MỤC LỤC

A. PHẦN ĐỀ THI

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2008 – 2009
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{a+\sqrt{ab}}\right)-\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}.$

Với $a>0; b>0$ và $a\neq b$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm a, b sao cho $b=(a+1)^2$ và $P=-1$.

Câu II. Cho phương trình $x^2+\left(m^2+1\right)x+m-2=0$ với m là tham số.

1) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

2) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình.

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2}.$

Câu III. Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB}=90°$. M là điểm bất kỳ trên AB. Gọi O, O_1, O_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta MAC, \Delta MBC$.

1) Chứng minh: 4 điểm O_1, M, O_2, C cùng thuộc đường tròn (C).

2) Chứng minh: O cũng thuộc (C).

3) Tìm vị trí M để bán kính (C) nhỏ nhất.

Câu IV. Cho các số thực a, b, c, d thoả mãn đồng thời các điều kiện

(i): $ac-a-c=b^2-2b$.

(ii): $bd-b-d=c^2-2c$.

(iii): b, c khác 1.

Chứng minh đẳng thức: $ad+b+c=bc+a+d$.

Câu V. Cho các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau và thoả mãn $(z+x)(z+y)=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(z+x)^2}+\dfrac{1}{(z+y)^2}\geq 4.$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2008 – 2009
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $b \neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$, $a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$.

Chứng minh đẳng thức $\dfrac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

Câu II. 1) Với mỗi số dương a thoả mãn $a^3=6(a+1)$.

Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^2+ax+a^2-6=0$.

2) Tìm tất cả các giá trị của a và b sao cho $2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=(a+1)(b+1)(ab+1)$.

Câu III. Ba số nguyên a, b, c đôi một khác nhau và thoả mãn đồng thời ba điều kiện

(i): a là ước của $b+c+bc$.

(ii): b là ước của $a+c+ac$.

(iii): c là ước của $a+b+ab$.

1) Hãy chỉ ra bộ số $(a;b;c)$ thoả mãn các điều kiện trên.

2) Chứng minh rằng a, b, c không đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV. Cho tam giác ABC. Một đường tròn (O) đi qua các điểm A, B và cắt các cạnh CA, CB tại các điểm L, N tương ứng $(L \neq A, C;\ N \neq B, C)$. Gọi M là trung điểm của cung LN của đường tròn (O) và M nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng AM cắt các đường thẳng BL và BN tại các điểm D và F tương ứng, đường thẳng BM cắt các đường thẳng AN và AL tại các điểm E và G tương ứng. Gọi P là giao điểm của AN và BL.

1) Chứng minh $DE \parallel GF$.

2) Nếu tứ giác $DEFG$ là hình bình hành, hãy chứng minh:

a) $\Delta ALP \backsim \Delta ANC$.   b) $DF \perp EG$.

Câu V. Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}\,\text{cm}$.

---------- HẾT ----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $A=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$ và $B=a^4+20a^3+102a^2+40a+200$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm a để $A+B=0$.

Câu II. Hai công nhân cùng làm một công việc 18 giờ xong. Nếu người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ 2 làm 12 giờ thì được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Câu III. Cho Parabol $y=x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=mx+1$.

1) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A; B$ với mọi m.

2) Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Tìm giá trị lớn nhất của $M=(y_1-1)(y_2-1)$.

Câu IV. Cho tam giác ABC với $AB=5; AC=3\sqrt{5}; BC=10$. Phân giác BK của góc ABC cắt đường cao AH; trung tuyến AM của tam giác ABC tại O và T $(K\in AC; H, M\in BC)$.

1) Tính AH.

2) Tính diện tích tam giác AOT.

Câu V. Các số thực x, y thoả mãn đẳng thức $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$.

Chứng minh $x+y=0$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Các số thực x, y thoả mãn $xy \neq \sqrt{2}$ và $xy \neq -\sqrt{2}$.
Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y.

$$P=\left(\frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt[3]{4}}+\frac{xy-\sqrt[3]{2}}{2xy+2\sqrt[3]{2}}\right).\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}.$$

Câu II. 1) Cho phương trình $x^2+bx+c=0$, trong đó các tham số b và c thoả mãn đẳng thức $b+c=4$. Tìm các giá trị của b và c để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1=x_2^2+x_2$.

2) Giả sử $(x;y;z)$ là một nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{12}-\frac{z}{4}=1\\ \frac{x}{10}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1\end{cases}$.

Hãy tính giá trị của $A=x+y+z$.

Câu III. Ba số nguyên dương a, p, q thỏa mãn các điều kiện:
(i): $ap+1$ chia hết cho q.
(ii): $aq+1$ chia hết cho p.
Chứng minh $a>\frac{pq}{2(p+q)}$.

Câu IV. Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (C không trùng với A, B và trung điểm cung AB). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Đường tròn (O_1) đường kính AH cắt CA tại E, đường tròn (O_2) đường kính BH cắt CB tại F.
1) Chứng minh tứ giác AEFB là tứ giác nội tiếp.
2) Gọi (O_3) là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$, D là điểm đối xứng của C qua O. Chứng minh ba điểm H, O_3, D thẳng hàng.
3) Gọi S là giao của các đường thẳng EF và AB, K là giao điểm thứ hai của SC với đường tròn (O). Chứng minh KE vuông góc với KF.

Câu V. Một hình vuông có độ dài bằng 1 được chia thành 100 hình chữ nhật có chu vi bằng nhau (hai hình chữ nhật bất kỳ không có điểm chung). Kí hiệu P là chu vi của mỗi hình chữ nhật trong 100 hình chữ nhật này.
1) Hãy chỉ ra một cách để chia $P=2,02$.
2) Hãy tìm giá trị lớn nhất của P.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $A=\left[\dfrac{3}{2}-\left(x^4-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right).\dfrac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]:\dfrac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Câu II. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=(2m^2+1)x+2m-1$; $(d_2): y=m^2x+m-2$, với m là tham số.

1) Tìm tọa độ giao điểm *I* của (d_2) và (d_2) theo *m*.

2) Khi *m* thay đổi, chứng minh rằng điểm *I* luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu III. Giả sử bộ ba số thực (x; y; z) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x+1=y+z \\ xy+z^2-7z+10=0 \end{cases} \quad (I)$

1) Chứng minh $x^2+y^2=-z^2+12z-19$.

2) Tìm tất cả các bộ (x; y; z) thỏa mãn hệ (I) sao cho $x^2+y^2=17$.

Câu IV. Cho hình vuông *ABCD* có độ dài cạnh bằng a. Trong hình vuông đó lấy điểm *K* sao cho tam giác *ABK* đều. Các đường thẳng *BK* và *AD* cắt nhau tại *P*.

1) Tính độ dài đoạn thẳng KC theo a.

2) Trên đoạn thẳng *AD* lấy điểm *I* sao cho $DI=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, các đường thẳng *CI* và *BP* cắt nhau tại H. Chứng minh tứ giác *CHDP* nội tiếp một đường tròn.

3) Gọi *M* và *L* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *CP* và *KD*. Chứng minh $LM=\dfrac{a}{2}$.

Câu V. Giải phương trình $(x^2-5x+1)(x^2-4)=6(x-1)^2$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$.
Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

2) Chứng minh rằng $\sqrt{2009^2+2009^2\times 2010^2+2010^2}$ là một số nguyên dương.

Câu II. Giả sử bốn số thực a, b, c, d đội một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

(i): Phương trình $x^2-2cx-5d=0$ có hai nghiệm a và b.

(ii): Phương trình có hai nghiệm c và d.

Chứng minh rằng

1) $a-c=c-b=d-a$.

2) $a+b+c+d=30$.

Câu III. Giả sử m và n là những số nguyên dương với $n>1$. Đặt $S=m^2n^2-4m+4n$.
Chứng minh rằng:

1) Nếu $m>n$ thì $\left(mn^2-2\right)^2<n^2S<m^2n^4$.

2) Nếu S là số chính phương thì $m=n$.

Câu IV. Cho tam giác ABC với $AB>AC$, $AB>BC$. Trên cạnh AB lấy các điểm M và N sao cho $BC=BM$ và $AC=AN$.

1) Chứng minh điểm N nằm trong đoạn thẳng BM.

2) Qua M và N kẻ MP song song với BC và AQ song song với CA $\left(P\in CA, Q\in CB\right)$.

Chứng minh rằng $CP=CQ$.

3) Cho $\widehat{ACB}=90^\circ$, $\widehat{CAB}=30^\circ$ và $AB=a$. Hãy tính diện tích của tam giác MCN theo a.

Câu V. Trên một bảng đen ta viết ba số $\sqrt{2}$; 2; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xóa hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a là b, rồi viết vào hai vị trí vừa xóa hai số mới là $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể có đồng thời ba số $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-y}{2y-x}+\dfrac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right):\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$ với $x>0,\ y>0,\ x\neq 2y,$ $y\neq 2-2x^2.$

1) Rút gọn biểu thức $A.$

2) Cho $y=1,$ hãy tìm x sao cho $A=\dfrac{2}{5}.$

Câu II. Một nhóm công dân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công dân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Câu III. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-m^2+3,$ m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2.$ Với giá trị nào của m thì $x_1,\ x_2$ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\dfrac{5}{2}}.$

Câu IV. Cho đường tròn (O) đường kính $AB=10.$ Dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB tại điểm E sao cho $AE=1.$ Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại $K,$ AK và CE cắt nhau tại $M.$

1) Chứng minh $\Delta AEC \backsim \Delta OBK.$ Tính $BK.$

2) Tính diện tích tam giác $CKM.$

Câu V. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=120^\circ$. Các điểm M và N chạy trên các cạnh BC và CD tương ứng sao cho $\widehat{MAN}=30^\circ$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN thuộc một đường thẳng cố định.

Câu VI. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4.$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

1) Chứng minh rằng $4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$.

2) Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+\sqrt{a^4+a+1}$.

Câu II. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$.

2) Cho hai số hữu tỉ a, b thỏa mãn đẳng thức $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$.

Chứng minh rằng $1-ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu III. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p=a^2+b^2+c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p.

Câu IV. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), BE và CF là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S, các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M.

1) Chứng minh rằng $\frac{AB}{AE}=\frac{BS}{ME}$.

2) Chứng minh rằng $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$.

3) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh rằng $NP\perp BC$.

Câu V. Trong hộp có chứa 2011 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu), trong đó có 655 viên bi màu đỏ, 655 viên bi màu xanh, 656 viên bi màu tím và 45 viên bi còn lại là các viên biên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 178 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra, luôn có ít nhất 45 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 177 viên bi bất kì thì kết luận của bài toán còn đúng không?

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$ với $a>b>0$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Biết $a-b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu II. Trên quãng đường AB dài 210km, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành đi từ A về B và một ô tô khởi hành đi từ B về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nửa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Câu III. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-m-2$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 ; x_2

b) Tìm m để $|x_1-x_2|=\sqrt{20}$.

Câu IV. Cho tam giác ABC đường tròn (ω) có tâm O tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến (d) của đường tròn (ω) tại E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

1) Chứng minh $\widehat{MON}=90^\circ-\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ.PL=EM.EN$.

Câu V. Cho các số thực dương x, y thoả mãn điều kiện $x+y=(x-y)\sqrt{xy}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

---------- HẾT ----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x-1}}+2x^2+4x-4=0.$

Câu II. 1) Cho các số a, b, c đôi một phân biệt thỏa mãn: $a^2\left(b+c\right)=b^2\left(a+c\right)=2012.$

Tính giá trị của biểu thức: $M=c^2\left(a+b\right).$

2) Cho 5 số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số dương trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

Câu III. Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ với $n \geq 3$. Kí hiệu $\max\{x_1, x_2, ..., x_n$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$.

Chứng minh rằng $\max\{x_1, x_2, ..., x_n \geq \dfrac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}+\dfrac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+.....+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|}{2n}$.

Câu IV. Trong một lớp học có 36 bàn học cá nhân, được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ 1 đến 9). Sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau một học kì cô giáo chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Đối với mỗi học sinh của lớp, giả sử trước khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng thứ m, cột thứ n và sau khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng a_m, cột thứ a_n, ta gắn cho bạn đó số nguyên $\left(a_m+a_n\right)-\left(m+n\right)$. Chứng minh tổng của 35 số nguyên gắn với 35 bạn học sinh không vượt quá 11.

Câu V. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O), M khác C và D. MA cắt DB, DC theo thứ tự tại X, Z; MB cắt CA, CD theo thứ tự tại Y, T; CX cắt DY tại K.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{MXT}=\widehat{TXC}, \widehat{MYZ}=\widehat{ZYD}$ và $\widehat{CKD}=135^\circ$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{KX}{MX}+\dfrac{KY}{MY}+\dfrac{ZT}{CD}=1.$

c) Gọi I là giao điểm của MK và CD. Chứng minh rằng: XT, YZ, OI cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Cho biểu thức: $Q=\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$ với $a, b>0, a\neq b$.

