứng minh $x^2-y^2 \vdots 40$.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức sau $x^4+2x^2=y^3$.

Câu III. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh đường thẳng PO đi qua trung điểm của EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T. Đường thẳng ST cắt các đường thẳng PB, PC lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, V, U cùng thuộc một đương tròn.

Câu IV. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ luôn tồn tại cách xếp bộ n số 1, 2, 3, ..., n thành bộ số $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sao cho $x_j \neq \dfrac{x_i+x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số $(i;j;k)$ mà $1 \leq i < j < k \leq n$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$.

Câu II. 1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2+26xy+15y^2=4617.$$

2) Với a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=(a+b)\left(\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}\right)-\frac{1}{ab}.$$

Câu III. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD và BA lần lượt tại J và L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song ID.

1) Chứng minh rằng $\widehat{CBK}=\widehat{ABI}$.

2) Chứng minh rằng $KC\perp KB$.

3) Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu IV. Tìm tập hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số $1;2;3;...;n$ thành $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ mà khi chia các số $a_1;a_1a_2;a_1a_2a_3;...;a_1a_2...a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=\sqrt{x+3y} \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$.

2) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}}.$$

Câu II. 1) Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p\left(p-1\right)=q\left(q^2-1\right)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq,\ q^2-1=kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố $p,\ q$ thỏa mãn đẳng thức $p\left(p-1\right)=q\left(q^2-1\right)$.

2) Với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{a+1}{a^2+2a+2}+\dfrac{b+1}{b^2+2b+2}+\dfrac{c+1}{c^2+2c+2}$.

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. Gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $CA,\ AB$. Đường trung trực của EF cắt BC tại D. Giả sử P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{PEB}=\widehat{DFE}$. Đường thẳng PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P.

1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF}=\widehat{BAC}+\widehat{EDF}$.

2) Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt $CA,\ AB$ lần lượt tại $M,\ N$. Chứng minh rằng bốn điểm C, M, B, N cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là đường tròn $\left(K\right)$.

3) Chứng minh rằng đường tròn $\left(K\right)$ tiếp xúc với đường tròn ngại tiếp tam giác AEF.

Câu IV. Cho n là số nguyên dương với $n\ge 5$. Xét đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

1) Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n=2018,\ k=672$.

2) Với $n=2017,\ k=672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $x^2 - x + 2\sqrt{x^3+1} = 2\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + y^2 = 1 + y \\ x^2 + 2y^2 + 2xy = 4 + x \end{cases}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)(3x+2y)^2 = 2x+y-1$.

2) Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{a+2b} = 2 + \sqrt{\frac{b}{3}}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

Câu III. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng DE và M là trung điểm của đoạn thẳng DF.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BKM và DEF đồng dạng với nhau.

2) Gọi L là hình chiếu của vuông góc của C trên đường thẳng DF và N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MK và NL song song với nhau.

3) Gọi J, X lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng KL và ID. Chứng minh rằng đường thẳng JX vuông góc với đường thẳng EF.

Câu IV. Trên mặt phẳng cho hai điểm P và Q phân biệt. Xét 10 đường thẳng nằm trong mặt phẳng trên thỏa mãn các tính chất sau:

i) Không có hai đường thẳng nào song song hoặc trùng nhau.

ii) Mỗi đường thẳng đi qua P hoặc Q, không có đường thẳng nào đi qua cả P và Q.

Hỏi 10 đường thẳng trên có thể chia mặt phẳng thành tối đa bao nhiêu miền? Hãy giải thích.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $9+3\sqrt{x(3-2x)}=7\sqrt{x}+5\sqrt{3-2x}$.

Câu II. 1) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y^2$; $xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5.

2) Cho $a_1, a_2, ..., a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn: $1 \le a_1 \le a_2 ..... \le a_{50} \le 50$, $a_1+a_2+.....+a_{50}=100$. Chứng minh rằng từ các số đã cho có thể chọn được một vài số có tổng là 50.

Câu III. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp (O) có $CD // BE$. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc BE sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{PAE}$. Điểm K thuộc AC sao cho MK song song AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho $ML // AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt BD, CE tại Q và S (Q khác B, S khác C).

1) Chứng minh 3 điểm K, M, Q thẳng hàng.

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE cắt BD, CE tại T và R (T khác D, R khác E). Chứng minh M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc (O).

Câu IV. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\left(\sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{bc}{b+c}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \le 2.$

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\dfrac{26x+5}{\sqrt{x^2+30}}+2\sqrt{26x+5}=3\sqrt{x^2+30}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+2y)(2+3y^2+4xy)=27 \end{cases}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn: $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$.

2) Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1\le y\le 2$ và $xy+2\ge 2y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+4}{y^2+1}$.

Câu III. Cho hình vuông $ABCD$, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông tiếp xúc với các cạnh AB, AD tại hai điểm E, F. Gọi G là giao điểm các đường thẳng CE và BF.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn là M $(M\neq F)$. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BG.

3) Chứng minh rằng trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O).

Câu IV. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+xz=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}\ge\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+y^2+4xy=8 \\ (x+y)(x^2+xy+2)=8 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}}=\dfrac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}$.

Câu II. 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\left[(27n+5)^7+10\right]^7+\left[(10n+27)^7+5\right]^7+\left[(5n+10)^7+27\right]^7$$

chia hết cho 42.

2) Với x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=17x^2+17y^2+16xy$.

Câu III. Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F trên BC. Giả sử FK cắt EL tại điểm J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên BC.

1) Chứng minh rằng HJ là phân giác của góc EHF.

2) Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác $BFJL$ và $CEJK$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$.

3) Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

Câu IV. Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019. Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kì từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) \end{cases}$

2) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$

Câu II. 1) Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn $x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$

2) Với a,b là những số thực dương thỏa mãn $2\le 2a+3b\le 5$ và $8a+12b\le 2a^2+3b^2+5ab+10$

Chứng minh rằng: $3a^2+8b^2+10ab\le 21$.

Câu III. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M, N thuộc (O) sao cho đường thẳng CM, BN cùng song song với đường thẳng AD

1) Chứng minh rằng $AM=AN$

2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn

3) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN. Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP, AD đồng quy.

Câu IV. Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}\ge 4.$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)(x+1)=4\\ \left(y^2+xy+x+y+5\right)\left(x^3+y^3+12y+13\right)=243\end{cases}$

2) Giải phương trình: $(x-12)^7+(2x-12)^7+(24-3x)^7=0$

Câu II. 1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho cả ba số $4a^2+5b; 4b^2+5c; 4c^2+5a$ đều là bình phương của số nguyên dương.

2) Từ một bộ bốn số thực (a,b,c,d) ta xây dựng bộ số mới $(a+b,b+c,c+d,d+a)$ và liên tiếp xây dựng các bộ số mới theo quy tắc trên. Chứng minh rằng nếu ở hai thời điểm khác nhau, ta thu được cùng một bộ số (có thể khác thứ tự) thì bộ số ban đầu phải có dạng ($a,-a,a,-a$)

Câu III. Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC}<90^\circ$. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{EAB}<90^\circ$. Gọi P là giao điểm của *BE* với trung trực của BC. Gọi K là hình chiếu vuông góc của P lên AB. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của E lên AP. Gọi giao điểm của *EQ* và *PK* là F.

1) Chứng minh rằng bốn điểm *A, E, P, F* cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của *KQ* và *PE* là *L*. Chứng minh *LA* vuông góc *LE*.

3) Gọi giao điểm của *FL* và *AB* là S. Gọi giao điểm của *KE* và *AL* là T. Lấy R là điểm đối xứng với A qua L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác *AST* và đường tròn ngoại tiếp tam giác *BPR* tiếp xúc với nhau.

Câu IV. Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-1\right)^2+1\ge\dfrac{4}{abc}+3\left(\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\right)$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Giải phương trình $13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}=61+x+3\sqrt{(5-x)(x+8)}$.

Câu II. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=1 & (1) \\ x(x+y)^4=x-y & (2) \end{cases}$.

Câu III. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho $7, 9, 11, 13$ được các số dư tương ứng là $3, 4, 5, 6$.

Câu IV. Cho tam giác nhọn ABC có điểm P nằm trong tam giác (P không nằm trên các cạnh). Gọi J,K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB.

1. Chứng minh rằng $\widehat{BJC}+\widehat{CKA}+\widehat{ALB}=450^\circ$.

2. Giả sử $PB=PC$ và $PC<PA$. Gọi X,Y,Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của J,K,L trên các cạnh BC,CA,AB. Dựng hình bình hành $XYWZ$. Chứng minh W nằm trên phân giác $\widehat{BAC}$.

Câu V. Cho tập $A=\{1;2;3;...;2021\}$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất $(k>2)$ sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kỳ trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c\neq 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a)=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc}+\dfrac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc}=\dfrac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2+4xy+2x^2y^2=11 \\ 3xy(x+2y)+31=9x+18y+13xy \end{cases}$.

Câu II. 1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x+29=2^y$.

2) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2(a+b+c)+ab+bc+ca=9$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{a+1}{a^2+10a+21}+\dfrac{b+1}{b^2+10b+21}+\dfrac{c+1}{c^2+10c+21}$.

Câu III. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}$ nhọn có đường tròn nội tiếp (O). Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh CB, CD sao cho MN tiếp xúc (O) tại P và tam giác CMN không cân. MN lần lượt cắt AB, AD tại E, F. Gọi K, L lần lượt là trực tâm các tam giác BME, DNF.

1) Chứng minh OP đi qua trung điểm I của KL.

2) Gọi H là trực tâm tam giác CMN. Chứng minh $\dfrac{OI}{CH}-\dfrac{EF}{2MN}=-\dfrac{1}{2}$.

3) Gọi EK, FL lần lượt cắt BD tại S, T. NS cắt MT tại Q. Đường tròn nội tiếp tam giác CMN tiếp xúc MN với tại G. Chứng minh PQ song song với GH.

Câu IV. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{2021}$ là những số thực thỏa mãn $\dfrac{a_1}{1+a_1^2}+\dfrac{a_2}{1+a_2^2}+......+\dfrac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2}=0$.

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k\,(1\le k\le 2021)$ sao cho $\left|\dfrac{a_1}{1+a_1^2}+\dfrac{2a_2}{1+a_2^2}+......+\dfrac{ka_k}{1+a_k^2}\right|\le\dfrac{2k+1}{8}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6(xy+5)+x^3y+5x^2=42 \\ x^3+5x^2y+6x+30y=42 \end{cases}$.

2) Giải phương trình : $\left(\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{3-x}\right)\left(2+3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right)=24$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đẳng thức :

$$25y^2+354x+60=36x^2+305y+(5y-6x)^{2022}.$$

2) Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau : mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là số tự nhiên liên tiếp?

Câu III. Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB<AD)$ nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F $(E,F$ không trùng với $A,D)$ sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời $\widehat{ABE}+\widehat{DCF}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$

1) Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O)

2) Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE,CF theo thứ tự tại M,N.

Chứng minh rằng $\widehat{DAM}+\widehat{ADN}+\frac{1}{2}\widehat{AOD}=180^\circ$

3) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD, đồng thời MP song song với AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu IV. Cho a,b,c là những số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{6a+2c}{3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}\ge\frac{32a}{2a+b+c}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\right)=\sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+3xy+y^2=6\\3x+2y+1=2\sqrt{2x+y+6}\end{cases}$

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y)(5x+y)^3+xy^3=(5x+y)^3+x^2y^3+xy^4$$

2) Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases}c\le b<a\le 3;b^2+2a\le 10;b^2+2a+2c\le 14\\(a^2+1)(b^2+1)+4ab\le 2a^3+2b^3+2a+2b\end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=4a^4+b^4+2b^2+4c^2$.

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, CB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K)

1) Chứng minh rằng AP vuông góc với BC

2) Chứng minh rằng $AP=2OK$

3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn tại hai điểm Q, R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔKQR.

Câu IV. Cho các điểm $A_1,A_2,.....,A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn A_kA_{k+1} bằng k (đơn vị dài), với $k=1,2,....,29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1A_2,.....,A_{29}A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu,, ta luôn chọn được hai số nguyên dương $1\le j\le i\le 29$ sao cho hai đoạn A_iA_{i+1} và A_jA_{j+1} được tô cùng màu và $i-j$ là bình phương của số nguyên dương.

---------- HẾT ----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+5x+2025}+\sqrt{5}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+6y)(3x+2y)=12\\ 2x^3+6y^3+15x^2y+19y^2x+x+6y=12\end{cases}$.

Câu II. 1) Giả sử n là số nguyên sao cho $3n^3-1011$ chia hết cho 1008. Chứng minh rằng $n-1$ chia hết cho 48.

2) Với a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{1+c^2}\right)>4$.

Câu III. Cho hai đường tròn (O) và (O') cố định cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AP cắt (O') tại C khác A.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng $\widehat{QBC}+\widehat{ABP}=90^\circ$.

3) Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc $O'C$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Câu IV. Giả sử A là tập hợp con của tập hợp gồm 30 số tự nhiên đầu tiên $\{0;1;2;3;...;29\}$ sao cho với k nguyên bất kỳ, $a, b \in A$ bất kỳ (có thể $a=b$) thì $a+b+30k$ không là tích của hai số nguyên liên tiếp. Chứng minh rằng số phần tử của tập hợp A nhỏ hơn hoặc bằng 10.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình: $2x+1+2\sqrt{4x^2+6x}=4\sqrt{5x-x^2}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=30+\sqrt[3]{x+y+120} \end{cases}$

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\, y)$ thỏa mãn:

$$4^x+(1+3^y)(1+7^y)=2^x(3^y+7^y+2)$$

2) Với $x,\, y,\, z$ là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{x^{14}-x^6+3}{x^2y^2+zx+zy}+\frac{y^{14}-y^6+3}{y^2z^2+xy+xz}+\frac{z^{14}-z^6+3}{z^2x^2+yz+yx}$$

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB>BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F. Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG}=\widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm của BC. K đối xứng với A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho $NS\perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR\cdot AH=AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ\perp AS$ và $SQ\perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN.

Câu IV. Viết một trăm số nguyên dương đầu tiên $1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 100$ vào một bảng ô vuông kích thước 10×10 một cách tùy ý sao cho mỗi ô được viết đúng số. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (2 ô có cạnh chung) mà hai số viết ở hai ô này có hiệu lớn hơn hoặc bằng 10.

------------------------------- HẾT -------------------------------

B. PHẦN ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $x^2-x+2=2\sqrt{x^2-x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2+xy=1\\3x+y=y^2+3\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

$$x^2-x+2=2\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x^2-x+1-2\sqrt{x^2-x+1}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=1\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

2) $$\begin{cases}x^2-y^2+xy=1\\3x+y=y^2+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-x^2-xy\\x^2+xy-3x-y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-x^2-xy\\(x-1)(x+y-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-x^2-xy\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2-y\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2-y\\y^2+2y-3=0\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y^2-y=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\x=1\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm là $(x;y)\in\{(1;\ 0);(1;\ 1);(5;-3)\}$.

Câu II. 1) Tìm chữ số tận cùng của số $13^{13}+6^6+2009^{2009}$.

2) Với a, b là những chữ số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}.$$

Lời giải

1) Ta có $13^{13}=\left(13^4\right)^3.13\equiv 3\ (\text{mod }10);6^6\equiv 6\ (\text{mod }10);2009^{2009}=(2009)^{2008}.2009\equiv 9\ (\text{mod }10);$

$$13^{13}+6^6+2009^{2009}\equiv 3+6+9\equiv 8\ (\text{mod }10).$$

Suy ra $13^{13}+6^6+2009^{2009}$ có tận cùng là 8.

2) Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương $9a$ và $4a+5b$ ta có $\sqrt{9a(4a+5b)}\le\dfrac{9a+4a+5b}{2}=\dfrac{13a+5b}{2}$.

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương $9b$ và $4b+55$ ta có $\sqrt{9b(4b+5a)}\le\dfrac{9b+4b+5a}{2}=\dfrac{13b+5a}{2}$.

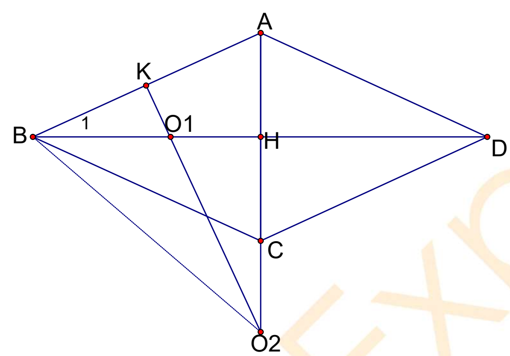
Suy ra $P \ge \dfrac{3(a+b)}{\dfrac{18a+18b}{2}} = \dfrac{1}{3}$ nên GTNN của P bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $a=b$.

Câu III. Cho hình thoi $ABCD$. Gọi H là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng a và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng b.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{a}{b}$.

2) Tính diện tích hình thoi $ABCD$ theo các bán kính a, b.

Lời giải



1) Tam giác BKO_1 đồng dạng với tam giác O_2KA nên $\dfrac{a}{b} = \dfrac{O_1B}{O_2A} = \dfrac{O_1K}{AK} = \dfrac{O_1K}{BK} = \tan B_1$.

Mà $\tan B_1 = \dfrac{AH}{BH}$ nên $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AH}{BH}$.

2) Theo chứng minh trên, ta có $HB = \dfrac{b}{a}.HA$.

Trong tam giác vuông BO_2H ta có $BH^2 + O_2H^2 = O_2B^2$ nên $\dfrac{b^2}{a^2}.AH^2 + (b-AH)^2 = b^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2}{a^2}.AH^2 + b^2 - 2bAH + AH^2 = b^2 \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{a^2}.AH^2 - 2bAH + AH^2 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2}{a^2}.AH - 2b + AH = 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)AH = 2a^2b \Leftrightarrow AH = \dfrac{2a^2b}{a^2+b^2} \Rightarrow BH = \dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$.

Vậy $S_{ABCD} = 2.AH.BH = \dfrac{8a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}$.

Câu IV. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}.$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(3a+2b)(a+4b)} \le \dfrac{4a+6b}{2} = 2a+3b$;

$\sqrt{3b^2+8c^2+14cb} = \sqrt{(3b+2c)(b+4c)} \le \dfrac{4b+6c}{2} = 2b+3c$;

$$\sqrt{3c^2+8a^2+14ac}=\sqrt{(3c+2a)(c+4a)}\le\frac{4c+6a}{2}=2c+3a.$$

Ta có $P=\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}$.

$\ge\frac{(a+b+c)^2}{5a+5b+5c}=\frac{1}{5}(a+b+c)$ (điều phải chứng minh).

Dấu $"="$ xảy ra khi khi $a=b=c$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $14\sqrt{x+35}+6\sqrt{x+1}=84+\sqrt{x^2+36x+35}$.

2) Chứng minh rằng $\frac{1}{4+1^4}+\frac{3}{4+3^4}+...+\frac{2n-1}{4+(2n-1)^4}=\frac{n^2}{4n^2+1}$ với mọi n nguyên dương.

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $x\ge -1$.

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+35}=a\\ \sqrt{x+1}=b\end{cases}$ $(a>0;\, b\ge 0)$, phương trình trở thành

$$14a+6b-84-ab=0\Leftrightarrow (a-6)(14-b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=6\\ b=14\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=195\end{array}\right. \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1;195\}$.

2) Dùng phương pháp quy nạp toán học.

- Với $n=1$ đúng. Giả sử đúng với $n=k$, ta có $S_k=\frac{k^2}{4k^2+1}$. ta phải chứng minh đúng với $n=k+1$, nghĩa là $S_{k+1}=\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}$.

Xét $S_{k+1}=S_k+\frac{2(k+1)-1}{4+(2k+1)^4}\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}=\frac{k^2}{4k^2+1}+\frac{2(k+1)-1}{4+(2k+1)^4}$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}-\frac{k^2}{4k^2+1}=\frac{2k+1}{4+(2k+1)^4}.$$

Ta có $\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}-\frac{k^2}{4k^2+1}=\frac{(k+1)^2(4k^2+1)-k^2\left[4(k+1)^2+1\right]}{\left[4(k+1)^2+1\right](4k^2+1)}$

$=\frac{4k^4+8k^3+4k^2+k^2+2k+1-4k^4-8k^3-4k^2-k^2}{16k^4+32k^3+24k^2+8k+5}=\frac{2k+1}{4+(2k+1)^4}$ (điều phải chứng minh).

Câu II. 1) Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số $n+1$, $n+5$, $n+7$, $n+13$, $n+17$, $n+25$, $n+37$ đều là nguyên tố.

2) Mỗi lần cho phép thay thế cặp số $(a;b)$ thuộc tập hợp $M=\{\{16;2\};(4;32);(6;62);(78;8)\}$ bằng cặp số $(a+c;b+d)$ trong đó cặp số $(c;d)$ cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta

có thể nhận được tập hợp các cặp số $M_1 = \{(2018;702);(844;2104);(1056;2176);(2240;912)\}$ hay không?

Lời giải

1) Với $n < 6$ không có số nào thoả mãn.
Với $n = 6$ thoả mãn.
Với $n > 6$, n có dạng $n \in \{7k;7k+1;7k+2;7k+3;7k+4;7k+5;7k+6\}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

- $n = 7k$ thì $n+7 ⋮ 7$.
- $n = 7k+1$ thì $n+13 ⋮ 7$.
- $n = 7k+2$ thì $n+5 ⋮ 7$.
- $n = 7k+3$ thì $n+25 ⋮ 7$.
- $n = 7k+4$ thì $n+17 ⋮ 7$.
- $n = 7k+5$ thì $n+37 ⋮ 7$.
- $n = 7k+6$ thì $n+1 ⋮ 7$.

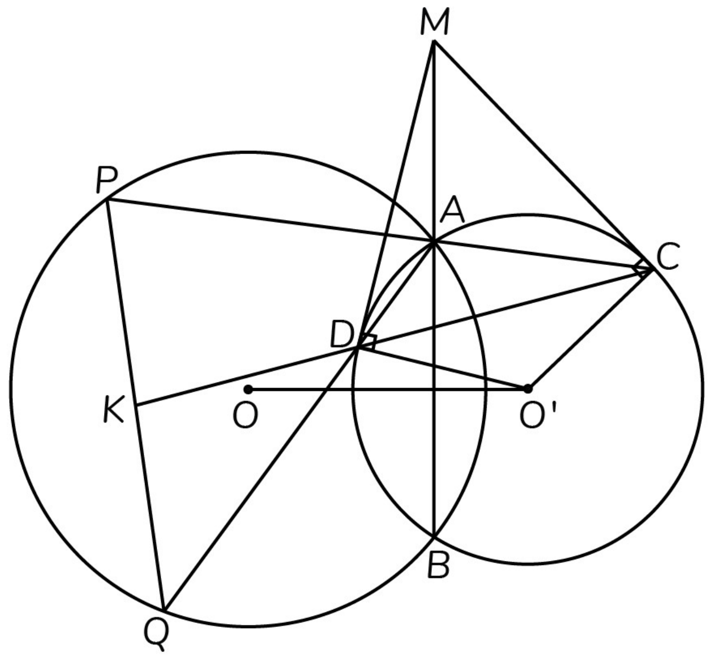
Vậy chỉ có duy nhất $n = 6$ thoả mãn đề bài.
2) Ta thấy $a-b ⋮ 7$; $(a+c)-(b+d) = [(a-b)+(c-d)] ⋮ 7$.
Mà $2014 - 844 = 1170$ không chia hết cho 7 nên sau một số hữu hạn lần thay thế ta không thể nhận được tập hợp các cặp số $M_1 = \{(2018;702);(844;2104);(1056;2176);(2240;912)\}$.

Câu III. Cho đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên đường thẳng AB ta lấy một điểm M bất kỳ sao cho điểm A nằm trong đoạn BM $(M \neq A)$. Từ điểm M kẻ tới đường tròn (O') các tiếp tuyến MC và MD (C và D là các tiếp điểm, C nằm ngoài (O)). Đường thẳng AC cắt lần thứ hai đường tròn (O) tại điểm P và đường thẳng AD cắt lần thứ hai đường tròn (O) tại Q. Đường thẳng CD cắt PQ tại K.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BCD và BPQ đồng dạng.

2) Chứng minh rằng khi M thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp tam giác KCP luôn đi qua điểm cố định.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (cùng chắn cung BD); $\widehat{DAB} = \widehat{QPB}$ (cùng chắn cung BQ)

$\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{QPB}$. $\quad (1)$

Lại có $\widehat{DBC} = \widehat{PAQ}$ (cùng bù với $\widehat{DAC}$); $\widehat{PAQ} = \widehat{PBQ}$ (cùng chắn cung PQ)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{PBQ}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BCD \backsim \Delta BPQ$ $(g.g)$.

2) Theo chứng minh trên thì $\widehat{DCB} = \widehat{QPB}$ nên tứ giác $KPCB$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác KCP luôn đi qua điểm B cố định khi M thay đổi.

Câu IV. Giả sử x, y, z là những số thực thoả mãn điều kiện $0 \le x, y, z \le 2$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1-x)(1-y)(1-z)$.

Lời giải

Đặt $1 - x = a; 1 - y = b; 1 - z = c$ thì $a + b + c = 0$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $-1 \le a; b; c \le 1$.

$$M = (1-a)^4 + (1-b)^4 + (1-c)^4 + 12abc$$
$$= a^4 + b^4 + c^4 - 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 6(a^2 + b^2 + c^2) - 4(a+b+c) + 3$$
$$= a^4 + b^4 + c^4 + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 3.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopsky cho 2 dãy $a; b; c$ và $1; 1; 1$ ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a+b+c)^2 = 0$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 0$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopsky cho 2 dãy $a^2; b^2; c^2$ và $1; 1; 1$ ta có

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \ge (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 0$$

Do đó $a^4 + b^4 + c^4 \ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 0$.

Vậy $M \ge 3$ hay GTNN của M bằng 3 khi $a = b = c = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 = 3 - 2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 3$.

Giả sử $0\le x\le y\le z\le 2$; ta có $x^2+y^2+z^2-3=(x+y)^2-2xy+z^2-3(3-z)^2+z^2-3=2z^2-6z+6$.

$x^2+y^2+z^2-3=2z^2-6z+6=2\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\le 2$ vì $0<z\le 2$ suy ra $a^2+b^2+c^2\le 2$.

Ta có $a^2; b^2; c^2\in[0;1]$ nên $a^4+b^4+c^4\le a^2+b^2+c^2$ suy ra $M\le 7(a^2+b^2+c^2)+3\le 17$.

Vậy GTLN của M bằng 17 khi $(a;b;c)=(-1;0;1)$ và các hoán vị hay $(x;y;z)=(0;1;2)$ và các hoán vị.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NĂM HỌC 2010 – 2011

Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**

Thời gian làm bài: **150 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+8y^2+12xy=23\\x^2+y^2=2\end{cases}.$

2) Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}.$

Lời giải

1) Cộng hai vế của hệ ta được $(2x+3y)^2=25\Leftrightarrow 2x+3y=\pm5$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3y=5\\x^2+y^2=2\end{cases}\\\begin{cases}2x+3y=-5\\x^2+y^2=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\\begin{cases}x=\dfrac{7}{13}\\y=\dfrac{17}{13}\end{cases}\\x=y=-1\\\begin{cases}x=-\dfrac{7}{13}\\y=-\dfrac{17}{13}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\left\{(1;1);(-1;-1);\left(\dfrac{7}{13};\dfrac{17}{13}\right);\left(-\dfrac{7}{13};-\dfrac{17}{13}\right)\right\}.$

2) Điều kiện $x\ge-\dfrac{1}{2}.$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2x+1}=a\ (a\ge0)\\\sqrt{4x^2-2x+1}=b\ (b>0)\end{cases}$, ta có phương trình $(1-b)(a-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\a=3\Rightarrow x=4\end{array}\right..$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{0;\dfrac{1}{2};4\right\}.$

Câu II. 1) Tìm tất cả các số nguyên không âm $(x;y)$ thoả mãn đẳng thức

$$(1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25.$$

2) Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có $\left[\dfrac{3}{1.2}+\dfrac{7}{2.3}+...\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n.$

Lời giải

1) Ta có $(1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25\Leftrightarrow(xy+1)^2+2(x+y)(1+xy)+(x+y)^2=25$

$\Leftrightarrow (xy+1+x+y)^2 = 25 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)^2 = 25.$

Vì x, y không âm nên $(x+1)(y+1)=5$ ta có $(x;y)\in\{(0;4);(4;0)\}$.

2) Xét $\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)} = \dfrac{k^2}{k(k+1)} + \dfrac{k+1}{k(k+1)} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k}\ (k\in\mathbb{N}^*)$.

Thay k lần lượt từ 1 đến n, ta có

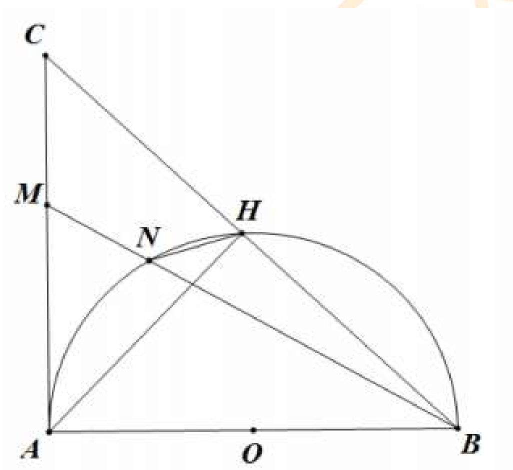
$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\ldots\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right] = \left[n+1-\frac{1}{n+1}\right] = \left[n+\frac{n}{n+1}\right] = n \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Câu III. Cho đường tròn (O) với đường kính $AB = 2R$. Trên đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A ta lấy điểm C sao cho $\widehat{ACB} = 30°$. Gọi H là giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với đường tròn (O).

1) Tính độ dài đường thẳng AC, BC và khoảng cách từ A đến đường thẳng BC theo R.

2) Với mỗi điểm M trên đoạn thẳng AC, đường thẳng BM cắt đường tròn $(O$ tại điểm N (khác B). Chứng minh rằng bốn điểm C, M, N, H nằm trên cùng một đường tròn và tâm đường tròn đó luôn chạy trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên đoạn thẳng AC.

Lời giải



1) Ta có $\cot\widehat{ACB} = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = AB.\cot 30° = 2\sqrt{3}R$; $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sin 30°} = 4R$;

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{12R^2} + \frac{1}{4R^2} = \frac{1}{3R^2} \Rightarrow AH = R\sqrt{3}.$$

2) Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$).

Mà $\widehat{HAB} = \widehat{HNB}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ số đo cung HB); $\widehat{HBN} = \widehat{ACB}$.

Từ đó tứ giác $CMNH$ nội tiếp. Tâm đường tròn nội tiếp $CMNH$ thuộc trung trực của HC cố định.

Câu IV. Với a, b là các số thực thoả mãn đẳng thức $(1+a)(1+b) = \dfrac{9}{4}$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai bộ số $\left(a^2+1\right)$ và $\left(1;4\right)$, ta có

$$17\left(a^4+1\right)\ge\left(a^2+4\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^4+1}\ge\frac{a^2+4}{\sqrt{17}}.\text{ Dấu } "=" \text{ xảy ra khi } a=\frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai bộ số $\left(b^2;1\right)$ và $\left(1;4\right)$, ta có

$$17\left(b^4+1\right)\ge\left(b^2+4\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{b^4+1}\ge\frac{b^2+4}{\sqrt{17}}.\text{ Dấu } "=" \text{ xảy ra khi } b=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $P\ge\dfrac{a^2+b^2+8}{\sqrt{17}}$.

Mặt khác từ giả thiết, ta có $a+b+ab=\dfrac{5}{4}$.

Lại áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $\begin{cases} a^2+\dfrac{1}{4}\ge a \\ b^2+\dfrac{1}{4}\ge b \\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\ge ab \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)+\dfrac{1}{2}\ge\left(a+b+ab\right)=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+b^2\ge\dfrac{1}{2}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $P\ge\dfrac{\frac{1}{2}+8}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\3x+(2x+y)(x-y)=11\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$.

Với $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Với $x>1$ vế trái lớn hơn 4. Phương trình vô nghiệm.

Với $x<1$, vế trái nhỏ hơn 4. Phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

2) $\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\3x+(2x+y)(x-y)=11.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\3x+2x^2-2xy+xy-y^2=11\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\2x^2+3x-y^2-xy=11\end{cases}\Rightarrow 5x^2+2y^2+2xy+2\left(2x^2+3x-y^2-xy\right)=48$

$\Leftrightarrow 9x^2+6x-48=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{8}{3}\end{array}\right.$.

Với $x=2$, ta có: $2.2^2+3.2-y^2-2y=11\Leftrightarrow y^2+2y-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-3\end{array}\right.$.

Với $x=-\dfrac{8}{3}$, ta có $2\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2+3\left(-\dfrac{8}{3}\right)-y^2+\dfrac{8}{3}y=11\Leftrightarrow y^2-\dfrac{8}{3}y+\dfrac{43}{9}=0$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(2;1);(2;-3)\}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các số nguyên dương n để n^2+391 là số chính phương.

2) Giả sử x, y, z là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1$.

Lời giải

1) Giả sử $n^2+391=a^2$ với a nguyên dương.

Ta có $(n-a)(n+a)=-391 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n+a=1\\ n-a=-391\end{cases}\\ \begin{cases}n+a=391\\ n-a=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n=-195\\ a=196\end{cases}\\ \begin{cases}n=195\\ a=196\end{cases}\end{array}\right.$.

Vậy số nguyên dương n thỏa mãn đề bài là 195.

2) Ta có $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \geq \dfrac{\sqrt{xy+z(x+y+z)}+x+y}{1+\sqrt{xy}}$

$$\geq \frac{\sqrt{(x+z)(y+z)}+x+y}{1+\sqrt{xy}} \geq \frac{\sqrt{xy}+z+x+y}{1+\sqrt{xy}}=1.$$

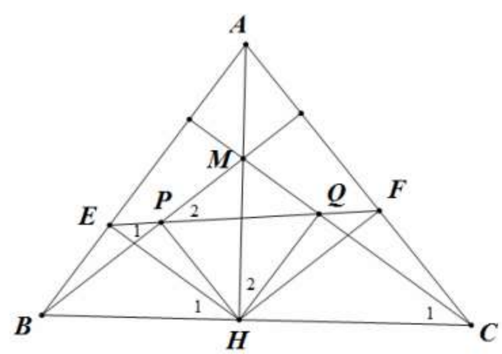
Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Câu III. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là điểm nằm trong tam giác. Kí hiệu H là hình chiếu của M trên cạnh BC và P, Q, E, F lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MB, MC, AB, AC. Giả sử bốn điểm P, Q, E, F thẳng hàng.

1) Chứng minh rằng M là trực tâm của tam giác ABC.

2) Chứng minh rằng $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



1) Ta có các tứ giác $BEPH$ và $PHQM$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó $\widehat{H_1}=\widehat{P_1}=\widehat{P_2}=\widehat{H_2}$.

Mà $\widehat{H_2}=\widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{QHC}$) và $\widehat{H_1}=\widehat{C_1}$ nên $CM // EH \Rightarrow CM \perp AB$ tương tự $BM \perp AC$.

Vậy M là trực tâm của tam giác ABC.