Chứng minh giá trị của Q không phụ thuộc vào a, b.

2) Các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$.

Chứng minh đẳng thức: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

Câu II. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-mx+\dfrac{1}{2m^2}$ (tham số $m\neq 0$).

1) Chứng minh rằng với $m\neq 0$, (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là 2 giao điểm đó, tìm giá trị nhỏ nhấ của $M=y_1^2+y_2^2$.

Câu III. Giả sử a, b, c là các số thực, $a\neq b$ sao cho 2 phương trình $x^2+ax+1=0$, $x^2+bx+c=0$ có nghiệm chung và 2 phương trình $x^2+x+a=0$, $x^2+cx+b=0$ có nghiệm chung. Tính $a+b+c$.

Câu IV. Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao $AA_1=BB_1=CC_1$ cắt nhau ở H, AC_1 cắt AC tại D và X là giao điểm thứ 2 của BD và (O).

1. Chứng minh $DX.DB=DC_1.DA_1$.

2. Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh $DH\perp BM$.

Câu V. Các số thực x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases}\sqrt{x+2011}+\sqrt{y+2012}+\sqrt{z+2013}=\sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{x+2013}\\ \sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{z+2013}=\sqrt{z+2011}+\sqrt{x+2012}+\sqrt{y+2013}\end{cases}.$$

Chứng minh rằng $x=y=z$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức sau:

(i): $(a+b)(b+c)(c+a)=abc.$

(ii): $\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)=a^3b^3c^3.$

Chứng minh rằng $abc=0$.

2) Các số thực dương a, b thỏa mãn $ab>2013a+2014b.$

Chứng minh bất đẳng thức $a+b>\left(\sqrt{2013}+\sqrt{2014}\right)^2$.

Câu II. Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}x^3-2y^3=x+4y\\6x^2-19xy+15y^2=1\end{cases}$.

Câu III. Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên $\left(S_1=2,\ S_2=2+3,\ S_3=2+3+5,...\right)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1, S_2, S_3, ...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương.

Câu IV. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), BD là đường phân giác của góc ABC. Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Đường tròn (O_1) đường kính DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với BF qua đường thẳng BD đi qua trung điểm cạnh AC.

2) Biết tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{BAC}=60^\circ$ và bán kính của đường tròn (O) bằng R. Hãy tính bán kính của đường tròn (O_1) bằng R.

Câu V. Độ dài ba cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên tố. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Câu VI. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các số nguyên dương lớn hơn bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_{11}=407$. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho tổng các số dư của các phép chia n cho 22 số $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ bằng 2012.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho các số thực dương $a, b; a \neq b$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0.$

Câu II. Quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường, xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không đổi .Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Câu III. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3}$ (m là tham số).

1) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi $x_1; x_2$ là là hoành độ các giao điểm (d) và (P), đặt $f(x) = x^3+(m+1)x^2-x$.

Chứng minh rằng: $f(x_1)-f(x_2)=\frac{-1}{2}(x_1-x_2)^3$.

Câu IV. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K, M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE $(K \neq B; K \neq E)$. Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

1) Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh $KP \perp PM$.

3) Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x.

Câu V. Giải phương trình: $\dfrac{x(x^2-56)}{4-7x}-\dfrac{21x+22}{x^3+2}=4.$

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Câu II. Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^3}=3$.

Câu III. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n\ge 6$ thì số $a_n=1+\frac{2.6.10...(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$ là một số chính phương.

Câu IV. Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$.

Câu V. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho $MN // AP$. Chứng minh rằng

1) Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\widehat{NOP}=45^\circ$.
2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.
3) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Câu VI. Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;\ldots;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x\in A, y\in A, x>y,$ thì $\frac{y^2}{x-y}\in A$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}$ với $a>0,\ b>0,\ a\neq b$.

1) Chứng minh $P=\dfrac{1}{ab}$.

2) Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a+b+\sqrt{ab}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu II. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-my=2-4m \\ mx+y=3m+1 \end{cases}$ với m là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

2) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m. Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của hệ. Chứng minh đẳng thức $x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$.

Câu III. Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a(a-x)^2+b(x-b)^2=0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh $|a|=|b|$.

Câu IV. Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{ABC};\ \widehat{ACB}$ nhọn và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1) Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.

2) Gọi K là giao điểm thứ hai (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

3) Chứng minh $AK\perp B_1C_1$.

Câu V. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Cho $a \geq 0, a \neq 1$.

Rút gọn biểu thức $S = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\dfrac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}-1\right]$.

2) Cho x, y thỏa mãn $0<x<1, 0<y<1$ và $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}=1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}$.

Câu II. Một xe tải có chiều rộng $2{,}4\text{m}$ và chiều cao $2{,}5\text{m}$ muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dầy của cổng)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi parabol $(P): y = ax^2$ với $a<0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a=-1$.

2) Hỏi xe tải có thể qua cổng được không? Tại sao?

Câu III. Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Câu IV. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$. M là trung điểm của cạnh BC. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau tại S. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

1) $MX \perp BF$.

2) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

3) $\dfrac{EF}{FY}=\dfrac{BC}{CD}$.

Câu V. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác ABC là một số nguyên.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$ với $0<a<1$.

Chứng minh rằng $P=-1$.

Câu II. Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx-1$ với m là tham số.

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=1$.

2) Chứng minh với mỗi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $\left|y_1^2-y_1^2\right|=3\sqrt{5}$.

Câu III. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120km. Vận tốc trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\dfrac{1}{4}$ quãng đường AB sau bằng $\dfrac{1}{2}$ vận tốc trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Câu IV. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

1) Chứng minh rằng $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=AB$.

3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh rằng tứ giác $CDFE$ là hình thang.

Câu V. Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh: $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\ge 7$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n.

$$P=\left[\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right]\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}.$$

Câu II. 1) Tìm các số nguyên dương $x,\ y$ thỏa mãn $x^8-y^8=95\left(x^2+y^2\right)$.

2) Tìm các số thực $x,\ y$ thỏa mãn $\dfrac{x^2-4}{x}+\dfrac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)$.

Câu III. Cho S là tập các số nguyên dương n có dạng $n=x^2+3y^2$, trong đó $x,\ y$ là các số nguyên. Chứng minh rằng:

1) Nếu $a, b\in S$ thì $ab\in S$.

2) Nếu $N\in S$ và N là số chẵn thì N chia hết cho 4 và $\dfrac{N}{4}\in S$.

Câu IV. Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$. Kẻ đường cao AH và đường tròn (O) đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại D và E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S.

1) Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh rằng $SB.SC=SH^2$.

3) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N. Đường thẳng DE cắt HM và HN tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng BP, CQ, AH đồng quy.

Câu V. Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác cân.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right)$ với $a, b>0, a\neq b$ và $a+b\neq a^2$.

1) Chứng minh rằng $P=a-b$.

2) Tìm các số a và b biết $P=1$ và $a^3-b^3=7$.

Câu II. Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$.

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}$.

Câu III. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-2ax-4a$ (với a là tham số).

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $a=-\dfrac{1}{2}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=3$.

Câu IV. Anh nam đi xe đạp từ A đến C. Trên quãng đường AB ban đầu (B nằm giữa A và C). Anh Nam đi với vận tốc không đổi a(km/h) và thời gian đi từ A đến B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm t (tính bằng giờ) kể từ B là $v=-8t+a\ (km/h)$. Quãng đường đi được từ B đến thời điểm t đó là $S=-4t^2+at$. Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16km.

Câu V. Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm P. Gọi D, E tương ứng là chân đường các đường vuông góc kẻ từ P xuống các đường thẳng AB và AC và M là trung điểm cạnh BC.

1) Chứng minh rằng $\widehat{MEP}=\widehat{MDP}$.

2) Giả sử B, C cố định và A chạy trên (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

3) Khi tam giác ABC đều. Hãy tính diện tích tam giác ADE theo R.

Câu VI. Các số thực không âm $x_1; x_2; ...; x_9$ thỏa mãn hệ điều kiện $\begin{cases}x_1+x_2+...+x_9=10\\ x_1+2x_2+...+9x_9=18\end{cases}$.

Chứng minh rằng $1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9\geq 270$.

----------------------------- HẾT -----------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng trong 4 số $a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; $b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; $c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; $d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu II. Giải phương trình $\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x^2+x\right)^2}=2017.$

Câu III. 1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2=b^3$; $c^3=d^4$; $a=d+98$.

2) Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số $x-\sqrt{2}$; $x^2+2\sqrt{2}$; $x-\frac{1}{x}$; $x+\frac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

Câu IV. Cho đường tròn (O) bán kính R và một điểm M nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, C khác B). Gọi I; K là trung điểm MA, MC. Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

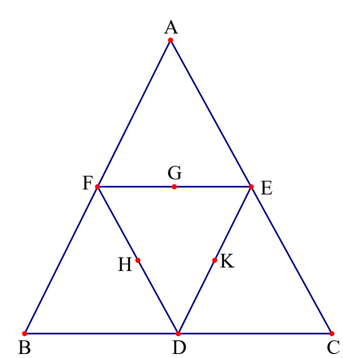
1) Chứng minh $KO^2-KM^2=R^2$.

2) Chứng minh tứ giác $BCDM$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm KE, đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Câu V.

Xét hình bên: Ta viết các số 1, 2, 3, 4, ..., 9 vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ bên sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng ba số trên một cạnh của tam giác bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm $(A; B; C; D; E; F; G; H; K)$ của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?



------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**

Thời gian làm bài: **150 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}}.\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}$ với $x>1$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm x để $P=x-1$.

Câu II. Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2015, nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của thị trường tiêu thụ nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2016 và 2017 đều giảm. Cụ thể: số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016 giảm x% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015, số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 cũng giảm x% so với số lượng sản xuất được năm 2016. Biết rằng số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015. Tìm x.

Câu III. Cho phương trình $x^3-x-1=0$. Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho.

1) Chứng minh $x_0>0$.

2) Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x_0^2-1}{x_0^3}\sqrt{2x_0^2+3x_0+2}$.

Câu IV. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $BC=a$, $AB=b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$ tại điểm P và cắt đường thẳng BC tại điểm Q sao cho B nằm giữa C và Q.

1) Khi $MP\perp AC$, hãy:

a) Tính PQ theo a và b.

b) Chứng minh $a.BP=b.PN$.

2) Chứng minh $\widehat{MNP}=\widehat{MNQ}$ (không nhất thiết MP và AC vuông góc với nhau).

Câu V. Các số nguyên $x, x_1, x_2, ..., x_9$ thỏa mãn:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_9)=(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_9)=x.$$

Tính $P=x.x_2.x_2...x_9$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện $(x+1)(y+1)=2$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy$.

Câu II. Cho các số thực không âm x, y, z thay đổi thỏa mãn

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+y+z$.

Câu III. 1) Cho a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức $M=\dfrac{(a+b)^2}{a^3+ab^2-a^2b-b^3}$.

Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.

2) Cho a, b là hai số nguyên dương, đặt $A=(a+b)^2-2a^2$, $B=(a+b)^2-2b^2$.

Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

Câu IV. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q. Chứng minh rằng

1) $PB=PQ$.

2) O là trực tâm của tam giác ADE.

3) $\widehat{PAO}=\widehat{QAC}$.

Câu V. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen thuộc nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

1) Xây dựng ví dụ để $S=870$.

2) Chứng minh rằng $S\le 870$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Cho a là số thực khác 1 và -1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}$.

b) Cho các số thực x, y, a thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Câu II. Trên quãng đường dài $20\,\text{km}$, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tối của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quáng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Câu III. Cho các đa thức $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x)=0$.

b) Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$.

Chứng minh rằng $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Câu IV. Cho đường tròn (O), bán kính R, ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC (A_1 thuộc BC, B_1 thuộc CA, C_1 thuộc AB). Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HC_1.A_1C=A_1C_1.HB_1$.

b) Chứng minh rằng ba điểm B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R.

Câu V. Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy(x-2)(y+6)+13x^2+4y^2-26x+24y+46.$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI	KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
ĐỀ CHÍNH THỨC	**NĂM HỌC 2019 – 2020**
	Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
	Thời gian làm bài: **150 phút**
Đề thi gồm **01** trang	*(Không kể thời gian giao đề)*

Câu I. Cho hai số thực phân biệt a và b thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=a^2b^2(ab-3)$.

Tính giá trị của biểu thức $T=a+b-ab$.

Câu II. Cho các đa thức $P(x)=m_1x^2+n_1x+k_1$, $Q(x)=m_2x^2+n_2x+k_2$, $R(x)=m_3x^2+n_3x+k_3$ với m_i, n_i, k_i là các số thực và $m_i>0, i=1,2,3$. Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2; phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt b_1, b_2; phương trình $R(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt c_1, c_2 thỏa mãn

$$P(c_1)+Q(c_1)=P(c_2)+Q(c_2),$$
$$P(b_1)+R(b_1)=P(b_2)+R(b_2),$$
$$Q(a_1)+R(a_1)=Q(a_2)+R(a_2).$$

Chứng minh rằng $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$.

Câu III. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2y^2-4x^2y+y^3+4x^2-3y^2+1=0$.

b) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

Câu IV. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB>AC$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A, B. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh rằng B, D, E, F là bốn đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O), M và N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính số đo góc BMN.

Câu V. Cho tập hợp X thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con $A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$ của X sao cho mỗi tập con $A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$ có đúng ba phần tử và hai tập A_i, A_j đều có đúng một phần tử chung với mọi $1\le i<j\le 2019$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$ sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

b) Số phần tử của X phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{8x}{4-x}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$ với $x>0, x\neq 4$ và $x\neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P.

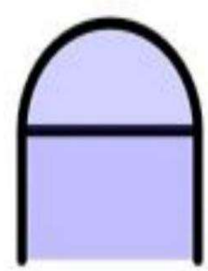
b) Tìm tất cả các số thực m sao cho bất đẳng thức $m\left(\sqrt{x}-3\right)P>x+1$ đúng với mọi $x>9$.

Câu II. a) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y=5x+9$ và $(d_2): y=\left(m^2-4\right)x+3m$ vơi m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $\left(x_1^2-2mx_1+2m-1\right)\left(x_2-2\right)\leq 0$.

c) Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng vận tốc của mỗi ô tô là không đổi trên cả quãng đường AB.

Câu III. Bác An muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài các khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình vẽ bên dưới, bỏ qua độ rộng của khuôn gỗ) là 8 m. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa số có diện tích lớn nhất.



Câu IV. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Qua A, kẻ tiếp tuyến AB đến đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Kẻ đường kính BC của đường tròn (O). Trên đoạn CO, lấy điểm I khác C và D. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn DE.

a) Chứng minh rằng $AB\cdot BE=BD\cdot AE$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm K. Chứng minh rằng $HK//CD$.

Câu V. Tìm tất cả các số thực x,y,z với $0<x,y,z\leq 1$ thỏa mãn

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}=\frac{3}{x+y+z}$$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn các điều kiện sau: $\begin{cases} 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2+3y^2+4z^2} = 2+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6} \\ x.y.z > 0 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Câu II. Xét phương trình bậc $2: ax^2+bx+c=0\left(1\right)$, trong đó a,b,c là các số nguyên dương. Biết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn: phương trình (1) có nghiệm; số $\overline{a2020b}$ chia hết cho 12; số c^3+3 chia hết cho $c+3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $a+b+c$.

Câu III. Tìm số nguyên a bé nhất sao cho: $x^4+2x^2-4x+a \geq 0$ với mọi số thực x.

Câu IV. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ có $AB > BC$. Một đường tròn đi qua hai đỉnh A,C của tam giác ABC lần lượt cắt các cạnh AB,BC tại hai điểm K,N (K,N khác các đỉnh của tam giác ABC). Giả sử đường tròn $\left(O\right)$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt nhau tại giao điểm thứ hai là M (M khác B). Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng BM,KN,AC đồng quy tại điểm P

b) Tứ giác $MNCP$ nội tiếp

c) $BM^2 - PM^2 = BK.BA - PC.PA$

Câu V. Cho hai số A,B cùng có 2020 chữ số. Biết rằng: số A có đúng 1945 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 15 chữ số ngoài cùng về bên phải; số B có đúng 1954 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 24 chữ số ngoài cùng về bên phải. Chứng minh rằng ƯCLN $\left(A,B\right)$ là một số có không quá 1954 chữ số.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $P=\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với $(a\ge 0;\, b\ge 0;\, a\ne b)$.

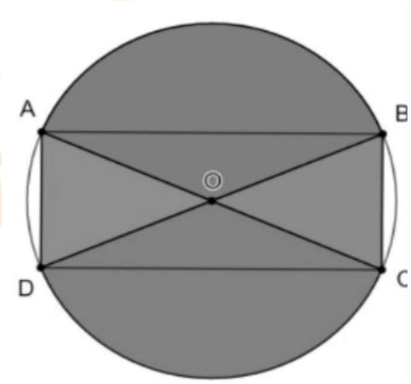
a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng $P\ge 0$.

Câu II. a) Chứng minh rằng: Với mọi m, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$x^2-(2m+1)x+m^2+3=0\quad(1);\quad x^2-mx+4m-11=0\quad(2)$$

b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm O, bán kính bằng 1,6m. Giả sử hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng 1,6m sao cho $\widehat{BOC}=45^\circ$ (Hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần tô đậm là 150 nghìn đồng/m^2 và phần còn lại là 200 nghìn đồng/m^2. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho $\pi=3{,}14$.



Câu III. Cho 3 điểm A, B, C cố định sao cho A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (d) là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB. Lấy điểm M tuỳ ý trên (d). Đường thẳng đi qua B vuông góc với AM cắt các đường thẳng $AM, (d)$ lần lượt tại các điểm I và N. Đường thẳng MB cắt AN tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $CM.CN=AC.BC$.

c) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Vẽ hình bình hành $MBNE$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BE. Chứng minh rằng OH vuông góc với đường thẳng (d) và $OH=\dfrac{1}{2}AB$.

Câu IV. a) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-4x=57 & (1)\\ |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1 & (2)\end{cases}$

b) Cho a và b là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Tìm một đa thức bậc hai $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho α là nghiệm của $Q(x)$.

b) Cho đa thức $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Tính giá trị của $P(\alpha)$.

Câu II. Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $OBME$ nội tiếp.

b) $CD.CE = CO^2 - R^2$.

c) M luôn chuyển động trên một đường tròn cố định.

Câu III. Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách dạng duy nhất ở dạng $\dfrac{x^2+y}{xy+1}$ với x, y là hai số nguyên dương.

Câu IV. Cho a, b, c là 3 số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được ở dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$ (1) có hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $A=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right)\div\dfrac{1}{x-1}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\dfrac{1}{A}$ là số nguyên dương.

Câu II. a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng $(d): y=ax+b$ biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2,-1)$ và song song với đường thẳng $y=-3x+1$.

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Câu III. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ AB (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại các điểm B và C cắt đường thẳng AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CE và BG.

a) Chứng minh rằng hai tam giác EBC và BCG đồng dạng.

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác $BIDE$ nội tiếp.

c) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2=KI\cdot KD$.

Câu IV. a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $a=x+\sqrt{2}$ và $b=x^3+5\sqrt{2}$ là hai số hữu tỉ.

b) Cho các số thực $a_1,a_2,\ldots,a_{2022},b_1,b_2,\ldots,b_{2022}$ thỏa mãn mỗi phương trình $x^2+a_ix+b_i=0$ đều có hai nghiệm thực phân biệt x_0 và x_i với mọi $i=1,2,\ldots,2022$.

Chứng minh rằng số thực $\alpha=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{2022}}{2022}$ là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2022}}{2022}x+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{2022}}{2022}=0.$$

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức $P=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

b) Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$. Chứng minh rằng, nếu đa thức $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì $2a,\ a+b,\ c$ đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng nếu ba số $2a,\ a+b,\ c$ là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x.

Câu II. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Cung nhỏ OB của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E. Tia BE cắt đường tròn (O) tai điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng tia EO là tia phân giác của góc CEF.

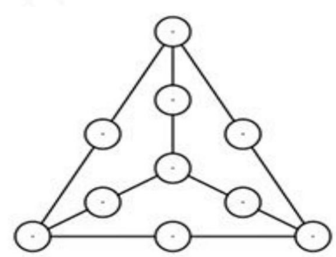
b) Chứng minh rằng tứ giác $ABOF$ nội tiếp.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE và đường tròn (O). Chứng minh rằng ba điểm A,F,D thẳng hàng.

Câu III. Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên dương thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng số $N=a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}+d^{2022}$ là hợp số.

Câu IV.

Ta viết mười số $0,1,2,\ldots,9$ vào mười ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng một lần. Sau đó, ta tính tổng của ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được sáu tổng. Có hay không một cách viết mười số như thế sao cho sáu tổng nhận được là bằng nhau?



Câu V. a) Trong mặt phẳng cho năm điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm đã cho.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{16-4x}{\sqrt{x}+2}$ với $x>0$.

b) Một khay nước có nhiệt độ $125^\circ F$ khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ khay nước chỉ còn là $64^\circ F$?

Câu II. a) Cho phương trình: $x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0.\qquad (1)$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

b) Cho Parabol $(P): y=ax^2\ (a\neq 0)$ đi qua $A\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. Tìm toạ độ điểm M trên Parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

Câu III. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC}=120^\circ$, $BC=2AB$. Dựng đường tròn tâm O đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu IV. Có hay không các số nguyên a, b sao cho $\left(a+b\sqrt{2023}\right)^2=2024+2023\sqrt{2023}$?

Câu V. Trên bảng ta viết đa thức: $P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Ta viết đa thức mới: $P_1(x)=\dfrac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ rồi xoá đa thức $P(x)$.

Ta viết đa thức mới: $P_2(x)=\dfrac{P_1(x+1)+P_1(x-1)}{2}$ rồi xoá đa thức $P_1(x)$.

Ta tiếp tục làm thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$.

Câu II. a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

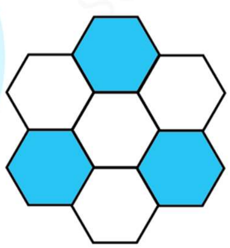
b) Tìm các số nguyên dương a và b sao cho $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỉ.

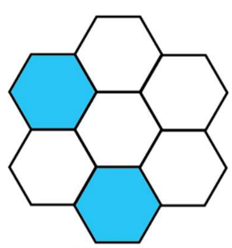
Câu III. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G. Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N. Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P. Chứng minh:

a) $EG // MN$.

b) Điểm P nằm trên đường tròn (I).

Câu IV. Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng 2 màu trắng, đen như Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách trên bao nhiêu lần đi nữa cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.


Hình 1


Hình 2

Câu V. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $n > 10^{2023}$ sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n là một số nguyên tố cùng nhau với n.

---------- HẾT ----------

B. PHẦN ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2008 – 2009
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+\sqrt{ab}}\right)-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}$.

Với $a>0;\ b>0$ và $a\neq b$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm a, b sao cho $b=\left(a+1\right)^2$ và $P=-1$.

Lời giải

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{(a+b)\sqrt{ab}+b\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+a\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}\right)-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{(a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}+ab+b\sqrt{a})+a\sqrt{ab}-ab}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}\right)-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}\right)-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}(a+b)}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

Nếu $a>b>0$ thì $P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=0$

Nếu $0<a<b$ thì $P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

2. Khi P = -1 thì a < b

$$P=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a}-|a+1|=-1\Leftrightarrow\sqrt{a}(1-\sqrt{a})=0$$

$$Vi:\sqrt{a}>0\Rightarrow a=1;b=4$$

Câu II. Cho phương trình $x^2+\left(m^2+1\right)x+m-2=0$ với m là tham số.

1) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

2) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình.

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}$.

Lời giải

1. Tính $\Delta = (m^2+1)^2 - 4(m-2) = m^4 + 2m^2 + 1 - 4m + 8 = (m^2-1)^2 + (2m-1)^2 + 7 > 0$ với $\forall$ m

Vì $\Delta > 0$ với $\forall$ m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

2. Vì $\Delta > 0$ với $\forall$ m theo vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-(m^2+1) \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$

Từ GT ta có

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2} \Leftrightarrow 2(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)-x_1^2x_2^2=55$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-(x_1+x_2)-x_1^2x_2^2=55$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2+1)^2-4(m-2)+(m^2+1)-(m-2)^2=55$$

$$\Leftrightarrow 2m^4+4m^2+2-4m+8+m^2+1-m^2+4m-4=55$$

$$\Leftrightarrow 2m^4+4m^2-48=0 \Leftrightarrow (m^2-4)(m^2+6)=0$$

Vì $m^2+6>0$ với mọi m nên $m^2=4$ suy ra $m=2$ (Loại).

Vậy $m=-2$.

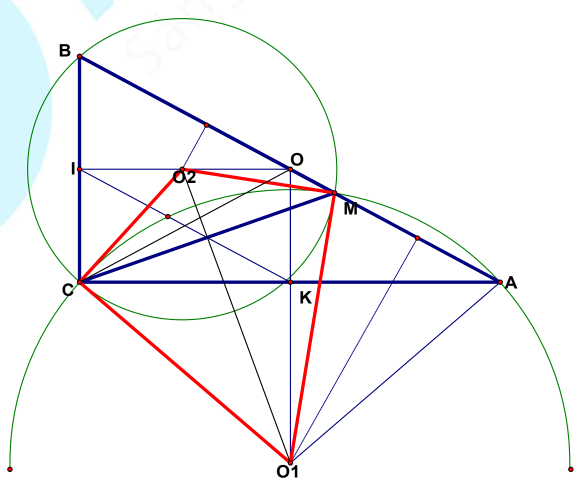
Câu III. Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB}=90°$. M là điểm bất kỳ trên AB. Gọi O, O_1, O_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta MAC, \Delta MBC$.