2) Ta có $\widehat{EBH}=\widehat{HPF}$ (cùng bù với $\widehat{HPE}$); $\widehat{HPF}=\widehat{PFA} \Rightarrow \widehat{EBH}=\widehat{PFA}$.

Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

Câu IV. Trong dãy số gồm 2010 số thực khác 0 được sắp xếp theo thứ tự $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2010}$ ta đánh dấu tất cả các số dương và tất cả các số mà tổng của nó với một số liên tiếp liền ngay sau nó là một số dương. Chứng minh rằng nếu trong dãy số đã cho có ít nhất một số dương thì tổng của tất cả các số được đánh dấu là một số dương.

Lời giải

Số các số được đánh dấu ≥ 1.

Nếu tất cả các số được đánh dấu là số dương ta có điều phải chứng minh.

Nếu các số đánh dấu có số âm giả sử là a_n thì số a_{n+1} là số dương cũng được đánh dấu và $a_n + a_{n+1} > 0$, mọi số âm đều có số có tổng dương, các cặp số này không trùng nhau.

Vậy tổng các số được đánh dấu là dương.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)y^2+x+y=3\\(y-2)x^2+y=x+1\end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}$.

Lời giải

1) Ta có $\begin{cases}(x-1)y^2+x+y=3\\(y-2)x^2+y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)y^2+(x-1)=2-y\\(y-2)x^2+(y-2)=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y^2+1)=2-y\\(y-2)(x^2+1)=x-1\end{cases}$.

- Nếu $x>1$ thì $(x-1)(y^2+1)>0$ nên $2-y>0\Leftrightarrow y<2$.

  Mặt khác $x>1$ thì $(y-2)(x^2+1)>0\Rightarrow y>2$.

  Do đó hệ phương trình vô nghiệm với $x>1$.
- Nếu $x<1$ thì $(x-1)(y^2+1)<0$ nên $2-y<0\Leftrightarrow y>2$.

  Mặt khác $x<1$ thì $(y-2)(x^2+1)<0\Rightarrow y<2$.

  Do đó hệ phương trình vô nghiệm với $x<1$.
- Nếu $x=1$ thì $y=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$.

2) Điều kiện $x>0$.

Phương trình tương đương với $2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7$.

Chia hai vế cho $x\neq 0$, ta được

$$2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{x}\right)-2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}+\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0.$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=2\Leftrightarrow x+\frac{3}{x}=4\Rightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{2}{x}\Rightarrow x+\frac{3}{x}=\frac{4}{x^2}\Rightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;3\}$.

Câu II. 1) Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức:

$$x^4+y^4=7z^4+5.$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$.

Lời giải

1) Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^4+y^4=7z^4+5 \Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=8z^4+5$.

Ta có $a^4 \equiv 0$ hoặc 1 (mod 8) với mọi số nguyên $a \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4+z^4 \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 8 \\ 8z^4+5 \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$.

Vậy không tồn tại $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức.

2) Phương trình tương đương với $8x^3+8x=y^3$.

- Nếu $x \ge 1$ thì $8x^3<8x^3+8x<(2x+1)^3 \Rightarrow (2x)^3<y^3<(2x+1)^3$ (mâu thuẫn vì y nguyên).
- Nếu $x \le -1$ và $(x;y)$ là nghiệm thì $(-x;-y)$ cũng là nghiệm. Mà $-x \ge 1$ nên mâu thuẫn.
- Nếu $x=0 \Rightarrow y=0$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(x;y)=(0;0)$.

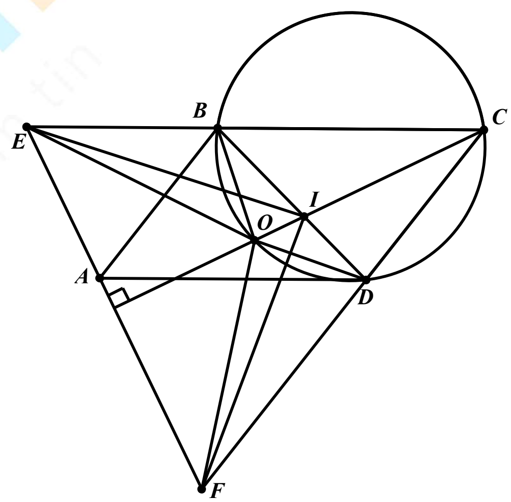
Câu III. Cho hình bình hành $ABCD$ với $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O khác C. Kẻ đường thẳng d đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng d lần lượt cắt các đường thẳng CB, CD tại E, F.

1) Chứng minh rằng $\Delta OBE=\Delta ODC$.

2) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

3) Gọi giao điểm của OC và BD là I, chứng minh rằng $IB.BE.EI=ID.DF.FI$.

Lời giải



1) Tứ giác $OBCD$ nội tiếp và CO là phân giác $\widehat{BCD}$ nên $\widehat{OBD}=\widehat{OCD}=\widehat{OCB}=\widehat{ODB}$,

Suy ra tam giác OBD cân tại O, do đó $OB=OD$. (1)

Tứ giác $OBCD$ nội tiếp nên $\widehat{ODC}=\widehat{OBE}$ (cùng bù với $\widehat{OBC}$). (2)

Trong tam giác CEF có CO vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên tam giác CEF cân tại C.

Do $AB // CF \Rightarrow \widehat{AEB}=\widehat{AFC}=\widehat{EAB}$, suy ra tam giác ABE cân tại B nên $BE=BA=CD$. (3)

Từ $(1),(2)$ và (3), suy ra $\Delta OBE=\Delta ODC$ (c.g.c).

2) Từ $\Delta OBE=\Delta ODC \Rightarrow OE=OC$.
Mà CO là đường cao tam giác cân CEF, suy ra $OE=OF$.
Từ đó $OE=OF=OC$, vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.
3) Theo trên, ta có $BE=CD$ mà $CE=CF \Rightarrow BC=DF$.

Ta có CI là đường phân giác $\widehat{BCD}$, nên $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{DF}{BE} \Rightarrow IB.BE=ID.DF$.

Mà CO là trung trực EF và $I \in CO$, suy ra $IE=IF$.
Từ hai đẳng thức trên, suy ra $IB.BE.EI=ID.DF.FI$.

Câu IV. Với $x; y$ là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}\ge\frac{x^2}{x^2+2y^2}.\qquad(1)$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\frac{x^3}{x^3+8y^3}\ge\frac{x^4}{(x^2+2y^2)^2}\Leftrightarrow(x^2+2y^2)^2\ge x(x^3+8y^3)\Leftrightarrow 4x^2y^2+4y^4\ge 8xy^3$

$\Leftrightarrow 4x^2y^2+4y^4-8xy^3\ge 0\Leftrightarrow 4y^2(x^2-2xy+y^2)\ge 0\Leftrightarrow 4y^2(x-y)^2\ge 0$ (đúng).

Ta chứng minh $\sqrt{\frac{y^3}{y^3+(x+y)^3}}\ge\frac{y^2}{x^2+2y^2}.\qquad(2)$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow\frac{y^3}{y^3+(x+y)^3}\ge\frac{y^4}{(x^2+2y^2)^2}\Leftrightarrow(x^2+2y^2)^2\ge y\left[y^3+(x+y)^3\right]$

$\Leftrightarrow(x^2+2y^2)^2-y^4\ge y(x+y)^3\Leftrightarrow(x^2+y^2)(x^2+3y^2)\ge y(x+y)^3.$

Lại có: $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2$ và $x^2+3y^2=x^2+y^2+2y^2\ge 2xy+y^2=2y(x+y)$

$\Rightarrow(x^2+y^2)(x^2+3y^2)\ge\frac{1}{2}(x+y)^2.2y(x+y)=y(x+y)^3\Rightarrow(2)$ đúng.

Từ (1) và (2), suy ra $P\ge 1$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Vậy GTNN của P bằng 1 khi $x=y$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ (x+y)(1-xy)=4x^2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $0\le x\le 1$.

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\sqrt{x+3}+\sqrt{x}.$$

Nếu $0\le x<1$ thì $3\left(\sqrt{1-x}+1\right)>3$ và $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}<\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$.

Do đó phương trình vô nghiệm với $0\le x<1$.

Với $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

2) Xét $x=y=0$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x\ne 0, y\ne 0$ hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{2}{xy}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}\right)=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{xy}=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)\in\left\{(0;0);(1;1)\right\}$.

Câu II. 1) Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

2) Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6\left(x^2+5\right)}+\sqrt{6\left(y^2+5\right)}+\sqrt{z^2+5}}$.

Lời giải

1) Đặt $K=\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]$. Vì $n>1$ nên $K\ge 1$.

Ta có $K\le \sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}<K+1 \Leftrightarrow \left(K-\frac{1}{3}\right)^3\le n-\frac{1}{27}<\left(K+\frac{2}{3}\right)^3$

$\Leftrightarrow K^3-K^2+\frac{K}{3}-\frac{1}{27}\le n-\frac{1}{27}<K^3+2K^2+\frac{4}{3}K+\frac{8}{27}$

$\Leftrightarrow K^3+\frac{K}{3}\le n+K^2<K^3+2K^2+\frac{4}{3}K+\frac{1}{3}\Leftrightarrow K^3<n+K^2<(K+1)^3$.

Suy ra $n+K^2=n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

2) Ta có $\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}=\sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}$

$$\le\frac{3(x+y)+2(x+z)}{2}+\frac{3(x+y)+2(y+z)}{2}+\frac{(z+x)+(z+y)}{2}=\frac{9x+9y+6z}{2}=\frac{3}{2}(3x+3y+2z).$$

Suy ra $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}\ge\dfrac{2}{3}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=1,\ z=2$.

Vậy GTNN của P bằng $\frac{2}{3}$ khi $x=y=1,\ z=2$.

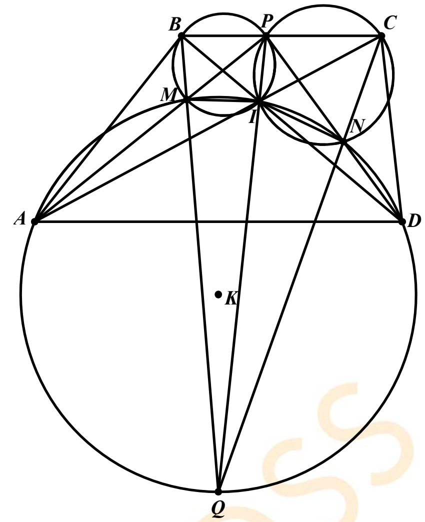
Câu III. Cho hình thang $ABCD$ với BC song song AD. Các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CDA}$ là các góc nhọn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. P là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng BC (P không trùng với $B;\ C$). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BIP cắt đoạn thẳng PA tại M khác P và đường tròn ngoại tiếp tam giác CIP cắt đoạn thẳng PD tại N khác P.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, M, I, N, D cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là (K).

2) Giả sử các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại Q, chứng minh rằng Q cũng nằm trên đường tròn (K).

3) Trong trường hợp P, I, Q thẳng hàng, chứng minh rằng $\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{CA}$.

Lời giải



1) Tứ giác $BPIM$ nội tiếp và $AD // BC$, suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{BPM} = \widehat{BIM}$ nên tứ giác $AMID$ nội tiếp.
Tương tự tứ giác $DNIA$ nội tiếp.
Vậy các điểm A, M, I, N, D thuộc một đường tròn (K).

2) Do các tứ giác $BPIM$ và $CPIN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{QMI} = \widehat{BPI} = \widehat{CNI}$, suy ra tứ giác $MINQ$ nội tiếp.
Mà $M, I, N \in (K)$, suy ra tứ giác $MINQ$ nội tiếp đường tròn (K).
Vậy Q thuộc đường tròn (K).

3) Khi P, I, Q thẳng hàng, kết hợp với Q thuộc đường tròn (K) ta có $\widehat{AIQ} = \widehat{PIC}$ (đối đỉnh); $\widehat{PIC} = \widehat{PNC}$ (do tứ giác $NIPC$ nội tiếp).
$\widehat{PNC} = \widehat{QND}$ (đối đỉnh); $\widehat{QND} = \widehat{QID}$ (do tứ giác $INDQ$ nội tiếp).
Suy ra $\widehat{AIQ} = \widehat{QID} \Rightarrow IQ$ là phân giác $\widehat{DIA}$ nên IP là phân giác $\widehat{BIC}$.
Do đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{ID}{IA} = \dfrac{IB+ID}{IC+IA} = \dfrac{BD}{AC} \Rightarrow \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BD}{CA}$.

Câu IV. Giả sử A là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi x thuộc A $(x \neq 1)$ luôn tồn tại $a; b$ cũng thuộc A sao cho $x = a + b$ (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất.

Lời giải

Giả sử A có n số, chúng ta xếp chúng theo thứ tự $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = 100$. (1)
Suy ra với mỗi $k \in \{1;2;3;\dots;n-1\}$ ta có $x_{k+1} = x_i + x_j \le x_k + x_k = 2x_k$ với $1 \le i, j \le k$. (2)
Áp dụng kết quả (2) ta thu được $x_2 \le 1+1 = 2$; $x_3 \le 2+2 = 4$; $x_4 \le 8$; $x_5 \le 16$; $x_6 \le 32$; $x_7 \le 64$.
Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.
+) Giả sử $n = 8 \Rightarrow x_8 = 100$.
Vì $x_6 + x_7 \le 32 + 64 = 96 \Rightarrow x_8 = 2x_7 \Rightarrow x_7 = 50$.
Vì $x_5 + x_6 \le 16 + 32 = 48 \Rightarrow x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 25$.
Vì $x_4 + x_5 \le 8 + 16 = 24 < 25 \Rightarrow x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = \dfrac{25}{2}$ (mâu thuẫn).
+) $n = 9$ ta có tập $\{1;2;3;5;10;20;25;50;100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .
Vậy $n = 9$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+2y=4\\2x+y+xy=4\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện $x\ge -6$.

Ta có $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+9}-2012\right)\left(\sqrt{x+6}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+9}-2012=0\\\sqrt{x+6}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+9}=2012\\\sqrt{x+6}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4048135\\x=-5\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-5;4048135\}$.

2) Ta có $\begin{cases}x^2+y^2+2y=4\\2x+y+xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(y+1)^2=5\\x(y+1)+x+(y+1)=5\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}u=x+(y+1)\\v=x(y+1)\end{cases}\Rightarrow x^2+(y+1)^2=(x+y+1)^2-2x(y+1)=u^2-2v$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}u^2-2v=5\\u+v=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}\\\begin{cases}u=-5\\v=10\end{cases}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+1=3\\x(y+1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}u=-5\\v=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+1=-5\\x(y+1)=10\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)\in\{(1;1);(2;0)\}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y+1)(xy+x+y)=5+2(x+y).$$

2) Giả sử $(x;y)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1)\ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$.

Lời giải

1) Ta có $(x+y+1)(xy+x+y)=5+2(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(xy+x+y)=2(x+y+1)+3$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(xy+x+y-2)=3$

$\Rightarrow x+y+1$ là ước của 3.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y+1=1 \\ xy+x+y-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=5 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ xy+x+y-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} x+y+1=3 \\ xy+x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Trường hợp 4: $\begin{cases} x+y+1=-3 \\ xy+x+y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=5 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(-1;-1);(1;1)\}$.

2) Ta có $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1)\ge 4 \Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $3\le\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+1}{2}\Rightarrow x+y\ge 2$.

Lại có: $\dfrac{x^2}{y}+y\ge 2x$ và $\dfrac{y^2}{x}+x\ge 2y$.

Suy ra $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\ge x+y\ge 2$.

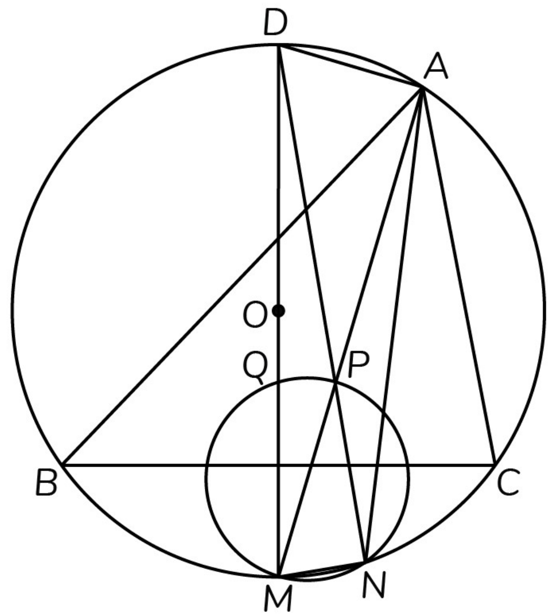
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x=y=1$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B; C và AM không đi qua O). Giả sử P là một điểm thuộc đoạn thẳng AM sao cho đường tròn đường kính MP cắt cung nhỏ BC tại điểm N khác M.

1) Gọi D là điểm đối xứng với điểm M qua O. Chứng minh rằng ba điểm N, P, D thẳng hàng.

2) Đường tròn đường kính MP cắt MD tại điểm Q khác M. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Lời giải



1) Vì MP là đường kính suy ra $PN \perp MN$. (1)

Vì MD là đường kính suy ra $DN \perp MN$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra N, P, D thẳng hàng.

2) Tứ giác $APQD$ nội tiếp (do $\widehat{PQD} = \widehat{MAD} = 90°$) nên $\widehat{PAQ} = \widehat{PDQ} = \widehat{NDM}$. (3)

Xét (O), ta có $\widehat{NDM} = \widehat{NAM}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{PAQ} = \widehat{NAP} \Rightarrow AP$ là phân giác của góc $\widehat{NAQ}$. $(*)$

Xét (O), ta có $\widehat{AND} = \widehat{AMD}$.

Xét đường tròn đường kính MP có $\widehat{QMP} = \widehat{QNP} \Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{QNP}$

$\Rightarrow NP$ là phân giác của $\widehat{ANQ}$. $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ANQ.

Câu IV. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \le b \le 3;\ c \ge b+1;\ a+b \ge c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \dfrac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

Lời giải

Ta có $Q = \dfrac{(abc+ab+ac+a)+(abc+bc+ba+b)-(abc+ca+cb+c)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

$$Q = \frac{a(b+1)(c+1)+b(c+1)(a+1)-c(a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}.$$

Ta chứng minh rằng $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}-\dfrac{c}{c+1}\ge\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{2}{1+2}-\dfrac{3}{1+3}=\dfrac{5}{12}.$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{3}{1+3}-\frac{c}{1+c}\right)+\left(\frac{b}{1+b}-\frac{2}{1+2}\right)+\left(\frac{a}{1+a}-\frac{1}{1+1}\right)\ge 0\Leftrightarrow\frac{3-c}{4(1+c)}+\frac{b-2}{3(b+1)}+\frac{a-1}{2(1+a)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(3-c)\left[\frac{1}{4(c+1)}-\frac{1}{3(b+1)}\right]+\left[(3-c)+(b-2)\right]\left[\frac{1}{3(b+1)}-\frac{1}{2(1+a)}\right]$$

$$+\left[(3-c)+(b-2)+(a-1)\right].\frac{1}{2(1+a)}\ge 0.$$

Vì $c\ge 3,\ 0<b\le c$ nên $(3-c).\dfrac{3b-4c-1}{12(b+1)(c+1)}\ge 0.$ $\qquad(1)$

Vì $b+1\le c,\ 0<a\le b$ nên $(b+1-c).\dfrac{2a-3b-1}{6(b+1)(a+1)}\ge 0.$ $\qquad(2)$

Vì $a+b\ge c,\ 0<a$ nên $(a+b-c).\dfrac{1}{2(a+1)}\ge 0.$ $\qquad(3)$

Từ $(1),(2)$ và $(3),$ suy ra điều phải chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\dfrac{5}{12}$ khi $a=1,\ b=2,\ c=3.$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ 9xy(3x-y)+6=26x^3-2y^3 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x.$

Lời giải

1) Ta có $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ 9xy(3x-y)+6=26x^3-2y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+6=27x^3-y^3-9xy(3x-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+3xy(x+y)=(3x-y)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)^3=(3x-y)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x+y=3x-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

2) Điều kiện $-4 \le x \le 4.$

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}+2}\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x.$

Với $x=0$ là nghiệm.

Giải $\sqrt{4-x}+2=2\left(\sqrt{x+4}+2\right).$

Đặt $u=\sqrt{x+4},\ v=\sqrt{4-x}\ (u,v\ge 0)$ ta thu được

$\begin{cases} v=2u+2 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Rightarrow u^2+(2u+2)^2=8 \Leftrightarrow 5u^2+8u-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{2}{5} \\ u=-2 \end{array}\right..$

Vì $u\ge 0$ nên $u=\dfrac{2}{5}\Rightarrow v=\dfrac{14}{5}\Rightarrow x=-\dfrac{96}{25}$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{0;-\dfrac{96}{25}\right\}.$

Câu II. 1) Tìm hai chữ số tận cùng của số $A=41^{106}+57^{2012}.$

2) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}$, với $\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải

1) Ta có $41^2=(40+1)^2=40^2+80+1\equiv 81 \pmod{100}$

$\Rightarrow 41^4 \equiv 81^2 \pmod{100} = \left(80^2 + 160 + 1\right) \equiv 61 \pmod{100}$

$\Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \pmod{100} \equiv 60.40 + 100 + 1 \pmod{100} \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow \left(41^5\right)^{21} = 41^{105} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 41^{106} \equiv 41 \pmod{100}$.

Lại có $57^4 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = \left(57^4\right)^{503} \equiv 1 \pmod{100}$.

Suy ra $A = 41^{106} + 57^{2012} \equiv 41 + 1 \pmod{100}$.
Vậy 2 chữ số cuối cùng của A là 42.

2) Tập xác định $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $x\sqrt{5-4x^2} \le \dfrac{x^2 + 5 - 4x^2}{2} = \dfrac{5-3x^2}{2}$ và $3\sqrt{2x-1} \le 3.\dfrac{2x-1+1}{2} = 3x \le \dfrac{3\left(x^2+1\right)}{2}$.

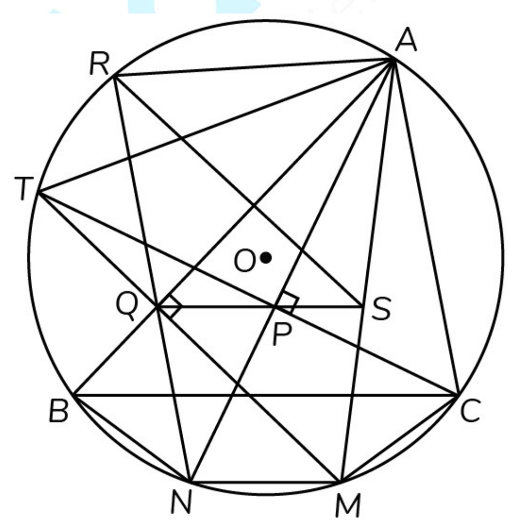
Cộng hai bất đẳng thức trên ta thu được $y = 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2} \le 4$.
Vậy GTLN của y bằng 4 khi $x = 1$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC $\left(AB > AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Giả sử M, N là hai điểm thuộc cung nhỏ BC sao cho MN song song với BC và tia AN nằm giữa hai tia AM, AB. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm C trên AN và Q là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB.

1) Giả sử CP cắt QM tại điểm T. Chứng minh T nằm trên đường tròn $\left(O\right)$.

2) Gọi giao điểm của NQ và $\left(O\right)$ là R khác N. Giả sử AM cắt PQ tại S. Chứng minh rằng bốn điểm A, R, Q, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



1) Vì $\widehat{TPA} = \widehat{TQA} = 90^\circ$ nên tứ giác $TAPQ$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{MTC} = \widehat{QTP} = \widehat{QAP}$ (do tứ giác $TAPQ$ nội tiếp) $= \widehat{BAN} = \widehat{MAC}$ (do $MN // BC$), suy ra tứ giác $MTAC$ nội tiếp, suy ra $T \in \left(O\right)$.

2) Từ tứ giác $TAPQ$ nội tiếp ta có $\widehat{PQA} = \widehat{PTA} = \widehat{CTA} = \widehat{ABC} \Rightarrow PQ // BC // MN$.

Từ đó $\widehat{QSA}=\widehat{NMA}$. (1)

Mà tứ giác $AMNR$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ARN}+\widehat{AMN}=180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{QRA}+\widehat{QSA}=180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ARQS$ nội tiếp, ta có điều phải chứng minh.

Câu IV. Với mỗi số n nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 cố định, xét các tập n số thực đôi một khác nhau $X=\{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Kí hiệu $C(X)$ là số các giá trị khác nhau của tổng x_i+x_j $(1\le i<j\le n)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $C(X)$.

Lời giải

Giả sử các số của tập hợp X được sắp theo thứ tự (đánh số lại) là $x_1<x_2<...<x_n$.

Ta có $x_1+x_2<x_1+x_3<...<x_1+x_n<x_2+x_n<x_3+x_n<...<x_{n-1}+x_n$, suy ra đối với một tập n số thực phân biệt bất kỳ ta luôn có ít nhất $(n-1)+(n-2)=2n-3$ giá trị phân biệt của các tổng x_i+x_j.

Vậy $C(X)\ge 2n-3$.

Xét tập $X_1=\{1;2;...;n\}$, khi đó với mọi $1\le i<j\le n$ thì $x_i+x_j=i+j\in\{3;4;...;2n-1\}$

$\Rightarrow C(X_1)=2n-3$.

Vậy $\left[C(X)\right]_{\min}=2n-3$.

Số các tổng x_i+x_j $(1\le i<j\le n)$ bằng $\dfrac{n(n-1)}{2}$, suy ra $C(X)\le\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Xét tập $X_2=\{2;2^2;...;2^n\}$, với mọi $1\le i<j\le n$ thì $x_i+x_j=2^i+2^j$.

Giả sử tồn tại $1\le r<s\le n: x_r+x_s=x_i+x_j\Rightarrow 2^r+2^s=2^i+2^j$

$$\Rightarrow 2^r\left(1+2^{s-r}\right)=2^i\left(1+2^{j-i}\right)\Rightarrow\begin{cases}2^r \mid 2^i\\ 2^i \mid 2^r\end{cases}\Rightarrow r=i\Rightarrow s=j\Rightarrow C(X_2)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Vậy $\left[C(X)\right]_{\max}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NĂM HỌC 2013 – 2014

Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**

Thời gian làm bài: **150 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=xy+\dfrac{1}{xy} \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)}=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+5x+2}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ -3x^2+5x+2=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta được được nghiệm: $x=1;\ x=\dfrac{7}{4}$.

2) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)-2 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{y} \\ v=y+\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} u+v=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}u=uv-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{9}{2}-u \\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3u}{2}=u\left(\dfrac{9}{2}-u\right) \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{9}{4}+\dfrac{3u}{2}=\dfrac{9u}{2}-u^2 \Leftrightarrow u^2-3u+\dfrac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \left(u-\dfrac{3}{2}\right)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{3}{2} \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+1=\dfrac{3y}{2} \\ xy+1=3x \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3y}{2}=3x \Rightarrow x=\dfrac{y}{2} \Rightarrow y+\dfrac{2}{y}=3 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ y=2\Rightarrow x=1 \end{array}\right.$.

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right),(1;\ 2)$.

Câu II. 1) Cho các số thực a, b, $c \neq 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}.$$

2) Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101?

Lời giải

1) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{b}{b+c}\right)+\frac{b}{b+c}\left(1-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{c}{c+a}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{ba}{(b+c)(c+a)}+\frac{cb}{(c+a)(a+b)}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=\frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=6abc$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+b^2(a+c)+(ba^2+abc)+c^2b+abc=8abc$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(ac+b^2+ab+bc)=8abc$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(c+b)(b+a)=8abc \text{ (điều phải chứng minh).}$$

2). Ta có $\overline{abcde}=\overline{abc00}+\overline{de}=\overline{abc}\cdot 100+\overline{de}=\overline{abc}(101-1)+\overline{de}=\overline{abc}\cdot 101-\overline{abc}+\overline{de}$

Suy ra $\overline{abcde}$ chia hết cho $101 \Leftrightarrow \overline{abc}-\overline{de}=\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101.

Ta có $101m \leq 99999 \Rightarrow m \leq \frac{99999}{101}=990+\frac{9}{101}$.

Vậy số có 5 chữ số lớn nhất chia hết cho 101 là 990.101.

Ta có $101n \leq 9999 \Rightarrow n \leq \frac{9999}{101}=99$.

Vậy số có 5 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 101 là 101.100.

Số các số có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $990-100+1=891$.

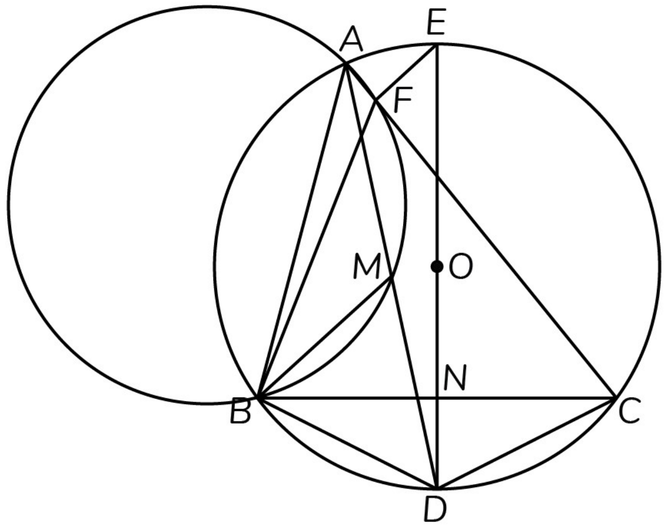
Vậy có 891 số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A.

1) Chứng minh rằng tam giác BDM và tam giác BCF đồng dạng.

2) Chứng minh rằng EF vuông góc với AC.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{BDM}=\widehat{BCF}$ (1) và $\widehat{BMA}=\widehat{BFA}$ suy ra $180^\circ-\widehat{BMA}=180^\circ-\widehat{BFA}$ hay $\widehat{BMD}=\widehat{BFC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDM\backsim\Delta BCF$ (g.g).

2) Từ AD là phân giác $\widehat{BAC}$ suy ra $DB=DC$. v

Vậy DE vuông góc với BC tại trung điểm N của BC.

Theo chứng minh trên, ta có $\Delta BDM\backsim\Delta BCF\Rightarrow\dfrac{DM}{CF}=\dfrac{BD}{BC}$.

Vậy ta có biến đổi sau $\dfrac{DA}{CF}=\dfrac{2DM}{CF}=\dfrac{2BD}{BC}=\dfrac{CD}{CN}=\dfrac{DE}{CE}$. (3)

Ta lại có $\widehat{ADE}=\widehat{FCE}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\Delta EAD\backsim\Delta EFC\Rightarrow\widehat{EFC}=\widehat{EAD}=90^\circ$.

Vậy $EF\perp AC$.

Câu IV. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc+bcd+cda+dab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9d^3$.

Lời giải

Với α là số thực dương ta có

$$\frac{d^3}{3}+\frac{a^3}{3\alpha^3}+\frac{b^3}{3\alpha^3}\ge\frac{dab}{\alpha^2};\ \frac{d^3}{3}+\frac{b^3}{3\alpha^3}+\frac{c^3}{3\alpha^3}\ge\frac{dbc}{\alpha^2};\ \frac{d^3}{3}+\frac{c^3}{3\alpha^3}+\frac{a^3}{3\alpha^3}\ge\frac{dca}{\alpha^2};\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3\alpha^2}\ge\frac{abc}{\alpha^2}.$$

Cộng vế với vế 4 bất đẳng thức trên ta thu được

$$d^3+\left(\frac{2}{3\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^2}\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\frac{1}{\alpha^2}\left(abc+bcd+cda+dab\right).$$

Ta tìm $\alpha>0$ sao cho $\dfrac{2}{3\alpha^3}+\dfrac{1}{3\alpha^2}=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow 2+\alpha=\dfrac{4}{3}\alpha^3\Leftrightarrow 4\alpha^3-3\alpha=6.$

Chọn $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, ta được $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=6\Leftrightarrow x^6-12x^3+1=0.$$

Ta có nghiệm dương là $x=\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}$, $x=\sqrt[3]{6-\sqrt{35}} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)$.

Với α xác định như trên ta thu được $d^3+\frac{4}{9}\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}$

$$\Leftrightarrow 9d^3+4\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{9}{\alpha^2}=\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha+3}}$; $d=\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1+y-x+xy \\ 7xy+y-x=7 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$.

Lời giải

1) Cộng vế với vế của hai phương trình, ta được $x^3+y^3+6xy=8$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+(-2)^3-3xy(-2)=0 \Leftrightarrow (x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2x+2y)=0.$

Ta có $x^2+y^2+(-2)^2 \ge xy+(-2y)+(-2x)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=-2$.

Suy ra $x^2+y^2+4-xy+2x+2y=0 \Leftrightarrow x=y=-2$ (loại vì không thoả mãn $7xy+y-x=7$).

Do đó $\begin{cases} x+y=2 \\ 7xy+y-x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{7} \\ y=\dfrac{9}{7} \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)\in\left\{(1;1);\left(\dfrac{5}{7};\dfrac{9}{7}\right)\right\}$.

2) Điều kiện $-1\le x\le 1$.

Ta có $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2+\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)+2\sqrt{x+1}=2+\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$.

Trường hợp 1: $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Trường hợp 2: $\sqrt{x+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0\}$.

Câu II. 1) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $5x^2+8y^2=20412$.

2) Với $(x;y)$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y\le 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\sqrt{1+x^2y^2}.$$

Lời giải

1) **Nhận xét:** Nếu a, b là các số nguyên thỏa mãn $a^2+b^2 \vdots 3$ thì $a, b \vdots 3$.

Thật vậy, vì $a^2 \equiv 0$ hoặc 1 (mod 3); $b^2 \equiv 0$ hoặc 1 (mod 3).

Do đó để $a^2+b^2 \equiv 0$ (mod 3) thì $\begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ b^2 \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \Leftrightarrow a, b \vdots 3.$

Ta có $5x^2+8y^2=20412 \Leftrightarrow \left(6x^2+9y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)=28.9^3$

$\Rightarrow x^2+y^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x, y \vdots 3 \Rightarrow \begin{cases} x=3x_1 \\ y=3y_1 \end{cases}$ với $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$.

Thay vào phương trình ta được $5.9x_1^2+8.9y_1^2=28.9^3 \Leftrightarrow 5x_1^2+8y_1^2=28.9^2$.

Lập luận tương tự, ta có $\begin{cases} x_1=3x_2 \\ y_1=3y_2 \end{cases}$ với $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$.

Thay vào phương trình ta được $5.9x_2^2+8.9y_2^2=28.9^2 \Leftrightarrow 5x_2^2+8y_2^2=28.9$.

Lập luận tương tự, ta có $\begin{cases} x_2=3x_3 \\ y_2=3y_3 \end{cases}$ với $x_3, y_3 \in \mathbb{Z}$.

Thay vào phương trình ta được $5.9x_3^2+8.9y_3^2=28.9 \Leftrightarrow 5x_3^2+8y_3^2=28$.

Suy ra $y_3^2 \le \dfrac{28}{8} < 2^2 \Rightarrow y_3^2 \in \{0;1\}$.

Nếu $y_3^2=0 \Rightarrow x_3^2=\dfrac{28}{5}$ (loại).

Nếu $y_3^2=1 \Rightarrow x_3^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 54 \\ y=\pm 27 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên là $(x;y) \in \{(-54;-27);(-54;27);(54;-27);(54;27)\}$.