1) Chứng minh: 4 điểm O_1, M, O_2, C cùng thuộc đường tròn (C).

2) Chứng minh: O cũng thuộc (C).

3) Tìm vị trí M để bán kính (C) nhỏ nhất.

Lời giải



1) Ta có theo tính chất quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì $\widehat{CO_2M}=\widehat{CBA}=\widehat{CO_1M}=2\widehat{CAB}$ nên $\widehat{CO_2M}+\widehat{CO_1M}=2\widehat{CBA}+2\widehat{CAB}=180°$.

Vậy 4 điểm C, O_1, M, O_2 cùng thuộc đường tròn (C).

2) Ta có $\widehat{COM}$ là góc ngoài của tam giác cân CBO nên $\widehat{COM}=\widehat{CBO}+\widehat{OCB}=2\widehat{CBO}=\widehat{CO_2M}$ nên O cũng thuộc đường tròn (C).

3) Ta có $\widehat{O_2OO_1}=90^\circ$ nên $\widehat{O_2C\,O_1}=90^\circ$ nên O_1O_2 là đường kính của đường tròn (C) để bán kính đường tròn (C) nhỏ nhất thì O_1O_2 nhỏ nhất gọi I, K là trung điểm BC, CA ta có tam giác O_2CO_1 đồng dạng với tam giác ICK (g.g) nên $\frac{O_2O_1}{IK}=\frac{O_2C}{IC}\ge 1\Rightarrow O_1O_2\ge IK=\frac{AB}{2}$

$\min(O_1O_2)=IK=\frac{AB}{2}$ khi $O_2\equiv I; O_1\equiv K$; khi đó M trùng với chân đường cao kẻ từ C tới AB.

Câu IV. Cho các số thực a, b, c, d thoả mãn đồng thời các điều kiện

(i): $ac-a-c=b^2-2b$.

(ii): $bd-b-d=c^2-2c$.

(iii): b, c khác 1.

Chứng minh đẳng thức: $ad+b+c=bc+a+d$.

Lời giải

$ac-a-c=b^2-2b\Leftrightarrow ac-a-c+1=b^2-2b+1\Leftrightarrow (a-1)(c-1)=(b-1)^2$. (1)

$bd-b-d=c^2-2c\Leftrightarrow bd-b-d+1=c^2-2c+1\Leftrightarrow (c-1)^2=(b-1)(d-1)$. (2)

Vì b - 1,c - 1 khác 0 nên lấy (1) chia (2) ta được

$$\frac{a-1}{c-1}=\frac{b-1}{d-1}\Leftrightarrow (a-1)(d-1)=(c-1)(b-1)$$

$$\Leftrightarrow ad-a-d+1=bc-b-c+1\Leftrightarrow ad+b+c=bc+a+d;(dpcm)$$

Câu V. Cho các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau và thoả mãn $(z+x)(z+y)=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(z+y)^2}\ge 4$.

Lời giải

Từ GT ta có $\frac{1}{(z+x)^2}=(z+y)^2;\frac{1}{(z+y)^2}=(z+x)^2$

$$VT=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(z+y)^2}=\frac{1}{(x-y)^2}+(z+y)^2+(z+x)^2$$

$$VT=\frac{1}{(x-y)^2}+\left[(z+y)\ \ -(z+x)\right]+2(z+y)(z+x)=\frac{1}{(x-y)^2}+(x-y)^2+2$$

Áp dụng BĐT $A+B\ge 2\sqrt{AB}$ ta có

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(z+y)^2}=\frac{1}{(x-y)^2}+(x-y)^2+2\ge 2\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}.(x-y)^2}+2=4$$

Vậy $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(z+x)^2}+\dfrac{1}{(z+y)^2}\geq 4$

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x-y=\pm 1 \\ (z+y)(z+x)=1 \end{cases}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2008 – 2009
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $b \neq c, \sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{c}, a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$.

Chứng minh đẳng thức $\dfrac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

Lời giải

$a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \Leftrightarrow a+b=a+b+c+2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc}$

$\Leftrightarrow c=2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}$

Ta có $\dfrac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\dfrac{a+a-2\sqrt{ac}+c}{b+b-2\sqrt{bc}+c}(*)$

Thay $c=2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}$ vào (*)

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{a+a-2\sqrt{ac}+c}{b+b-2\sqrt{bc}+c}=\frac{2a+2b-2b+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}}{2a+2b-2a+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}}$$

Ta có $$=\frac{(a+b)-b+\sqrt{bc}-\sqrt{ab}}{(a+b)-a+\sqrt{ac}-\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{c}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}};(dpcm)$$

Câu II. 1) Với mỗi số dương a thoả mãn $a^3=6(a+1)$.

Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^2+ax+a^2-6=0$.

2) Tìm tất cả các giá trị của a và b sao cho $2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1)$.

Lời giải

1) Để phương trình vô nghiệm thì $\Delta<0$.

Ta có $\Delta=a^2-4(a^2-6)=24-3a^2$.

Từ giả thiết ta có $a^2=\dfrac{6(a+1)}{a}$ thay vào $\Delta=24-3a^2=\dfrac{24a-18a-18}{a}=6-\dfrac{18}{a}(*)$

Ta chứng minh $0<a<3$ từ giả thiết

$a^3-6a-6=0 \Leftrightarrow a^3-3a^2+3a^2-9a+3a-9=-3$

$\Leftrightarrow (a-3)(a^2+3a+3)=-3$

Ta có $a^2+3a+3>0$ với mọi a nên $a-3<0$ suy ra $a<3$ nên $\dfrac{18}{a}>\dfrac{18}{6}=3$.

Kết hợp với (*) ta có $\Delta = 6 - \dfrac{18}{a} < 0.$

Suy ra phương trình $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ vô nghiệm

2) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpky cho 2 dãy mỗi dãy 2

Với $(a;1)$ và $(1;1)$ ta có $2(a^2+1) \ge (a+1)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 1$.

Với $(b;1)$ và $(1;1)$ ta có $2(b^2+1) \ge (b+1)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $b = 1$.

Với $(a;1)$ và $(b;1)$ ta có $(a^2+1)(b^2+1) \ge (ab+1)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 1$.

Suy ra $4(a^2+1)^2(b^2+1)^2 \ge (a+1)^2(b+1)^2(ab+1)^2 \Leftrightarrow 2(a^2+1)(b^2+1) \ge (a+1)(b+1)(ab+1)$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 1$.

Câu III. Ba số nguyên a, b, c đôi một khác nhau và thoả mãn đồng thời ba điều kiện

(i): a là ước của $b + c + bc$.

(ii): b là ước của $a + c + ac$.

(iii): c là ước của $a + b + ab$.

1) Hãy chỉ ra bộ số $(a;b;c)$ thoả mãn các điều kiện trên.

2) Chứng minh rằng a, b, c không đồng thời là số nguyên tố.

Lời giải

1) Bộ số $(a;b;c) = (1;3;7)$.

2) Giả sử a, b, c là số nguyên tố.

Từ giả thiết, ta có $(b+c+bc) + a(1+b+c) = (a+b+c+ab+bc+ac) \vdots a;$

$$(a+c+ac) + b(1+a+c) = (a+b+c+ab+bc+ac) \vdots b;$$

$$(a+b+ab) + c(1+a+b) = (a+b+c+ab+bc+ac) \vdots c$$

Suy ra $(a+b+c+ab+ac+bc)$ chia hết cho a, b, c.

Ta có $(a+1)(b+1) + (a+1)(c+1) + (c+1)(b+1) = ab + a + b + 1 + ac + a + c + 1 + bc + c + b + 1$

$$= (2a + 2b + 2c + ab + bc + ac) + 3 \equiv 3 \ (\text{mod}\ (a,b,c)).$$

Mà $(b+1)(c+1) = b + c + bc + 1 \equiv 1 \ (\text{mod}\ a)$ nên

$(a+1)(b+1) + (a+1)(c+1) = (a+1)(b+c+2) \equiv 2 \ (\text{mod}\ a)$

$\Rightarrow b + c \equiv a \ (\text{mod}\ a)$.

Mà theo giả thiết $(b+c+bc) \equiv 0 \ (\text{mod}\ a)$, $bc \equiv 0 \ (\text{mod}\ a)$ hay $bc \vdots a$.

Mà a,b,c nguyên tố, suy ra vô lý.

Suy ra a, b, c không đồng thời là số nguyên tố.

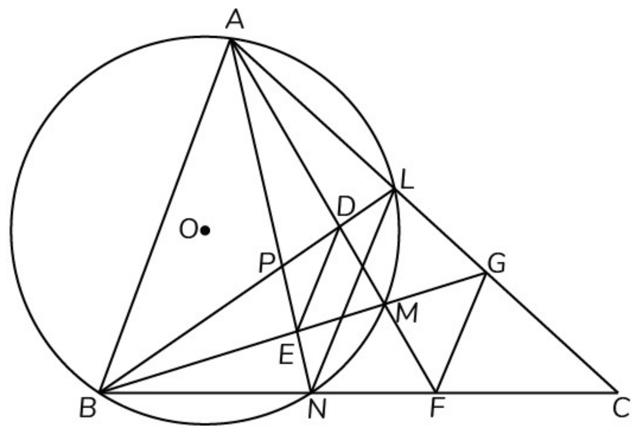
Câu IV. Cho tam giác ABC. Một đường tròn (O) đi qua các điểm A, B và cắt các cạnh CA, CB tại các điểm L, N tương ứng $(L \ne A, C;\ N \ne B, C)$. Gọi M là trung điểm của cung LN của đường tròn (O) và M nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng AM cắt các đường thẳng BL và BN tại các điểm D và F tương ứng, đường thẳng BM cắt các đường thẳng AN và AL tại các điểm E và G tương ứng. Gọi P là giao điểm của AN và BL.

1) Chứng minh $DE // GF$.

2) Nếu tứ giác $DEFG$ là hình bình hành, hãy chứng minh:

a) $\Delta ALP \backsim \Delta ANC$. b) $DF \perp EG$.

Lời giải



1) Xét tứ giác $ADEB$ có $\widehat{DAE} = \widehat{DBE}$ nên tứ giác $ADEB$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{EDM} = \widehat{ABG}$ (cùng bù với $\widehat{ADE}$). (1)

Xét tứ giác $AGFB$ có $\widehat{GAF} = \widehat{GBF}$ nên tứ giác $AGFB$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AFG} = \widehat{ABG}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{EDM} = \widehat{AFG}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $DE // GF$.

2) Vì tứ giác DEFG là hình bình hành nên $ME = MG$.

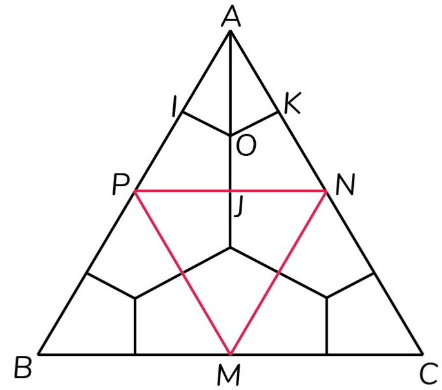
Xét Δ AEG có AM vừa là phân giác vừa là trung tuyến nên AM $\perp$ EG hay DF $\perp$ EG.

Vì DF $\perp$ EG $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$ suy ra AB là đường kính của đường tròn (O)

Khi đó $\widehat{ALP} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ nên Δ ALP đồng dạng với ΔANC (g.g) (đpcm).

Câu V. Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}$cm.

Lời giải



Gọi M, N, P là trung điểm 3 cạnh BC, AC, AB nối M, N, P chia tam giác ABC thành 3 tam giác đều bằng nhau có cạnh là $1{,}5$cm.

Gọi O là tâm của 1 Δ đó giả sử tam giác APN.

Nối O với trung điểm ba cạnh Δ APN ta được 3 tứ giác bằng nhau gọi một trong 3 tứ giác đó là $AIOK$ thì Δ ABC được chia thành 12 tứ giác bằng tứ giác AIOK (như hình vẽ).

Xét tứ giác AIOK có $AI = AK = IK = 1{,}5\text{cm}$; $IO = OK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$; $AO = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Vì có 13 điểm 12 tứ giác nên theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại ít nhất 2 điểm thuộc 1 tứ giác khoảng cách giữa 2 điểm này không vượt quá $AO = \sqrt{3}\,(\text{cm})$ (đpcm).