2) Ta có $P \ge \dfrac{2}{\sqrt{xy}}.\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{xy+\dfrac{1}{xy}}$.

Đặt $t=xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4}$.

Ta thu được $\dfrac{P}{2} \ge \sqrt{t+\dfrac{1}{t}}=\sqrt{16t+\dfrac{1}{t}-15t} \ge \sqrt{2\sqrt{16}-\dfrac{15}{4}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow P \ge \sqrt{17}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

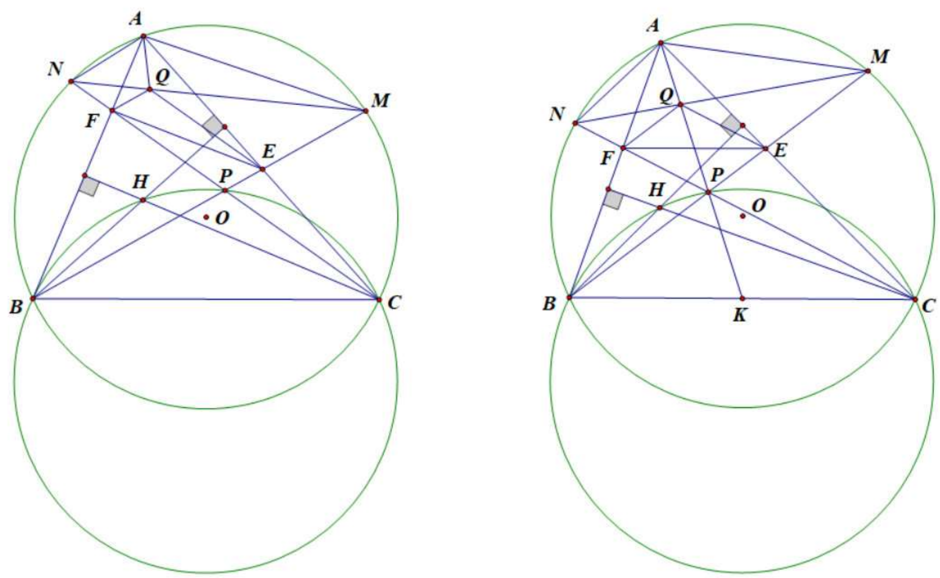
Vậy GTNN của P bằng $\sqrt{17}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC (P khác B, C và H) và nằm trong tam giác ABC. PB cắt (O) tại M khác B, PC cắt (O) tại N khác C. BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A.

1) Chứng minh rằng ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

2) Giả sử AP là phân giác $\widehat{MAN}$. Chứng minh rằng khi đó PQ đi qua trung điểm của BC.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{BPC} = \widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$, suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp, nên $\widehat{BFC} + \widehat{BEC} = 180°$.

Mặt khác từ các tứ giác $AQFN$, $AQEM$ nội tiếp ta có $\widehat{MQN} = \widehat{MQA} + \widehat{NQA} = \widehat{MEA} + \widehat{NFA} = 180°$.

Vậy 3 điểm M, N, Q thẳng hàng.

2) Ta có các góc nội tiếp bằng nhau $\widehat{AFQ} = \widehat{ANQ} = \widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ suy ra $FQ // BE$.

Tương tự $EQ // CF$.

Từ đó tứ giác $EQFP$ là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{QAN} = \widehat{QFP} = \widehat{QEP} = \widehat{QAM}$ hay AQ là phân giác $\widehat{MAN}$.

Nếu AP là phân giác $\widehat{MAN}$ thì A, P, Q thẳng hàng.

Từ đó nếu PQ giao BC tại K thì $\widehat{KAC} = \widehat{QAC} = \widehat{QME} = \widehat{NMB} = \widehat{PCK}$.

Vậy $\Delta AKC \backsim \Delta CKP \Rightarrow KC^2 = KP.KA$.

Tương tự, ta chứng minh được $KB^2 = KP.KA$.

Suy ra $KB = KC$ hay K là trung điểm BC. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Câu IV. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1 \le x_2 \le ... \le x_{192}$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_{192} = 0$ và $|x_1| + |x_2| + ... + |x_{192}| = 2013$. Chứng minh rằng $x_{192} - x_1 \ge \dfrac{2013}{96}$.

Lời giải

Giả sử k là chỉ số mà $x_1 \le x_2 \le ... \le x_k < 0 \le x_{k+1} \le ... \le x_{192}$.

Ký hiệu $S^- = x_1 + x_2 + ... + x_k$ và $S^+ = x_{k+1} + x_{k+2} + ... + x_{192}$.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} S^- + S^+ = 0 \\ S^+ - S^- = 2013 \end{cases} \Rightarrow S^+ = -S^- = \dfrac{2013}{2}$.

Do $x_1 \le x_2 \le ... \le x_{192}$ suy ra $S^- \ge kx_1$, $S^+ \le (192-k)x_{192}$

$\Rightarrow x_1 \le \frac{S^-}{k} = -\frac{S^+}{k} \Rightarrow -x_1 \ge \frac{S^+}{k}; x_{192} \ge \frac{S^+}{192-k}$

$\Rightarrow x_{192} - x_1 \ge \frac{S^+}{192-k} + \frac{S^+}{k} = \frac{2013}{2(192-k)} + \frac{2013}{2k} = \frac{2013.192}{2k(192-k)}$.

Ta có $2k(192-k) \le 2\left[\frac{(192-k)+k}{2}\right]^2 = \frac{192^2}{2} \Rightarrow x_{192} - x_1 \ge \frac{2013.192}{\frac{192^2}{2}} = \frac{2013}{96}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_{96} = -\frac{2013}{192}$ và $x_{97} = x_{98} = ... = x_{192} = \frac{2013}{192}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NĂM HỌC 2014 – 2015

Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**

Thời gian làm bài: **150 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=8.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}.$

Lời giải

1) Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

Ta có $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2=2+2\sqrt{1-x^2}.$

Do đó phương trình đã cho tương đương với $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^3=8\Leftrightarrow\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0\in[-1,1].$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0.$

2) Từ hệ phương trình, ta có:

$$4\left(x^2-xy+y^2\right)=x^2+xy+2y^2\Leftrightarrow 3x^2-5xy+3y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(3x-2y)=0.$$

Với $x-y=0$ hay $x=y,$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta có

$$x^2-x^2+x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Với $3x-2y=0$ hay $y=\frac{3}{2}x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta có:

$$x^2-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt7}\Rightarrow y=\pm\frac{3}{\sqrt7}.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là: $(x;y)\in\left\{(1;1);(-1;-1);\left(\frac{2}{\sqrt7};\frac{3}{\sqrt7}\right);\left(-\frac{2}{\sqrt7};-\frac{3}{\sqrt7}\right)\right\}.$

Câu II. 1) Giả sử $x,\ y,\ z$ là ba số dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz.$

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y+3+xy.$

Lời giải

1) Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}.$

Từ giả thiết ta có $ab+bc+ca=1.$

Do đó, đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{2b}{1+b^2}+\dfrac{3c}{1+c^2}=\dfrac{5bc+4ca+3ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{2b}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{3c}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{5bc+4ca+3ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\Leftrightarrow a(b+c)+2b(c+a)+3c(a+b)5bc+4ca+3ab$ (luôn đúng)

Vậy đẳng thức được chứng minh.

2) Đặt $u=x+y,\ v=xy$ phương trình đã cho trở thành: $v^2u+u=3+v \Leftrightarrow u=\dfrac{v+3}{v^2+1}$.

Do $x;y\in\mathbb{Z}^+$ nên $u;v\in\mathbb{Z}^+$ suy ra v^2+1 là ước của $v+3 \Rightarrow v^2+1$ là ước của $v^2-9 \Rightarrow v^2+1$ là ước của $v^2+1-10 \Rightarrow v^2+1$ là ước của 10.

Lần lượt xét các ước nguyên của 10 để xác định v, u rồi tìm nghiệm nguyên dương x, y tương ứng, thử lại với phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên dương là: $(x;y)\in\{(0;3);(3;0);(1;1)\}$.

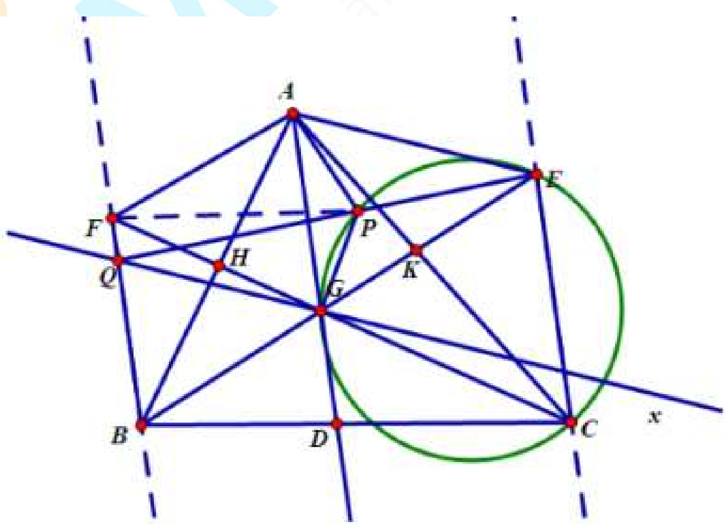
Câu III. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<BC$. Gọi D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực của AB tại F.

1) Chứng minh tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

3) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



1) Ta có ΔABF và ΔACE đồng dạng do chúng lần lượt cân tại F, E và $\widehat{FBA}=\widehat{BAD}=\widehat{DAC}=\widehat{ECA}$.

2) Gọi G là giao điểm của BE và CF.

Ta có: $\frac{GF}{GC}=\frac{BF}{CE}=\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow DG//BF$.

Mặt khác $DA//BF$ suy ra $A,\ D,\ G$ thẳng hàng, suy ra điều phải chứng minh.

3) Ta có $\widehat{BQG}=\widehat{QGA}=\widehat{GAE}=\widehat{GAC}+\widehat{CAE}=\widehat{GAB}+\widehat{BAF}=\widehat{GAF}$ suy ra $AGQF$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{QPG}=\widehat{GCE}=\widehat{GFQ}$ nên $QGPF$ là tứ giác nội tiếp.

Câu IV. Giả sử $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $2abc\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a^4b^2+\frac{1}{3}abc^2+\frac{1}{9}ca\ge a^2bc;$$
$$b^4c^2+\frac{1}{3}bca^2+\frac{1}{9}ab\ge b^2ca;$$
$$c^4a^2+\frac{1}{3}cab^2+\frac{1}{9}bc\ge c^2ab.$$

Cộng theo từng vế của ba BĐT trên thay ab + bc + ca = 1 vào và rút gọn ta được:

$$\frac{2}{3}abc\left(a+b+c\right)\le a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{1}{9}. \qquad (1)$$

Ta có $abc\left(a+b+c\right)=ab.ca+bc.ab+ca.bc\le\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{4}{3}abc\left(a+b+c\right)\le\frac{4}{9}. \qquad (2)$

Cộng theo từng vế (1) và (2) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giả sử x, y là những số thực dương thỏa mãn: $\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^4}{x^8-y^4}=4.$

Chứng minh rằng: $5y=4x.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12\\6x+x^2y=12+6y+y^2x\end{cases}.$

Lời giải

1) Dễ thấy đẳng thức sau đúng với $\forall a\neq\pm b$.

$$\frac{b}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{-2b^2}{a^2-b^2}\text{, suy ra }\frac{b}{a+b}=\frac{b}{a-b}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}.$$

Do đó đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{y}{x-y}-\frac{2y^2}{x^2-y^2}+2\left(\frac{y^2}{x^2-y^2}-\frac{2y^4}{x^4-y^4}\right)+4\left(\frac{y^4}{x^4-y^4}-\frac{2y^8}{x^8-y^8}\right)+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{y}{x-y}=4\Leftrightarrow y=4x-4y\Leftrightarrow 5y=4x,\text{ điều phải chứng minh.}$$

2) Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}(x-y)(2x+3y)=12\\6(x-y)+xy(x-y)=12\end{cases}$,

Suy ra $(x-y)(2x+3y)=(x-y)(6+xy)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\2x+3y=6+xy.\end{array}\right.$ (loại).

Ta có $2x+3y=(6+xy)\Leftrightarrow(x-3)(y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right.$.

+ Với $x=3$, thay vào phương trình đầu của hệ ta có

$$18-3y^2+3y=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2\end{array}\right..$$

+ Với $y=2$, thay vào phương trình đầu của hệ ta có

$$2x^2+2x-12=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-4\end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;-1),(3;2),(-4;2)$.

Câu II. 1) Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng: $x=y$.

2) Giả sử x, y là những số thực không âm thỏa mãn: $x^3+y^3+xy=x^2+y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$.

Lời giải

1) Do $x;\ y$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $x;\ y \ge 2$

$$\Rightarrow -4xy+1 < -7x+7y < 4xy+1$$

$$\Rightarrow 4x^2y^2-4xy+1 < 4x^2y^2-7x+7y < 4x^2y^2+4xy+1$$

$$\Rightarrow (2xy-1)^2 < 4x^2y^2-7x+7y < (2xy+1)^2.$$

Mà $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương và $1 < 2xy-1 < 2xy+1$;

nên ta có $4x^2y^2-7x+7y=(2xy)^2 \Leftrightarrow x=y$, điều phải chứng minh.

2) Ta có $x^3+y^3=x^2+y^2-xy$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2-xy)=x^2+y^2-xy \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2-xy)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-xy=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x+y=1 \end{array}\right..$$

+ Với $x=y=0 \Rightarrow P=\dfrac{5}{2}$.

+ Với $x+y=1 \Rightarrow 0 \le x;\ y \le 1$,

suy ra $P \le \dfrac{1+\sqrt{1}}{2+\sqrt{0}}+\dfrac{2+\sqrt{1}}{1+\sqrt{0}}=4$, Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=1;\ y=0$.

$P \ge \dfrac{1+\sqrt{0}}{2+\sqrt{1}}+\dfrac{2+\sqrt{0}}{1+\sqrt{1}}=\dfrac{4}{3}$, Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0;\ y=1$.

Vậy $P_{\max}=4 \Leftrightarrow x=1;\ y=0$ và $P_{\min}=\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x=0;\ y=1$.

Câu III. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB=PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

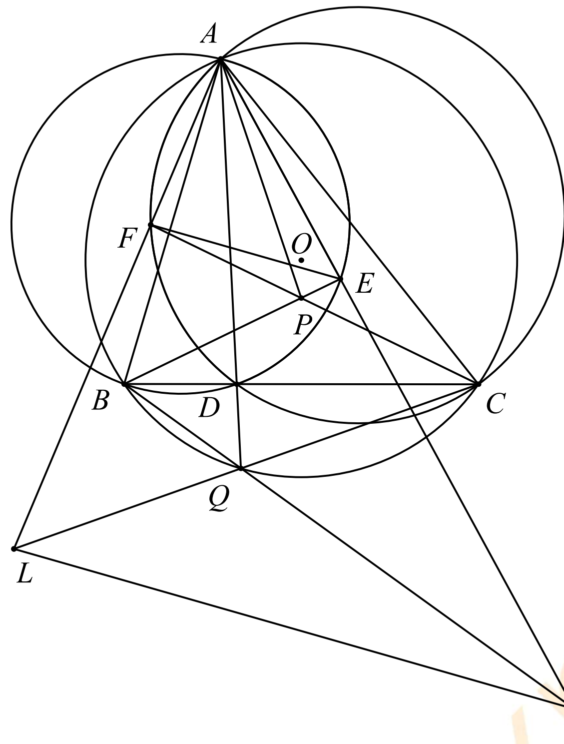
1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh rằng tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB.

Chứng minh rằng: $\widehat{QKL}+\widehat{PAB}=\widehat{QLK}+\widehat{PAC}$.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{AFC}+\widehat{AEB}=\widehat{ADC}+\widehat{ADB}=180^\circ$ suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

2) Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{LFC}$ (1).

Ta lại có $\widehat{FCL}=\widehat{FCB}+\widehat{BCL}=\widehat{PBC}+\widehat{BAQ}=\widehat{DAE}+\widehat{BAQ}=\widehat{BAE}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $\Delta FCL \backsim \Delta EAB$.

3) Từ $\Delta FCL \backsim \Delta EAB$, suy ra $\dfrac{FL}{BE}=\dfrac{FC}{AE}$ hay $FL.EA=FC.EB$ (3).

Chứng minh tương tự $EK.FA=FC.EB$ (4).

Từ (3) và (4), suy ra $FL.EA=EK.FA$ hay $\dfrac{FL}{FA}=\dfrac{EK}{EA}$, suy ra $EF//KL$.

Ta lại có $\widehat{QLK}=\widehat{ALK}-\widehat{ALQ}=\widehat{AFE}-\widehat{ABE}=\widehat{APE}-\widehat{ABE}=\widehat{PAB}$.

Tương tự ta có $\widehat{QKL}=\widehat{PAC}$.

Suy ra $\widehat{QKL}+\widehat{PAB}=\widehat{QLK}+\widehat{PAC}$.

Câu IV. Cho tập hợp A gồm 31 phần tử và dãy gồm m tập hợp của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp thuộc dãy có ít nhất hai phần tử.

ii) Nếu hai tập hợp thuộc dãy có chung nhau ít nhất hai phần tử thì số phần tử của hai tập hợp này khác nhau.

Chứng minh rằng: $m \le 900$.

Lời giải

Từ giả thiết dễ thấy m tập con thuộc dãy là phân biệt.

Vì A có 31 phần tử nên số tập con có đúng 2 phần tử của A là $\dfrac{31.30}{2}$. Ký hiệu a_k $\left(2 \le k \le 31\right)$ là số các tập có đúng k phần tử, nằm trong dãy đã cho, suy ra $m=a_2+a_3+\ldots+a_{31}$.

Xét một tập hợp có k phần tử suy ra số các tập con có 2 phần tử của tập đó là $\frac{k(k-1)}{2}$

$\Rightarrow a_k$ tập này sẽ có $a_k.\frac{k.(k-1)}{2}$ tập con 2 phần tử. Mà theo giả thiết với 2 phần tử bất kỳ của A thì chúng không thể đồng thời thuộc 2 tập có k phần tử của dãy

$\Rightarrow$ Các tập con 2 phần tử nói trên là phân biệt.

Suy ra $\frac{k(k-1)}{2}a_k \le \frac{31\cdot 30}{2} \Rightarrow a_k \le 31\cdot 30\cdot\frac{1}{k(k-1)}$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + \cdots + a_{31} \le 31.30\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{30.31}\right)$$

$$\Rightarrow m \le 31.30\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{30} - \frac{1}{31}\right).$$

Vậy $m \le 99$ (điều phải chứng minh).

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giả sử a; b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$.

a) Chứng minh rằng $a+b=-3$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+3y=5xy\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}$.

Lời giải

1) Giả sử $a; b$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn.

a) $\begin{cases}a^2+3b=2\\b^2+3a=2\end{cases}\Rightarrow a^2-b^2+3(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)(a+b)+3(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)(a+b+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b=0\ (l)\\a+b=-3\end{array}\right.$.

b) Với $a+b=-3\Rightarrow(a+b)^3=-27\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-27\Leftrightarrow a^3+b^3-9ab=-27$

$\Leftrightarrow a^2+3a+b^2+3b=4\Leftrightarrow(a+b)^2-2ab+3(a+b)=4\Leftrightarrow ab=-2$.

Vậy $a^3+b^3=-45$.

2) Ta thấy $x-y=0$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $y\neq0$, nhân hai vế của phương trình với y, ta được

$$\begin{cases}2xy+3y^2=5xy^2\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=5xy\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=5xy\\2x^2-xy-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=5xy\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=5xy\\(x-y)(2x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=5xy\\(x-y)(2x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3y=5xy\\(x-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1\\\begin{cases}2x+3y=5xy\\(2x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{5},y=\frac{-4}{5}\end{array}\right..$$

Câu II. 1) Tìm các số nguyên $(x;y)$ không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

2) Với x; y là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2+2y+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{3y+1}$.

Lời giải

1) Ta có $xy-1\,\vdots\,(x-1)(y-1)$, suy ra $xy-1\,\vdots\,xy+1-x-y$.

Mà $xy+1-x-y\,\vdots\,xy+1-x-y\Rightarrow(x-1)+(y-1)\,\vdots\,(x-1)(y-1)$.

Suy ra $x-1\,\vdots\,y-1$ và $y-1\,\vdots\,x-1$, nên $x=y$

$x^2-1\,\vdots\,(x-1)^2$ ta có $x+1\,\vdots\,x-1$, suy ra $2\,\vdots\,x-1$, nên $x=2$ hoặc $x=3$.

2) Ta có $x^2y^2+2y+1=0\Leftrightarrow2y=-x^2y^2-1\Leftrightarrow y=\frac{-x^2y^2-1}{2}$

$$P=\frac{xy}{3\left(-x^2y^2-1\right)+2}=\frac{xy}{\left(-3x^2y^2-1\right)}\Leftrightarrow 3Px^2y^2+2xy+P=0.$$

Ta có $\Delta=4-12P^2$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta\geq 0\Leftrightarrow 4-12P^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq\sqrt{3}P\leq 1\Leftrightarrow\frac{-1}{\sqrt{3}}\leq P\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow P\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $MaxP=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{12\sqrt{3}}{21}$ và $y=-\frac{7}{6}$.

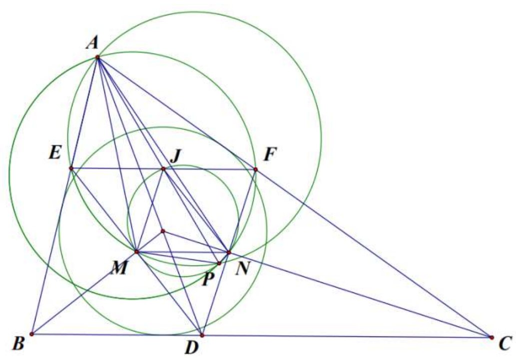
Câu III. Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB.

1) Chứng minh rằng EF song song với BC.

2) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, J cùng nằm trên một đường tròn.

3) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Lời giải



1) Ta có AD là phân giác $\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ mà $\Delta BED; \Delta CDF$ là tam giác cân $\Rightarrow\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow BC\parallel FE$.

2) Ta có $BC\parallel EF\Rightarrow\widehat{EFD}=\widehat{EDB}=\widehat{BED}$.

Mà $\widehat{APM}=180^0-\widehat{AEM}=\widehat{BED}\Rightarrow\widehat{APM}=\widehat{DEF}$.

Tương tự: $\widehat{DFE}=\widehat{APN}\Rightarrow\widehat{APN}+\widehat{APM}=\widehat{DFE}+\widehat{FED}=\widehat{MPN}$.

Mà $\widehat{MJN}=\widehat{MDN}=\widehat{EDF}\Rightarrow\widehat{MJN}+\widehat{MPN}=180^0\Rightarrow MPNJ$ nội tiếp.

3) Ta có $\widehat{APM}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{JPM}=\widehat{JNM}=\widehat{JEM}\Rightarrow\widehat{JPM}=\widehat{APM}$, suy ra 3 điểm $A; P; J$ thẳng hàng.

Câu IV.

1) Cho bảng ô vuông 2015×2015. Kí hiệu ô $(i;j)$ là ô ở hang thứ i, cột thứ j. Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:

i) Số 1 được viết vào ô $(1;1)$.

ii) Nếu số k được viết vào ô $(i;j)$ $(i>1)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(i-1;j+1)$.

iii) Nếu số k được viết vào ô $(1;j)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(j+1;1)$ (xem hình 1).

1	3	6	10	...
2	5	9	...	
4	8	...		
7	...			
...				

Hình 1

Khi đó số 2015 được viết vào ô $(m;n)$.

Hãy xác định m và n.

2) Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc\le 4$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải

1) Theo đề bài, các số nguyên dương được sắp xếp theo từng hàng chéo của bảng: Hàng chéo thứ nhất có 1 số, hàng chéo thứ hai có 2 số,......

Giả sử số x nằm ở hàng chéo thứ k thì ta có: $\frac{k(k-1)}{2}<x\le\frac{k(k+1)}{2}\Rightarrow\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\le k<\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$

$$\Rightarrow k=\left|\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\right|.$$

Áp dụng $x=2015$ ta có $k=\left|\frac{-1+\sqrt{1+8.2015}}{2}\right|=63$.

Số đầu tiên ở hàng chéo thứ $k=63$ là $\frac{k(k-1)}{2}+1=1954$.

Như vậy số 2015 nằm ở vị trí thứ $2015-1954+1=62$ của hàng chéo thứ 63 (vị trí áp chót).

Tọa độ của nó là $(2,62)$.

2) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số ta có

$$4\ge abc+ab+bc+ac\ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\Rightarrow 1\ge abc\Rightarrow a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

BĐT tương đương $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 2(ab+bc+ac)$ (1).

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x;\ \sqrt[3]{b^2}=y;\ \sqrt[3]{c^2}=z$ $(x;\ y;\ z>0)\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Schur bậc 3: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)$

$\Leftrightarrow x(x+y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\ge 0$ với mọi số thực không âm $x;\ y;\ z$.

Chứng minh bất đẳng thức trên như sau:

Do vai trò $x;\ y;\ z$ như nhau, giả sử $x\ge y\ge z\Rightarrow z(z-x)(z-y)\ge 0$.

Ta xét $x(x-z)-y(y-z)=x^2-xz+yz-y^2=(x-y)(x+y-z)\ge 0$

$\Rightarrow x(x-z)(x-y)-y(y-z)(x-y)\ge 0\Leftrightarrow x(x-z)(x-y)+y(y-z)(y-x)\ge 0$

$\Rightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\ge 0$ (điều phải chứng minh).

Ta có $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}x=y=z\\ x=y;\ z=0\end{array}\right.\Rightarrow a=b=c=1$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Với a, b, c là các số thỏa mãn

$$(3a+3b+3c)^3 = 24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3.$$

Chứng minh rằng $(a+2b)(b+2c)(c+2a)=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+2y+xy=5 \\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x \end{cases}$.

Lời giải

1) Đặt $\begin{cases} 3a+b-c=x \\ 3b+c-a=y \\ 3c+a-b=z \end{cases}$.

Ta có $(3a+3b+3c)^3 = 24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3 \Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 24+x^3+y^3+z^3$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 24+(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(x+z) \Leftrightarrow 24-3(x+y)(y+z)(x+z)=0$

$\Leftrightarrow 24-3(2a+4b)(2b+ac)(2c+4a)=0 \Leftrightarrow 24-24(a+2b)(b+2c)(c+2a)=0 \Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a)=1$.

2) Ta có $\begin{cases} 2x+2y+xy=5 \\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2)=9 \\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x \end{cases}$

$\Leftrightarrow y^3+x^3+7+3(x+y)(x+2)(y+2)=27x^3+27x^2+9x$

$\Leftrightarrow y^3+x^3+8+3xy(x+y)+12(x+y)+6(x+y)^2=(3x+1)^3$

$\Leftrightarrow (x+y+2)^3=(3x+1)^3 \Rightarrow x+y+2=3x+1$

$\Leftrightarrow y+1=2x \Rightarrow (x+2)(2x+1)=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-\dfrac{7}{2} \Rightarrow y=-8 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;1), \left(-\dfrac{7}{2};-8\right)$.

Câu II. 1) Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ là số chính phương (số chính phương là bình phương của một số nguyên).

2) Tìm $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

3) Giả sử x; y; z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}.$$

Lời giải

1) Đặt $\begin{cases} n+5=x^2 \\ n+30=y^2 \end{cases}$ $\left(x,\, y \in \mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow y^2-x^2=25 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=1.25$ vì $x,\, y \in \mathbb{N}^*$.

Lại có $y-x<y+x$ nên $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13 \\ x=12 \end{cases}$.

Thay vào ta tính được $n=139$ thoả mãn.

2) Ta thấy $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ và $x,\, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x,\, y$ là số chính phương $\Rightarrow \sqrt{x+y+3};\, \sqrt{x};\, \sqrt{y} \in \mathbb{N}$.

Đặt $\sqrt{x}=a,\, \sqrt{y}=b,\, \sqrt{x+y+3}=c\ (a,\, b,\, c \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=c+1 \\ x+y=a^2+b^2 \\ x+y+3=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=c+1 \\ c^2-a^2-b^2=3 \end{cases} \Rightarrow (a+b-1)^2-a^2-b^2=3 \Leftrightarrow 2a+2b+-2ab=-3$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

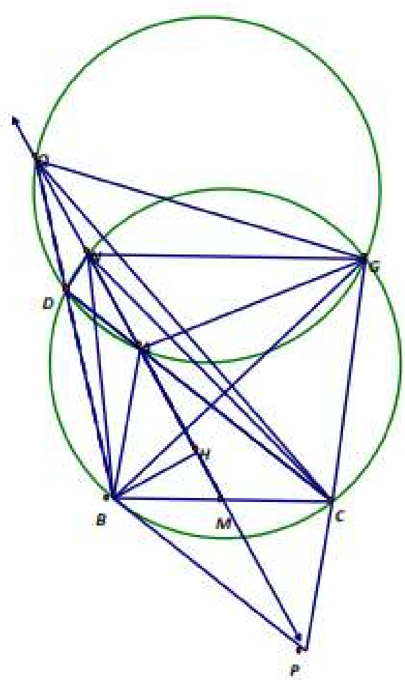
Câu III. Cho tam giác ABC nhọn không cân với $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN=2MH$.

1) Chứng minh rằng $BN=AC$.

2) Gọi Q là điểm đối xứng với A qua N. Đường thẳng AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn,gọi đường tròn này là (O).

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G và D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Lời giải



1) Gọi P là điểm đối xứng của A qua M

$\Rightarrow HP = HM + MB = 2HM + AH = HN$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của NP.

Mà $BH \perp NP$, suy ra tam giác $\triangle PNB$ cân tại $B \Rightarrow BN = BP$.

Mặc khác lại có M là trung điểm của $BC; AP$. Do đó tứ giác $ACPB$ là hình bình hành, suy ra $AC = BP \Rightarrow AC = BN$.

2) Do tứ giác $ACPB$ là hình bình hành, suy ra $\widehat{PAC} = \widehat{APB}$.

Mà tam giác $\triangle PBN$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{PAC}$

$\Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{BNQ}$

Ta có $AC = NB; NQ = AN$

$\Rightarrow \triangle BNQ = \triangle CAN \Rightarrow \widehat{NBD} = \widehat{NCD} \Rightarrow N; B; C; D$ cùng thuộc một đường tròn $C; G$ là giao điểm (DQG) với (DBC), suy ra $\widehat{CAG} = \widehat{BQG}$.

3) Ta có $\widehat{CAG} = \widehat{BQG}$.

Mà $\widehat{GBQ} = \widehat{GCA} \Rightarrow \triangle GBQ \backsim \triangle GCA \Rightarrow \dfrac{GA}{AC} = \dfrac{GQ}{QB} \Rightarrow \dfrac{GA}{NB} = \dfrac{GQ}{NC}$;

và $\widehat{BNC} = \widehat{BDC} = \widehat{AGQ} \Rightarrow \triangle NBC \backsim \triangle GAQ$;

$\Rightarrow \widehat{GQA} = \widehat{NCB} \Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{GDC} \Rightarrow GC = NB \Rightarrow NG \parallel BC$.

Câu IV. Ký hiệu S là tập hợp gồm 2015 điểm phân biệt trên một mặt phẳng. Giả sử tất cả các điểm của S không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng có ít nhất 2015 đường thẳng phân biệt mà mỗi đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm của S.

Lời giải

Giả sử trên mặt phẳng có n điểm thẳng hàng thì tồn tại một đường thẳng.

Theo bài ra các điểm đã cho không cùng nằm trên một đường thẳng nên tồn tại ít nhất một điểm không cùng nằm trên đường thẳng đó nối điểm đó với $n-1$ điểm đã cho ta được $n-1$ đường thẳng với đường thẳng đi qua $n-1$ điểm ta được n đường thẳng, thay $n = 2015$ thì tồn tại ít nhất 2015 đường thẳng.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=4 \\ (xy+1)(x^2+y^2)=4 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x}=\dfrac{8x-3}{5}$.

Lời giải

1) Hệ phương trình đã cho là hệ phương trình đối xứng dạng 1, do đó ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ $S=x+y;P=xy$. Tuy nhiên để đơn giản hóa ta cần biến đổi hệ phương trình trước.Biến đổi tương đương hệ phương trình ta được

$$\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=4 \\ (xy+1)(x^2+y^2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)+xy(x+y)=4 \\ (xy+1)\left[(x+y)^2-2xy\right]=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-2xy(x+y)=4 \\ (xy+1)\left[(x+y)^2-2xy\right]=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-2xy(x+y)=4 \\ (xy+1)(x+y)^2-2xy(xy+1)=4 \end{cases}$$

Đến đây ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ, tuy nhiên để ý đến vế phải hai phương trình ta lấy hiệu theo vế của hai phương trình của hệ thì được

$$(x+y)^3-2xy(x+y)=(xy+1)(x+y)^2-2xy(xy+1)$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2(x+y-xy-1)-2xy(x+y-xy-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y-xy-1)\left[(x+y)^2-2xy\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-xy-1=0 \\ (x+y)^2-2xy=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(y-1)=0 \\ x^2+y^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right.$$

Thay vào hệ phương trình đã cho ta được $(x;y)=(1;1)$ là nghiệm của hệ.

2) Điều kiện xác định của phương trình là $\dfrac{-2}{7}\le x\le 5$.

Đặt $\sqrt{7x+2}=a;\sqrt{5-x}=b\,(a\ge 0;b\ge 0)$. Khi đó ta có $a^2-b^2=8x-3$.

Như vậy phương trình đã cho được viết lại thành

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{5}\Leftrightarrow(a-b)\left(1-\frac{a+b}{5}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a+b=5\end{array}\right.$$

+ Với $a=b$ ta có phương trình $\sqrt{7x+2}=\sqrt{5-x}\Rightarrow x=\frac{3}{8}$

+ Với $a+b=5$ ta có phương trình $\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}=5$ hay ta được

$$7x+2+5-x+2\sqrt{7x+2}\sqrt{5-x}=25\Leftrightarrow\sqrt{33x-7x^2+10}=9-3x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9-3x\ge 0\\33x-7x^2+10=(9-3x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\16x^2-87x+71=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3}{8};1\right\}$

Câu II. 1) Tìm tất cả các giá tri của m sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}2+mxy^2=3m\\2+m(x^2+y^2)=6m\end{cases}$.

2) Với x, y là những số thực thỏa mãn các điều kiện $0<x\le y\le 2$; $2x+y\ge 2xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)$.

Lời giải

1) Lấy hiệu theo vế hai phương trình của hệ ta được $m(xy^2-x^2-y^2)=-3m$.

+ Nếu $m=0$, ta thấy hệ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m\ne 0$, khi đó từ phương trình ta được

$$xy^2-x^2-y^2=-3\Leftrightarrow y^2(x-1)-(x^2-1)=-2$$
$$\Leftrightarrow(y^2-x-1)(x-1)=-2\Leftrightarrow(y^2-x-1)(1-x)=2$$

Do $(x;y)$ nhận xác giá trị nguyên nên ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}1-x=1\\y^2-x-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y^2=3\end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Trường hợp . Với $\begin{cases}1-x=-1\\y^2-x-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\pm 1\end{cases}$

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}1-x=2\\y^2-x-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=\pm 1\end{cases}$

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}1-x=-2\\y^2-x-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y^2=3\end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình trên có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(-1;-1),(-1;1),(2;-1),(2;1)$.

Thay các nghiệm trên vào hệ phương trình đã cho ta tìm được $m=\frac{1}{2};m=2$ thỏa mãn.

Vậy $m\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Từ giả thiết $2x+y\ge 2xy$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\ge 2$. Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$ ta có

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\ge 2\Rightarrow\frac{1}{x^2}\ge 2-\frac{4}{y^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{x^4}+\frac{16}{y^4}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\right)^2\ge 2\Rightarrow\frac{1}{x^4}\ge 2-\frac{16}{y^4}$.

Do $0<x\le y\le 2$ nên ta có $\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(y^2-4\right)\le 0\Rightarrow y^2\le 4+x^2-\frac{4x^2}{y^2}$.

Từ đó kết hợp với $\frac{1}{x^2}\ge 2-\frac{4}{y^2}$ ta được

$$y^2\le 4+x^2-\frac{4x^2}{y^2}\Rightarrow x^2+y^2\le 4+2x^2-\frac{4x^2}{y^2}=4+x^2\left(2-\frac{4}{y^2}\right)\le 4+x^2.\frac{1}{x^2}=5$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\left(1-\frac{x^4}{y^4}\right)\left(y^4-16\right)\le 0\Rightarrow y^4\le 16+x^4-\frac{16x^4}{y^4}$.

Từ đó kết hợp với $\frac{1}{x^4}\ge 2-\frac{16}{y^4}$ ta được

$$y^4\le 16+x^4-\frac{4x^4}{y^4}\Rightarrow x^4+y^4\le 16+2x^4-\frac{16x^4}{y^4}=16+x^4\left(2-\frac{16}{y^4}\right)\le 16+x^4.\frac{1}{x^4}=17$$

Do vậy $P=x^2\left(x^2+1\right)+y^2\left(y^2+1\right)=x^4+y^4+x^2+y^2\le 17+5=22$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=1;y=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 22, đạt được tại $x=1;y=2$.

Câu III. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại E khác A. M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại P khác B. Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của đoạn thẳng AC.

2) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh rằng B và Q đối xứng nhau qua AE.

3) Giả sử đường tròn (K) cắt đường thẳng BM tại M. Chứng minh rằng RA vuông góc RC.

Lời giải

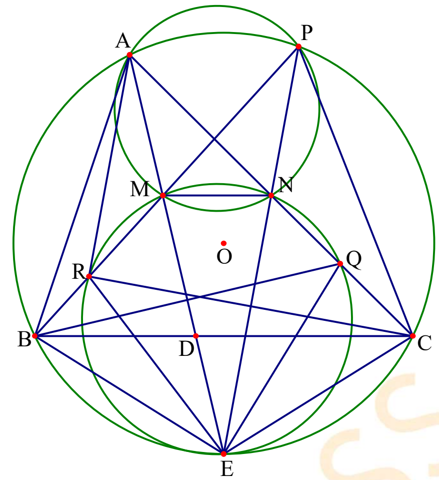
1) Chứng minh rằng tứ giác APNM nội tiếp và N là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Do AE là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên ta có E là điểm chính giữa cung BC.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{AMP} = \overset{\frown}{ANP}$ nên tứ giác AMNP nội tiếp đường tròn.

Do đó $\widehat{APM} = \widehat{ANM}$. Lại có $\widehat{APM} = \widehat{ACB}$ nên suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$.

Từ đó dẫn đến MN dong song với BC, mà M là trung điểm AD nên suy ra N là trung điểm AC



2) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh B và Q đối xứng nhau qua AE.

Không mất tính tổng quát ta giả sử Q nằm giữa N và C(các trương hợp còn lại chứng minh tương tự).

Do tứ giác EMNQ nội tiếp nên $\widehat{MEQ} = \widehat{MNA}$. Mà ta có $\widehat{MNA} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$ nên ta suy ra được $\widehat{AEQ} = \widehat{AEB}$. Lại có $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ và AE chung nên suy ra $\Delta ABE = \Delta ACE$.

Do đó $AB = AG$ và $EB = EQ$ nên AE là đường trung trực của BQ, suy ra Q và B đối xứng nhau qua đường thẳng AE.

3) Giả sử đường tròn (K) cắt đường thẳng BM tại M. Chứng minh rằng RA vuông góc RC

Tứ giác ERMN nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{ENR} = \widehat{EMR} = \widehat{AMP}$.

Lại có $\widehat{ENC} = \widehat{ANP} = \widehat{AMP}$ nên ta được $\widehat{ERN} = \widehat{ENC}$.

Ta có $\widehat{REN} = \widehat{PMN} = \widehat{PAN} = \widehat{PEC}$ và $\widehat{REN} = \widehat{CEN}$

Kết hợp với cạnh NE chung ta suy ra được $\Delta REN = \Delta CEN$

Suy ra $RN = NC = NA$ nên $RN = \frac{1}{2}AC$, điều này dẫn đến tam giác RAC vuông tại R hay ta được RA vuông góc với RC.

Câu IV. Số nguyên a được gọi là số "đẹp" nếu với mọi cách sắp xếp theo thứ tự tùy ý của 100 số 1, 2, 3,..., 100 luôn tồn tại 10 số hạng liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng a. Tìm số "đẹp" lớn nhất.

Lời giải

Tổng của 100 số của dãy số là $\frac{(1+100)100}{2}=5050$. Chia 100 số thành 10 bộ số gồm 10 số liên tiếp thì trung bình tổng của 10 bộ số này là 505. Khi đó tồn tại ít nhất một bộ số mà tổng 10 số đó lớn hơn hoặc bằng 505. Ta sẽ chứng minh a lớn nhất chỉa có thể bằng 505 bằng cách cách chọn ra ví dụ mà tổng 10 số liên tiếp bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng 505, khi đó mọi số a lớn hơn 505 đều không thỏa mãn.

Thật vậy, xét cách sắp xếp sau $100,1,99,2,98,3,\ldots,51,50$ (chia thành các cặp có tổng bằng 101, viết số lớn đứng trước rồi xếp các cặp cạnh nhau theo thứ tự giảm dần của số lớn hơn). Nếu 10 số liên tiếp gồm 5 cặp số như vậy thì tổng 10 số này là 505. Nếu không 10 số gồm số đầu nhỏ hơn trong một cặp và kết thúc là số lớn hơn trong một cặp khác. Các số này thuộc sáu cặp khác nhau là $x,101-x,x-1,102-x,\ldots,x-4,105-x$ và 10 số được chọn là các số được chọn là các số $101-x$ đến $x-5$ (trong dãy trên). Dễ thấy tổng 10 số liên tiếp bất kỳ đều không vượt quá 505.

Vậy $a=505$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2+8xy^2+5x+10y=1 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{5x^2+6x+5}=\dfrac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}$.

Lời giải

1) Biến đổi tương đương hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2+8xy^2+5x+10y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)^2-4xy=5 \\ 4xy(x+2y)+5(x+2y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)^2-4xy=5 \\ (4xy+5)(x+2y)=1 \end{cases}$$

Đặt $a=x+2y; b=4xy$, khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} a^2-b=5 \\ ab+5a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a^2-5 \\ a(a^2-5)+5a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a^2-5 \\ a^3-5a+5a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a^2-5 \\ a^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ a=1 \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=1 \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=1 \\ x=2; y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(-1;1)\left(2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

2) Dễ thấy $5x^2+6x+5>5x^2+6x+5=2x^2+2+3(x+1)^2>0$ với mọi x. Do đó điều kiện xác định của phương trình là $x \in R$. Phương trình đã cho được viết lại thành

$$\sqrt{5x^2+6x+5}\left(5x^2+6x+5+1\right)=(4x)^3+4x$$

Đặt $a=\sqrt{5x^2+6x+5}; b=4x\,(a>0)$. Khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$a\left(a^2+1\right)=b^3+b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0 \Leftrightarrow a=b$$

Từ đó ta được $\sqrt{5x^2+6x+5}=4x$, phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 5x^2+6x+5=16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 11x^2-6x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Câu II. 1) Với x, y là những số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{y^2-1}{3}$.

Chứng minh $x^2-y^2 \vdots 40$.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức sau $x^4+2x^2=y^3$.

Lời giải

1) Biến đổi giả thiết $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{y^2-1}{3} \Leftrightarrow 3(x^2-1)=2(y^2-1) \Leftrightarrow 3x^2-2y^2=1$

Vì số chính phương chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2-2y^2=1$ nên x^2 và y^2 chia cho 5 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2-y^2 \vdots 5$

Vì số chính phương chia 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2-2y^2=1$ nên x^2 và y^2 chia cho 8 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2-y^2 \vdots 8$

Do 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên ta được $x^2-y^2 \vdots 40$

2) Ta có $x^4+2x^2=y^3 \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=y^3+1 \Leftrightarrow (x^2+1)^2=(y+1)(y^2-y+1)$.

Gọi $d=(y+1;y^2-y+1)$. Khi đó ta có $(y+1)^2 \vdots d$ và $y^2-y+1 \vdots d$ nên ta được

$$(y+1)^2-(y^2-y+1) \vdots d \Rightarrow 3y \vdots d$$

Do d là nguyên tố nên ta có hai trường hợp

+ Khi $3 \vdots d$ ta được $(x^2+1)^2=(y+1)(y^2-y+1) \vdots 9$ nên $(x^2+1)^2 \vdots 9 \Rightarrow x^2+1 \vdots 3$. Điều này vô lý vì số chính phương chia cho 3 không thể có số dư là 2.

+ Khi $3 \vdots d$ ta được $y \vdots d$, kết hợp với $y+1 \vdots d$ ta suy ra được $d=1$.

Do đó $(y+1;y^2-y+1)=1$.

Khi đó do $(y+1)(y^2-y+1)$ là số chính phương nên ta đặt $y+1=a^2; y^2-y+1=b^2$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $(a;b)=1$. Tứ đó ta được

$$b^2=(a^2-1)^2-(a^2-1) \Leftrightarrow 4b^2=4a^4-12a^2+12 \Leftrightarrow (2b-2a^2+3)(2b+2a^2+3)=3$$

Vì $(2b)^2>(2a^2-3)^2 \Rightarrow 2b>2a^2-3$ nên ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}2b-2a^2+3=1\\2b+2a^2-3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\a^2=2\end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases}2b-2a^2+3=3\\2b+2a^2-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=1\\a^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y+1=1\\y^2-y+1=1\end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$.

Thử lại vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $(0;0)$

.

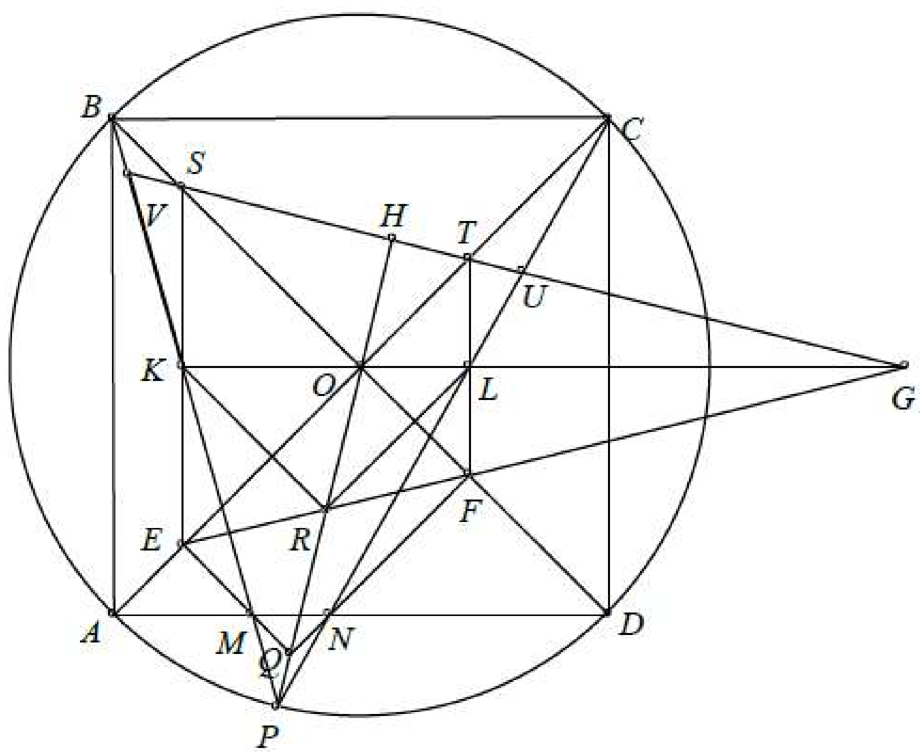
Câu III. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh đường thẳng PO đi qua trung điểm của EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T. Đường thẳng ST cắt các đường thẳng PB, PC lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, V, U cùng thuộc một đương tròn.

Lời giải



1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

Ta có $KA = KM$ suy ra tam giác AKM cân. Do đó ta được $\widehat{KAM} = \widehat{KMA}$,

Mà ta lại có $\widehat{KMA} + \widehat{KBA} = 90^\circ$ và $\widehat{KAB} + \widehat{KAM} = 90^\circ$ nên suy ra $\widehat{KAB} = \widehat{KBA}$ hay tam giác AKB cân ta K. Do đó ta được $KA = KB = KM$.

Lại có $OB = OD$ nên OK là đường trung bình của tam giác DKM, suy ra OK // MD.

Chứng minh tương tự ta có OL là đường trung bình của tam giác NCA, suy ra OL // AD

Theo tiên đề Ơclit thì ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh đường thẳng PO đi qua trung điểm của EF

Ta có E thuộc đường trung trực AM và $\widehat{EAM} = 45°$ nên tam giác EAM vuông cân.

Do đó suy ra ME vuông góc với AC. Hoàn toàn tương tự ta cũng có NF vuông góc với BD.

Ta có MN song song với BC nên theo định lí Talet ta có $\frac{PB}{MB} = \frac{PC}{NC}$.

Hạ PX vuông góc với AC và PY vuông góc với BD, khi đó ta có PX, EM, BO cùng song song với nhau.

Do đó ta được $\frac{XO}{EO} = \frac{PB}{PM}$.

Lại có PY, FN, CO cùng song song với nhau nên ta cũng có $\frac{YO}{FO} = \frac{PC}{NC}$.

Từ đó dẫn đến $\frac{XO}{EO} = \frac{YO}{FO}$ nên suy ra XY và EF song song với nhau.

Ta có $\widehat{PXO} = \widehat{PYO} = \widehat{XOY} = 90^0$ nên tứ giác PXOY là hình chữ nhật, do đó PO đi qua trung điểm của XY. Do XY song song với EF nên PO đi qua trung điểm của EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T. Đường thẳng ST cắt các đường thẳng PB, PC lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, V, U cùng thuộc một đương tròn.

Ta có LK song song với AD nên LK vuông góc với ES. Do đó $\widehat{KOA} = \widehat{OAD} = 45^0$ nên $\widehat{KEO} = 45^0$.

Mà ta có $\widehat{EOS} = 90^0$ nên OK là phân giác của góc $\widehat{EOS}$.

Suy ra tam giác EOS cân nên ta có $KS = KE$, suy ra KL là đường trung trực của ES hay E và S đối xứng với nhau qua KL. Hoàn toàn tương tự ta có F và T đối xứng qua KL.

Từ đó ta được $\Delta EOF = \Delta SOT$ nên $\widehat{EFO} = \widehat{STO}$.

Gọi giao điểm của OP và EF là I, ta có I là trung điểm của EF.

Do tam giác OEF cân nên ta có $IO = IE = IE$.

Suy ra tam giác IOF cân nên $\widehat{IOF} = \widehat{IFO} = \widehat{OTS}$.

Mà $\widehat{IOE} + \widehat{IOF} = \widehat{EOF} = 90^0$ nên $\widehat{IOE} + \widehat{OTS} = 90^0$.

Gọi giao điểm của OP và ST là H nên ta có $\widehat{TOH} = \widehat{IOE}$, suy ra $\widehat{TOH} + \widehat{HTO} = 90^0$.

Từ đó suy ra $\widehat{THO} = 90^0$ hay PO vuông góc với ST.

Ta có $\widehat{PLF}=\widehat{PCD}$ và $\widehat{PCD}=\widehat{PBD}=\widehat{BPO}$ nên $\widehat{PLF}=\widehat{PBO}=\widehat{PVH}$.

Lại có PH vuông góc với UV nên $\widehat{VPH}+\widehat{HVP}=90^0$.

Mà ta lại có $\widehat{PLF}+\widehat{PLK}=\widehat{PLK}=90^0$ nên $\widehat{PLK}=\widehat{HVP}$.

Từ đó suy ra $\widehat{PLK}=\widehat{UVP}$ hay tứ giác KLUV nội tiếp đường tròn.

Câu IV. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 3$ luôn tồn tại cách xếp bộ n số 1, 2, 3, ..., n thành bộ số x_1, x_2, x_3, ..., x_n sao cho $x_j\neq \frac{x_i+x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số $(i;j;k)$ mà $1\leq i<j<k\leq n$.

Lời giải

Dãy $a_1,a_2,a_3,...,a_s$ chiều dài $s\geq 3$ tùy ý được gọi là dãy "tốt" nếu $a_j\neq\frac{a_j+a_k}{2}$ với mọi chỉ số *(i, j, k)* thỏa mãn $(1\leq i<j<k\leq s)$.

Nếu dãy $a_1,a_2,a_3,....,a_s$ là dãy tốt thì dãy $2a_1,2a_2,2a_3,...,2a_s$ và dãy $2a_1-1,2a_2-1,2a_3-1,...,2a_s-1$ cũng là dãy tốt.

Từ nhận xét trên ta suy ra nếu dãy $x_1,x_2,x_3,...,x_s$ là dãy tốt của các số 1, 2, 3, ... , s $(s\geq 3)$ thì dãy $2x_1,2x_2,2x_3,...,2x_s,2x_1-1,2x_2-1,...,2x_s-1$ là dãy tốt của các số 1, 2, 3, ..., 2s (chú ý rằng $\frac{2x_k+2x_m-1}{2}$ không là số nguyên).

+) (1, 3, 2) là dãy tốt của các số 1, 2, 3.

+) Với $n\geq 3$ luôn tồn tại k để $3.2^{k-1}<n\leq 3.2^k$.. Theo nhận xét trên, ta xây dựng được dãy tốt từ các dãy tốt từ các số 1, 2, 3,..., 3.2^k sau đó ta bỏ đi các số $n+1,n+2,n+3,....,3.2^k$ chúng ta nhận được dãy tốt từ các số 1, 2, 3, ..., n (trên dãy tốt ta bỏ đi các số hạng bất kì thì dãy còn lại vẫn là dãy tốt).

Cách khác:

Với $n=3$ ta có cách sắp xếp 1, 3, 2.

Ta chứng minh rằng nếu bài toán đúng với n sẽ đúng với 2n.

Thật vậy, giả sử ta có cách xắp xếp đúng với n thì cách sắp xếp đó có dạng $x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n$ thỏa mãn với mọi $1\leq i<j<k\leq n$ ta có $x_j\neq\frac{x_i+x_k}{2}$. Ta chứng minh tồn tại dãy 2n thỏa mãn đề bài .

Xét dãy sau $2x_1,2x_2,2x_3,...,2x_n$, $2x_1-1,2x_2-1,2x_3-1,...,2x_n-1$, dãy số gồm tất cả các số từ 1 đến 2n. Xét $a<b$ bất kỳ cùng thuộc dãy

+ Nếu a, b khác tính chẵn lẻ thì $\frac{a+b}{2}$ không thuộc dãy (thỏa mãn)

+ Nếu a, b cùng tính chẵn lẻ thì $\frac{a+b}{2}$ thuộc dãy

Nếu a, b cùng chẵn (trường hợp a, b cùng lẻ chứng minh tương tự)

Trường hợp 1. Khi $\frac{a+b}{2}$ lẻ thì $\frac{a+b}{2}$ không thể nằm giữa a, b do cách xây dựng dãy (thỏa mãn)

Trường hợp 2. Khi $\frac{a+b}{2}$ chẵn.

Giả sử rằng $\frac{a+b}{2}$ nằm giữa a, b trong dãy khi đó $a = 2x_i, b = 2x_k, \frac{a+b}{2} = 2x_j$ với $i < j < k$ suy ra dãy ban đầu $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ là cách sắp xếp không thỏa mãn đề bài (mâu thuẫn)

Vậy điều giả sử là sai nên $\frac{a+b}{2}$ không nằm giữa a và b trong dãy.

Vậy với mọi trường hợp trung bình cộng của a, b không thể nằm giữa a, b suy ra đã xây dựng được cách xếp thỏa mãn cho trường hợp 2n. Như vậy đã chứng minh được rằng nếu bài toán đúng với n thì đúng với 2n.

Mặt khác bài toán đúng với n thì đúng với $n-1$. Nên theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$.

Lời giải

1) Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành $xy=x^2+y^2-1$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x+x\left(x^2+y^2-1\right)=2y^3 \Leftrightarrow x+x^3+xy^2-x=2y^3 \Leftrightarrow x^3+xy^2-2y^3=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-y^3+xy^2-y^3=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+y^2(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+2y^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^2+xy+2y^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y=0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x=y=0$ không thỏa mãn phương trình thứ nhất của hệ.

Do đó từ $x=y$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow x=y=\pm 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(1;1),(-1;-1)$.

2) Điều kiện xác định của phương trình là $-1 \le x \le 1$.

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{x+1}=2\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}-\sqrt{(x+1)^2(1-x)}-\sqrt{(1-x)^2(1+x)}$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{x+1}=2\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}-(x+1)\sqrt{x-1}-(1-x)\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)=2\sqrt{1-x}$$

Đặt $a=\sqrt{x+1};b=\sqrt{1-x}\ (a\ge 0;b\ge 0)$, khi đó ta có $a^2+b^2=2$.

Phương trình trên được viết lại thành $a^2(a+b)=2b$. Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^2(a+b)=2b \end{cases}$.

+ Xét trường hợp $b=0$, hệ phương trình trên vô nghiệm.

+ Xét trường hợp $b\ne 0$, khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $b\left(a^2+b^2\right)=2b$.

Khi đó ta có hệ hương trình $\begin{cases} b\left(a^2+b^2\right)=2b \\ a^2\left(a+b\right)=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b+b^3=2b \\ a^3+a^2b=2b \end{cases}$.

Từ đó ta được $a^2b+b^3=a^3+a^2b=2b \Rightarrow a^3=b^3 \Rightarrow a=b$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ và chú ý đến điều kiện ta được $a^2=1 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow a=b=1$.

Từ đó ta được $\sqrt{x+1}=\sqrt{1-x}=1 \Leftrightarrow x=0$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Câu II. 1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2+26xy+15y^2=4617.$$

2) Với a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}\right)-\frac{1}{ab}.$$

Lời giải

1) Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên tố có dạng $p=4k+3$ thì ta luôn có

$$a^2+b^2 \vdots p \Leftrightarrow \begin{cases} a \vdots p \\ b \vdots p \end{cases} \left(a,b \in Z\right)$$

Thật vậy, ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu một trong hai số a và b chia hết cho p thì ta suy ra điều cần chứng minh.

+ Trường hợp 2. Nếu cả hai số a và b cùng không chia hết cho p. Khi đó ta có $\left(a;p\right)=\left(b;p\right)=1$.

Theo định lí Fecmat ta có $\begin{cases} a^{p-1}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,p\right) \\ b^{p-1}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,p\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{4k+2}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,p\right) \\ b^{4k+2}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,p\right) \end{cases} \Rightarrow a^{4k+2}+b^{4k+2}\equiv 2\left(\mathrm{mod}\,p\right)$

Mặt khác ta có $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}$ chia hết cho a^2+b^2 nên chia hết cho p.

Từ đó suy ra 2 chia hết cho p, mà p là số nguyên tố nên ta được $p=2$. Điều này mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lẻ.

Như vậy trường hợp 2 không xẩy ra hay bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Do 4617 chia hết cho 19 nên $12x^2+26xy+15y^2 \vdots 19$ hay ta được

$$12x^2-12xy+15y^2+38xy \vdots 19 \Leftrightarrow 12x^2-12xy+15y^2 \vdots 19$$
$$\Leftrightarrow 3\left(4x^2-4xy+5y^2\right) \vdots 19 \Leftrightarrow 4x^2-4xy+5y^2 \vdots 19$$
$$\Leftrightarrow \left(4x^2-4xy+y^2\right)+4y^2 \vdots 19 \Leftrightarrow \left(2x-y\right)^2+\left(2y\right)^2 \vdots 19$$

Do 19 là số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên áp dụng bổ đề trên ta suy ra được

$$\begin{cases}2x-y\,\vdots\,19\\2y\,\vdots\,19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y\,\vdots\,19\\2y\,\vdots\,19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\,\vdots\,19\\2y\,\vdots\,19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\,\vdots\,19\\y\,\vdots\,19\end{cases}$$

Từ đó ta được $4x^2-4xy+5y^2\,\vdots\,19^2$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn vì 4617 không chia hết cho 19^2.

Vậy không tồn tại cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(a^3+b)\left(\frac{1}{a}+b\right)\ge(a+b)^2;(b^3+a)\left(\frac{1}{b}+a\right)\ge(a+b)^2$$

Từ đó ta được $\dfrac{a+b}{a^3+b}\le\dfrac{\frac{1}{a}+b}{a+b};\dfrac{a+b}{b^3+a}\le\dfrac{\frac{1}{b}+a}{a+b}$. Do đó suy ra

$$(a+b)\left(\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{a+b^3}\right)=\frac{a+b}{a^3+b}+\frac{a+b}{b^3+a}\le\frac{\frac{1}{a}+b}{a+b}+\frac{\frac{1}{b}+a}{a+b}=\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}$$

Suy ra $M\le\dfrac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}-\dfrac{1}{ab}=\dfrac{ab(a+b)+a+b-(a+b)}{(a+b)ab}=\dfrac{ab(a+b)}{ab(a+b)}=1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1, đạt được tại $a=b=1$.

Câu III. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD và BA lần lượt tại J và L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song ID.

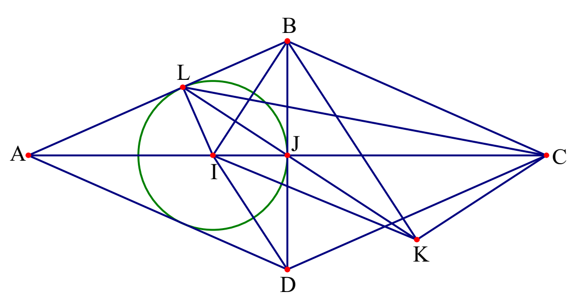
1) Chứng minh rằng $\widehat{CBK}=\widehat{ABI}$.

2) Chứng minh rằng $KC\perp KB$.

3) Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I, L cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

1) Chứng minh rằng $\widehat{CBK}=\widehat{ABI}$.



Ta có

$\widehat{CBK}=\widehat{CBD}-\widehat{KBD};\widehat{ABI}=\widehat{ABD}-\widehat{IBD}$. Lại có $\widehat{ABD}=\widehat{CBD}$. Mặt khác do ID song song với BK nên ta có $\widehat{IBD}=\widehat{IDB}=\widehat{DBK}$.

Từ đó suy ra $\widehat{CBK}=\widehat{ABI}$

2) Chứng minh rằng $KC\perp KB$.

Dễ thấy $\widehat{KJC} = \widehat{LJI}$. Lại có $\widehat{IJL} = \widehat{IBJ} = \widehat{LBI}$. Kết hợp với $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$ ta được $\widehat{CBK} = \widehat{CJK}$ nên tứ giác BCKJ nội tiếp đường tròn. Do đó $\widehat{BJC} = \widehat{BKC} = 90^0$ hay $KC \perp KB$.

3) Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I ,L cùng nằm trên một đường tròn.

Tam giác IJL cân tại I nên ta có $\widehat{ILJ} = \widehat{IJL} = \widehat{IBJ}$. Mà ta có $\widehat{IBJ} = \widehat{JBK}$ nên $\widehat{ILJ} = \widehat{JBK}$

Mặt khác do tứ giác BCKJ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{JBK} = \widehat{JCK}$.

Từ đó ta được $\widehat{ILJ} = \widehat{JBK} = \widehat{JCK}$ nên suy ra tứ giác CKIL nội tiếp đường tròn.

Câu IV. Tìm tập hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số $1;2;3;...;n$ thành $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ mà khi chia các số $a_1;a_1a_2;a_1a_2a_3;...;a_1a_2...a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với hợp số $n > 4$ ta luôn có $(n-1)! \vdots n$.

Thật vậy, do n là hợp số và $n > 4$ nên ta viết được $n = a.b$ trong đó $a,b \in N; 1 < a,b < n$. Khi đó ta suy ra được $2 \le a,b \le n-1$. Từ đó dễ thấy ta luôn có $(n-1)! \vdots n$.

Trở lại bài toán. Ta thấy $a_n = n$ vì nếu $a_n \ne n$ thì $a_i = n\left(i \in [1;n-1]\right)$.

Khi đó ta có $\begin{cases} a_1.a_2...a_i \vdots n \\ a_1.a_2...a_n \vdots n \end{cases}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Do vậy $a_n = n$. Giả sử n là hợp số và $n > 4$, khi đó theo bổ đề ta có $a_1.a_2...a_{n-1} = (n-1)! \vdots n$.

Mặt khác theo bài ra ta lại có $a_1.a_2...a_n \vdots n$. Như vậy $a_1.a_2...a_{n-1}$ và $a_1.a_2...a_n \vdots n$ có cùng số dư khi chia cho n. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Từ đó suy ra $n \le 4$. Mà do n là hợp số nên ta được $n = 4$.

Ta thấy với $n = 4$ thì bộ số $1;3;2;4$ viết được dãy số $1;1.3;1.3.2;1.3.2.4$ chia cho 4 có số dư lần lượt là $1;3;2;0$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=\sqrt{x+3y} \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$.

2) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}}.$$

Lời giải

1) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (x+y)^2=x+3y \\ (x+y)^2=3+xy \end{cases}$

Do đó ta có phương trình $x+3y=3+xy \Leftrightarrow (x-3)(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} x=3 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y^2+3y+6=0 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Với $\begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=1 \\ x=-2;y=1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(1;1)$.

2. Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}}$$

Cách 1. Do $ab+a+b=1$ nên ta được

$$a^2+1=a^2+ab+a+b=(a+b)(a+1);b^2+1=b^2+ab+a+b=(a+b)(b+1)$$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{(a+b)(a+1)}+\frac{b}{(a+b)(b+1)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(a+b)^2(a+1)(b+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+b)(a+1)(b+1)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(a+b)^2(a+1)(b+1)}}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(b+1)=\sqrt{2(a+1)(b+1)} \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=2 \Leftrightarrow ab+a+b=1$$

Do đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên đẳng thức cần chứng minh đúng.

Cách 2. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a(b^2+1)+b(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)}}$.

Mà ta có $a(b^2+1)+b(a^2+1)=(a+b)(ab+1)$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{a+b}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1) \Leftrightarrow a^2+b^2+4ab=a^2b^2+1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2=(ab-1)^2 \Leftrightarrow a+b=ab-1 \Leftrightarrow ab+a+b=1$$

Do đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên đẳng thức cần chứng minh đúng.

Câu II. 1) Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq,\ q^2-1=kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố $p,\ q$ thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$.

2) Với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2c+2}$.

Lời giải

1. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq, q^2-1=kp$.

Nếu $p=q$ thì ta có $p-1=q^2-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=q=0 \\ p=q=1 \end{array}\right.$, điều này vô lí vì p, q là các số nguyên tố.

Do vậy $p \neq q$, khi đó do p và q là các số nguyên tố nên $p-1 \vdots q$ và $q^2-1 \vdots p$.

Như vậy tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn $p-1=mq; q^2-1=np$, thay vào đẳng thức đã cho ta được $m=n$. Do vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $\begin{cases} p-1=kq \\ q^2-1=kp \end{cases}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$.

Thế $p = kq + 1$ vào hệ thức $q^2 - 1 = kp$ ta được $q^2 - 1 = k(kq+1) \Leftrightarrow q^2 - k^2q - k - 1 = 0$.

Xem phương trình là phương trình bậc hai ẩn q, khi đó để phương trình có nghiệm nguyên dương thì

$\Delta = k^4 + 4(k+1) = k^4 + 4k + 4$ phải là số chính phương.

Ta có $k^4 < k^4 + 4k + 4 < (k^2+2)^2$ nên ta được $\Delta = (k^2+1)^2$.

Từ đó ta được $k^4 + 4k + 4 = (k^2+1)^2 \Leftrightarrow k = k^2 \Leftrightarrow k = 1$.

Thay vào hệ thức đã cho ta được $q^2 - q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow p = 3$.

Vậy các số $p = 3; q = 2$ là các số nguyên tố cần tìm.

2. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}$$

Biến đổi giả thiết $ab + bc + ca + abc = 2$ ta được

$$(1+a)(1+b)(1+c) = (1+a) + (1+b) + (1+c)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)} + \frac{1}{(1+a)(1+c)} + \frac{1}{(1+b)(1+c)} = 1$$

Đặt $x = \frac{1}{1+a}; y = \frac{1}{1+b}; z = \frac{1}{1+c}$, khi đó ta thu được $xy + yz + zx = 1$.

Biểu thức M được viết lại thành

$$M = \frac{a+1}{(a+1)^2+1} + \frac{b+1}{(b+1)^2+1} + \frac{c+1}{(c+1)^2+1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1} + \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+1}$$
$$= \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1}$$

Để ý ta có $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$. Áp dụng tương tự ta được

$$M = \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(x+y)} + \frac{z}{(x+z)(y+z)}$$
$$= \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Ta chứng minh được $9(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

Vì $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)=3$ nên $x+y+z\le\sqrt{3}$. Nên ta được

$$M\le\frac{2}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)}=\frac{9}{4(x+y+z)}\le\frac{9}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, đạ được tại $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}-1$.

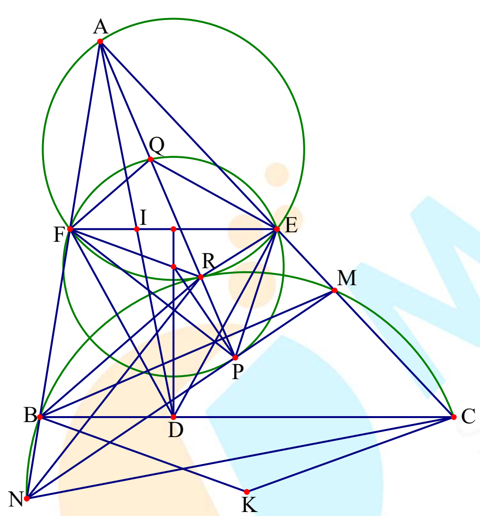
Câu III. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. Gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $CA,\ AB$. Đường trung trực của EF cắt BC tại D. Giả sử P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{PEB}=\widehat{DFE}$. Đường thẳng PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P.

1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF}=\widehat{BAC}+\widehat{EDF}$.