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $A=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$ và $B=a^4+20a^3+102a^2+40a+200$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm a để $A+B=0$.

Lời giải

1) Ta có $A=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}=\sqrt{20a+92+\sqrt{\left(a^2+8\right)^2}}$

$\Rightarrow A=\sqrt{a^2+20a+100}=\sqrt{\left(a+10\right)^2}=\left|a+10\right|$.

2) $B=\left(a^4+20a^3+10a^2\right)+2\left(a^2+20a+100\right)=a^2\left(a+10\right)^2+2\left(a+10\right)^2=\left(a+10\right)^2\left(a^2+2\right)$.

$A=\left|a+10\right|\ge 0;\ B=\left(a+10\right)^2\left(a^2+2\right)\ge 0\Rightarrow A+B\ge 0$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=-10$.

Câu II. Hai công nhân cùng làm một công việc 18 giờ xong.Nếu người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ 2 làm 12 giờ thì được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong cả công việc là x (giờ). Điều kiện $x>18$.
Gọi thời gian người thứ hai làm một mình xong cả công việc là y (giờ). Điều kiện $y>18$.

1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc); 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

1 giờ cả hai người làm được $\frac{1}{18}$ (công việc) ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}.\ (1)$

Người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ 2 làm 12 giờ thì được 50% công việc nên $\frac{6}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{2}.\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}\\ \frac{6}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}\\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{36}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{36}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=36\\ y=36\end{cases}.$

Vậy mội đội đội là riêng 36 giờ xong.

Câu III. Cho Parabol $y=\ x^2$ và đường thẳng $\left(d\right)$ có phương trình $y=mx+1$.

1) Chứng minh $\left(d\right)$ luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt $A;B$ với mọi m.

2) Gọi $A\left(x_1;y_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của $M=\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)$.

Lời giải

1) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

$\Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A; B$ với mọi m.

2) Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$.

Ta có $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1) = (mx_1 + 1 - 1)(mx_2 + 1 - 1) = m^2x_1x_2 = -m^2 \le 0$.

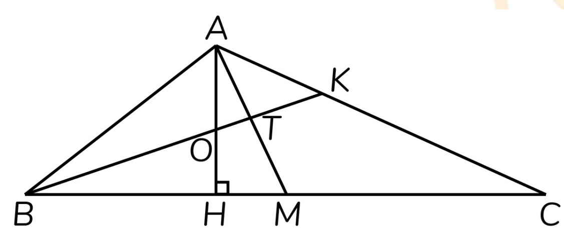
Vậy GTLN của M bằng 0 khi $m = 0$.

Câu IV. Cho tam giác ABC với $AB = 5; AC = 3\sqrt{5}; BC = 10$. Phân giác BK của góc ABC cắt đường cao AH; trung tuyến AM của tam giác ABC tại O và T $(K \in AC; H, M \in BC)$.

1) Tính AH.

2) Tính diện tích tam giác AOT.

Lời giải



1) Đặt $CH = x$ thì $BH = 10 - x$.

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABH; ACH ta có $\begin{cases} AH^2 = AB^2 - BH^2 = 25 - x^2 \\ AH^2 = A^2C - H^2C = 45 - (10 - x)^2 \end{cases}$.

Ta có $25 - x^2 = 45 - (10 - x)^2 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 45 - 100 + 20x - x^2$

$\Leftrightarrow 20x = 80 \Leftrightarrow x = 4$ nên $AH = 3$.

2) Áp dụng tính chất phân giác $\frac{AO}{OH} = \frac{AB}{BH} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AO}{AH} = \frac{5}{9}; S_{AOB} = \frac{5}{9}S_{AHB} = \frac{10}{3}; S_{ABT} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{15}{4}$;

$S_{AOT} = S_{ABT} - S_{AOB} = \frac{15}{4} - \frac{10}{3} = \frac{5}{12}$ (đvdt).

Câu V. Các số thực x, y thoả mãn đẳng thức $\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = 1$.

Chứng minh $x + y = 0$.

Lời giải

Ta có $\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right) = \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

$\Leftrightarrow -\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right). \quad (1)$

Tương tự $-\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \left(y - \sqrt{1 + y^2}\right). \quad (2)$

Cộng (1) và (2), ta có $-y-\sqrt{1+y^2}-x-\sqrt{1+x^2}=x-\sqrt{1+x^2}+y-\sqrt{1+y^2}$

$$\Leftrightarrow -y-x=x+y \Leftrightarrow x+y=0.$$

Vậy $x+y=0$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Các số thực x, y thoả mãn $xy \neq \sqrt{2}$ và $xy \neq -\sqrt{2}$.

Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y.

$$P=\left(\frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt[3]{4}}+\frac{xy-\sqrt[3]{2}}{2xy+2\sqrt[3]{2}}\right).\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}.$$

Lời giải

$$P=\left(\frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt[3]{4}}+\frac{xy-\sqrt[3]{2}}{2xy+2\sqrt[3]{2}}\right).\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}$$

$$P=\left[\frac{2\sqrt[3]{2}xy}{\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)\left(xy-\sqrt[3]{2}\right)}+\frac{xy-\sqrt[3]{2}}{2\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)}\right].\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}$$

$$P=\frac{4\sqrt[3]{2}xy+x^2y^2-2\sqrt[3]{2}xy+\sqrt[3]{4}}{2\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)\left(xy-\sqrt[3]{2}\right)}.\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}=\frac{\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(xy+\sqrt[3]{2}\right)\left(xy-\sqrt[3]{2}\right)}.\frac{xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}=0.$$

Câu II. 1) Cho phương trình $x^2+bx+c=0$, trong đó các tham số b và c thoả mãn đẳng thức $b+c=4$. Tìm các giá trị của b và c để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1=x_2^2+x_2$.

2) Giả sử $(x;y;z)$ là một nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{4}=1\\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1\end{cases}$.

Hãy tính giá trị của $A=x+y+z$.

Lời giải

1) Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4c>0\\ x_1+x_2=-b\\ b+c=4\\ x_1.x_2=c\\ x_1=x_2^2+x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4c\geq 0\\ x_1.x_2-x_1-x_2=4\\ x_1.x_2=c\\ x_1=x_2^2+x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4c>0\\ x_1.=\dfrac{x_2+4}{x_2-1}\\ x_1.x_2=c\\ \dfrac{x_2+4}{x_2-1}=x_2^2+x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4c>0\\ b+c=4\\ x_1.x_2=c\\ \dfrac{x_2+4}{x_2-1}=x_2^2+x_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4c>0\\ b+c=4\\ x_1.x_2=c\\ x_2^3-2x_2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4c>0\\ b+c=4\\ x_1.x_2=c\\ (x_2-2)(x_2^2-2x_2+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4c>0\\ b=-8\\ c=12\\ x_1=6\\ x_2=2\end{cases}.$$

2) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{4}=1\\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y-3z=12\\ 3x+6y+10z=30\end{cases}\Leftrightarrow 7(x+y+z)=42\Leftrightarrow A=6.$

Câu III. Ba số nguyên dương a, p, q thỏa mãn các điều kiện:

(i): $ap+1$ chia hết cho q.

(ii): $aq+1$ chia hết cho p.

Chứng minh $a>\dfrac{pq}{2(p+q)}$.

Lời giải

Xét $pq=1$ ta có điều phải chứng minh.

Xét $pq>1$. Khi đó $(ap+1)(aq+1)\,\vdots\,pq\Leftrightarrow a^2pq+ap+aq+1\,\vdots\,pq\Leftrightarrow a(p+q)+1\,\vdots\,pq\Leftrightarrow a\ge\dfrac{pq-1}{p+q}$.

Xét hiệu $\dfrac{pq-1}{p+q}-\dfrac{pq}{2(p+q)}=\dfrac{pq-1}{2(p+q)}>0$ (vì $pq>1$) nên $a>\dfrac{pq}{2(p+q)}$.

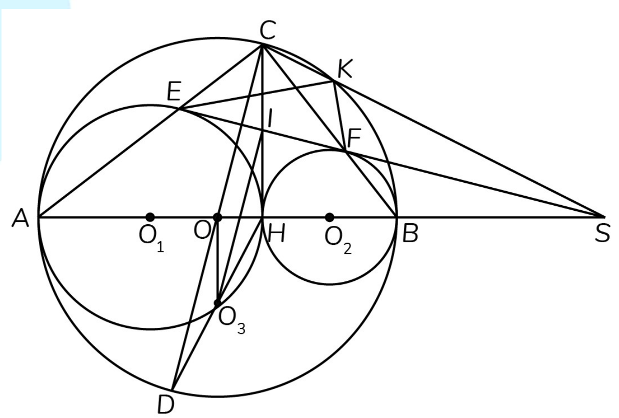
Câu IV. Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (C không trùng với A, B và trung điểm cung AB). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Đường tròn (O_1) đường kính AH cắt CA tại E, đường tròn (O_2) đường kính BH cắt CB tại F.

1) Chứng minh tứ giác AEFB là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi (O_3) là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$, D là điểm đối xứng của C qua O. Chứng minh ba điểm H, O_3, D thẳng hàng.

3) Gọi S là giao của các đường thẳng EF và AB, K là giao điểm thứ hai của SC với đường tròn (O). Chứng minh KE vuông góc với KF.

Lời giải



1) Ta có tứ giác $CEHF$ là hình chữ nhật.

Ta có $\widehat{CFE}=\widehat{EAB}$ (cùng bằng $\widehat{CHE}$) nên thứ giác $AEFB$ nội tiếp.

2) Kẻ trung trực EF cắt HD tại O_3 chứng minh O_3 là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$.
Chứng minh được $CD \perp EF$ trong tam giác CHD có IO_3 là đường trung bình nên $O_3O \perp AB$.
Mà $OA = OB$ nên O_3O là trung trực của AB nên O_3 là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$ hay H, O_3, D thẳng hàng.

3) $\widehat{BFS} = \widehat{BKS}$ (cùng bù $\widehat{EFB}$) nên tứ giác $BFKS$ nội tiếp suy ra $\widehat{FKS} = \widehat{FBA}$.
Mà $\widehat{FBA} = \widehat{CEF}$ nên $\widehat{FKS} = \widehat{CEF} \Rightarrow$ Tứ giác $CEFK$ nội tiếp suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF} = 90^\circ$ hay FK vuông góc với EK.

Câu V. Một hình vuông có độ dài bằng 1 được chia thành 100 hình chữ nhật có chu vi bằng nhau (hai hình chữ nhật bất kỳ không có điểm chung). Kí hiệu P là chu vi của mỗi hình chữ nhật trong 100 hình chữ nhật này.
1) Hãy chỉ ra một cách để chia $P = 2,02$.
2) Hãy tìm giá trị lớn nhất của P.

Lời giải

1) Cách chia 1 cạnh thành 100 phần bằng nhau qua các điểm chia kẻ các đường thẳng song song cạnh kia ta được 100 hình vuông có chu vi bằng nhau khi đó $P = 2,02$.
2) Chia 1 cạnh thành x phần bằng nhau cạnh còn lại là y phần bằng nhau $\left(x, y \in \mathbb{N}^*\right)$.

Ta có $xy = 100.$ Gọi kích thước mỗi hình chữ nhật là a, b thì $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}$.

Khi đó $P = \dfrac{2}{xy} = \dfrac{2(x+y)}{xy} = \dfrac{x+y}{50}$; P lớn nhất khi $(x+y)$ lớn nhất.
Mà $(x;y) \in \{(1;100);(2;50);(4;25);(5;20);(10;10)\}$ chỉ có cặp (1;100) thoả mãn.
Khi đó $P(\max) = 2,02$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $A=\left[\frac{3}{2}-\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right).\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]:\frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Lời giải

1) Điều kiện $x\neq -26;-6;-3;-1;1;2$.

Đáp số: $A=\frac{3x-6}{2x+6}$.

2) Biến đổi $2A=3-\frac{15}{x+3}$.

Vậy A nguyên khi $\frac{15}{x+3}$ nguyên.

Đáp số: $x\in\{-2;-4;0;-8;12;-18\}$.

Câu II. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=(2m^2+1)x+2m-1$; $(d_2): y=m^2x+m-2$, với *m* là tham số.

1) Tìm tọa độ giao điểm *I* của (d_2) và (d_2) theo *m*.

2) Khi *m* thay đổi, chứng minh rằng điểm *I* luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải

1) PT hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(2m^2+1)x+2m-1=m^2x+m-2$.

Tìm được $I\left(-\frac{m+1}{m^2+1};\frac{-3m^2+m-2}{m^2+1}\right)$.

2) Giả sử $I(x_1;y_1)$, ta có: $\begin{cases} y_1=(2m^2+1)x_1+2m-1 \\ y_1=m^2x_1+m-2 \end{cases}\Rightarrow y_1=-x_1-3$.

Suy ra *I* thuộc đường thẳng cố định có phương trình $y=-x-3$.

Câu III. Giả sử bộ ba số thực (x; y; z) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x+1=y+z \\ xy+z^2-7z+10=0 \end{cases} \quad (I)$

1) Chứng minh $x^2+y^2=-z^2+12z-19$.

2) Tìm tất cả các bộ (x; y; z) thỏa mãn hệ (I) sao cho $x^2+y^2=17$.

Lời giải

1) Hệ phương trình $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=z-1 \\ xy=-z^2+7z-10. \end{cases}$

Suy ra $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(z-1)^2+2(-z^2+7z-10)=-z^2+12z-19$ (điều phải chứng minh).

2) Từ $x^2+y^2=17 \Rightarrow z=6$. Thay vào hệ phương trình (I) tìm được $(x;y)=(4;-1);(x;y)=(1;-4)$.

Vậy $(x;y;z)=(4;-1;6)$; $(x;y;z)=(1;-4;6)$.

Câu IV. Cho hình vuông *ABCD* có độ dài cạnh bằng a. Trong hình vuông đó lấy điểm *K* sao cho tam giác *ABK* đều. Các đường thẳng *BK* và *AD* cắt nhau tại *P*.

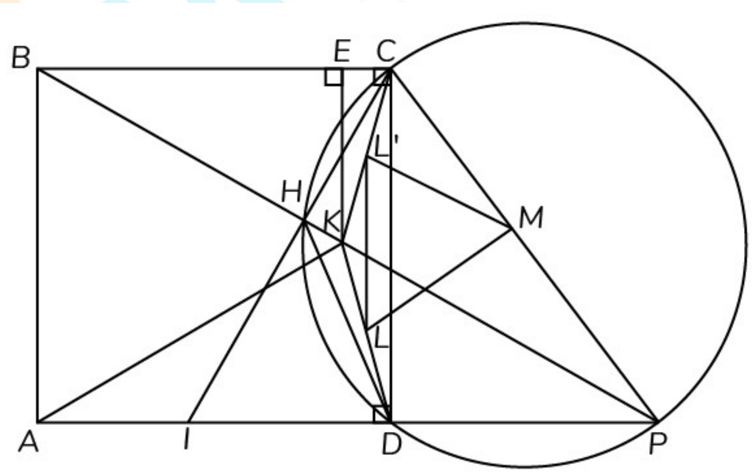
1) Tính độ dài đoạn thẳng KC theo a.

2) Trên đoạn thẳng *AD* lấy điểm *I* sao cho $DI=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, các đường thẳng *CI* và *BP* cắt nhau tại H.

Chứng minh tứ giác *CHDP* nội tiếp một đường tròn.

3) Gọi *M* và *L* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CP và KD. Chứng minh $LM=\frac{a}{2}$.

Lời giải



1) Kẻ *KE* vuông góc với BC, khi đó $KE=\frac{a}{2}$, $BE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $EC=\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$.

Từ đó $KC=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2) Trong tam giác vuông CDI có $CI = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2DI$ nên $\widehat{DCI} = 30^\circ$.

Mặt khác $\widehat{HPD} - 90^\circ - \widehat{ABP} = 30^\circ$.

Suy ra tứ giác *CHDP* nội tiếp (đpcm).

3) Lấy trung điểm *L'* của đoạn *KC*. Do tam giác *CKD* cân tại *K* và *M* là trung điểm của *CP* suy ra *L* và L' đối xứng nhau qua *KM* nên $LM = L'M$.

Do $L'M$ là đường trung bình của tam giác CKP nên $L'M = \dfrac{KP}{2} = \dfrac{a}{2}$ (điều phải chứng minh).

Câu V. Giải phương trình $\left(x^2 - 5x + 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 6\left(x - 1\right)^2$.

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng $\left(x^2 - 4\right)^2 - 5\left(x^2 - 4\right)\left(x - 1\right) - 6\left(x - 1\right)^2 = 0$.

Vì x = 1 không phải là nghiệm của phương trình nên $x \neq 1$.

Khi đó PT đã cho tương đương với $\left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 1}\right) - 6 = 0$.

Đặt $t = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$. Phương trình trên trở thành $t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 6. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{3 + \sqrt{7}; 3 - \sqrt{7}; \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right\}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2010 – 2011

Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**

Thời gian làm bài: **150 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$.
Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

2) Chứng minh rằng $\sqrt{2009^2+2009^2\times 2010^2+2010^2}$ là một số nguyên dương.

Lời giải

1) Từ giả thiết, ta có $a+\sqrt{1-a^2}=b+\sqrt{1-b^2}\Rightarrow a\sqrt{1-a^2}=b\sqrt{1-b^2}$

$\Rightarrow a^2-a^4=b^2-b^4\Rightarrow \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right)=0.$

Vì $a^2-b^2\neq 0$ (giả thiết $a\neq b$) nên $a^2+b^2=1$.

2) Đặt a = 2009, ta có

$2009^2+2009^2.2010^2+2010^2=a^2+a^2\left(a+1\right)^2+\left(a+1\right)^2=a^2+a^2\left(a^2+2a+1\right)+\left(a+1\right)^2$

$=a^4+2a^2\left(a+1\right)+\left(a+1\right)^2=\left(a^2+a+1\right)^2.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu II. Giả sử bốn số thực a, b, c, d đội một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

(i): Phương trình $x^2-2cx-5d=0$ có hai nghiệm a và b.

(ii): Phương trình có hai nghiệm c và d.

Chứng minh rằng

1) $a-c=c-b=d-a$.

2) $a+b+c+d=30$.

Lời giải

1) Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} a+b=2c & (1)\\ ab=-5d & (2)\\ c+d=2a & (3)\\ cd=-5b & (4)\end{cases}$

Từ (1) và (3) suy ra a – c = c – b = d - a (đpcm).

2) Đặt $a-c=c-b=d-a=m$ thì $c=a-m;\, b=c-m=a-2m;\, d=a+m$.

Do đó $a+b+c+d=4a-2m;\, d=a+m$.

Từ (2), (4) suy ra $a^2-2am=-5a-5m; a^2-m^2=-5a+10m$.

Từ đó, thu được $m^2-2am=-15m$.

Do $a\neq c$ nên $m\neq 0$ suy ra $m-2a=-15$.

Suy ra $a+b+c+d=30$ (điều phải chứng minh).

Câu III. Giả sử m và n là những số nguyên dương với $n>1$. Đặt $S=m^2n^2-4m+4n$.

Chứng minh rằng:

1) Nếu $m>n$ thì $\left(mn^2-2\right)^2<n^2S<m^2n^4$.

2) Nếu S là số chính phương thì $m=n$.

Lời giải

1) Ta có $\left(mn^2-2\right)^2<n^2S\Leftrightarrow n^3>1\Leftrightarrow n>1$ (đúng)

$nS^2<m^2n^4\Leftrightarrow m>n$ (đúng theo giả thiết).

2) Giả sử $m\neq n$, xét hai trường hợp

Với $m>n$, theo 1) và do S là số chính phương suy ra $n^2S=\left(mn^2-1\right)^2\Rightarrow 4n^3=2mn^2+1$ (sai)

Với $m<n$ khi đó

Nếu $m\geq 2$ thì $n>2\Rightarrow 2mn>4m\Rightarrow (mn)^2<S<(mn+1)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).

Nếu $m=1$ thì

Với $n>2$ thì $(n+1)^2<S<(n+2)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).

Với n = 2 thì S = 8 không phải là số chính phương

Vậy phải có $m=n$.

Câu IV. Cho tam giác ABC với $AB>AC$, $AB>BC$. Trên cạnh AB lấy các điểm M và N sao cho $BC=BM$ và $AC=AN$.

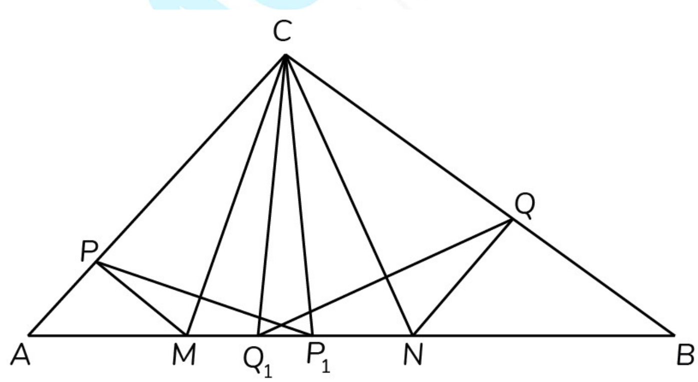
1) Chứng minh điểm N nằm trong đoạn thẳng BM.

2) Qua M và N kẻ MP song song với BC và AQ song song với CA $\left(P\in CA, Q\in CB\right)$.

Chứng minh rằng $CP=CQ$.

3) Cho $\widehat{ACB}=90^\circ$, $\widehat{CAB}=30^\circ$ và $AB=a$. Hãy tính diện tích của tam giác MCN theo a.

Lời giải



1) Từ CA + CB > AB $\Rightarrow AN+BM>AN+BN\Rightarrow BM>BN$ (đpcm).

2) Do tam giác CBM cân tại B nên $\widehat{BCM}=\widehat{BMC}$.

Mà $\widehat{PMC}=\widehat{BMC}$ (so le trong) nên $\widehat{PMC}=\widehat{BMC}$.

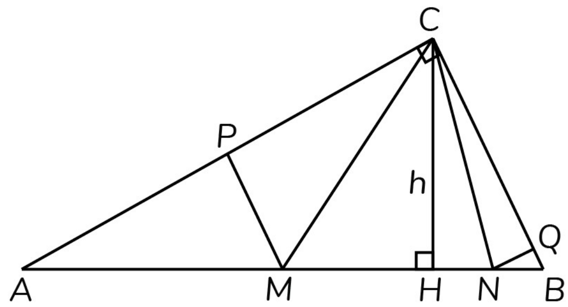
Tương tự $\widehat{QNC}=\widehat{ANC}$, suy ra các điểm P_1,Q_1 đối xứng với điểm P, Q qua các đường thẳng CM và CN đều thuộc AB và $CP=CP_1, CQ=CQ_1$.

Từ $\Delta CPM=\Delta CP_1M$; $\Delta CQN=\Delta CQ_1N\Rightarrow\angle CP_1M=\angle CPM,\angle CQN=\angle CQ_1N$.

Mặt khác $\Delta CPM = \Delta CQN$ (cùng bù với góc $\angle ACB$)

$\Rightarrow \angle CP_1M = \angle CQ_1N$ nên $CP_1 = CQ_1 \Rightarrow CP = CQ$.

3)



Ta có $CB = BM = \frac{a}{2}, CA = AN = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow MN = BM - BN = \frac{a}{2}\left(a - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}$.

Gọi h là khoảng cách từ C đến AB thì $h = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{MCN} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{16}a^2$.

Câu V. Trên một bảng đen ta viết ba số $\sqrt{2}; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xóa hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a là b, rồi viết vào hai vị trí vừa xóa hai số mới là $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể có đồng thời ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

Lời giải

Do $a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2$ nên tổng bình phương ba số không thay đổi sau mỗi lần chơi.

Tổng bình phương ba số ban đầu là $\frac{13}{2}$.

Tổng bình phương ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$ là $\frac{41}{8} + 2\sqrt{2}$.

Như vậy, không bao giờ có thể xuất hiện đồng thời ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $A=\left(\frac{x-y}{2y-x}+\frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$ với $x>0,\ y>0,\ x\neq 2y,$ $y\neq 2-2x^2.$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Cho $y=1,$ hãy tìm x sao cho $A=\frac{2}{5}.$

Lời giải

1) $A=\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}.$

2) Với $y=1$ thì $A=\frac{2}{5}\Leftrightarrow 4x^3-8x^2+11x-7=0\Leftrightarrow x=1.$

Câu II. Một nhóm công dân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công dân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi năng suất dự kiến là x sản phẩm mỗi ngày $\left(x\in N^*\right)$. Thời gian hoàn thành theo kế hoạch là $\frac{200}{x}$. Bốn ngày đầu họ làm được 4x sản phẩm.Trong những ngày sau năng suất là x + 10 sản phẩm mỗi ngày. Số ngày hoàn thành số sản phẩm còn lại là $\frac{200-4x}{x+10}$. Theo bài ra ta có

$$\frac{200}{x}=\frac{200-4x}{x+10}+4+2\Leftrightarrow x=20 \qquad \left(\text{do } x\in N^*\right).$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất 20 sản phẩm.