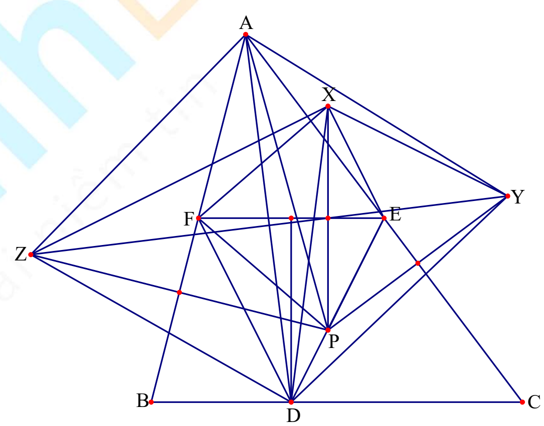
2) Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm C, M, B, N cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là đường tròn (K).

3) Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngại tiếp tam giác AEF.

Lời giải



Hình 1



Hình 2

1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF}=\widehat{BAC}+\widehat{EDF}$.

Vì tứ giác PEQF nội tiếp đường tròn nên ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EQF}&=180^0-\widehat{EPF}=\widehat{PEF}+\widehat{PFE}=\widehat{DEC}+\widehat{DFB}\\&=\left(\widehat{EAD}+\widehat{EDA}\right)+\left(\widehat{FAD}+\widehat{FDA}\right)=\widehat{BAC}+\widehat{EDF}\end{aligned}$$

2) Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm C, M, B, N cùng nằ trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là đường tròn (K).

Không mất tính tổng quát ta giả sử M nằm giữa A, C và N nằm trên tia đối của tia BA (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi đó ta có

$$\widehat{MNB}=180^0-\widehat{NPF}-\widehat{PFN}=180^0-\widehat{PEF}-\widehat{DFE}$$
$$=180^0-\widehat{DEC}-\widehat{DEF}=180^0-\widehat{CEF}=\widehat{AEF}=\widehat{ACB}$$

Do đó tứ giác NCMB nội tiếp đường tròn (K).

3) Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngại tiếp tam giác AEF.

Ta có nhận xét: $\widehat{PAB}=\widehat{DAC}$. Thật vậy, gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng với P qua EF, AE, AF thì từ giả thiết $\widehat{PEC}=\widehat{DEF}$ suy ra $\widehat{DEY}=\widehat{DEX}$, mà ta có $EX=EY$ nên $DX=DY$. Tương tự thì ta có $DX=DZ$ nên $DX=DY=XZ$, lạ có $AY=AP=AZ$ ta được $\widehat{DAZ}=\widehat{DAY}$. Kết hợp tính đối xứng ta được $\widehat{PAB}=\widehat{DAC}$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác PEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại R khác E.

Ta thấy $\widehat{RPN}=\widehat{REM}=\widehat{RFA}$ nên tứ giác PRFN nội tiếp đường tròn. Lại do tứ giác BNCM nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAC}=180^0-\widehat{NBC}=180^0-\widehat{CMN}=\widehat{AMN}$.

Từ đây ta thu được $\widehat{ARE}=\widehat{AFE}=\widehat{ABC}=\widehat{AMN}=180^0-\widehat{PRE}$ nên ba điểm A, R, P thẳng hàng.

Gọi giao điểm của EF và AD là I, theo tính chất đường trung bình thì I là trung điểm của AD.

Ta lại có $\widehat{AEI}=\widehat{ARF}$, kết hợp với nhận xét ta được $\Delta AEI \backsim \Delta ARF$.

Từ đó ra suy ra được $\Delta AED \backsim \Delta ARB$. Ta thu được

$$\widehat{ABR}=\widehat{ADE}=\widehat{DEC}-\widehat{DAE}=\widehat{PEF}-\widehat{PAB}=\widehat{PEF}=\widehat{FER}=\widehat{PER}=\widehat{RMP}$$

Từ đó tứ giác NMRB nội tiếp đường tròn hay năm điểm M, N, R, B, C cùng nằm trên đường tròn (K).

Lại có $\widehat{ERM}=\widehat{EPM}=\widehat{EFP}=\widehat{EFR}+\widehat{RFP}=\widehat{RAE}+\widehat{RNM}$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác REF và đường tròn (K) tiếp xúc nhau tại R.

Câu IV. Cho n là số nguyên dương với $n\ge 5$. Xét đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

1) Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n=2018$, $k=672$.

2) Với $n=2017$, $k=672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

Lời giải

1) Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n=2018, k=672$.

Kí hiệu đa giác 2018 cạnh là $A_1A_2A_3...A_{2018}$, kẻ các đường chéo $A_1A_5; A_1A_8; A_1A_{11}; ...; A_1A_{2015}$ khi đó đa giác $A_1A_2A_3...A_{2018}$ được chia thành 672 ngũ giác lồi gồm:

$$A_1A_2A_3A_4A_5; A_1A_5A_6A_7A_8; ...; A_1A_{2012}A_{2013}A_{2014}A_{2015}; A_1A_{2015}A_{2016}A_{2017}A_{2018}$$

2) Với $n=2017, k=672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

Giả sử ta có thể chia đa giác lồi 2017 cạnh thành 672 ngũ giác lồi bằng các đường chéo của nó. Gọi p là số giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác. Do mỗi đỉnh của ngũ giác lồi là là đỉnh của đa giác đã cho hoặc là một trong p giao điểm của các đường chéo nên tổng số góc các ngũ giác này là

$$p.360^0+(2017-2)180^0=(2p-2015)180^0$$

Mặt khác số ngũ giác lồi là 672, mỗi ngũ giác lồi có tổng số góc ở đỉnh là 3.180^0 nên tổng số góc của các ngũ giác lồi là $672.3.180^0$.

Từ đó ta được $(2p-2015)180^0=672.3.180^0 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$, vô lý.

Vậy ta không thể thực hiện được với $n=2017, k=672$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $x^2 - x + 2\sqrt{x^3+1} = 2\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + y^2 = 1 + y \\ x^2 + 2y^2 + 2xy = 4 + x \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -1$. Để ý rằng $x^2 - x + 1 > 0$.

Đặt $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ $(a \ge 0;\ b > 0)$.

Khi đó phương trình đã cho được viết lại thành $b^2 - 1 + 2ab = 2a \Leftrightarrow (b-1)(b+1+2a) = 0$

Do $a \ge 0;\ b > 0$ nên ta có $b + 1 + 2a > 0$. Khi đó từ phương trình trên ta được $b = 1$.

Do đó ta có phương trình $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \{0;1\}$.

2) Hệ phương trình đã cho được viết lại thành $\begin{cases} 2xy + 2y^2 = 2 + 2y \\ x^2 + 2y^2 + 2xy = 4 + x \end{cases}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ phương trình trên ra thu được

$$x^2 + 4y^2 + 4xy = 6 + x + 2y \Leftrightarrow (x+2y)^2 = x + 2y + 6 \Leftrightarrow (x+2y)^2 - (x+2y) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y-3)(x+2y+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y - 3 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = -2y - 2 \end{array}\right.$$

+ Thế $x = 3 - 2y$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$y(3-2y) + y^2 = y + 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Từ đó tương ứng ta được $x = 1$.

+ Thế $x = -2y - 2$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$y(-2y-2) + y^2 = y + 1 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Từ đó với $y = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ta được $x = 1 + \sqrt{5}$ và với $y = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ta được $x = 1 - \sqrt{5}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)=(1;1),\left(1+\sqrt{5};\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right),\left(1-\sqrt{5};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)(3x+2y)^2=2x+y-1$.

2) Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{a+2b}=2+\sqrt{\frac{b}{3}}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

Lời giải

1) Để ý rằng $2x+y=(3x+2y)-(x+y)$ nên phương trình đã cho được viết lại thành

$$(x+y)(3x+2y)^2=(3x+2y)-(x+y)-1$$

Đặt $a=x+y;b=3x+2y$. Khi đó ta có $ab^2=b-a-1$ hay $a(b^2+1)=b-1$.

Từ đó suy ra $b-1$ chia hết cho b^2+1. Do đó ta được $b^2+1-(b-1)(b+1)$ chia hết cho b^2+1 hay 2 chia hết cho b^2+1. Suy ra $b^2+1\in\{1;2\}$ nên $b\in\{-1;0;1\}$.

+ Với $b=-1$ ta được $a=-1$, khi đó ta được $(x;y)=(1;-2)$.

+ Với $b=0$ ta được $a=-1$, khi đó ta được $(x;y)=(2;-3)$.

+ Với $b=1$ ta được $a=0$, khi đó ta được $(x;y)=(1;-1)$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)=(1;-2),(1;-2),(2;-3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Ta sẽ chứng minh $M\ge 2$ với dấu đẳng thức xẩy ra chẳng hạn khi $a=b=3$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{b}{\sqrt{b+2a}}=\frac{b\sqrt{3b}}{\sqrt{3b(b+2a)}}\ge\frac{2b\sqrt{3b}}{3b+b+2a}=\frac{b\sqrt{3b}}{a+2b}$.

Như vậy ta cần chỉ ra được $\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b\sqrt{3b}}{a+2b}\ge 2$.

Đặt $x=\sqrt{a+2b};y=\sqrt{\frac{b}{3}}\,(x\ge 0;y\ge 0)$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $x-y=2$.

Cũng từ trên ta có $b=3y^2;a=x^2-6y$. Bất đẳng thức cần chứng minh trên được viết lại thành

$$\frac{x^2-6y^2}{x}+\frac{9y^3}{x^2}\ge 2\Leftrightarrow\frac{x^2-6y^2}{x}+\frac{9y^3}{x^2}\ge x-y.$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$x\left(x^2-6y^2\right)+9y^3\ge x^2\left(x-y\right)\Leftrightarrow x^3-6xy^2+9y^3\ge x^3-x^2y$$
$$\Leftrightarrow 9y^3-6xy^2+x^2y\ge 0\Leftrightarrow y\left(9y^2-6xy+x^2\right)\ge 0\Leftrightarrow y\left(3y-x\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng trên luôn đúng. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.

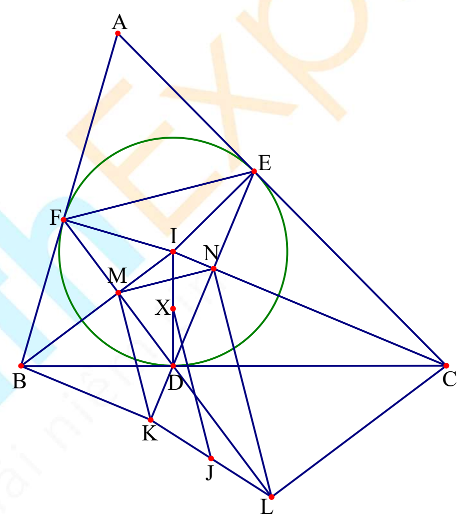
Câu III. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng DE và M là trung điểm của đoạn thẳng DF.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BKM và DEF đồng dạng với nhau.

2) Gọi L là hình chiếu của vuông góc của C trên đường thẳng DF và N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MK và NL song song với nhau.

3) Gọi J, X lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng KL và ID. Chứng minh rằng đường thẳng JX vuông góc với đường thẳng EF.

Lời giải



1) Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC nên ta có BD và BF là các tiếp tuyến. Do đó BI là đường trung trực của đoạn thẳng DF nên BI vuông góc với DF tại M. Từ đó BMDK nội tiếp đường tròn, do đó $\widehat{BMK}=\widehat{BDK}=\widehat{CDE}$. Cũng do CE là tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E nên ta có $\widehat{CDE}=\widehat{DFE}$. Từ đó suy ra $\widehat{BMK}=\widehat{DFE}$. Mặt khác $\widehat{BKM}=\widehat{BDM}=\widehat{DEF}$ nên hai tam giác BKM và DEF đồng dạng.

2) Ta có các tứ giác BKMD và CLDN nội tiếp đường tròn nên suy ra $\widehat{DMK}=\widehat{DBK}$ và $\widehat{DCN}=\widehat{DLN}$. Mặt khác do BK song song với CN nên ta có $\widehat{DBK}=\widehat{DCN}$. Từ đó suy ra $\widehat{DMK}=\widehat{DLN}$ nên MK song song với LN.

3) Ta có $\widehat{DMK}=\widehat{DCN}=90^0-\widehat{CDN}=90^0-\widehat{DFE}=90^0-\widehat{DMN}$, do đó $\widehat{KMN}=90^0$. Do vậy tứ giác KMNL là hình thang vuông. Ta có J là trung điểm của KL nên J nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN hay $JM=JN$. Mặt khác $XM=XN=\frac{1}{2}ID$ nên suy ra X nằm trên đường trung trực của MN. Do đó XJ vuông góc với MN. Trong tam giác DEF thì MN là đường trung bình nên ta có MN song song với EF. Do đó suy ra JX vuông góc với EF

Câu IV. Trên mặt phẳng cho hai điểm P và Q phân biệt. Xét 10 đường thẳng nằm trong mặt phẳng trên thỏa mãn các tính chất sau:

i) Không có hai đường thẳng nào song song hoặc trùng nhau.

ii) Mỗi đường thẳng đi qua P hoặc Q, không có đường thẳng nào đi qua cả P và Q.

Hỏi 10 đường thẳng trên có thể chia mặt phẳng thành tối đa bao nhiêu miền? Hãy giải thích.

Lời giải

Gọi m, n theo thứ tự là số đường thẳng đi qua P và Q. Gọi S số miền được tạo thành. Do mỗi đường thẳng chỉ đi qua điểm P hặc điểm Q nên ta có $m+n=10$. Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Nếu $m=0$ hoặc $n=0$, chẳng hạn $m=0$ thì tất cả 10 đường thẳng đã cho cùng đồng quy tại P. Khi đó dễ thấy số miền được tạo ra trên mặt phẳng là 20. Do đó ta có $S=20$.

+ Trường hợp 2. Nếu $m>0$ và $n>0$, khi đó $m\geq 1$ và $n\geq 1$. Từ mặt phẳng đã cho với hai điểm P và Q ta vẽ thêm m đường thẳng đi qua điểm P, số miền được tạo thành là 2m.

Lần lượt vẽ thêm các đường thẳng đi qua điểm Q. Khi vẽ đường thẳng đầu tiên thì đường thẳng này cắt m đường thẳng đi qua P tại m điểm phân biệt, m điểm phân biệt này chia đường thẳng vừa vẽ thành $m+1$ phần. Nói cách khác thì đường thẳng vừa vẽ đi qua (vì thế chia đôi) đúng $m+1$ miền trong 2m miền được tạo ra. Do đó lúc này số miền được tạo ra là $2m+(m+1)$.

Kể từ đường thẳng thứ hai đến đường thẳng thứ n đi qua điểm Q thì mỗi đường sẽ cắt m đường thẳng phân biệt đi qua điểm P tại m điểm phân biệt khác Q. Các điểm phân biệt đó cùng với điểm Q chia đường thẳng vừa vẽ thành $m+2$ phần. Do đó mối lần vẽ đường thẳng thì số miền tăng thêm $m+2$. Do đó số miền được tao ra từ các đường còn lại đi qua Q là $(n-1)(m+2)$.

Như vậy ta có $S=2m+(m+1)+(n-1)(m+2)=mn+2m+2n-1=mn+2(m+n)-1=mn+19$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $mn\leq\frac{1}{4}(m+n)^2=\frac{1}{4}.100=25$.

Từ đó ta được $S\leq 25+19=44$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $m=n=5$.

Vậy số miền được tạo ra tối đa là 44 khi số đường thẳng đi qua P là 5 và số đường thẳng đi qua Q là 5.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $9+3\sqrt{x(3-2x)}=7\sqrt{x}+5\sqrt{3-2x}$.

Lời giải

1) Ta có hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)+(xy)^3+7(x+y+xy+1)=31 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+(xy)^3+7\left[(x+y)+xy+1\right]=31 \end{cases}$

Đặt $a=x+y; b=xy$ thì hệ trên trở thành: $\begin{cases} ab=2 \\ a(a^2-3b)+b^3+7(a+b+1)=31 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a^3-3ab+b^3+7(a+b+1)=31 \end{cases}$

$\Rightarrow (a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]-3ab+7(a+b+1)=31$

$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+7(a+b)-24=0$

$\Rightarrow (a+b)^3-6(a+b)-3.2+7(a+b)-24=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^3+(a+b)-30=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^3-27+(a+b)=3$

$\Leftrightarrow (a+b-3)\left[(a+b)^2+3(a+b)+10\right]=0$

$\Rightarrow a+b=3\left(\text{do} \quad (a+b)^2+3(a+b)+10>0\right)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=3 \\ ab=2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} (\text{do } a^2=(x+y)^2 \geq 4xy=4b)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$

2) Điều kiện xác định: $0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$.

Đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{3-2x}\left(a,b\ge 0\right)$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}9+3ab=7a+5b\\ 2a^2+b^2=3\end{cases}\Rightarrow 2a^2+b^2+6+3ab=7a+5b$$

$\Leftrightarrow 2a^2+2ab-4a+ab+b^2-2b-3a-3b+6=0$

$\Leftrightarrow 2a(a+b-2)+b\left(a+b-2\right)-3\left(a+b-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(a+b-2\right)\left(2a+b-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=2\Rightarrow b=2-a\Rightarrow 9+3a(2-a)=2a+10\\ 2a+b=3\Rightarrow b=3-2a\Rightarrow 9+3a\left(3-2a\right)=7a+5\left(3-2a\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(3a-1\right)\left(a-1\right)=0\\ \left(a-1\right)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=\dfrac{1}{9} & (tm)\\ a=1\Rightarrow x=1 & (tm)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình trên có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{9};1\right\}$.

Câu II. 1) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y^2$; $xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5.

Chứng minh $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5.

2) Cho $a_1, a_2, ..., a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn: $1\le a_1\le a_2 ......\le a_{50}\le 50$, $a_1+a_2+.....+a_{50}=100$.

Chứng minh rằng từ các số đã cho có thể chọn được một vài số có tổng là 50.

Lời giải

1) Ta có: $\left(x^2-2xy-y\right)+\left(xy-2y^2-x\right)=x^2-xy-2y^2-x$

$=x^2+xy-\left(2xy+y^2\right)-\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)$.

Lại có: $x^2-2xy-y, xy-2y^2-x$ chia hết cho 5

$\Rightarrow \left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)$ chia hết cho 5

TH1: Nếu $x+y$ chia hết cho5 thì $y\equiv -x\left(\text{mod}5\right)$

$\Rightarrow 0\equiv x^2-2xy-y\equiv x^2+2x^2+x=x\left(3x+1\right)(\text{mod}5)$, do vậy x chia hết cho 5 hoặc chia 5 dư 3.

+)Nếu x chia hết cho 5 thì y cũng vậy, bài toán được chứng minh

+)Nếu x chia cho 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2, thì

$2x^2+y^2+2x+y\equiv 2.9+4+2.3=30\equiv 0(\text{mod}5)$

Ta cũng có điều phải chứng minh.

TH2) Nếu $x-2y-1$ chia hết cho 5 thì $x\equiv 2y+1\left(\text{mod}5\right)$

$\Rightarrow 0\equiv x^2-2xy-y\equiv\left(2y+1\right)^2-2y(y+1)-y=y+1\left(\text{mod}5\right)$

Do đó y chia 5 dư 4 và x cũng chia 5 dư 4 nên:

$2x^2+y^2+2x+y=2.16+16+2.4+4=60\equiv 0\left(\text{mod}5\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2) Nếu tồn tại $n:1\le n\le 50: a_1+a_2+.....+a_n=50$ thì kết luận bài toán hiểu nhiên

Xét: $1 \le n \le 49: \begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n \le 49 \\ a_1 + a_2 + ... + a_{n+1} \ge 51 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} \ge 2$.

Trường hợp 1: $a_{n+1} = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n = 49$

$a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{50} = 49$

Nên nếu $n \le 24 \Rightarrow a_1 \le a_{n+2}; a_2 \le a_{n+3}; .....; a_n \le a_{2n+1}$

$\Rightarrow 49 = a_1 + a_2 + ... + a_n \le a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{2n+1} < a_{n+2} + ... + a_{49} + a_{50}$

Điều này vô lý nên:

$n \ge 25 \Rightarrow 49 = a_1 + a_2 + ... + a_n \ge na_1 \ge 25a_1 \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow a_2 + ...a_n = 48; \quad a_2 + ... + a_{n+1} = 50$

Trường hợp 2: $a_{n+1} \ge 3$

$a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{50} = 100 - (a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}) \le 49$

$\Rightarrow 49 \ge (49 - n)a_{n+2} \ge (49 - n).3 \Rightarrow n \ge 33$

$\Rightarrow 49 \ge (a_1 + a_2 + ... + a_{16}) + (a_{17} + ... + a_n) \ge 16 + (n - 16)a_{17} \ge 16 + 17a_{17}$

$\Rightarrow a_{17} < 2 \Rightarrow a_{17} = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 .... = a_{17} = 1$

Nếu $a_{n+1} < 18$ đặt $a_1 + a_2 + ... + a_{n+1} = 50 + k(k \ge 1)$

$\Rightarrow 18 \ge a_{n+1} \ge (50 + k) - 49 = k + 1$

$\Rightarrow k \le 17 \Rightarrow a_{k+1} + ... + a_{n+1} = 50$

Nếu $a_{n+1} \ge 19$

$\Rightarrow 49 \ge (49 - n)a_{n+2} \ge (49 - n)19 \to n \ge 47$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{45} = 1$

Vì nếu $a_{45} \ge 2 \Rightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_{44}) + (a_{45} + ... + a_n) \ge 44 + (n - 44)a_{45} \ge 44 + (47 - 44).2 > 49$ Đặt $a_{n+1} = 50 - k(0 \le k \le 31) \Rightarrow a_1 + ... + a_k + a_{n+1} = 50\left(\text{do} \quad a_1 = ... = a_k = 1\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

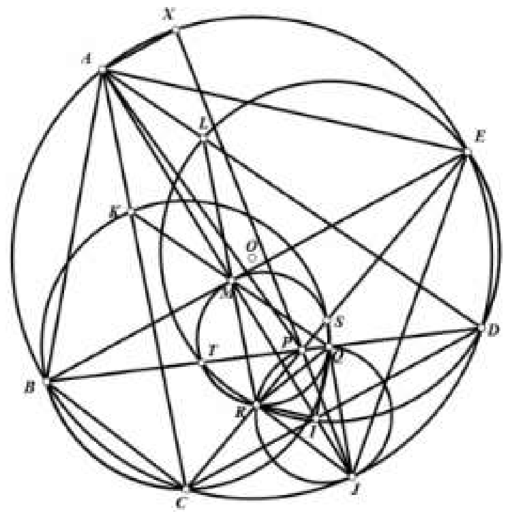
Câu III. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp (O) có $CD // BE$. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc BE sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{PAE}$. Điểm K thuộc AC sao cho MK song song AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho $ML // AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt BD, CE tại Q và S (Q khác B, S khác C).

1) Chứng minh 3 điểm K, M, Q thẳng hàng.

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE cắt BD, CE tại T và R (T khác D, R khác E). Chứng minh M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc (O).

Lời giải



1) Do các tứ giác $BCKQ$ và $BCDA$ nội tiếp nên: $\widehat{CKQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{CAD} \Rightarrow KQ // AD$.

Mặt khác $MK // AD$ nên K, M, Q thẳng hàng.

2) Chứng minh tương tự ta có: R, M, L thẳng hàng.

$MQ // AD$ nên $\widehat{RMQ} = \widehat{RLD} = \widehat{ETD} \Rightarrow$ tứ giác $RTMQ$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự $RMSQ$ nội tiếp do đó: M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

3) Bổ đề: Cho tam giác ABC, M nằm trên $d // BC$ lấy E khác M trên d, AM cắt BC tại I. Đường qua M song song với AB cắt BE tại J, khi đó $IJ // AE$.

Chứng minh MJ cắt AE, AC tại S và T, ME cắt AC tại G.

Ta có $MG // BC$ suy ra $\frac{MA}{MI} = \frac{AG}{GC}$, ME cắt AB tại P ta có: $\frac{MS}{MJ} = \frac{AP}{PB} = \frac{AG}{GC} = \frac{MA}{MI} \Rightarrow AE // IJ$

Quay trở lại bài toán:

AM cắt BC, (O) tại I và J khác A. Áp dụng bổ đề ta có: $IR // AE, IQ // AB$.

Do đó $\widehat{IRE} = \widehat{AEC} = \widehat{AJC} \Rightarrow$ $RIJC$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có $DQIJ$ là tứ giác nội tiếp

Do đó: $\widehat{RJI} + \widehat{IJQ} + \widehat{RPD} = 2\widehat{PCD} + \widehat{CPD} = 180^\circ$ nên $RPQJ$ nội tiếp. Kẻ tiếp tuyến Jx của (O).

Ta có: $\widehat{xJR} = \widehat{xJA} - \widehat{RJA} = \widehat{ADJ} - \widehat{PDC} = \widehat{ADP} + \widehat{MAC} = \widehat{ADP} + \widehat{PAD} = \widehat{APB}$

$\Rightarrow \widehat{PEJ} = \widehat{MAC} = \widehat{PED}$

Suy ra : Jx tiếp xúc với (PQR) hay ta thu được: (PQR) tiếp xúc với (O)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu IV. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \le 2.$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le\sqrt{2.\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)}.\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)}\le\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{b}{b+c}\right)=2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình $\dfrac{26x+5}{\sqrt{x^2+30}}+2\sqrt{26x+5}=3\sqrt{x^2+30}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+2y)(2+3y^2+4xy)=27 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{26}$.

Đặt $a=\sqrt{26x+5}$ và $b=\sqrt{x^2+30}$ $(a\ge 0,\, b>0)$.

Phương trình trở thành

$$\frac{a^2}{b}+2a=3b\Leftrightarrow (a-b)(a+3b)=0\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow \sqrt{26x+5}=\sqrt{x^2+30}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=25 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;25\}$.

2) Thay $2=x^2+y^2$ vào phương trình thứ 2 ta được $(x+2y)(x^2+y^2+3y^2+4xy)=27$

$\Leftrightarrow (x+2y)^3=27\Leftrightarrow x=3-2y.$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được $(3-2y)^2+y^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{7}{5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{5} \end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là $S=\left\{(1;1);\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5}\right)\right\}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn: $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$.

2) Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1\le y\le 2$ và $xy+2\ge 2y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+4}{y^2+1}$.

Lời giải

1) Từ biểu thức $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$ ta nhận thấy $3x-1$ phải chia hết cho (x^2-x+1).

Ta có $(3x-1)(3x-2)=9x^2-9x+2=9(x^2-x+1)-7$ cũng phải chia hết cho (x^2-x+1).

Suy ra 7 chia hết cho $(x^2-x+1)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1=1 \\ x^2-x+1=7 \end{array}\right..$

Tìm được $x \in \{0;1;-2;3\}$, thay vào tìm được y.

Phương trình có 3 nghiệm là $(x;y) \in \{(1;1);(1;-2);(-2;1)\}$.

2) Từ giả thiết $xy + 2 \ge 2y \Rightarrow 4xy + 8 \ge 8y$.

Mà ta lại có $4x^2 + y^2 \ge 4xy$

$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 8 \ge 4xy + 8 \ge 8y$

$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \ge 8y + 8 - y^2$

$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \ge 4(y^2 + 1) + (5y + 2)(2 - y) \ge 4(y^2 + 1)$

$\Rightarrow M = \dfrac{x^2 + 4}{y^2 + 1} \ge 1.$

Dấu $" = "$ xảy ra khi $x = 1$ và $y = 2$.

Vậy GTNN của M bằng 1 khi $x = 1$ và $y = 2$.

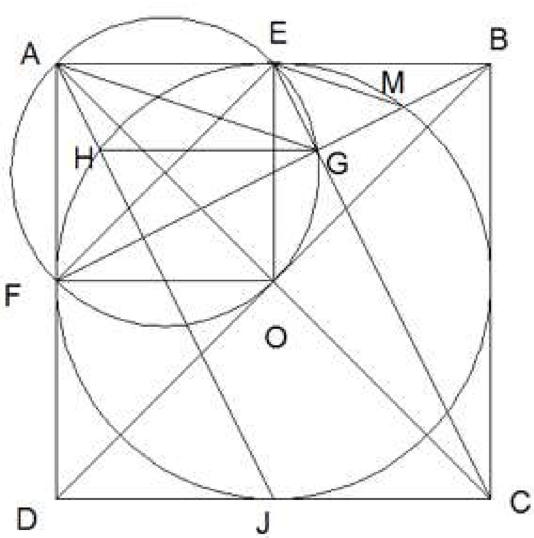
Câu III. Cho hình vuông $ABCD$, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông tiếp xúc với các cạnh AB, AD tại hai điểm E, F. Gọi G là giao điểm các đường thẳng CE và BF.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn là M $(M \ne F)$. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BG.

3) Chứng minh rằng trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O).

Lời giải



1) Do đường tròn (O) nội tiếp hình vuông $ABCD$ nên E và F là trung điểm các cạnh AB và AD

$\Rightarrow \Delta ABF = \Delta BCE \Rightarrow \widehat{EBG} = \widehat{BCG} \Rightarrow \widehat{BCG} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ 4 điểm A, E, G, F cùng nằm trên một đường tròn.

Mà A, E, O, F cũng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow A, E, G, O, F$ cùng nằm trên một đường tròn.

2) Ta có AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{EFM} = \widehat{BEM}$.

Lại có $\widehat{EAG}=\widehat{EFG}$ (cùng chắn cung EG) nên $\widehat{EAG}=\widehat{EFG}\Rightarrow EM//AG$.

Mà E là trung điểm của $AB \Rightarrow M$ là trung điểm của BG.

Câu IV. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+xz=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}\ge \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$.

Lời giải

Ta có: $1+x^2=xy+yz+xz+x^2=(x+y)(x+z)$;

$1+y^2=xy+yz+xz+y^2=(x+y)(y+z)$;

$1+z^2=xy+yz+xz+z^2=(z+y)(x+z)$.

Suy ra $(VT)=\dfrac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.

Ta có: $\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\le (x+y+z)\left(\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\right)$

$=(x+y+z)\left[\dfrac{x}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y}{(x+y)(y+z)}+\dfrac{z}{(z+y)(x+z)}\right]=\dfrac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Do đó $(VP)=\dfrac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)$.

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{3}{2}$.

Ta có: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x}{x+z}\right)$; $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}\right)$;

$\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{x+z}+\dfrac{z}{y+z}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{3}{2}$

Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+y^2+4xy=8 \\ (x+y)(x^2+xy+2)=8 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}}=\dfrac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}$.

Lời giải

1) Ta có $\begin{cases} 3x^2+y^2+4xy=8 \\ (x+y)(x^2+xy+2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(3x+y)=8 \\ (x+y)(x^2+xy+2)=8 \end{cases}$.

Do phương trình thứ nhất nên $x+y\neq 0$ do đó ta kết hợp hai phương trình lại ta có

$x^2+xy+2=3x+y \Leftrightarrow (x-1)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-y \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x=1 \Rightarrow 3+y^2+4y=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x=2-y$ thay vào phương trình thứ nhất ta có $-4(y-1)=0 \Leftrightarrow y=1$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x;y)$ là $(1;1);(1;-5)$.

2) Điều kiện: $x\le \frac{5}{2}; x^2+x\le 5$.

Đặt $a=\sqrt{5-(x^2+x)}$ và $b=\sqrt{5-2x}\,(a,b\ge 0)$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{32-a^2}}{2+a}=\dfrac{\sqrt{32-b^2}}{2+b}$. $\quad (1)$

Ta thấy, nếu $a>b\ge 0$ thì $\sqrt{32-a^2}<\sqrt{32-b^2}$ và $\dfrac{1}{a+2}<\dfrac{1}{2+b}$ tức là $VT<VP$, mâu thuẫn.

Tương tự với $a<b$ cũng mẫu thuẫn. Do đó $a=b$, tức là phương trình ban đầu tương đương với

$5-(x^2+x)=5-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1,\ x=0$.

Câu II. 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\left[(27n+5)^7+10\right]^7+\left[(10n+27)^7+5\right]^7+\left[(5n+10)^7+27\right]^7$$

chia hết cho 42.

2) Với x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=17x^2+17y^2+16xy$.

Lời giải

1) Trước hết ta chứng minh rằng $x^7\equiv x\ (\text{mod } 42),\ \forall x\in\mathbb{Z}$. (1)

Thật vậy, ta có $x^7-x=x(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$.

Dễ thấy $x(x-1)(x+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.

Theo định lí Ơle thì $x^7-x\equiv 0\ (\text{mod } 7),\ \forall x\in\mathbb{Z}$, tức là x^7-x chia hết cho 7.

Vậy x^7-x chia hết cho $\text{BCNN}(6;7)=42$. Khẳng định (1) được chứng minh.

Từ đó $\left[(27n+5)^7+10\right]^7+\left[(10n+27)^7+5\right]^7+\left[(5n+10)^7+27\right]^7$

$$\equiv (27n+5)^7+10+(10n+27)^7+5+(5n+10)^7+27(\text{mod}42)$$
$$\equiv 27n+5+10+10n+27+5+5n+10+27(\text{mod}42)$$
$$\equiv 42(n+1)(\text{mod}42)$$
$$\equiv 0(\text{mod}42).$$

Từ đó ta có khẳng định của bài toán.

2) Đặt $a=x+y$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{a^2}{4}$ hay $\left(\dfrac{5}{2}a+1\right)^2\ge 2$.

Từ đó, ta có $a\ge\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Suy ra $P=17x^2+17y^2+16xy=17a^2-18xy\ge 17a^2-\dfrac{9}{2}a^2\ge 2\left(\sqrt{2}-1\right)^2=6-4\sqrt{2}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5}$.

Câu III. Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F trên BC. Giả sử FK cắt EL tại điểm J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên BC.

1) Chứng minh rằng HJ là phân giác của góc EHF.

2) Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác $BFJL$ và $CEJK$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$.

3) Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

Lời giải

1) Sử dụng định lí Talet trong tam giác LKE với $JH//EK$, ta có $\dfrac{LH}{HK}=\dfrac{LJ}{JE}$.

Sử dụng định lí Talet trong tam giác JHE với $FL // EK$, ta cùng có $\dfrac{FL}{EK}=\dfrac{LJ}{JE}$.

Do đó $\dfrac{FL}{EK}=\dfrac{LH}{HK}$.

Hai tam giác FLH và EKH có $\widehat{FLH}=\widehat{EKH}=90^\circ$ và $\dfrac{FL}{EK}=\dfrac{LH}{HK}$ nên $\Delta FLH \backsim \Delta EKH$

$\Rightarrow \widehat{LFH}=\widehat{KEH}$.

Mặt khác, ta lại có $\widehat{LFH}=\widehat{FHJ}$ (so le trong) và $\widehat{KEH}=\widehat{EHJ}$ (so le trong).

Do đó HJ là phân giác của góc EHF.

2) Do $HJ // FL$ nên $S_{FJL}=S_{FLH}$. Suy ra $S_{BFJL}=S_{BFL}+S_{FLH}=S_{BFH}$. (1)

Chứng minh tương tự, ta cùng có $S_{CEJK}=S_{CEH}$. (2)

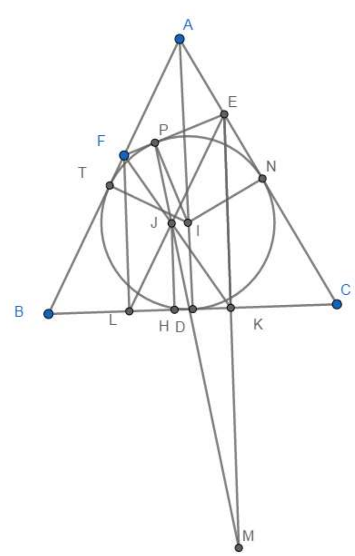
Theo chứng minh câu 1, $\Delta FLH \backsim \Delta EKH$ nên $\widehat{FHB}=\widehat{FHL}=\widehat{EHK}=\widehat{EHC}$.