Câu III. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-m^2+3,\ m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Với giá trị nào của m thì x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$x^2 = mx - m^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 12 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$

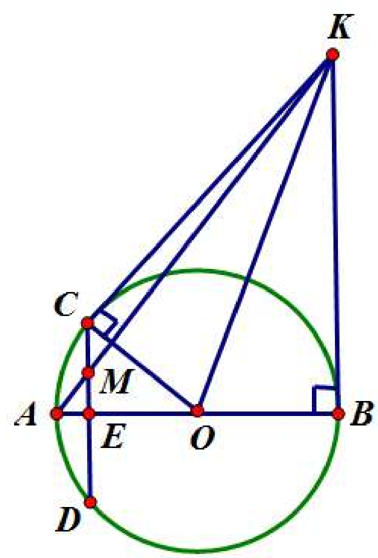
Ta có $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1.x_2 = m^2 - 3 > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{\dfrac{7}{2}}.$

Câu IV. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10.$ Dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB tại điểm E sao cho $AE = 1.$ Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K, AK và CE cắt nhau tại M.

1) Chứng minh $\Delta AEC \backsim \Delta OBK.$ Tính $BK.$

2) Tính diện tích tam giác $CKM.$

Lời giải



Trong tam giác vuông CEO có $CE = \sqrt{CO^2 - OE^2} = 3$.

Do $\widehat{CAE} = \widehat{KOB} = \dfrac{1}{2}\widehat{COB}$ và $\widehat{CEA} = \widehat{KBO} = 90^\circ$ nên $\Delta AEC \backsim \Delta OBK$.

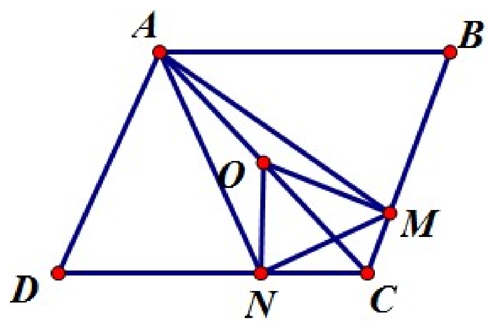
Suy ra $\dfrac{KB}{CE} = \dfrac{OB}{AE} \Rightarrow KB = \dfrac{CE.OB}{AE} = 15.$

2) Do $ME // BK$ nên $\dfrac{ME}{BK} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow ME = \dfrac{BK.AE}{AB} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow CM = CE - ME = \dfrac{3}{2}.$

Vậy $S_{CKM} = \dfrac{1}{2}CM.BE = \dfrac{27}{4} \quad (\text{dvdt}).$

Câu V. Cho hình thoai $ABCD$ có $\widehat{BAD}=120^\circ$. Các điểm M và N chạy trên các cạnh BC và CD tương ứng sao cho $\widehat{MAN}=30^\circ$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN.

Ta có $\widehat{MON}=2\widehat{MAN}=60^\circ$; $OM=ON$ nên $\widehat{OMN}=\widehat{ONM}=60^\circ$.

Do $\widehat{MON}+\widehat{MCN}=180^\circ$ nên tứ giác OMCN nội tiếp, từ đó $\widehat{OCN}=\widehat{OMN}=60^\circ$.

Mà $\widehat{ACN}=\dfrac{120^\circ}{2}=60^\circ$.

Suy ra A, O, C thẳng hàng. Vậy O thuộc đường thẳng AC cố định.

Câu VI. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4.$

Lời giải

Đặt $S_1=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}, S_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}.$

Khi đó, ta có $S_1+S_2=\sqrt{81}-\sqrt{1}=8.$

Lại có: $\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}}>\dfrac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}}=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k} \quad (k\ge 1).$

Do vậy $S_1>S_2$ nên $S_1>4.$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

Câu I. Cho $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

1) Chứng minh rằng $4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$.

2) Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+\sqrt{a^4+a+1}$.

Lời giải

1) Từ giả thiết suy ra a > 0 và

$$a+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}\Rightarrow\left(a+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{8}\right)\Rightarrow 4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0 \qquad (1)$$

2) Từ (1) suy ra $a^2=\frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$

$$\Rightarrow S=a^2+\sqrt{\frac{(1-a)^2}{8}+a+1}=a^2+\frac{a+3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}+\frac{(a+3)\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}.$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1\\ \sqrt{x+y}=x^2-y\end{cases}$.

2) Cho hai số hữu tỉ a, b thỏa mãn đẳng thức $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$. Chứng minh rằng $1-ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải

1) ĐK x + y > 0. Ta có PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y)^2-1+2xy\left(\frac{1}{x+y}-1\right)=0\Leftrightarrow(x+y+1)(x+y-1)-\frac{2xy(x+y-1)}{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0\Leftrightarrow x+y=1\ \left(\text{do } x^2+y^2+x+y>0\right).$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta có: $\begin{cases}x+y=1\\x^2-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\y=3.\end{cases}$

2) Ta có $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)^2+2(a+b)+1=0\Leftrightarrow(ab-1)(a+b)^2+(a+b+c)^2=0 \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $a+b\neq0$ và $1-ab=\left(\frac{a+b+1}{a+b}\right)^2$ (điều phải chứng minh).

Câu III. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p=a^2+b^2+c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p.

Lời giải

Giả sử $a \ge b \ge c$. Ta có $a^4 + b^4 + c^4 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)$.

Vì p là số nguyên tố và $p \ge 3$, suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p khi và chỉ $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ khi chia hết cho p hay $a^2b^2 + c^2\left(a^2 + b^2\right) \vdots p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 \vdots p \Leftrightarrow \left(ab - c^2\right)\left(ab + c^2\right) \vdots p$.

Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \ge 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$ và p = 3.

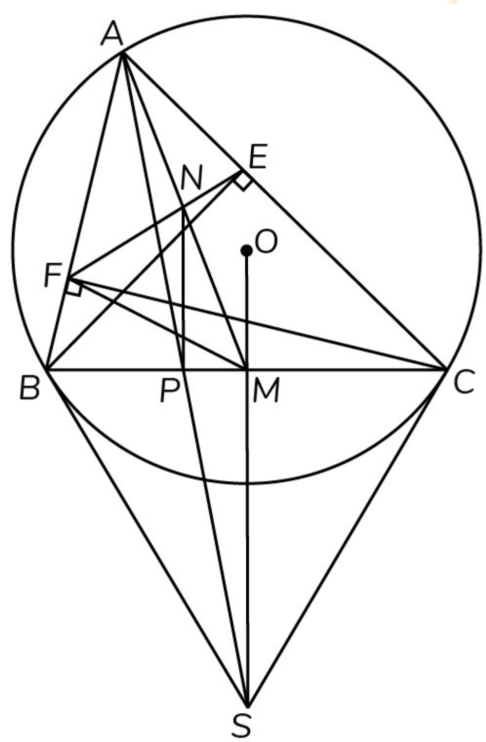
Câu IV. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), BE và CF là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S, các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$.

2) Chứng minh rằng $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$.

3) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Lời giải



1) Do $\widehat{BAE} = \widehat{SBM}$ và $\widehat{AEB} = \widehat{BMS} = 90^\circ$ nên $\Delta AEB \backsim \Delta BMS$ suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{BM}$.

Mà $BM = ME$ nên $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$ $\quad(1)$

2) Tam giác BME cân tại M nên $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$.

Lại có $\widehat{SBM} + \widehat{ABE} = \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90^\circ = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{AEM}$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$.

3) Từ kết quả câu 2 ta có $\widehat{BAP}=\widehat{EAN}$. Mà $\widehat{ABP}=\widehat{AEN}$ (cùng bù với $\widehat{CEF}$) nên $\Delta AEN\backsim\Delta ABP$,

suy ra $\dfrac{AN}{AP}=\dfrac{NE}{PB}$ $\quad(3)$

Vì $\Delta MAE\backsim\Delta SAB$ (câu 2) và tương tự ta có $\Delta MAF\backsim\Delta SAC$ nên $\widehat{AME}=\widehat{ASB}$, $\widehat{AMF}=\widehat{ASC}$

$\widehat{EMF}=\widehat{BSC}\Rightarrow\widehat{SBP}=\widehat{MEN}$ (do hai tam giác cân có hai góc ở đỉnh bằng nhau).

Suy ra $\Delta EMN\backsim\Delta BSP\Rightarrow\dfrac{NE}{PS}=\dfrac{NM}{PS}$ $\quad(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{AN}{PB}=\dfrac{NM}{PS}\Rightarrow NP//MS$ mà $MS\perp BC$ nên $NP\perp BC$.

Câu V. Trong hộp có chứa 2011 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu), trong đó có 655 viên bi màu đỏ, 655 viên bi màu xanh, 656 viên bi màu tím và 45 viên bi còn lại là các viên biên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 178 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra, luôn có ít nhất 45 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 177 viên bi bất kì thì kết luận của bài toán còn đúng không?

Lời giải

Nếu ta chọn ra 44 bi màu đỏ, 44 bi màu xanh, 44 bi màu tím và 45 bi màu vàng hoặc trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên) thì tổng số bi lấy ra là 44 + 44 + 44 + 45 = 177 viên bi.

Do đó không có 45 bi nào cùng màu. Vậy bài toán không đúng nếu ta chỉ lấy ra 177 viên bi

Nếu lấy ra 178 viên bi thì số bi màu trắng và vàng có tối đa là 45, như vậy vẫn còn lại ít nhất 178 – 45 = 133 bi có màu đỏ hoặc màu xanh hoặc màu tím.

Theo nguyên lí Dirichlet sẽ tồn tại một màu mà có ít nhất $\left[\dfrac{133}{3}\right]+1=45$ viên bi.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$ với $a>b>0$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Biết $a-b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

1) $P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$

$$P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

$$P=\dfrac{(a-b)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)+(a-b)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}\left(\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

$$P=\dfrac{2(a-b)\sqrt{a+b}}{2b\sqrt{a-b}}\left(\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)=\dfrac{a^2+b^2}{b}$$

2) Từ $a-b=1\Rightarrow a=b+1$.

Khi đó $P=\dfrac{2b^2+2b+1}{b}$ => $2b^2+(2-P)b+1=0$ (1).

Coi (1) là phương trình bậc hai của b.

Ta có $\Delta=(2-P)^2-8=P^2-4P-4$.

Để có b, thì $\Delta\ge 0$ => $P^2-4P-4\ge 0$ => $\left[\begin{array}{l}P\ge 2+2\sqrt{2}\\ P\le 2-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Do $P>0$ => $P\ge 2+2\sqrt{2}$ => P(min) = $2+2\sqrt{2}$.

Khi đó $b=\dfrac{-(2-P)}{4}=\dfrac{-\left(2-2-2\sqrt{2}\right)}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Câu II. Trên quãng đường AB dài $210km$, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành đi từ A về B và một ô tô khởi hành đi từ B về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nửa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Lời giải

Gọi vận tốc của xe máy là x(km/h) và vận tốc của ô tô là y(km/h)

Điều kiện $y > x > 0.\ (*)$

Đổi 2 giờ 15 phút = $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ giờ.

Chỗ gặp nhau cách A là $\frac{9}{4}y(km)$ và cách B là 4x.

Vì quãng đường AB bằng 210km, nên ta có phương trình : $\frac{9}{4}y + 4x = 210\ (1)$

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{210}{x}$(giờ).

Thời gian ôtô đi từ B đến A là $\frac{210}{y}$(giờ).

Thời gian ôtô đi từ B đến A nhanh hơn thời gian xe máy đi từ A đến B là $4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$ (giờ).

Vậy ta có phương trình : $\frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phơng trình $\begin{cases} \frac{9}{4}y + 4x = 210 \\ \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4} \end{cases}$.

Giải hệ ra ta được $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy vận tốc của xe máy là 30(km/h) và vận tốc của ô tô là 40(km/h).

Câu III. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - m - 2$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hòanh độ x_1 ; x_2

b) Tìm m để $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$.

Lời giải

a) Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình

$$-x^2 = mx - m - 2 \Leftrightarrow x^2 + mx - (m+2) = 0.$$

Có $\Delta = m^2 + 4(m+2) = m^2 + 4m + 8 = (m+2)^2 + 4 > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hành độ $x_1; x_2$.

b) Theo viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -m-2 \end{cases}$.

Để $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$.

Thay vào ta có $(-m)^2 - 4(-m-2) = 20 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$ có $\Delta' = 16 > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $m_1 = 2$ và $m_2 = -6$.

Vậy với $m = 2$ hoặc $m = -6$ thì thoả mãn điều kiện bài toán.