Hai tam giác FHB và EHC có $\widehat{FBH}=\widehat{ECH}$ và $\widehat{FHB}=\widehat{ECH}$ nên đồng dạng với nhau.

Suy ra $\dfrac{S_{FBH}}{S_{ECH}}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$.

Ta kết hợp (1) và (2), ta thu được $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_{FBH}}{S_{ECH}}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$.

Điều phải chứng minh.



3) Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử P nằm cùng phía với B so với AD như hình vẽ ở trên. Gọi M là giao điểm của PJ và EK.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác KFE với cát tuyến MJP, ta có $\dfrac{MK}{ME}.\dfrac{PE}{PF}.\dfrac{JF}{JK}=1$.

Mà hai tam giác BFH và CEH đồng dạng với nhau có FL và EK là hai đường cao tương ứng nên $\dfrac{JF}{JK}=\dfrac{FL}{EK}=\dfrac{BF}{CE}$.

Suy ra $\dfrac{MK}{ME}.\dfrac{PE}{PF}.\dfrac{BF}{CE}=1$. (3)

Để chứng minh ba điểm P, J, D thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh M, D, J thẳng hàng.

Theo định lí Menelaus đảo áp dụng cho tam giác LKE, điều này tương đương với ta phải chứng minh $\dfrac{MK}{ME}.\dfrac{JE}{JL}.\dfrac{DL}{DK}=1$.

Lại có $\dfrac{JE}{JL}=\dfrac{EK}{FL}=\dfrac{CE}{BF}$ và $\dfrac{DL}{DK}=\dfrac{DL}{DB}.\dfrac{DC}{DK}.\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AF}{AB}.\dfrac{AC}{AE}.1=\dfrac{AF}{AE}$.

Do đó, chỉ cần chứng minh $\dfrac{MK}{ME}.\dfrac{CE}{BF}.\dfrac{AF}{AE}=1.$ (4)

Kết hợp (3) và (4), ta đưa bài toán về chứng minh $\dfrac{CE}{BF}.\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{PE}{PF}.\dfrac{BF}{CE}$.

Hay $\dfrac{AF}{AE}.\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$. (5)

Gọi T, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, AC.

Đặt $a=AB=AC$, $x=BD=CD$, $y=PF=TF$, $z=PE=EN$.

Ta sẽ chứng minh $a=\dfrac{x(x+y)(x+z)}{x^2-yz}$. (6)

Thật vậy, sử dụng định lí cosin trong các tam giác ABC và AEF, ta có

$$2\cos A=\frac{AE^2+AF^2-EF^2}{AE.AF}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{AB.AC}.$$

Suy ra $\dfrac{(a-x-y)^2+(a-x-z)^2-(y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)}=\dfrac{2a^2-4x^2}{a^2}$,

Hay $2-\dfrac{(a-x-y)^2+(a-x-z)^2-(y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)}=2-\dfrac{2a^2-4x^2}{a^2}$.

Từ đây, ta có $\dfrac{yz}{a^2-(2x+y+z)a+(x+y)(x+z)}=\dfrac{x^2}{a^2}$,

Hay $(x^2-yz)a^2-x^2(2x+y+z)a+x^2(x+y)(x+z)=0$.

Như thế, ta có $(a-x)\left[(x^2-yz)a-x(x+y)(x+z)\right]=0$.

Do $a>x$ nên (6) được chứng minh, Sử dụng (6) vừa chứng minh ta có

$$\frac{AF}{AE}.\frac{PF}{PE}=\frac{a-x-y}{a-x-z}.\frac{y}{z}=\frac{\dfrac{x(x+y)(x+z)}{x^2-yz}-x-y}{\dfrac{x(x+y)(x-z)}{x^2-yz}-x-z}.\frac{y}{z}=\frac{(x+y)^2}{(x+z)^2}=\frac{BF^2}{CE^2}.$$

Đẳng thức (5) được chứng minh. Ta có điều phải chứng minh.

Câu IV. Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019. Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kì từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

Lời giải

Đặt $M_n = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \le 2n-1\}$. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: *Trong $2n+1$ số phân biệt từ tập hợp M_n, luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0*. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho thể chọn ra $2n+1$ số phân biệt từ tập hợp M_n mà trong đó không có ba số phân biệt nào có tổng bằng 0. Gọi n là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Khi đó $n > 1$ (vì với $n = 1$ thì mệnh đề đúng). Vì n là số nhỏ nhất làm cho mệnh đề không đúng nên mệnh đề đúng với $n-1$. Nếu trong các số được chọn có ít nhất $2n-1$ số thuộc M_{n-1} thì do mệnh đề đúng với $n-1$, sẽ tồn tại ba số phân biệt trong các số được chọn có tổng bằng 0. Mẫu thuẫn. Vậy có tối đa $2n-2$ số được chọn thuộc M_{n-1}. Suy ra trong bốn số $-2n+2, -2n+1, 2n-2, 2n-1$, có ít nhất ba số được chọn. Suy ra 0 không được chọn.

- Nếu cả hai số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn. Chia tập $M_n \setminus \{-2n+1, 2n-1, 0\}$ thành $2n-2$ cặp $(1;2n-2),(2;2n-3),\ldots,(-1;-2n+2),\ldots,(-n+1,-n)$ ta thấy từ mỗi cặp ta chỉ chọn được tối đa một số. Suy ra chỉ lấy được tối đa $2+2n-2=2n$ số. Mẫu thuẫn.
- Nếu chỉ có một số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn thì theo lí luận ở trên, cặp $(-2n+2, 2n-2)$ được chọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử $2n-1$ được chọn còn $1-2n$ không được chọn. Lúc này chia các phần tử còn lại thành $2n-5$ cặp $(1;2n-3),(2;2n-4),\ldots,(n-2;n),(-2;-2n+3,\ldots,(-n+3;-n-1)$, một bộ ba số $(-n+2,-n+1,-n)$ và một phần tử lẻ cặp là $n-1$. Từ mỗi cặp ta lấy được tối đa một số, từ bộ ba số ta cũng lấy được tối đa một số. Từ đó ta lấy được tối đa $3+2n-5+1+1=2n$ số. Mẫu thuẫn.

Vậy trong mọi trường hợp đều dẫn đến mẫu thuẩn, tức điều giả sử sai. Mệnh đề được chứng minh. Áp dụng mệnh đề cho $n = 1010$ ta có điều phải chứng minh.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) \end{cases}$

2) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$

Lời giải

1) Nếu $x=y$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 3x^2=7 \\ 8x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ x=0 \end{cases}$ (Vô nghiệm), do đó $x\neq y$

Nhân cả hai vế của phương trình (1) với $x-y\neq 0$ ta có:

$(1)\Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy)=7(x-y)\Leftrightarrow x^3-y^3=7(x-y)\Leftrightarrow 10(x^3-y^3)=70(x-y)$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$(2)\Leftrightarrow 9x^3=xy^2+10(x^3-y^3)\Leftrightarrow x^3+xy^2-10y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2xy+5y^2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-2y=0 & (3) \\ x^2+2xy+5y^2=0 & (4) \end{array}\right.$

Ta có: $(3)\Leftrightarrow x=2y$

Thế vào phương trình (1) ta có: $4y^2+y^2+2y^2=7\Leftrightarrow 7y^2=7\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=2 \\ y=-1\Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$

$(4)\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+4y^2=0\Leftrightarrow (x+2y)^2+4y^2=0$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2+(2y)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=0(ktm)$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$

2) $11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$ $\quad(*)$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 5-x\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\leq x\leq 5$

Đặt : $\begin{cases} \sqrt{5-x}=a(a\geq 0) \\ \sqrt{2x-1}=b(b\geq 0) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a^2=5-x \\ b^2=2x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2a^2+b^2=2(5-x)+2x-1=9$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 11a+8b=24+3ab & (1) \\ 2a^2+b^2=9 & (2) \end{cases}$

Giải phương trình (1) ta có: $(1) \Leftrightarrow 11a-3ab=24-8b \Leftrightarrow a(11-3b)=24-8b (*)$

Với $11-3b=0 \Leftrightarrow b=\frac{11}{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 0a=-\frac{16}{3}$ (vô lý) $\Rightarrow b=\frac{11}{3}$ không là nghiệm của phương trình (*)

$\Rightarrow a=\frac{24-8b}{11-3b}=\frac{8b-24}{3b-11}$, Thay $a=\frac{8b-24}{3b-11}$ vào (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{8b-24}{3b-11}\right)^2+b^2=9$

$\Leftrightarrow 2(64b^2-384b+576)+b^2(9b^2-66b+121)=9(9b^2-66b+121)$

$\Leftrightarrow 128b^2-768b+1152+9b^4-66b^3+121b^2-81b^2+594b-1089=0$

$\Leftrightarrow 9b^4-66b^3+168b^2-174b+63=0 \Leftrightarrow 3b^4-22b^3+56b^2-58b+21=0$

$\Leftrightarrow (b-1)(3b^3-19b^2+37b-21)=0 \Leftrightarrow (b-1)(b-1)(b-3)(3b-7)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-1=0 \\ b-3=0 \\ 3b-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=3 \\ b=\frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1}=1 \\ \sqrt{2x-1}=3 \\ \sqrt{2x-1}=\frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=9 \\ 2x-1=\frac{49}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 (tm) \\ x=5 (tm) \\ x=\frac{29}{9} (tm) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{29}{9};5\right\}$

Câu II. 1) Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn $x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$

2) Với a,b là những số thực dương thỏa mãn $2 \le 2a+3b \le 5$ và $8a+12b \le 2a^2+3b^2+5ab+10$

Chứng minh rằng: $3a^2+8b^2+10ab \le 21$.

Lời giải

$x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$

1) $\Leftrightarrow x^2y^2+20xy+99=9x^2+36xy+36y^2+13x+26y$

$\Leftrightarrow (x^2y^2+20xy+100)-1=(3x+2y)^2 13(x+2y) (*)$

Đặt $\begin{cases} x+2y=a (a>0) \\ xy+10=b (b>10) \end{cases}$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow b^2-1=9a^2+13a$

$\Leftrightarrow 9a^2+2.3a.\frac{13}{6}+\frac{169}{36}-\frac{169}{36}=b^2-1$

$\Leftrightarrow \left(3a+\frac{13}{6}\right)^2-b^2=\frac{133}{36} \Leftrightarrow (18a+13)^2-36^2=133$

$\Leftrightarrow (18a-6b+13)(18a+6b+13)=133 \quad (1)$

Ta lại có : $a,b>0 \Rightarrow 18a+6b+13>18a-6b+13>0$

Lại có $133=133.1=19.7$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}18a+6b+13=0\\18a-6b+13=1\end{cases}\\\begin{cases}18a+6b+13=19\\18a-6b+13=7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}18a+6b=120\\18a-6b=-12\end{cases}\\\begin{cases}18a+6b=32\\18a-6b=-6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=11\\a=3\end{cases}(tm)\\\begin{cases}a=\dfrac{19}{6}\\b=-\dfrac{25}{18}\end{cases}(ktm)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+2y=3\\xy+10=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\xy=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\y(3-2y)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\2y^2-3y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\(2y-1)(y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}(ktm)\\y=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1(tm)\\y=1(tm)\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

2) $(2) \Leftrightarrow 8a+12b \le (2a+3b)(a+b)+10 \le 5(a+b)+10$

$\Leftrightarrow 3a+7b \le 10.$ Mặt khác $2a+3b \le 5$

Dự đoán dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Ta có: $\underbrace{3a^2+8b^2+10ab}_{(I)}=(3a+4b).(a+2b)$

Áp dụng bất đẳng thức $AB \le \dfrac{(A+B)^2}{4}$, ta có:

$$21.(I)=[3(3a+4b)].[7(a+2b)] \le \frac{(9a+12b+7a+14b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 21.(I) \le \frac{(16a+26b)^2}{4}=(8a+13b)^2$$

Ta biểu diễn $8a+13b$ theo $3a+7b$ và $2a+3b$ bằng cách đồng nhất hệ số

Xét $8a+13b=x(3a+7b)+y(2a+3b)$

$\Leftrightarrow 8a+13b=(3x+2y).a+(7x+3y).b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=8\\7x+3y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{17}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 21.(I) \le (8a+13b)^2=\left[\frac{2}{5}.(3a+7b)+\frac{17}{5}.(2a+3b)\right]^2 \le \left(\frac{2}{5}.10+\frac{17}{5}.5\right)^2=21^2$$

$\Rightarrow (I) \le 21.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

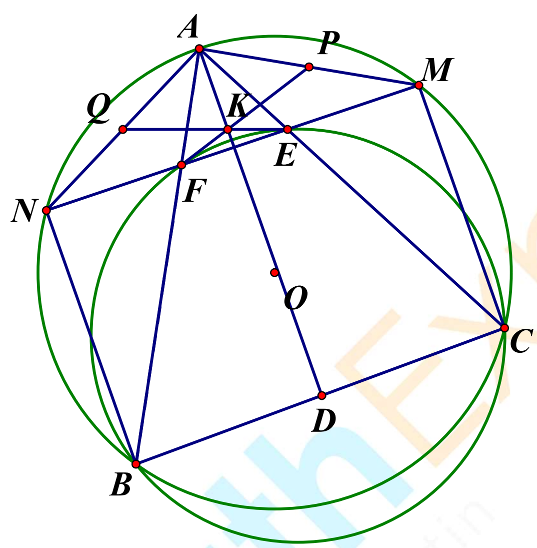
Câu III. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M,N thuộc (O) sao cho đường thẳng CM,BN cùng song song với đường thẳng AD

1) Chứng minh rằng $AM = AN$

2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là $E,F.$ Chứng minh rằng bốn điểm B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn

3) Gọi P,Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng $AM, AN.$ Chứng minh rằng các đường thẳng EQ,FP,AD đồng quy.

Lời giải



1) Chứng minh rằng $AM = AN$

Ta có: $\widehat{NBA} = \widehat{DAB}$ (so le trong do $BN//AD$)

$\widehat{DAB} = \widehat{DAC}(gt); \widehat{DAC} = \widehat{ACM}$ (so le trong do $CM//AD$)

$\Rightarrow \widehat{NBA} = \widehat{MCA} \Rightarrow sd\overset{\frown}{AN} = sd\overset{\frown}{AM}$ (trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau).

Vậy $AM = AN$ (trong một đường tròn, hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau)

2) Chứng minh rằng 4 điểm B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AEF} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AN} + sd\overset{\frown}{CM}\right)$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$= \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AM} + sd\overset{\frown}{CM}\right) = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn)

Vậy tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau) hay B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh các đường thẳng EQ,FP,AD đồng quy

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHN, cát tuyến EKQ, ta có:

$\frac{EN}{EH}.\frac{KH}{KA}.\frac{QA}{QN} = 1 \Rightarrow \frac{EN}{EH}.\frac{KH}{KA} = 1$ (do Q là trung điểm của $AN(gt)$ nên $QA = QN$)

$\Rightarrow \frac{EN}{EH}=\frac{KA}{KH}(I)$

Gọi $AD\cap PE=\{K'\}$. Ta đi chứng minh $K'\equiv K$

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHM, cát tuyến PKF ta có:

$\frac{FM}{FH}.\frac{K'H}{K'A}.\frac{PA}{PM}=1\Rightarrow \frac{FM}{FH}.\frac{K'H}{K'A}=1$ (Do P là trung điểm của $AM(gt)$ nên $PA=PM$)

$\Rightarrow \frac{FM}{FH}=\frac{K'A}{K'H}(II)$

Ta sẽ chứng minh $\frac{EN}{EH}=\frac{FM}{FH}\Leftrightarrow \frac{FM}{EN}=\frac{FH}{EH}=\frac{FM-FH}{EN-EH}=\frac{HM}{HN}(*)$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Vì $BN//AD//CM$ nên áp dụng định lý Ta – let ta có: $\frac{HM}{HN}=\frac{DC}{DB}$

Lại có : $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$ (định lý đường phân giác), do đó: $\frac{HM}{HN}=\frac{AC}{AB}(1)$

Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}(cmt),\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF\sim \Delta ABC(g.g)\Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AE}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{HM}{HN}=\frac{AF}{AE}$ (3)

Tiếp tục áp dụng định lý đường phân giác trong tam giác AEF ta có: $\frac{AF}{AE}=\frac{HF}{HE}(4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra $\frac{HM}{HN}=\frac{HF}{HE}$, do đó $(*)$ được chứng minh, tức là $\frac{EN}{EH}=\frac{FM}{FH}(III)$

Từ $(I),(II),(III)$ suy ra $\frac{KA}{KH}=\frac{K'A}{K'H}$, do đó $K\equiv K'$

Vậy EQ,FP,AD đồng quy tại K

Câu IV. Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}\ge 4.$$

Lời giải

Với $a,b,c>0,a+b+c=3$ ta có:

$P=\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}=\frac{a^2(a+bc)^2}{ab(ab+2c^2)}+\frac{b^2(b+ca)^2}{bc(bc+2a^2)}+\frac{c^2(c+ab)^2}{ca(ca+2b^2)}$ Áp dụng

BĐT $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ ta có:

$P\ge \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}\Rightarrow P\ge \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2}$

Đặt $\begin{cases} a+b+c=p \\ ab+bc+ca=q \\ abc=r \end{cases}$, áp dụng BĐT Schur ta có: $9r \ge p\left(4q-p^2\right)$

$\Rightarrow 9abc \ge 3\left[4\left(ab+bc+ca\right)-9\right] \Leftrightarrow 3abc \ge 4\left(ab+bc+ca\right)-9$

Khi đó ta có:

$$P \ge \frac{\left[a^2+b^2+c^2+4\left(ab+bc+ca\right)-9\right]^2}{\left(ab+bc+ca\right)^2}$$

$$P \ge \frac{\left[\left(a+b+c\right)^2+2\left(ab+bc+ca\right)-9\right]^2}{\left(ab+bc+ca\right)^2}$$

$$P \ge \frac{\left[3^2+2\left(ab+bc+ca\right)-9\right]^2}{\left(ab+bc+ca\right)^2} \Rightarrow P \ge \frac{4\left(ab+bc+ca\right)^2}{\left(ab+bc+ca\right)^2} = 4$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $P \ge 4$ (dpcm)

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)(x+1)=4\\ \left(y^2+xy+x+y+5\right)\left(x^3+y^3+12y+13\right)=243\end{cases}$

2) Giải phương trình: $(x-12)^7+(2x-12)^7+(24-3x)^7=0$

Lời giải

1) Thay $(x+y)(x+1)=4$ vào phương trình (2), ta có:

$y^2+xy+x+y+5=(x+y)(y+1)+(x+y)(x+1)+1=(x+y)(x+y+2)+1=(x+y+1)^2$

và $x^3+y^3+12y+13=x^3+y^3+3(x+y)(x+1)(y+1)+1=(x+y+1)^3\cdot\Rightarrow(x+y+1)^5=243$

$\Rightarrow x+y+1=3$.

$\Rightarrow x+y=2$

Thay vào phương trình (1) ta có: $x=y=1$

2) Đặt $x-12=a$ và $2x-12=b$ ta có: $a^7+b^7-(a+b)^7=0$

$\Rightarrow(a+b)\left(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+b^4a^2-ab^5+b^6\right)-(a+b)(a+b)^6=0$.

$\Rightarrow(a+b)\left(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+b^4a^2-ab^5+b^6-a^6-6a^5b-15a^4b^2-20a^3b^3-15a^2b^4-6b^5a-b^6\right)=0$

$\Rightarrow(a+b)\left(-7a^5b-14a^4b^2-21a^3b^3-14a^2b^4-7ab^5\right)=0$.

$\Rightarrow(a+b)7ab\left(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2b^3a+b^4\right)=0$

$\Rightarrow 7ab(a+b)\left[\left(a^2+ab\right)^2+a^2b^2+\left(b^2+ab\right)^2\right]=0$

Từ đây ta suy ra $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $a+b=0$.

$\Rightarrow x=12; x=6$ hoặc $x=8$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho cả ba số $4a^2+5b; 4b^2+5c; 4c^2+5a$ đều là bình phương của số nguyên dương.

2) Từ một bộ bốn số thực (a,b,c,d) ta xây dựng bộ số mới $(a+b,b+c,c+d,d+a)$ và liên tiếp xây dựng các bộ số mới theo quy tắc trên. Chứng minh rằng nếu ở hai thời điểm khác nhau, ta thu được cùng một bộ số (có thể khác thứ tự) thì bộ số ban đầu phải có dạng $(a,-a,a,-a)$

Lời giải

1) Không mất tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Ta có: $(2a)^2<4a^2+5b<(2a+2)^2\Rightarrow$

$4a^2+5b=(2a+1)^2.\Rightarrow 5b=4a+1$. Tương tự ta có: $5c\ge 4b+1=\dfrac{16a+9}{5}$ hay $a\le\dfrac{25c-9}{16}<2c$. Từ đó $(2c)^2<4c^2+5a<(2c+3)^2$ nên ta phải có $4c^2+5a\in\left\{(2c+1)^2,(2c+2)^2\right\}$. Từ đây, xét hai trường hợp

- Nếu $4c^2+5a=(2c+1)^2$ thì $5a=4c+1$ và do $a \ge c$ nên trong trường hợp này thì $a=b=c=1$

2) Giả sử ở thời điểm thứ n ta thu được bộ số (a_n, b_n, c_n, d_n) và nếu đặt $S_n = a_n + b_n + c_n + d_n$ thì $S_n = 2S_{n-1}$ nên suy ra $S_n = 2^n S_0$ với $S_0 = a+b+c+d$. Vì tồn tại hai thời điểm ta thu được cùng một bộ số nên $S_0 = 0$, kéo $S_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nếu đặt $P_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ thì

$P_{n+1} = 2P_n + 2(a_n + c_n)(b_n + d_n) = 2P_n + 2S_{n-1}^2 = 2P_n \forall n \ge 1$.

Suy ra $P_n = 2^{n-1}P_1$ với mọi $n \ge 2$. Cũng vì tồn tại hai thời điểm thu được hai bộ số giông nhtau nên $P_1 = 0$, suy ra $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Điều đó có nghĩa là bộ số ban đầu phải là $(a, -a, a, -a)$.

Câu III. Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC} < 90°$. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{EAB} < 90°$. Gọi P là giao điểm của BE với trung trực của BC. Gọi K là hình chiếu vuông góc của P lên AB. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của E lên AP. Gọi giao điểm của EQ và PK là F.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của KQ và PE là L. Chứng minh LA vuông góc LE.

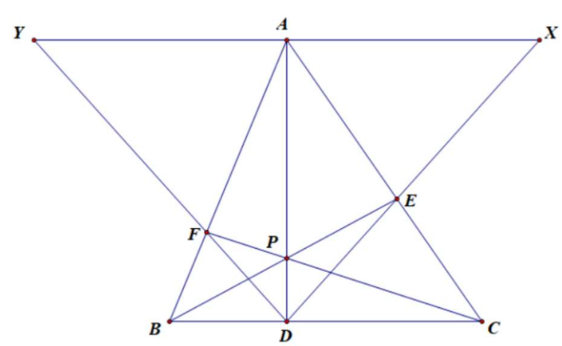
3) Gọi giao điểm của FL và AB là S. Gọi giao điểm của KE và AL là T. Lấy R là điểm đối xứng với A qua L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPR tiếp xúc với nhau.

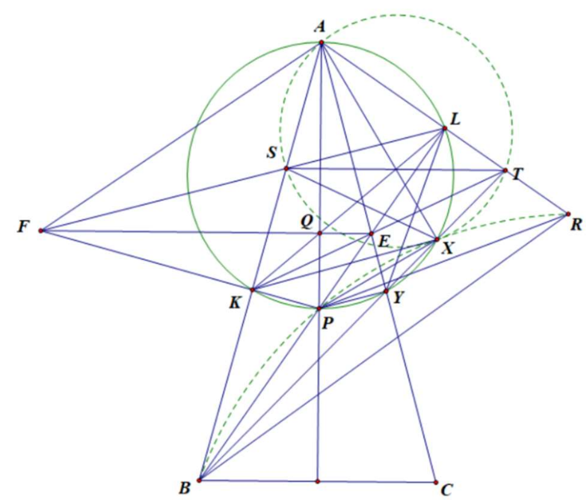
Lời giải

1) Ta có $\widehat{PAE} = \widehat{PAK} = \widehat{EFK}$ nên tứ giác AEPF nội tiếp.

2) Điểm A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF nên theo định lý về đường thẳng Simson, hình chiếu vuông góc của A trên ba cạnh của tam giác PEF thẳng hàng. Do K, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên PF và PE, KQ cắt PE tại L nên $AL \perp PE$.

3) Ta phát biểu một bổ đề như sau.





Bổ đề. Cho tam giác ABC. Đường cao AD. P là điểm bất kì trên $AD. BP, CP$ cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Khi đó DA là phân giác $\widehat{EDF}$.

Chứng minh. Qua A kẻ đường song song với BC, cắt DE, DF tại X, Y.

Ta có $\frac{AX}{DC}=\frac{AE}{EC},\frac{AY}{DB}=\frac{AF}{FB}$, mà $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$ (định lý Céva) nên $AX=AY$. Lại có $AD\perp XY$ nên AD là phân giác $\widehat{EDF}$.

Trở lại bài toán:

Ta có $\widehat{KLE}=\widehat{QLE}=\widehat{QAE}=\widehat{QAK}=\widehat{EFK}$ nên tứ giác $ELFK$ nội tiếp. Gọi T' là giao của đường thẳng qua S song song với BC với AL. Ta có $\widehat{AT'S}=\widehat{APL}=\widehat{AKL}$ nên tứ giác $SLT'K$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{LKT'}=\widehat{LST'}=LFE=LKE$, suy ra K,E,T' thẳng hàng. Từ đó $T'\equiv T$.

Gọi Y là hình chiếu vuông góc của P trên AC. BY cắt (AKP) tại X, cắt AL tại T''. Ta có $PY=PK$ nên LP là phân giác $\widehat{KLY}$. Mà $BL\perp AT''$ nên theo bổ đề trên, K,E,T'' thẳng hàng. Suy ra $T''\equiv T$.

Ta có $\widehat{AXT}=\widehat{APY}=\widehat{APK}=\widehat{ABC}=\widehat{AST}$ nên $X\in(AST)$.

$\widehat{PXB}=\widehat{PAY}=\widehat{PAB}=\widehat{PRB}$ nên $X\in(BPR)$.

Do $\widehat{AXP}=90^\circ=\widehat{ATX}+\widehat{PBX}$ nên kẻ tiếp tuyến Xt của (AST) thì Xt cũng là tiếp tuyến của (BPR). Vậy (AST) tiếp xúc với (BPR) tại X.

Câu IV. Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2+1\ge\frac{4}{abc}+3\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)$.

Lời giải

Bài toán cần chứng minh tương đương với:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+4\ge\frac{4}{abc}+\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}+6\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+4\ge\frac{4}{abc}+\frac{3(a+b+c)^2}{abc}\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+4\ge\frac{31}{abc}$$

Quy đồng và rút gọn ta đưa về chứng minh:

$$3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4a^2b^2c^2\ge 13abc$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\right)\ge 4abc(1-abc)$$

$$\Leftrightarrow 81\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\right)\ge 4abc\left((a+b+c)^3-27abc\right)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c$, ta có các phân tích sau:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)=c^2(a-b)^2+ab(a-c)(b-c)$$

$$(a+b+c)^3-27abc=(a+b+7c)(a-b)^2+(4a+4b+c)(a-c)(b-c).$$

Khi đó, bài toán cần chứng minh tương đương với:

$$81c^2(a-b)^2+81ab(a-c)(b-c)\ge 4abc(a+b+7c)(a-b)^2+4abc(4a+4b+c)(a-c)(b-c).$$

Với $a\le b\le c$, kết hợp $a+b+c=3$ ta dễ có 2 đánh giá sau:

$81c^2\ge 4abc(a+b+7c)$ và $81ab\ge 4abc(4a+4b+c)$

Kết hợp $(a-c)(b-c)\ge 0$ ta có đpcm.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Giải phương trình $13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}=61+x+3\sqrt{(5-x)(x+8)}$.

Lời giải

Cách 1. Điều kiện xác định: $-8\le x\le 5$.

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{5-x}\ (a\ge 0) \\ b=\sqrt{x+8}\ (b\ge 0)\end{cases}$. Khi đó, ta có: $\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ 61+x=a^2+2b^2+40\end{cases}$.

Phương trình đã cho có thể viết lại thành:

$13a+18b=a^2+2b^2+40+3ab \Leftrightarrow (a+b)(a+2b)+40=8(a+b)+5(a+2b)$

$\Leftrightarrow (a+b-5)(a+2b-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=5 \\ a+2b=8\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $a+b=5$. Thay $a=5-b$ vào đẳng thức $a^2+b^2=13$, ta được:

$(5-b)^2+b^2=13 \Leftrightarrow 2(b-2)(b-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $a+2b=8$. Thay $a=8-2b$ vào đẳng thức $a^2+b^2=13$, ta được:

$(8-2b)^2+b^2=13 \Leftrightarrow (b-3)(5b-17)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=\dfrac{17}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{89}{25}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=1,\ x=-4$ và $x=\dfrac{89}{25}$.

Cách 2. Điều kiện xác định : $\begin{cases} 5-x\ge 0 \\ x+8\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -8\le x\le 5$.

Đặt $a=\sqrt{5-x}, a\ge 0$.

Phương trình trở thành: $13a+18\sqrt{13-a^2}=61+5-a^2+3a\sqrt{13-a^2}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{13-a^2}(6-a)=-a^2-13a+66 \Rightarrow 9(13-a^2)(6-a)^2=(a^2+13a-66)^2$

$\Leftrightarrow 9(13-a^2)(a^2-12a+36)=a^4+26a^3+37a^2-1716a+4356$

$\Leftrightarrow 10a^4-82a^3+244a^2-312a+144=0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3)(10a^2-32a+24)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=3 \\ a=\dfrac{6}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \\ x=\dfrac{89}{25}\end{array}\right. \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;-4;\dfrac{89}{25}\right\}$.

Câu II. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=1 \quad (1) \\ x(x+y)^4=x-y \quad (2) \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có:

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=x^4+y^4+6x^2y^2+4xy(x^2+y^2)=1+4xy(x^2+y^2)$

Thay vào phương trình (2), ta được:

$x\left[1+4xy(x^2+y^2)\right]=x-y \Leftrightarrow x+4x^2y(x^2+y^2)=x-y$

$\Leftrightarrow 4x^2y(x^2+y^2)+y=0 \Leftrightarrow y\left[4x^2(x^2+y^2)+1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ 4x^2(x^2+y^2)+1=0 \end{array}\right.$

Vì $4x^2(x^2+y^2)+1>0$ với mọi x,y nên phương trình $4x^2(x^2+y^2)+1=0$ vô nghiệm.

Thay $y=0$ vào hệ phương trình đầu, ta được: $\begin{cases} x^4=1 \\ x^5=x \end{cases} \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(1;0),(-1;0)\}$.

Cách 2. Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+4x^2y^2=1$

Xét $x=0$, thay vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} y^4=1 \\ y=0 \end{cases}$ (vô lý).

Xét $x\neq 0$, chia cả hai vế của (2) cho x ta được:

$(x+y)^4=1-\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow [(x+y)^2]^2=1-\dfrac{y}{x}$

$\Leftrightarrow (x^2+2xy+y^2)^2=1-\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+4x^2y^2+2.2xy.(x^2+y^2)=1-\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow 1+4xy.(x^2+y^2)=1-\dfrac{y}{x}$

$\Leftrightarrow 4x^2y.(x^2+y^2)+y=0$, (do $x\neq 0$)

$\Leftrightarrow y\left[4x^2(x^2+y^2)+1\right]=0 \Leftrightarrow y=0$ (vì $4x^2(x^2+y^2)+1>0$.)

Thay $y=0$ vào hệ phương trình ban đầu ta được: $\begin{cases} x^4=1 \\ x^5=x \end{cases} \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$(tm).

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(1;0);(-1;0)\}$.

Cách 3. Từ hệ phương trình, ta có:

$x(x+y)^4=(x-y)(x^4+y^4+6x^2y^2)$

$\Leftrightarrow x^5+4x^4y+6x^3y^2+4x^2y^3+xy^4=x^5+xy^4+6x^3y^2-yx^4-y^5-6x^2y^3$

$\Leftrightarrow 5x^4y+10x^2y^3+y^5=0$

$\Leftrightarrow y(5x^4+10x^2y^2+y^4)=0$ (*).

Nếu $y \neq 0$ thì $5x^4 + 10x^2y^2 + y^4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên (*) vô nghiệm.

Nếu $y = 0$ thì ta thay vào hệ phương trình ban đầu được: $\begin{cases} x^4 = 1 \\ x^5 = x \end{cases} \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1;0), (-1;0)\}$.

Câu III. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho $7, 9, 11, 13$ được các số dư tương ứng là $3, 4, 5, 6$.

Lời giải

Vì n chia 7 dư 3 nên $2n$ chia 7 dư 6.

Vì n chia 9 dư 4 nên $2n$ chia 9 dư 8.

Vì n chia 11 dư 5 nên $2n$ chia 11 dư 10.

Vì n chia 13 dư 6 nên $2n$ chia 13 dư 12.

Suy ra $(2n+1)$ chia hết cho $7, 9, 11, 13$.

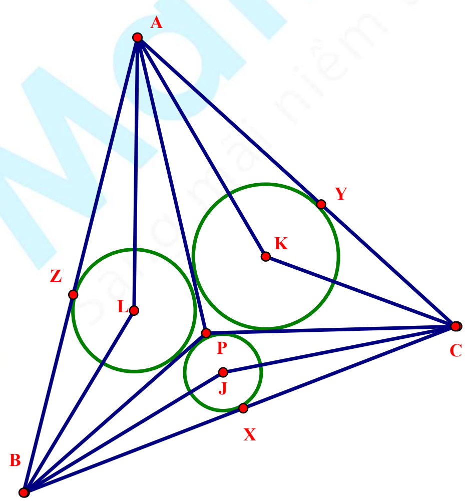
Mà n là số nguyên dương nhỏ nhất nên $2n + 1 = \text{BCNN}(7, 9, 11, 13) = 7.9.11.13 \Rightarrow n = 4504$.

Câu IV. Cho tam giác nhọn ABC có điểm P nằm trong tam giác (P không nằm trên các cạnh). Gọi J, K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB.

1. Chứng minh rằng $\widehat{BJC} + \widehat{CKA} + \widehat{ALB} = 450^\circ$.

2. Giả sử $PB = PC$ và $PC < PA$. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của J, K, L trên các cạnh BC, CA, AB. Dựng hình bình hành $XYWZ$. Chứng minh W nằm trên phân giác $\widehat{BAC}$.

Lời giải



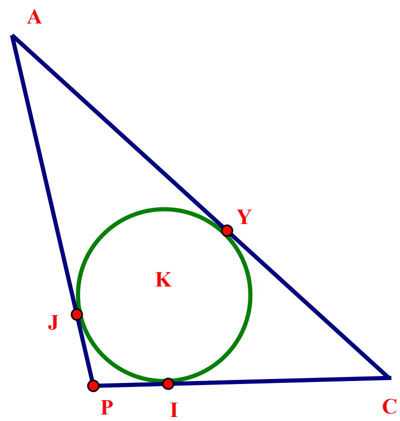
1. Chứng minh rằng $\widehat{BJC} + \widehat{CKA} + \widehat{ALB} = 450^\circ$.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{BJC} = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\widehat{BPC} \\ \widehat{CKA} = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\widehat{CPA} \\ \widehat{ALB} = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\widehat{APB} \end{cases}$; do đó $\widehat{BJC} + \widehat{CKA} + \widehat{ALB} = 270^\circ + \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BPC} + \widehat{CPA} + \widehat{APB}\right) = 450^\circ$.

2. Giả sử $PB = PC$ và $PC < PA$. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của J, K, L trên các cạnh BC, CA, AB. Dựng hình bình hành $XYWZ$. Chứng minh W nằm trên phân giác $\widehat{BAC}$.

Lời giải

Cách 1.



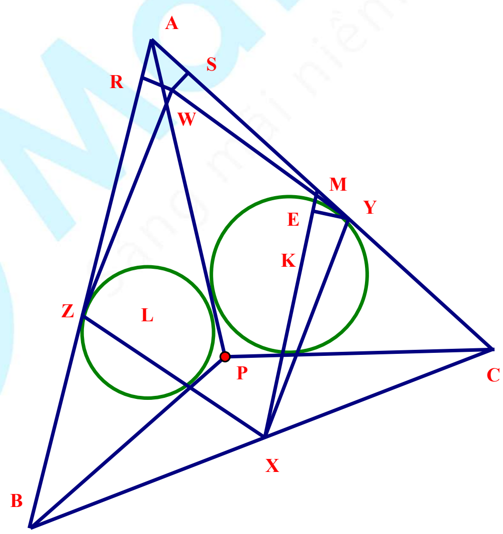
Tính chất: Cho tam giác ABC có K là tâm đường tròn nội tiếp, các điểm tiếp xúc là I, J, Y như hình vẽ. Khi đó $AY = \dfrac{AC + AP - PC}{2}$.

Chứng minh:

Ta có: $AY = AJ$, $PI = PJ$, $CY = CI$.

Ta có: $\dfrac{AC + AP - PC}{2} = \dfrac{AY + CY + AJ + PJ - (PI + IC)}{2} = AY$.

Trở lại bài toán:



Gọi R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của W lên AB, AC. Ta sẽ chứng minh $WR = WS$.

Thật vậy, gọi M là trung điểm của AC, E là hình chiếu vuông góc của Y lên MX.

Do tam giác BPC cân tại P nên X là trung điểm của BC, suy ra $XM // AB$.

Lại có: $YE // WR, YX // WZ$ và $YX = WZ$ nên $\Delta YEX = \Delta WRZ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

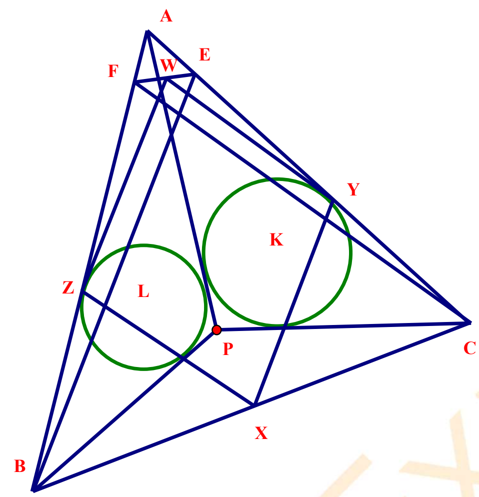
Từ đó ta có: $WR = YE = MY \sin \widehat{YME} = MY \sin \widehat{BAC} =$

$=(AY-AM)\sin\widehat{BAC}=\left(\dfrac{AC+AP-PC}{2}-\dfrac{AC}{2}\right)\sin\widehat{BAC}=\left(\dfrac{AP-PC}{2}\right)\sin\widehat{BAC}$. (1)

Chứng minh tương tự ta có: $WS=\left(\dfrac{AP-BP}{2}\right)\sin\widehat{BAC}$. (2)

Do $BP=CP$ nên từ (1) và (2) ta có: $WR=WS$. Vậy W nằm trên phân giác $\widehat{BAC}$.

Cách 2.



Lấy $E\in AC; F\in AB$ sao cho $BE//XY, CF//XZ$.

Tam giác PBC cân tại P nên X là trung điểm của BC suy ra Y,Z là trung điểm của CE, BF.

Ta có: $\begin{cases} XZ//CF \\ XZ//YW \end{cases} \Rightarrow YW//CF$, suy ra W là trung điểm của EF.

Từ đây ta có: $\begin{cases} AE=AC-CE=AC-2CY=AC-(AC+CP-AP)=AP-CP \\ AF=AB-BF=AB-2BZ=AB-(AB+BP-AP)=AP-BP \end{cases}$.

Mà $PB=PC$ suy ra $AE=AF$ nên tam giác AEF cân tại A.

Mặt khác W là trung điểm EF suy ra W nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Câu V. Cho tập $A=\{1;2;3;...;2021\}$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất $(k>2)$ sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kỳ trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

Lời giải

Cách 1.

Gọi k số các số nguyên dương lớn nhất có thể chọn được là $a_1;a_2;...;a_k$ không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1<a_2<...<a_k$.

Dễ thấy $a_{i+1}-a_i>1\ \forall i\in\{1;2;...;k-1\}$

Mặt khác nếu tồn tại $i\in\{1;2;...;k-1\}$ sao cho $a_{i+1}-a_i=2$ khi đó a_i và a_{i+1} cùng tính chẵn lẻ nên ta có $a_{i+1}+a_i \vdots a_{i+1}-a_i$ (trái với giả thiết) từ đó suy ra $a_{i+1}-a_i\ge 3$

$\Rightarrow a_k\ge(k-1).3+a_1\ge 3k-2$ ta lại có $a_k\le 2021\Rightarrow 3k-2\le 2021\Rightarrow k\le\dfrac{2023}{3}\Rightarrow k\le 674$.

Nhận xét nếu có hai số cùng chia cho 3 dư 2 thì tổng của chúng chia cho 3 dư 1, còn hiệu của chúng chia hết 3. Nên tổng hai số này không chia hết cho hiệu của chúng. Các số thuộc tập A có tất cả 674 số chia cho 3 dư 2.

Vậy giá trị lớn nhất của k là 674.

Cách 2.

Gọi B là tập con của tập A thỏa mãn hai phần tử bất kỳ của B có tổng không chia hết cho hiệu. Dễ thấy trong 3 số tự nhiên liên tiếp ta chỉ có thể chọn 1 phần tử vào B. Thật vậy với 3 số $x, x+1, x+2$ nếu có 2 phần tử trong B thì

$x+(x+2)=2x+2$ chia hết cho $(x+2)-x=2$

$x+(x+1)=2x+1$ chia hết cho $(x+1)-x=1$

$(x+1)+(x+2)=2x+3$ chia hết cho $(x+2)-(x+1)=1$

Vậy với cách xây dựng tập B như vậy thì số phần tử của B không thể lớn hơn $\left[\frac{2021}{3}+1\right]=674$

Tập $B=\{1,4,7,...,2020\}$ có 674 phần tử thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị lớn nhất của k là 674.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Với a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c\neq 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a)=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc}+\dfrac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc}=\dfrac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2+4xy+2x^2y^2=11 \\ 3xy\left(x+2y\right)+31=9x+18y+13xy \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có:

$a^2\left(a+b+c\right)+1+abc=a\left(a^2+ab+ac\right)+abc+\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

$=a\left(a^2+ab+bc+ca\right)+\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)+\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

$=\left(a+b+c\right)\left(a+b\right)\left(a+c\right)$

Từ đó ta có $\dfrac{a}{a^2\left(a+b+c\right)+1+abc}=\dfrac{a\left(b+c\right)}{\left(a+b+c\right)\left(a+b\right)\left(a+b\right)\left(c+a\right)\left(b+c\right)}=\dfrac{a\left(b+c\right)}{a+b+c}$

Biến đổi tương tự ta có $\dfrac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc}=\dfrac{b(a+c)}{a+b+c}$

Suy ra $\dfrac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc}+\dfrac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc}=\dfrac{a(b+c)+b(a+c)}{a+b+c}$ (1)

Mặt khác từ đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=\left(ab+bc+ca\right)\left(a+b+c\right)$

Nên ta lại có:

$1+abc+ab(a+b+c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc+ab(a+b+c)$

$=\left(ab+bc+ca\right)\left(a+b+c\right)+ab\left(a+b+c\right)=\left(a+b+c\right)\left(2ab+bc+ca\right)$

$=\left(a+b+c\right)\left[a\left(b+c\right)+b\left(a+c\right)\right]$

Từ đó ta có $\dfrac{1+abc+ab(a+b+c)}{\left(a+b+c\right)^2}=\dfrac{b(a+c)+a(b+c)}{a+b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc}+\dfrac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc}=\dfrac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

2) **Cách 1.** Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+2y\right)^2+2x^2y^2=11 \\ 3xy\left(x+2y\right)+31=9\left(x+2y\right)+13xy \end{cases}$

Đặt $a=x+2y, b=xy$ ta được hệ mới: $\begin{cases} a^2+2b^2=11 \\ 3ab+31=9a+13b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2=11 & (1) \\ 3a(b-3)=13b-31 & (2) \end{cases}$

Dễ thấy $b=3$ không thỏa mãn phương trình (2).

Xét $b\neq 3$:

Từ phương trình (2) ta có $a=\dfrac{13b-31}{3(b-3)}$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$\left(\frac{13b-31}{3(b-3)}\right)^2+2b^2=11 \Leftrightarrow (13b-31)^2+18b^2.(b-3)^2=99(b-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 18b^4-108b^3+232b^2-212b+70=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{5}{3} \\ b=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3;b=1 \\ a=\dfrac{7}{3};b=\dfrac{5}{3} \\ a=\dfrac{1}{3};b=\dfrac{7}{3} \end{array}\right..$$

Trường hợp 1: $a=3;b=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ (3-2y)y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right..$

Trường hợp 2: $a=\dfrac{7}{3};b=\dfrac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=\dfrac{7}{3} \\ xy=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3}-2y \\ \left(\dfrac{7}{3}-2y\right)y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Trường hợp 3: $a=\dfrac{1}{3};b=\dfrac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=\dfrac{1}{3} \\ xy=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-2y \\ \left(\dfrac{1}{3}-2y\right)y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x;y)=(1;1)$, $(x;y)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Cách 2. $\begin{cases} x^2+4y^2+4xy+2x^2y^2=11 & (*) \\ 3xy(x+2y)+31=9x+18y+13xy & (**) \end{cases}$

Xét phương trình (*) ta có: $(x+2y)^2=11-2x^2y^2$.

Xét phương trình (**) ta có: $3(x+2y)(xy-3)=13xy-31 \Rightarrow 9(x+2y)^2(xy-3)^2=(13xy-31)^2$.

$\Leftrightarrow -2(3xy-5)(3xy-7)(xy-1)^2=0$.

Ta có các trường hợp: $xy=1 \Rightarrow 3(x+2y)+31=9(x+2y)+13 \Rightarrow x=3-2y$.

Khi đó $(3-2y)y=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=1 \\ y=1\end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy hai cặp nghiệm này thỏa mãn hệ phương trình.

$xy=\frac{5}{3} \Rightarrow x+2y=\frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=\frac{7}{3} \\ xy=\frac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3}-2y \\ \left(\frac{7}{3}-2y\right)y=\frac{5}{3}\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

$xy=\frac{7}{3} \Rightarrow x+2y=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=\frac{1}{3} \\ xy=\frac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}-2y \\ \left(\frac{1}{3}-2y\right)y=\frac{7}{3}\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x;y)=(1;1)$, $(x;y)=\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Câu II. 1) Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn $3^x+29=2^y$.

2) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2(a+b+c)+ab+bc+ca=9$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{a+1}{a^2+10a+21}+\frac{b+1}{b^2+10b+21}+\frac{c+1}{c^2+10c+21}$.

Lời giải

1) Xét $x=1$ thay vào phương trình ta được $3^1+29=2^y \Leftrightarrow y=5$

Xét $x>1$ ta có 3^x chia hết cho 9

$\Rightarrow 2^y \equiv 2$ (mod 9)

Để ý:

$y=6k$ thì ta được $2^y \equiv 1$ (mod 9)

$y=6k+1$ thì ta được $2^y \equiv 2$ (mod 9)

$y=6k+2$ thì ta được $2^y \equiv 4$ (mod 9)

$y=6k+3$ thì ta được $2^y \equiv 8$ (mod 9)

$y=6k+4$ thì ta được $2^y \equiv 7$ (mod 9)

$y=6k+5$ thì ta được $2^y \equiv 5$ (mod 9)

Từ đó ta thấy được $y \equiv 1$ (mod 6)

Với $y \equiv 1$ (mod 6) thì $2^y \equiv 2$ (mod 7) $\Rightarrow 3^x \equiv 1$ (mod 7)

Để ý:

$x=6k$ thì ta được $3^x \equiv 1$ (mod 7)

$x=6k+1$ thì ta được $3^x \equiv 3$ (mod 7)

$x=6k+2$ thì ta được $3^x \equiv 2$ (mod 7)

$x = 6k+3$ thì ta được $3^x \equiv 6 \pmod 7$

$x = 6k+4$ thì ta được $3^x \equiv 4 \pmod 7$

$x = 6k+5$ thì ta được $3^x \equiv 5 \pmod 7$

Từ đó ta thấy được $x \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2^y \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow y = 1$ (vô lý)

Vậy có duy nhất cặp $(x;y) = (1;5)$ thỏa mãn đề bài.

2) Ta có $2(a+b+c)+ab+bc+ca = 9 \Rightarrow (ab+a+b+1)+(bc+b+c+1)+(ca+c+a+1) = 12$

$$\Rightarrow (a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1) = 12$$

Và $a^2+10a+21 = (a+1)^2+8(a+1)+12$. Đặt $a+1 = x$; $b+1 = y$; $c+1 = z$.

Khi đó: $xy+yz+zx = 12$. Suy ra

$$M = \frac{x}{x^2+8x+12}+\frac{y}{y^2+8y+12}+\frac{z}{z^2+8z+12}$$

$$= \frac{x}{(x+y)(x+z)+8x}+\frac{y}{(y+x)(y+z)+8y}+\frac{z}{(z+x)(z+y)+8z}$$

Với $xy+yz+zx = 12 \Rightarrow (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx) = 36 \Rightarrow x+y+z \ge 6$.

Áp dụng BĐT : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ ta có :

$$M \le \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{8}+\frac{y}{(y+x)(y+z)}+\frac{1}{8}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}+\frac{1}{8}\right]$$

$$\le \frac{1}{4}.\left(\frac{2xy+2yz+2zx}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4}.\left(\frac{24}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{3}{8}\right)$$

Ta cũng có : $12 = xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le 4 \Rightarrow x^2y^2z^2 \le 64 \Rightarrow xyz \le 8$

Suy ra: $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \ge 6.12-8 = 64$

$\Rightarrow M \le \frac{1}{4}.\left(\frac{24}{64}+\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{16}$. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Vậy $M_{max} = \frac{3}{16}$ khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu III. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}$ nhọn có đường tròn nội tiếp (O). Các điểm M,N lần lượt thuộc các cạnh CB,CD sao cho MN tiếp xúc (O) tại P và tam giác CMN không cân. MN lần lượt cắt AB,AD tại E,F. Gọi K,L lần lượt là trực tâm các $\Delta BME, \Delta DNF$.

1) Chứng minh OP đi qua trung điểm I của KL.

2) Gọi H là trực tâm tam giác CMN. Chứng minh $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN} = -\frac{1}{2}$.

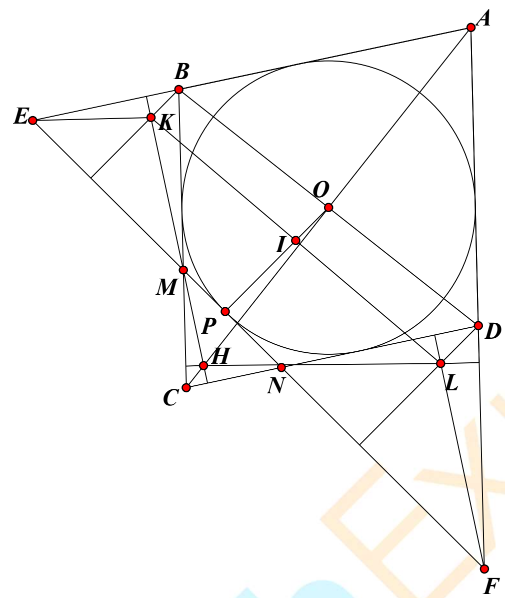
3) Gọi EK, FL lần lượt cắt BD tại S,T. NS cắt MT tại Q. Đường tròn nội tiếp tam giác CMN tiếp xúc MN với tại G. Chứng minh PQ song song với GH.

Lời giải

1) Chứng minh OP đi qua trung điểm I của KL:

Ta có K,L lần lượt là trực tâm các $\Delta BME, \Delta DNF$ và MN tiếp xúc (O) tại P $\Rightarrow BK//DL//OP$ (cùng vuông góc với FE).

Trong hình thang $BDLK$ có đáy BD có O là trung điểm BD và $OP//BK \Rightarrow OP$ đi qua trung điểm I của đoạn thẳng KL.



2) **Gọi H là trực tâm tam giác CMN. Chứng minh $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN}=-\frac{1}{2}$:**

Ta có:

+) OI là đường trung bình hình thang $BDLK \Rightarrow OI=\frac{1}{2}(BK+DL)$.

+) $EF=EM+MN+NF$

Khi đó $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN}=\frac{BK+DL}{2CH}-\frac{ME+MN+NF}{2MN}=\frac{1}{2}\left(\frac{BK}{CH}+\frac{DL}{CH}-\frac{ME}{MN}-1-\frac{NF}{MN}\right)$. $(*)$

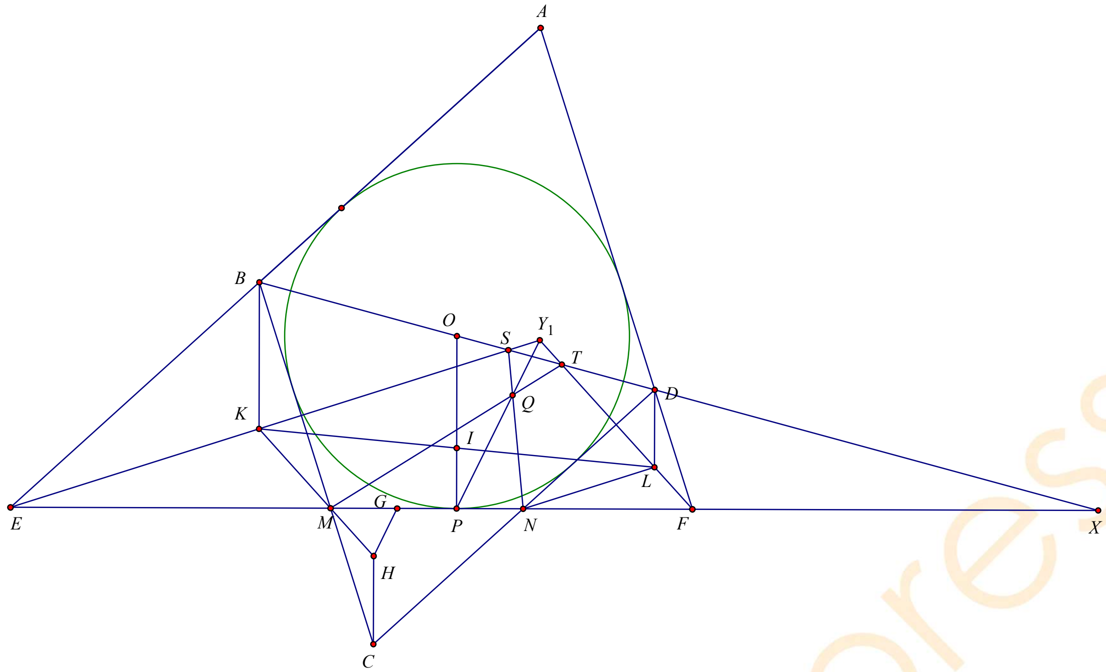
Mặt khác:

+) $\Delta MBK \sim \Delta MCH \Rightarrow \frac{BK}{CH}=\frac{MK}{MH}; \Delta MKE \sim \Delta MHN \Rightarrow \frac{MK}{MH}=\frac{ME}{MN}$. Do đó $\frac{BK}{CH}=\frac{ME}{MN}$.

+) $\Delta NDL \sim \Delta NCH \Rightarrow \frac{DL}{CH}=\frac{NL}{NH}; \Delta NLF \sim \Delta NHM \Rightarrow \frac{NL}{NH}=\frac{NF}{NM}$. Do đó $\frac{DL}{CH}=\frac{NF}{MN}$.

Từ $(*)$: $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN}=\frac{1}{2}.(-1)=-\frac{1}{2}$. Vậy $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN}=-\frac{1}{2}$.

3) Chứng minh PQ song song với GH.



Gọi Y_1 là giao điểm của TF và QP, Y_2 là giao điểm của SE và QP.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔQMP có $T\in QM$, $Y_1\in QP$, $F\in MP$ thẳng hàng:

$$\frac{TQ}{TM}\cdot\frac{FM}{FP}\cdot\frac{Y_1P}{Y_1Q}=1\Rightarrow\frac{Y_1P}{Y_1Q}=\frac{TM}{TQ}\cdot\frac{FP}{FM}\qquad(1)$$

Tương tự cho ΔPQN ($S\in QN$, $Y_2\in QP$, $E\in PN$ thẳng hàng):

$$\frac{SQ}{SN}\cdot\frac{EN}{EP}\cdot\frac{Y_2P}{Y_2Q}=1\Rightarrow\frac{Y_2P}{Y_2Q}=\frac{SN}{SQ}\cdot\frac{EP}{EN}\qquad(2)$$

Để chứng minh $Y_1\equiv Y_2$ ta cần $\frac{Y_1P}{Y_1Q}=\frac{Y_2P}{Y_2Q}$ hay $\frac{TM}{TQ}\cdot\frac{FP}{FM}=\frac{SN}{SQ}\cdot\frac{EP}{EN}\Leftrightarrow\frac{TM}{TQ}\cdot\frac{SQ}{SN}=\frac{EP}{EN}\cdot\frac{FM}{FP}$ (**)

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔQMN có $T\in QM$, $S\in QN$, $X\in MN$ ($X=BD\cap MN$) và cho ΔCMN có $B\in CM$, $D\in CN$, $X\in MN$:

$$\frac{TM}{TQ}\cdot\frac{SQ}{SN}\cdot\frac{XN}{XM}=1\Rightarrow\frac{TM}{TQ}\cdot\frac{SQ}{SN}=\frac{XM}{XN};$$

$$\frac{BM}{BC}\cdot\frac{DC}{DN}\cdot\frac{XN}{XM}=1\Rightarrow\frac{BM}{BC}\cdot\frac{DC}{DN}=\frac{XM}{XN}$$

Suy ra: $\frac{TM}{TQ}\cdot\frac{SQ}{SN}=\frac{BM}{BC}\cdot\frac{DC}{DN}=\frac{BM}{DN}$ (vì DC = BC). (***)

Ta có $\frac{EP}{EN}=\frac{EP.PN}{EN.PN}$

Do EO là tia phân giác của $\widehat{AEN}\Rightarrow\widehat{OEN}=\frac{1}{2}\widehat{AEN}$

NO là tia phân giác của $\widehat{DNE}\Rightarrow\widehat{ONE}=\frac{1}{2}\widehat{DNE}$

$\Rightarrow \widehat{OEN}+\widehat{ONE}=\frac{1}{2}\left(\widehat{AEN}+\widehat{DNE}\right)=90^0$ (do $AE//DN$)

$\Rightarrow OE\perp ON \Rightarrow EP.PN=OP^2$ và $EN.PN=ON^2 \Rightarrow \frac{EP}{EN}=\frac{OP^2}{ON^2}$.

Chứng minh tương tự, ΔOFM vuông tại O: $\frac{FM}{FP}=\frac{OM^2}{OP^2}$. Suy ra $\frac{EP}{EN}\cdot\frac{FM}{FP}=\frac{OM^2}{ON^2}$ (3)

Xét ΔCNM có O là tâm đường tròn bàng tiếp $\Delta CNM \Rightarrow \widehat{MON}=90^\circ-\frac{\widehat{BCD}}{2}=\widehat{MBO}$

Mà MO là phân giác của $\widehat{BMN}$ nên $\Delta BMO\sim\Delta OMN$ (g.g) ($\widehat{MON}=\widehat{MBO}$, $\widehat{NMO}=\widehat{BMO}$)
Tương tự $\Delta DON\sim\Delta OMN$ (g.g).

$\Rightarrow \Delta BMO\sim\Delta DON \Rightarrow \frac{BM}{DO}=\frac{BO}{DN}=\frac{OM}{ON}\Rightarrow \frac{BM}{DO}\cdot\frac{BO}{DN}=\frac{OM^2}{ON^2}\Rightarrow \frac{BM}{DN}=\frac{OM^2}{ON^2}$ (do $DO=BO$) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{BM}{DN}=\frac{EP}{EN}\cdot\frac{FM}{FP}$ (****).

Từ (***) và (****) $\Rightarrow$ (**) $\Rightarrow Y_1\equiv Y_2 \Rightarrow PQ,\ TF,\ SE$ đồng quy.

Ta có $TF\perp AE$ (do $AE//DN$) và $SE\perp AF$ (do $AF//BM$) $\Rightarrow$ Y_1 là trực tâm của ΔAEF.

Mà ΔAEF và ΔCNM có các cạnh tương ứng song song

$\Rightarrow$ $HG//PY_1$ vì vai trò của HG và PY_1 là như nhau $\Rightarrow$ $HG//PQ$ (đpcm).

Câu IV. Giả sử $a_1,a_2,......,a_{2021}$ là những số thực thỏa mãn $\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{a_2}{1+a_2^2}+......+\frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2}=0$.

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k\left(1\le k\le 2021\right)$ sao cho $\left|\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{2a_2}{1+a_2^2}+......+\frac{ka_k}{1+a_k^2}\right|\le\frac{2k+1}{8}$.

Lời giải

Đặt $x_i=\frac{a_i}{1+a_i^2}$; $i=\overline{1,...,2021}$.

Xét $x_i+\frac{1}{2}=\frac{a_i}{1+a_i^2}+\frac{1}{2}=\frac{\left(1+a_i\right)^2}{2\left(1+a_i^2\right)}\ge 0\Rightarrow x_i\ge-\frac{1}{2}$.

Xét $x_i-\frac{1}{2}=\frac{a_i}{1+a_i^2}-\frac{1}{2}=\frac{-\left(1-a_i\right)^2}{2\left(1+a_i^2\right)}\le 0\Rightarrow x_i\le\frac{1}{2}$. Suy ra $-\frac{1}{2}\le x_i\le\frac{1}{2}$; $i=\overline{1,...,2021}$.

Vì $\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{a_2}{1+a_2^2}+......+\frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2}=0\Rightarrow x_1+x_2+....+x_{2021}=0$

Giả sử không tồn tại số nguyên $k;1\le k\le 2021$ sao cho $\left|\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{2a_2}{1+a_2^2}+......+\frac{ka_k}{1+a_k^2}\right|\le\frac{2k+1}{8}$

Nghĩa là với mọi $k;1\le k\le 2021$ ta luôn có $\left|\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{2a_2}{1+a_2^2}+......+\frac{ka_k}{1+a_k^2}\right|>\frac{2k+1}{8}$.

Đặt $g_i=\sum i.x_i$; $i=\overline{1,...,2021}$

Nhận thấy $g_1; g_2; .....; g_{2021}$ luôn đồng dấu.

Thật vậy, giả sử nếu có 2 số $g_{i-1}, g_i \left(1 < i \le 2021\right)$ trái dấu.

Do đó $\left|i.x_i\right| = \left|g_i - g_{i-1}\right| = \left|g_i\right| + \left|g_{i-1}\right| > \dfrac{2i+1}{8} + \dfrac{2\left(i-1\right)+1}{8} = \dfrac{i}{2} \Rightarrow x_i > \dfrac{1}{2}$ (mâu thuẫn)

Nghĩa là $g_1; g_2; .....; g_{2021}$ luôn đồng dấu

Lại có $0 = x_1 + x_2 + ... + x_{2021} = \sum_{i=1}^{2021} \dfrac{g_i}{i} \ne 0$ (mâu thuẫn)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6(xy+5)+x^3y+5x^2=42 \\ x^3+5x^2y+6x+30y=42 \end{cases}$.

2) Giải phương trình : $\left(\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{3-x}\right)\left(2+3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right)=24$.

Lời giải

1) Trừ vế với vế của 2 phương trình ta được :

$\left(x^2y-x^2\right)+(6xy-6x)-\left(5x^2y-5x^2\right)-(30x-30)=0$

Tương đương với $(y-1)(x-5)\left(x^2+6\right)=0$

Từ đây suy ra $y=1$ hoặc $x=5$

Với $y=1\Rightarrow x=1$, với $x=5$ thì $y=\dfrac{-113}{155}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1),\left(5;\dfrac{-113}{155}\right)$.

2) Đặt $\sqrt[3]{x+6}=a, \sqrt[3]{3-x}=b$. Khi đó, ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} (a+b)(2+3ab)=24 \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$. Cộng hai phương trình lại ta suy ra

$(a+b)^2+2(a+b)-33=0 \Leftrightarrow (a+b-3)\left[(a+b)^2+3(a+b)+11\right]=0$

Lưu ý $(a+b)^2+3(a+b)+11>0$ nên ta phải có $a+b=3$, kéo theo $ab=2$.

Giải ta tìm được $\left[\begin{array}{l} (a,b)=(1,2) \\ (a,b)=(2,1) \end{array}\right.$. Xét hai trường hợp:

+) $a=1, b=2\Rightarrow x=-5$

+) $a=2, b=1\Rightarrow x=2$

Vậy $S=\{2;-5\}$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đẳng thức:

$$25y^2+354x+60=36x^2+305y+(5y-6x)^{2022}.$$

2) Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau : mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là số tự nhiên liên tiếp?

Lời giải

1) Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng $(5y-6x-1)(5y+6x-60)=(5y-6x)^{2022}$

Rõ ràng $(5y-6x-1,5y-6x)=1$ nên $\left(5y-6x-1,(5y-6x)^{2022}\right)=1$, từ đó ta phải có $5y-6x-1=\pm 1$

.

Xét hai trường hợp

+) Nếu $5y-6x-1=1$ thì $5y+6x-60\equiv 2^{2022}$. Cộng lại, ta có :

$10y\equiv 2^{2022}+62$. Tuy nhiên $2^{2022}=\left(2^4\right)^{505}.2^2=16^{505}.4$ có tận cùng là 4 nên $2^{2022}+62$ có tận cùng là 8 không chia hết cho 10. Trường hợp này vô nghiệm

+)Nếu $5y-6x-1=-1$ thì $5y+6x-60\equiv 0$. Từ đây tìm được $y=6, x=5$

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm là $(5;6)$

2) Gọi số lần thêm ít nhất là n thì các hộp bi tương ứng là $a, a+1, a+2, ..., a+7$

Mỗi lần thêm tất cả là 9 bi nên ta có :

$a+(a+1)+(a+2)+(a+7)=9n \Leftrightarrow 8a+28=9n$

Suy ra $4(2n+7)$ chia hết cho 9, kéo theo $2a+7$ chia hết cho 9.

Từ đó ta phải có $2a+7\geq 9 \Rightarrow n\geq 4$. Ta chứng minh $n=4$ thỏa mãn

Gọi các hộp tương ứng là $1,2,3,4,5,6,7,8$ và thực hiện thêm bi ở các lần như sau :

- Lần 1: $1,2,0,0,0,0,3,3$
- Lần 2: $0,0,1,0,2,3,0,3$
- Lần 3: $0,0,2,1,3,0,3,0$
- Lần 4: $0,0,0,3,0,3,1,2$

Câu III. Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB<AD)$ nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F (E,F không trùng với A,D) sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời $\widehat{ABE}+\widehat{DCF}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$

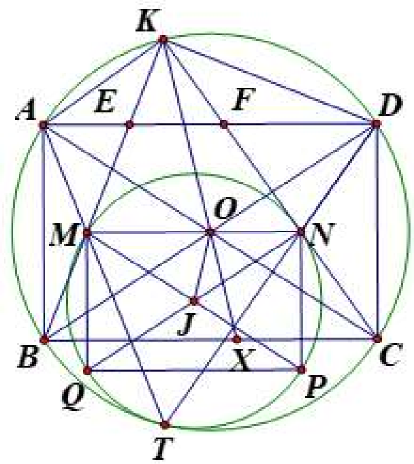
1) Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O)

2) Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE, CF theo thứ tự tại M, N.

Chứng minh rằng $\widehat{DAM}+\widehat{ADN}+\frac{1}{2}\widehat{AOD}=180^\circ$

3) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD, đồng thời MP song song với AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải



1) Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O)

Đặt $BE \cap CF = K$

Gọi H là hình chiếu của K trên AD.

Để ý rằng $KH // AB$ và $KH // CD$ nên ta có :

$\widehat{BKC} = \widehat{BKH} + \widehat{CKH} = \widehat{ABE} + \widehat{DCF} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. Từ đó suy ra $K \in (O)$

2) Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE, CF theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng

$\widehat{DAM} + \widehat{ADN} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 180°$

Trước hết để ý rằng $\widehat{KMO} = \widehat{KBC} = \widehat{KAC} = \widehat{KAO}$ ta tìm được tứ giác $KAMO$ là tứ giác nội tiếp

Chứng minh tương tự, ta cũng có $KDNO$ là tứ giác nội tiếp .Đặt $AM \cap DN = T$

Khi đó ta có $\widehat{TAC} = \widehat{MAO} = \widehat{MKO} = \widehat{BKC} - \widehat{NKO} = \widehat{BDC} - \widehat{NDO} = \widehat{TDC}$

Từ đó suy ra $T \in (O)$. Vì vậy,

$\widehat{DAM} + \widehat{ADN} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 180° - \widehat{ATD} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 180°$

3) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD, đồng thời MP song song với AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O)

Gọi $MP \cap NQ = J$. Để ý rằng $\widehat{JMN} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{JNM}$ nên $JM = JN$.

Như vậy, ta quy về chứng minh đường tròn $(J; JM)$ tiếp xúc với (O). Thật vậy, ta cần chứng minh $JM + OJ = R$ với R là bán kính của (O)

Đặt $KO \cap BC = X$. Khi đó ta có $\frac{OM}{ON} = \frac{XB}{XC}$. Ta thấy

$\Delta JMN \sim \Delta OBC$. Do đó, ta được :

$\frac{KO}{KX} = \frac{OM}{BX} = \frac{MN}{BC} = \frac{JO}{OX} = \frac{JM}{OB} = \frac{JM}{OK} = \frac{JM + JO}{OK + OX} = \frac{JM + JO}{KX}$

Suy ra , $JM + JO = OK = R$. Như vậy $(MNPQ) \equiv (J, JM)$ tiếp xúc trong với (O)

Câu IV. Cho a, b, c là những số thực dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{a+b}{a+c}+\dfrac{6a+2c}{3b+c}+\dfrac{4a+3b+c}{b+c}\ge\dfrac{32a}{2a+b+c}$.

Lời giải

Ta viết lại vế trái dưới dạng

$$P=\frac{2a}{a+b}+\left(\frac{2a}{a+c}+\frac{b+c}{a+c}-1\right)+\left[\frac{2(a+c)}{3b+c}+\frac{4a}{3b+c}\right]+\left(\frac{4a}{b+c}+\frac{3b+c}{2(b+c)}+\frac{3b+c}{2(b+c)}\right)$$

$$=\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}+\frac{4a}{3b+c}+\frac{4a}{b+c}+\frac{3b+c}{2(b+c)}+\left(\frac{b+c}{a+c}+\frac{2(a+c)}{3b+c}+\frac{3b+c}{2(b+c)}\right)-1$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ thì $\dfrac{b+c}{a+c}+\dfrac{2(a+c)}{3b+c}+\dfrac{3b+c}{2(b+c)}\ge 3$ nên :

$P\ge\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2a}{a+c}+\dfrac{4a}{3b+c}+\dfrac{4a}{b+c}+\dfrac{3b+c}{2(b+c)}+2$. Chú ý rằng :

$\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2a}{a+c}\ge\dfrac{8a}{2a+b+c}.\dfrac{4a}{3b+c}+\dfrac{3b+c}{2(b+c)}\ge 2\sqrt{\dfrac{2a}{b+c}}$ và $\dfrac{4a}{b+c}+2\ge 4\sqrt{\dfrac{2a}{b+c}}$ nên :

$$P\ge\frac{8a}{2a+b+c}+6\sqrt{\frac{2a}{b+c}}=\frac{8a}{2a+b+c}+\frac{12a}{\sqrt{2a(b+c)}}\ge\frac{8a}{2a+b+c}+\frac{24a}{2a+b+c}=\frac{32a}{2a+b+c}$$

Điều phải chứng minh

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\right)=\sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+3xy+y^2=6\\3x+2y+1=2\sqrt{2x+y+6}\end{cases}$

Lời giải

1) Từ giả thiết suy ra $ab+bc+ca=abc$. Ta có :

$$\frac{1}{a+bc}=\frac{a^2}{a^2+abc}=\frac{a}{(a+b)(a+c)}$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{b+ca}=\frac{b}{(b+c)(b+a)};\frac{1}{c+ab}=\frac{c}{(c+a)(c+b)}$. Từ đó suy ra

$$VT=\frac{a(b+c)+b(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}(1)$$, Và :

$$VP=\sqrt{\frac{(abc)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}}=\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}(\text{do } a,b,c>0)(2)$$

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

2) Điều kiện : $2x+y+6\geq 0$. Nhân 4 vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$4\left(2x^2+3xy+y^2\right)-24=0$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$$\begin{cases}3x+2y+1\geq 0\\(3x+2y+1)^2-4(2x+y+6)=0\end{cases}$$. Ta viết lại thành hệ mới :

$$\begin{cases}3x+2y+1\geq 0(1)\\4\left(2x^2+3xy+y^2\right)-24=0(2)\\(3x+2y+1)^2-4(2x+y+6)=0(3)\end{cases}$$

Lấy phương trình (3) trừ đi phương trình (2), vế với vế, ta thu được :

$$(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

$\Rightarrow 2x^2+3xy+y^2=6 \Leftrightarrow y^2+3y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-4 (ktm) \end{array}\right.$

Vậy $(x;y)=(1;1)$.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y)(5x+y)^3+xy^3=(5x+y)^3+x^2y^3+xy^4$$

2) Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} c \le b < a \le 3; b^2+2a \le 10; b^2+2a+2c \le 14 \\ (a^2+1)(b^2+1)+4ab \le 2a^3+2b^3+2a+2b \end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=4a^4+b^4+2b^2+4c^2$.

Lời giải

1) Ta biến đổi như sau:

$(x+y)(5x+y)^3+xy^3=(5x+y)^3+x^2y^3+xy^4$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(5x+y)^3=xy^3(x+y-1)$

Vì x,y là hai số nguyên dương nên $x+y>1$. Do đó, ta suy ra $(5x+y)^3=xy^3$

Do đó, ta suy ra x cũng là lập phương của một số nguyên dương.Đặt $x=z^3$, ta có:

$(5z^3+y)^3=(zy)^3 \Leftrightarrow 5z^3+y=zy \Leftrightarrow y(z-1)=5z^3$

Nếu $z=1$ (ktm). Xét $z \ne 1$. Khi đó, ta có $5z^3 \vdots (z-1)$. Vì $5z^3 \equiv 5(\bmod z-1) \Rightarrow 5 \vdots z-1$

Từ đây ta tìm được $z \in \{2;6\}$. Suy ra :

$(z;y) \in \{(2;40);(6;216)\} \Rightarrow (x;y) \in \{(8,40);(216;216)\}$

2) Ta có : $(a^2+1)(b^2+1)+4ab-2a(a^2+1)-2b(b^2+1) \le 0$

$\Leftrightarrow (a^2+1-2b)(b^2+1-2a) \le 0 \Leftrightarrow b^2+1 \le 2a$

Ta có : $P=(2a)^2+(b^2+1)^2+(2c)^2-1$. Do đó :

$P-76=(2a-6)(2a+6)+(b^2-4)(b^2+6)+(2c-4)(2c+4)$

$=(2a-b^2)(2a-6)+(b^2-2c+2)(2a+b^2-10)+(2c+4)(2a+2c+b^2-14) \le 0$

Do đó $P \le 76$. Vậy $\text{Max} P=76 \Leftrightarrow (a,b,c)=(3,2,2)$.

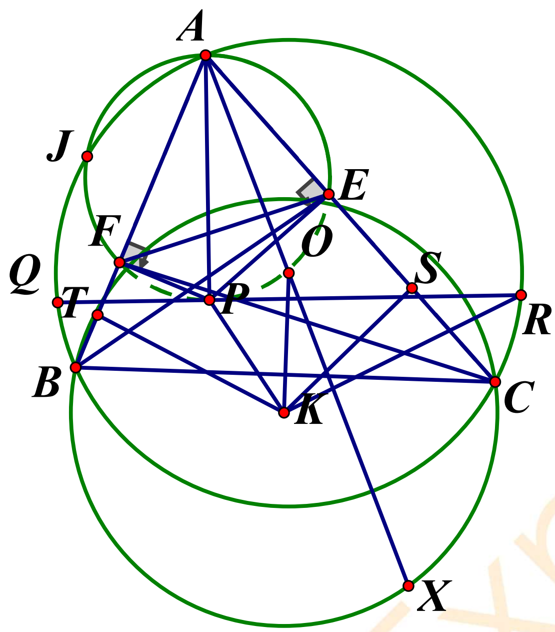
Câu III. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA,CB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K)

1) Chứng minh rằng AP vuông góc với BC

2) Chứng minh rằng $AP=2OK$

3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn tại hai điểm Q,R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔKQR.

Lời giải



1) Chứng minh rằng AP vuông góc với BC

Do tứ giác $BFEC$ nội tiếp dẫn đến $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$

Để ý rằng $\widehat{OAC}=90^\circ-\hat{B}$ dẫn đến $OA\perp EF$

Ta có $\widehat{OAC}=90^\circ-\widehat{AEF}=\widehat{PAF}$ (do AP là đường kính của (AEF))

Do đó dẫn đến $\widehat{PAB}+\hat{B}=90^\circ\Rightarrow AP\perp BC$

2) Chứng minh rằng $AP=2OK$

Gọi (AEF) cắt (O) tại điểm thứ hai là J. Gọi S,T lần lượt là trung điểm của EC và FB, ta có

$\widehat{JFB}=180^\circ-\widehat{JFA}=180^\circ-\widehat{JEA}=\widehat{JEC}$

Đồng thời, $\widehat{JBF}=\widehat{JCE}$ do đó : $\Delta JFB\backsim\Delta JEC$

$\Rightarrow\Delta JTF\backsim\Delta JES(c.g.c)\Rightarrow\angle JTA=\angle JSA$

Do đó J,T,S,A,K cùng thuộc một đường tròn

Dẫn đến J,P,K thẳng hàng và đường thẳng này đi qua X là đối xứng của A qua O

Do đó chú ý rằng $PECX$ là hình thang vuông mà SK là đường trung bình nên dẫn đến K là trung điểm PX hay $AP=2OK$

3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP **cắt đường tròn tại hai điểm** Q,R**. Chứng minh rằng đường tròn tâm** A **bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp** ΔKQR

Gọi G đối xứng với P qua J

Ta có $\widehat{AJP}=90^\circ$ dẫn đến $AG=AP$ hay G thuộc $(A;AP)$

Ta có K là trung điểm của PX do đó

$PX.PJ=2PK.PJ=PK.2PJ=PK.PG=PQ.PR$ (do tứ giác $JRXQ$ nội tiếp (O))

Suy ra $G \in (KQR)$

Câu IV. Cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn A_kA_{k+1} bằng k (đơn vị dài), với $k = 1,2,....,29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1A_2, ..., A_{29}A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu, ta luôn chọn được hai số nguyên dương $1 \le j \le i \le 29$ sao cho hai đoạn A_iA_{i+1} và A_jA_{j+1} được tô cùng màu và $i - j$ là bình phương của số nguyên dương.

Lời giải

Gọi d_i là màu $A_iA_{i+1}; i = 1...,29, d_i \in \{1;2;3\}$

Phản chứng $d_i \ne d_j \forall |i - j|$ là số chính phương

$d_i \ne d_{i+9}, d_i \ne d_{i+16} \ne d_{i+25}; d_{i+9} \ne d_{i+25}; d_{i+16} \ne d_{i+25}$

Mà trong $d_i; d_{i+9}, d_{i+16}; d_{i+25}$ có hai số bằng nhau, nên $d_{i+9} = d_{i+16}, \forall i \ge 1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $d_1 = 1, d_2 = 2$; Có $d_{10} \ne d_1 = 1$.

- Nếu $d_{10} = 3 = d_{i+9} \Rightarrow d_{17} = d_{i+16} = d_{1+9} = d_{10} = 3$

$d_{26} \ne d_{17} = 3; d_{26} \ne d_1 \Rightarrow d_{26} = 2$

$d_{11} \ne d_{10} = 3; d_{11} \ne d_2 = 2 \Rightarrow d_{11} = 1$

$d_{27} \ne d_{26} = 2, d_{27} \ne d_{11} = 1 \Rightarrow d_{27} = 3 \Rightarrow d_{20} = 3$

$d_{26} = 2 \Rightarrow d_{19} = 2, d_{20} = 3 \Rightarrow d_{13} = 3$

Suy ra $d_3 = d_{17}$ (mâu thuẫn)

- Nếu $d_{10} = 2 \Rightarrow d_{24} = d_{17} = d_{10} = 2$

$d_{26} \ne d_{17} = 2, d_{26} \ne d_1 = 1 \Rightarrow d_{26} = 3 = d_{19} = d_{12}$

Suy ra $d_{11} = 1$ do $d_{11} \ne d_{12} = 3; d_{11} \ne d_{10} = 2 \Rightarrow d_{25} = d_{18} = d_{11} = 1$

$d_3 \ne d_{12}, d_3 \ne d_2 \Rightarrow d_3 = 1 \Rightarrow d_{28} \ne d_3 = 1, d_{28} \ne d_{29} = 2 \Rightarrow d_{28} = 3$

$\Rightarrow d_{28} = d_{29} = d_{17} = d_{10} = 3$ nhưng do $d_{10} = 2$, ta có điều mâu thuẫn

Vậy tồn tại i, j sao cho $|i - j|$ là số chính phương và $d_i = d_j$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+5x+2025}+\sqrt{5}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+6y)(3x+2y)=12\\ 2x^3+6y^3+15x^2y+19y^2x+x+6y=12\end{cases}$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\ge -3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x^2+6x+2023}-\sqrt{x^2+5x+2025}\right)+\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x^2+5x+2025}}+\frac{x-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x^2+5x+2025}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=2$ (tm).

(vì $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x^2+5x+2025}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}>0$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

2) $\begin{cases}(x+6y)(3x+2y)=12 & (1)\\ 2x^3+6y^3+15x^2y+19y^2x+x+6y=12 & (2)\end{cases}$

Thế phương trình (1) vào (2) ta có: $2x^3+6y^3+15x^2y+19y^2x+x+6y=(x+6y)(3x+2y)$

Phương trình tương đương với $(x+6y)(2x^2+3xy+y^2)+(x+6y)=(x+6y)(3x+2y)$.

Từ phương trình (1) ta suy ra: $x+6y\ne 0$. Do đó $2x^2+3xy+y^2+1=3x+2y$

Suy ra $(2x+y)(x+y)+1=(x+y)+(2x+y)\Leftrightarrow (x+y-1)(2x+y-1)=0$

Xét các trường hợp:

- Nếu $2x+y=1$ thay vào phương trình (1) ta có: $(6-11x)(2-x)=12$

Giải phương trình trên ta thu được $x=0$ hoặc $x=\dfrac{28}{11}$.

Từ đó ta thu được hai nghiệm $(0,1)$ và $\left(\dfrac{28}{11},\dfrac{-45}{11}\right)$.

- Nếu $x+y=1$ thay vào phương trình (1) ta có: $(1+5y)(3-y)=12$

Giải phương trình trên ta thu được $y=1$ hoặc $y=\dfrac{9}{5}$.

Từ đó ta thu được hai nghiệm (0, 1) và $\left(\frac{-4}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Câu II. 1) Giả sử n là số nguyên sao cho $3n^3 - 1011$ chia hết cho 1008. Chứng minh rằng $n-1$ chia hết cho 48.

2) Với a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right) > 4.$

Lời giải

1) Ta có: $3n^3 - 1011 = 3\left(n^3 - 337\right) = 1008k \left(k \in N^*\right)$ nên $n^3 - 337 = 336k,$ dẫn đến

$$n^3 - 1 = 336(k+1),$$

hay

$$(n-1)\left(n^2+n+1\right) = 48.7(k+1)$$

Do n^2+n+1 là số lẻ nên n^2+n+1 không chia hết cho 16.

Bởi vậy $n-1$ chia hết cho 16. (1)

Thêm nữa, nếu $n \equiv 0; 2 \pmod 3 \Leftrightarrow n^2+n+1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n-1 \vdots 3$

Nếu $n \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow n-1 \vdots 3$

Vậy $n-1 \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM.

2) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) > 4\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right).$$

Khai triển và rút gọn, BĐT này tương đương với: $3a^2b^2c^2 + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) < 4$. $\quad (1)$

Mặt khác, vì $ab + bc + ca = 1,$ ta có:

- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 < (ab + bc + ca)^2 = 1.$
- $a^2b^2c^2 \le \frac{(ab+bc+ca)^3}{27} = \frac{1}{27}.$

Do đó, $VT_{(1)} < \frac{1}{9} + 2 < 4.$ Ta có điều phải chứng minh.

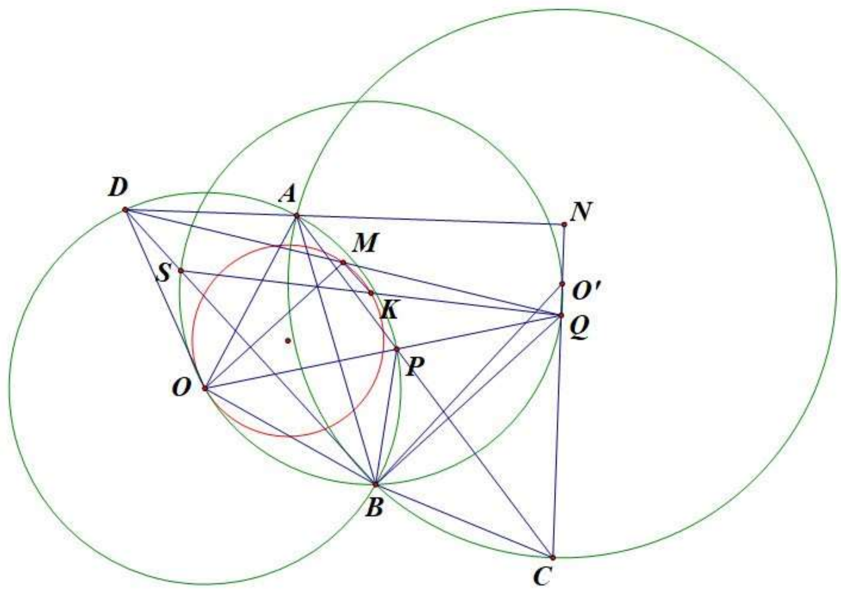
Câu III. Cho hai đường tròn (O) và (O') cố định cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AP cắt (O') tại C khác A.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng $\widehat{QBC} + \widehat{ABP} = 90^\circ$.

3) Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc $O'C$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Lời giải



1) Ta có: $\widehat{POB} = 2\widehat{PAB} = \widehat{BO'C}$ nên hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Từ câu 1) ta thu được $\widehat{OPB} = \widehat{O'CB}$ nên tứ giác $BPQC$ nội tiếp. Suy ra

$\widehat{QBC} = \widehat{QPC} = \widehat{APO} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOP} = 90^\circ - \widehat{ABP}$.

3) CQ cắt AD tại N. M là trung điểm của DQ.

Ta có: $\widehat{BQC} = \widehat{BPC} = \widehat{BAN}$ nên tứ giác $DNQB$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DBQ} = 90^\circ$.

Suy ra $MD = MB = MQ$, ta thu được $OM \perp BD$.

Từ câu 1) ta cũng có $\widehat{BOQ} = \widehat{BO'Q}$ nên tứ giác $BOO'Q$ nội tiếp (K).

Kẻ đường kính QS của (K) thì D, S, B thẳng hàng.

Ta có: $MK \,//\, DS$ nên $\widehat{OMK} = 90^\circ$. Do O, B, O' cố định nên K cố định.

Vậy M chuyển động trên đường tròn đường kính OK cố định.

Câu IV. Giả sử A là tập hợp con của tập hợp gồm 30 số tự nhiên đầu tiên $\{0;1;2;3;...;29\}$ sao cho với k nguyên bất kỳ, $a, b \in A$ bất kỳ (có thể $a = b$) thì $a + b + 30k$ không là tích của hai số nguyên liên tiếp. Chứng minh rằng số phần tử của tập hợp A nhỏ hơn hoặc bằng 10.

Lời giải

Nhận xét: Nếu n nguyên thì $n(n+1) \equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}$.

Do đó, nếu $a \in X = \{0, 1, 3, 6, 10, 13, 15, 16, 18, 21, 25, 28\}$ thì $2a \equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}$.

Do đó, luôn tồn tại k, n nguyên để $2a + 30k = n(n+1)$.

Vậy, tập A không chứa phần tử nào của tập X.

Mặt khác, nếu $(a, b) \in \{(2, 4), (5, 7), (8, 12), (9, 11), (19, 23), (20, 22), (24, 26), (27, 29)\}$ thì

$$a + b \equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}.$$

Khi đó cũng tồn tại k, n nguyên để $a + b + 30k = n(n+1)$.

Như vậy, mỗi nhóm ở trên có tối đa 1 số thuộc A. Từ đây suy ra tập A có không quá 10 số.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh 10 là số phần tử nhiều nhất có thể của tập A. Thật vậy, lấy

$$A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$$

thì với a, b bất kì thuộc A, $a+b \equiv 1 \pmod 3$. Khi đó:
$a+b+30k \not\equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giải phương trình: $2x+1+2\sqrt{4x^2+6x}=4\sqrt{5x-x^2}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=30+\sqrt[3]{x+y+120} \end{cases}$

Lời giải

1) Ta có:

$2x+1+2\sqrt{4x^2+6x}=4\sqrt{5x-x^2}$ $(\text{DK } 0\le x\le 5)$

$\Leftrightarrow x+2\sqrt{x(4x+6)}+4x+6=4x+4\sqrt{x-x^2}+5-x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{4x+6}\right)^2=\left(2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{4x+6}=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x+6}=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow 4x+6=5+2\sqrt{x(5-x)}$

$\Leftrightarrow 4x+1=2\sqrt{x(5-x)}$

$\Leftrightarrow 16x^2+8x+1=4x(5-x)$

$\Leftrightarrow 20x^2-12x+1=0$

$\Leftrightarrow (10x-1)(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{10} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

2) Phương trình thứ hai tương đương với:

$(x+y)^3-3xy(x+y)=30+\sqrt[3]{x+y+120}$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+(x+y)=(x+y+120)+\sqrt[3]{x+y+120}$

+ Nếu $x+y>\sqrt[3]{x+y+120}$ thì $VT>VP$.

+ Nếu $x+y<\sqrt[3]{x+y+120}$ thì $VT<VP$.

Do vậy $x+y=\sqrt[3]{x+y+120}$ hay $(x+y)^3=x+y+120$.

Đặt $t=x+y$ thì $t^3-t-120=0\Leftrightarrow (t-5)(t^2+5t+24)=0$.

Dễ thấy $t^2+5t+24>0$ nên $t=5$ hay $x+y=5$, thay vào phương trình đầu tiên ta có $xy=6$. Từ đây ta tìm được $(x,y)=(2,3);(3,2)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn:

$$4^x + (1+3^y)(1+7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

2) Với x, y, z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^{14} - x^6 + 3}{x^2y^2 + zx + zy} + \frac{y^{14} - y^6 + 3}{y^2z^2 + xy + xz} + \frac{z^{14} - z^6 + 3}{z^2x^2 + yz + yx}$$

Lời giải

1) Từ giả thiết suy ra $(2^x - 3^y - 1)(2^x - 7^y - 1) = 0$

Từ đó ta có: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 3^y + 1 \\ 2^x = 7^y + 1 \end{array}\right.$

Ta xét 2 trường hợp:

+) Trường hợp 1: $2^x = 3^y + 1$. Suy ra $2^x \equiv 1 \pmod 3$ nên x chẵn.

Đặt $x = 2a$ thì $3^y = (2^a - 1)(2^a + 1)$.

Dẫn đến $2^a - 1 = 3^m, 2^a + 1 = 3^n$ với $m < n \in \mathbb{N}$.

Từ đó $2 = 3^n - 3^m = 3^m(3^{n-m} - 1)$ nên $m = 0, n = 1$. Do đó $a = 1$ nên $x = 2; y = 1$.

+) Trường hợp 2: $2^x = 7^y + 1$

Khi đó $2^x \equiv 1 \pmod 7$. Lần lượt xét $x = 3k; 3k+1; 3k+2$, ta thấy:

$\begin{cases} 2^{3k} \equiv 1 \pmod 7 \\ 2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7 \\ 2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$. Do đó, $x = 3k\ (k \in \mathbb{N})$.

Khi đó, ta có: $7^y = 2^{3k} - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$ với $t = 2^k \in \mathbb{N}^*$.

Vì $t - 1 < t^2 + t + 1$ và cả 2 đều phải là lũy thừa của 7, ta suy ra:

$t^2 + t + 1 \,\vdots\, t - 1$

Dẫn đến $3 \,\vdots\, t - 1$ nên $t \in \{2; 4\}$. Từ đó, $k \in \{1; 2\}$.

Thay vào ta thấy chỉ có $k = 1$ thì $x = 3, y = 1$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $(x, y) = (2, 1), (3, 1)$.

2) Ta có: $(x^6 - 1)(x^8 - 1) \geq 0$ nên $x^{14} + 1 \geq x^8 + x^6 \Rightarrow x^{14} - x^6 + 3 \geq x^8 + 2$.

Tương tự với y, z thì khi đó:

$$M \geq \frac{x^8 + 2}{x^2y^2 + zx + zy} + \frac{y^8 + 2}{y^2z^2 + xy + xz} + \frac{z^8 + 2}{z^2x^2 + yz + yx}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM 3 số ta có:

$$M \geq 3\sqrt[3]{\frac{(x^8 + 2)(y^8 + 2)(z^8 + 2)}{(x^2y^2 + zx + zy)(y^2z^2 + xy + xz)(z^2x^2 + yz + yx)}}$$

Ta đi chứng minh $M \geq 3$ hay

$$(x^8 + 2)(y^8 + 2)(z^8 + 2) \geq (x^2y^2 + zx + zy)(y^2z^2 + xy + xz)(z^2x^2 + yz + yx)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwart ta có:

$\left(x^8+1+1\right)\left(1+y^8+1\right)\ge\left(x^4+y^4+1\right)^2$

Tương tự nhân theo vế ta suy ra được:

$\left(x^8+2\right)\left(y^8+2\right)\left(z^8+2\right)\ge\left(x^4+y^4+1\right)\left(y^4+z^4+1\right)\left(z^4+x^4+1\right)$

Tiếp theo lại có:

$\left(x^4+y^4+1\right)\left(1+y^4+z^4\right)\ge\left(x^2+y^4+z^2\right)^2$

Tương tự nhân theo vế ta suy ra được:

$\left(x^4+y^4+1\right)\left(y^4+z^4+1\right)\left(z^4+x^4+1\right)\ge\left(x^4+y^2+z^2\right)\left(y^4+z^2+x^2\right)\left(z^4+x^2+y^2\right)$

Lại có:

$\left(x^4+y^2+z^2\right)\left(y^4+z^2+x^2\right)\ge\left(x^2y^2+yz+zx\right)^2$

Tương tự nhân theo vế ta suy ra được:

$\left(x^4+y^2+z^2\right)\left(y^4+z^2+x^2\right)\left(z^4+x^2+y^2\right)\ge\left(x^2y^2+zx+zy\right)\left(y^2z^2+xy+xz\right)\left(z^2x^2+yz+yx\right)$

Kết hợp các BĐT trên ta suy ra điều cần chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 3, khi $x=y=z=1$.

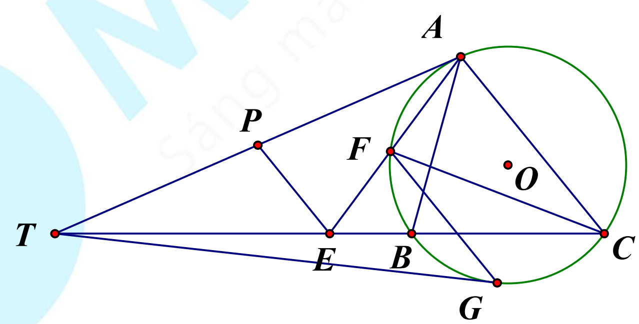
Câu III. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$ nội tiếp trong đường tròn $\left(O\right)$ có tiếp tuyến tại A của $\left(O\right)$ cắt BC ở T sao cho $TB>BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với $\left(O\right)$ là F. Lấy G thuộc $\left(O\right)$ sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG}=\widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm của BC. K đối xứng với A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho $NS\perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR\cdot AH=AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ\perp AS$ và $SQ\perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN.

Lời giải



1) Vì AT là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ nên ta được $TA=TB\cdot TC$.

Như vậy, ta được $TP\cdot TA=\frac{1}{2}TA^2=\frac{1}{2}TB\cdot TC=TB\cdot TE$.

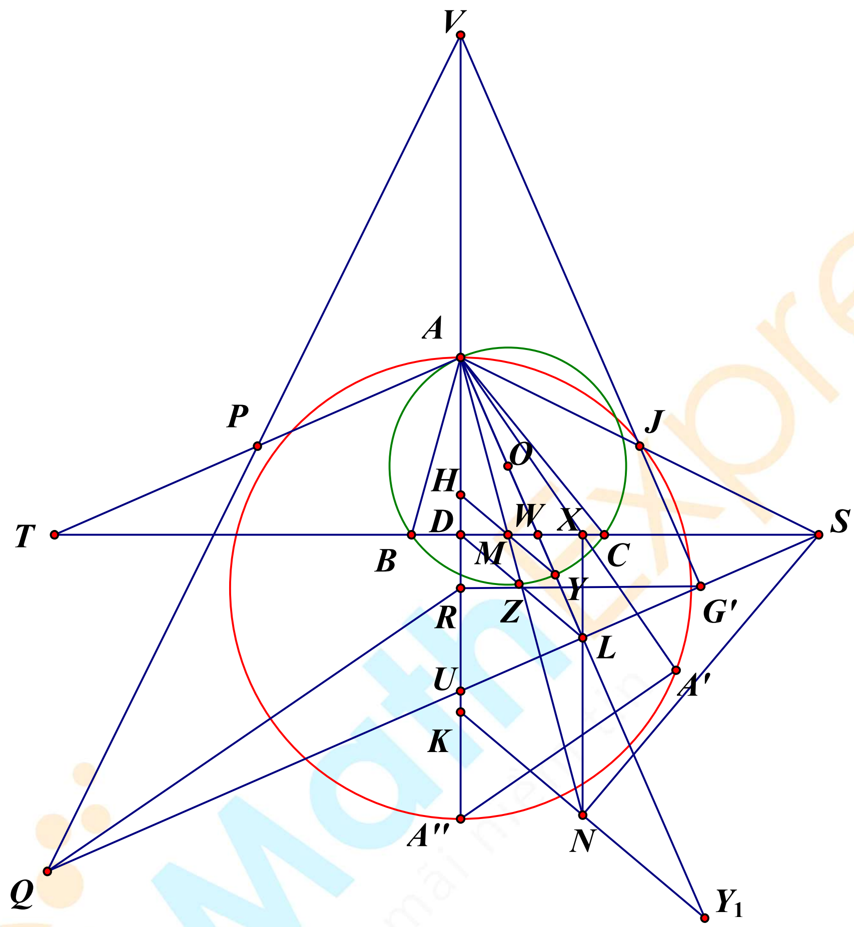
Do đó, tứ giác $APEB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Vì EP là đường trung bình của ΔTAC, $AFGC$ là hình thang cân và AT là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ nên ta thu được $\widehat{AEP}=\widehat{EAC}=\widehat{FAC}=\widehat{GCA}=\widehat{TAG}$ và $\widehat{GAC}=\widehat{FCA}=\widehat{TAF}=\widehat{PAE}$. Như vậy, ta được

$\Delta AEP \backsim \Delta ACG\,(g.g)$ và dẫn đến $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AP}{AG}$. Lại chú ý rằng $AT=2AP$ và $AC=2EP$, ta thu được $\dfrac{AE}{EP}=\dfrac{2AE}{AC}=\dfrac{2AP}{AG}=\dfrac{AT}{AG}$.

Kết hợp với $\widehat{AEP}=\widehat{TAG}$ ta thu được $\Delta AEP \backsim \Delta TAG\,(c.g.c)$.

Do đó, $\widehat{ATG}=\widehat{TAF}$.



3) Gọi AY là đường kính của (O), L và Y_1 là giao của AY với QS và KN. Theo tính chất quen thuộc ta có M là trung điểm của HY nên theo bổ đề hình thang ta được N là trung điểm của KY_1

Vì $SN \perp KY_1$ và SD là đường trung trực của AK nên S là tâm ngoại tiếp của tam giác AKY_1.

Vì $QS \perp AO$ nên $AY_1 \perp SL$ là S là tâm (AKY_1) nên L là trung điểm AY_1. Theo tính chất đường trung bình ta được $DN\,//\,AO$ và $NL\,//\,AD$ suy ra tứ giác $ADNL$ là hình bình hành.

Gọi Z là giao điểm của DL và AN thì ta được Z là trung điểm của AN và DL.

Gọi $A"$ đối xứng của A qua R, X là giao điểm của NL với BC, A' là giao của AX với (R) thì $XA' \perp A'A"$ nên A' thuộc đường tròn (DN).

Áp dụng định lý Thales ta được: $\dfrac{\text{AD}}{\text{AA"}}=\dfrac{\text{AD}}{2AR}=\dfrac{AH}{2AD}=\dfrac{AM}{2AZ}=\dfrac{AM}{AN}$

Theo định lý Thales đảo ta suy ra $NA"//DM$ nên $NA" \perp DA"$ suy ra $DXNA$ là hình chữ nhật và $D, X, A", N$ thuộc (DN).

Gọi U, V lần lượt là giao điểm của QS và QP với AH; W là giao của AO và BC.

Ta có: $\Delta QUV \backsim \Delta AWS(g.g)$ (do 2 tam giác này có các cặp cạnh tương ứng vuông góc).
Từ V kẻ $VG' \perp QS$ vì $SQ//\mathrm{AT}$ nên $VG' \perp AT$.
Vì đường qua T vuông góc với AS và đường qua S vuông góc với AT đồng quy tại trực tâm tam giác ATS trên AH nên VG' phải đi qua trung điểm J của AS.
Mặt khác $JG'//\mathrm{AL}$ (cùng vuông góc với QS nên G' là trung điểm LS)
Theo tính chất đường trung bình của tam giác $\Delta\mathrm{ANA}"$, $\Delta\mathrm{DLS}$ ta được $G'Z//DS$, $RZ//NA"$ mà $NA"//DS$ nên G', Z, R thẳng hàng và $G'R \perp VU$.
Vì $\Delta VG'U \backsim \Delta SLW$ $(g.g)$ ($\widehat{VG'U} = \widehat{WLS} = 90^\circ$ và $\widehat{VUG'} = \widehat{LWS}$) vì LX và $G'R$ là hai đường cao tương ứng của hai tam giác này nên từ tính tương ứng của đồng dạng ta được $\frac{VR}{RU} = \frac{WX}{XS}$.
Từ đây kết hợp với $\Delta QUV \backsim \Delta AWS$ $(g.g)$ ta được $\Delta QUR \backsim \Delta AWX$ $(c.g.c)$ suy ra QR vuông góc với AX.
Vì $QR \perp AA'$ mà R thuộc đường trung trực của AA' nên A và A' đối xứng nhau QR.
Vậy điểm đối xứng của A qua QR là A' thuộc (DN).

Câu IV. Viết một trăm số nguyên dương đầu tiên 1, 2, 3,..., 100 vào một bảng ô vuông kích thước 10×10 một cách tùy ý sao cho mỗi ô được viết đúng số. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (2 ô có cạnh chung) mà hai số viết ở hai ô này có hiệu lớn hơn hoặc bằng 10.

Lời giải

Giả sử có cách điền số sao cho hai ô kề nhau bất kì đều có hiệu nhỏ hơn 10. Ta lần lượt điền các số theo thứ tự 1, 2, 3, …, 100 vào bảng (bước thứ k thì điền số k) thì phải có một thời điểm đầu tiên mà 10 hàng/cột đều được điền số.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử 10 hàng đều được điền số ở thời điểm đầu tiên là bước thứ k.
Vì ở thời điểm này chưa hoàn thành điền số trên cả 10 cột, nên phải có một cột chưa điền số nào.
Do đó, trên mỗi hàng đều phải có 1 cặp 2 ô kề nhau mà một ô đã được điền số, một ô chưa được điền số. Đặt các cặp số đã điền và chưa điền ở mỗi hàng là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{10}, b_{10})$.
Kí hiệu $A = \max a_i,\ i = 1, 2, \ldots, 10$. Ta nhận xét:

$$b_i < a_i + 10 \le A + 10 \le k + 10,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 10$$

Rõ ràng khi đó 10 số $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ chỉ có thể nhận tối đa 9 giá trị là $k+1, k+2, \ldots, k+9$. Điều này mâu thuẫn.
Ta có điều cần chứng minh.

-------------------------------- HẾT --------------------------------