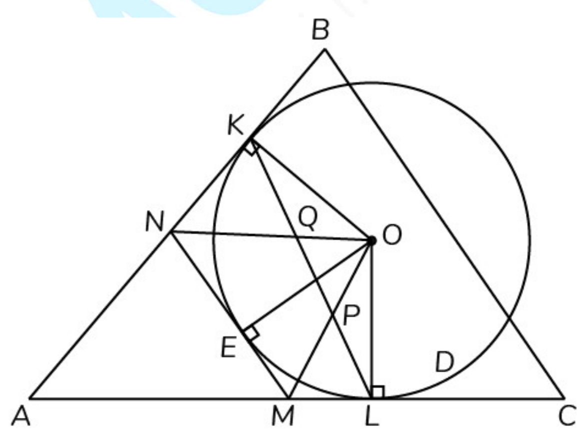
Câu IV. Cho tam giác ABC đường tròn (ω) có tâm O tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến (d) của đường tròn (ω) tại E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

1) Chứng minh $\widehat{MON} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ.PL = EM.EN$.

Lời giải



1) Do tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau nên ta có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$. (1)

Tứ giác $ALOK$ có $\widehat{AKO} + \widehat{ALO} = 90° + 90° = 180°$.

Suy ra $\widehat{BAC}+\widehat{KOL}=180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}=180^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{BAC}+\frac{1}{2}\left(\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}\right)=90^\circ$

. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{1}{2}\widehat{BAC}+\left(\widehat{O_2}+\widehat{O_3}\right)=90^\circ$.

Hay $\frac{1}{2}\widehat{BAC}+\widehat{MON}=90^\circ \Rightarrow \widehat{MON}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (điều phải chứng minh).

2) Ta có $\widehat{L_1}=\widehat{E_2}=\widehat{K_3} \Rightarrow$ Tứ giác $OKEB$ nội tiếp.

Mặt khác $OKNE$ nội tiếp đường tròn đuèờng kính ON

$\Rightarrow$ Năm điểm O, K, N, E, P cùng nằm trên đường tròn đường kính ON

$\Rightarrow \widehat{NPO}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đờng tròn)

$\Rightarrow NP\perp OM$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $MQ\perp ON$ và $OE\perp MN$.

Suy ra ba đờng cao MQ, NP và OE của tam giác OMN đồng quy.

3) Từ câu 2, suy ra $KQ=QE$ và $PL=PE$.

Tứ giác ONEP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QNE}=\widehat{EPM}$;

Tứ giác OMEQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NQE}=\widehat{PEM}$.

Suy ra $\Delta NQE \backsim \Delta PEM\,(g.g) \Rightarrow \frac{NE}{EP}=\frac{EQ}{EM} \Rightarrow EM.EN=EQ.EP$.

Do đó: $KQ.PL=EM.EN$ (điều phải chứng minh).

Câu V. Cho các số thực dương x, y thoả mãn điều kiện $x+y=(x-y)\sqrt{xy}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Lời giải

Vì $x, y>0$ mà $x+y=(x-y)\sqrt{xy} \Rightarrow x>y$.

Cả hai vế đều dương, bình phương hai vế ta có:

$$(x+y)^2=xy(x-y)^2 \Rightarrow (x+y)^2=xy\left[(x+y)^2-4xy\right].$$

Đặt $xy=X$, thay $P=x+y$ ta có $P^2=X\left(P^2-4X\right) \Leftrightarrow 4X^2-P^2X+P^2=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai của $X \Rightarrow \Delta=P^4-16P^2=P^2\left(P^2-16\right)$.

Để có nghiệm X, thì $\Delta\ge 0 \Rightarrow P\ge 4$ (do $P>0$) $\Rightarrow \min P=4$.

Khi đó $\begin{cases} X = \dfrac{P^2}{8} = 2 \\ P = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Do $x > y$ nên $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy GTNN của P bằng 4 khi $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x-1}}+2x^2+4x-4=0.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\sqrt{x^2+2x-1}\right)^2}+2\left(x^2+2x-1\right)-2=0.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-1}\ (t\ge 0)$, ta có $2t^2+t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vì $t\ge 0$ nên $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x^2+2x-1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Câu II. 1) Cho các số a, b, c đôi một phân biệt thỏa mãn: $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2012.$

Tính giá trị của biểu thức: $M=c^2(a+b).$

2) Cho 5 số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số dương trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

1) Từ $a^2(b+c)=b^2(c+a)\Rightarrow ab+bc+ca=0 \quad (\text{do } a\ne b)$

$\Rightarrow (b-c)(ab+bc+ca)=0\Rightarrow b^2a+b^2c-bc^2-ac^2=0.$

Vậy $M=c^2(a+b)=b^2(c+a)=2012.$

2) Gọi các số đã cho là $a_1\ (1\le i\le 5)$.. Biểu diễn $a_1=2^{\alpha_i}.3^{\beta_i}$, với α_i,β_i là các số tự nhiên.

Xét năm cặp số $(\alpha_i,\beta_i)\ (1\le i\le 5)$: mỗi cặp rơi vào một trong bốn trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn), (lẻ, lẻ). Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai cặp (α_i,β_i) và $(\alpha_j,\beta_j)\ (i\ne j)$ cùng thuộc một trường hợp. Khi đó $\alpha_i+\alpha_j, \beta_i+\beta_j$ là những số chẵn, suy ra $\alpha_i.\alpha_j$ là một số chính phương.

Câu III. Cho n số thực $x_1, x_2,..., x_n$ với $n\ge 3$. Kí hiệu $\max\{x_1, x_2, ..., x_n$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$.

Chứng minh rằng $\max\{x_1, x_2, ..., x_n \ge \dfrac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}+\dfrac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+.....+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|}{2n}.$

Lời giải

Áp dụng nhận xét $max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, ta có

$$\frac{x_1+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+...+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|}{2n}=\frac{(x_1+x_2+|x_1-x_2|)+...+(x_n+x_1+|x_n-x_1|)}{2n}$$

$$=\frac{max\{x_1,x_2\}+...+max\{x_n,x_1\}}{n}\le max\{x_1,....,x_n\}.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Câu IV. Trong một lớp học có 36 bàn học cá nhân, được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ 1 đến 9). Sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau một học kì cô giáo chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Đối với mỗi học sinh của lớp, giả sử trước khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng thứ m , cột thứ n và sau khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng a_m, cột thứ a_n, ta gắn cho bạn đó số nguyên $(a_m+a_n)-(m+n)$. Chứng minh tổng của 35 số nguyên gắn với 35 bạn học sinh không vượt quá 11.

Lời giải

Bổ sung một học sinh "đặc biệt" *H* ngồi vào bàn còn trống. Sau khi chuyển chỗ 35 học sinh của lớp, ta cũng chuyển học sinh *H* sang ngồi ở bàn trống mới. Gắn cho *H* một số nguyên theo quy tắc như đối với các học sinh khác. Với 36 học sinh này (sau khi đã bổ sung *H*), thì việc chuyển chỗ chỉ là một hoán vị (i,j) $(1\le i\le 4;1\le j\le 9)$ các vị trí cho nhau.

Do đó tổng của tất cả các chỉ số hàng và chỉ số cột ứng với 36 học sinh trước khi chuyển chỗ và sau khi chuyển chỗ là như nhau. Điều đó có nghĩa là tổng số các số được gắn cho 36 học sinh là bằng 0. Vậy tổng các số được gắn cho 35 học sinh của lớp là –*h*, với *h* là số được gắn cho học sinh *H*. Rõ ràng $h\ge(1+1)-(4+9)=-11$. Do đó tổng các số được gắn cho 35 học sinh của lớp là không vượt quá 11.

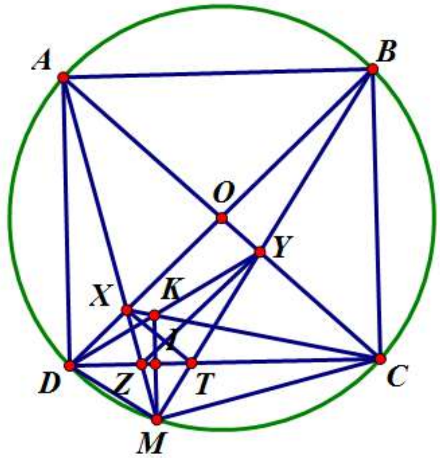
Câu V. Cho hình vuông *ABCD* nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ *CD* của (O), *M* khác *C* và *D*. *MA* cắt *DB*, *DC* theo thứ tự tại *X*, *Z*; *MB* cắt *CA*, *CD* theo thứ tự tại *Y*, *T*; *CX* cắt *DY* tại *K*.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{MXT}=\widehat{TXC}$, $\widehat{MYZ}=\widehat{ZYD}$ và $\widehat{CKD}=135°$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{KX}{MX}+\dfrac{KY}{MY}+\dfrac{ZT}{CD}=1$.

c) Gọi *I* là giao điểm của *MK* và *CD*. Chứng minh rằng: *XT*, *YZ*, *OI* cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KZT*.

Lời giải



a) Do $\widehat{XDT}=\widehat{XMT}\left(=45^\circ\right)$ nên tứ giác $XDMT$ nội tiếp mà $\widehat{DMT}=90^\circ$ nên $\widehat{DXT}=90^\circ$.

Tam giác AXC và XO là phân giác trong và $XO\perp XT$ nên XT là phân giác ngoài.

Vậy $\widehat{MXT}=\widehat{TXC};\ \widehat{MYZ}=\widehat{ZYD}$.

Kẻ $ME\perp CD, E\in\left(O\right)$. CX cắt AD tại V, DE cắt AB tại L.

Dễ thấy $DZ=DV,\ DZ=AL$ nên DV = AL. Do đó $CV\perp DL$. Tương tự $DY\perp CE$.

Do vậy $\widehat{CKD}=\widehat{XKY}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

b) Ta có $\widehat{KMX}=\widehat{DAM}=\widehat{DBM}=\widehat{YMO}$.

Mà tứ giác MXOC nội tiếp nên $\widehat{MXK}=\widehat{MOY}$.

Vậy $\Delta MXK\backsim\Delta MOY$. Suy ra $\dfrac{KX}{MX}=\dfrac{YO}{CO}=\dfrac{ZD}{CD}$(do $YZ//OZ$).

Tương tự $\dfrac{KY}{MY}=\dfrac{TC}{CD}$.

Do đó $\dfrac{KX}{MX}+\dfrac{KY}{MY}+\dfrac{ZT}{CD}=\dfrac{ZD+TC+ZT}{CD}=1$.

c) Gọi $XT\cap YZ=I$. Theo định lí Thales ta có $\dfrac{IT}{IC}=\dfrac{MT}{MB}=\dfrac{ZT}{AB}=\dfrac{ZT}{CD}=\dfrac{TJ}{CO}$.

Mặt khác $TJ//CO$ nên I, J, O thẳng hàng. Vậy XT, YZ, OI đồng quy.

Gọi $EM\cap AB=H$ thì $\dfrac{IJ}{IO}=\dfrac{IT}{IC}=\dfrac{MT}{MB}=\dfrac{MI}{MH}=\dfrac{IK}{IE}$.

Vậy $JK//OE$. Suy ra $\dfrac{JK}{OE}=\dfrac{IJ}{IO}=\dfrac{JT}{OC}$.

Vì $OE=OC$ nên $JK=JT=JZ$. Do đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Cho biểu thức: $Q=\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$ với $a, b>0, a\neq b$.

Chứng minh giá trị của Q không phụ thuộc vào a, b.

2) Các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$.

Chứng minh đẳng thức: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

Lời giải

1) Ta có: $Q=\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}\left(a-b\right)}$

$=\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\dfrac{3\sqrt{a}\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=0.$

2) Ta có $a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$ $(*)$

Từ $a+b+c=0$, ta có $ab+bc+ca=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)=\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2\Leftrightarrow 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}.$

Thay vào $(*)$ ta có điều phải chứng minh.

Câu II. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-mx+\dfrac{1}{2m^2}$ (tham số $m\neq 0$).

1) Chứng minh rằng với $m\neq 0$, (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ là 2 giao điểm đó, tìm giá trị nhỏ nhấ của $M=y_1^2+y_2^2$.

Lời giải

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2+mx-\dfrac{1}{2m^2}=0$ có $\Delta=m^2+\dfrac{2}{m^2}>0$, $m\neq 0$, suy ra điều cần chứng minh.

2) Do $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)\in(P)$ nên

$$y_1^2+y_2^2=x_1^4+x_2^4=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2=m^4+\frac{1}{2m^4}+2\geq 2\sqrt{m^4.\frac{1}{2m^4}}+2=\sqrt{2}+2.$$

Vậy $\min\left(y_1^2+y_2^2\right)=2+\sqrt{2}$ khi $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu III. Giả sử a, b, c là các số thực, $a\neq b$ sao cho 2 phương trình $x^2+ax+1=0,\ x^2+bx+c=0$ có nghiệm chung và 2 phương trình $x^2+x+a=0,\ x^2+cx+b=0$ có nghiệm chung. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Giả sử x_1 là nghiệm chung của hai phương trình $x^2+ax+1=0\ (1);\ x^2+bx+c=0\ (2)$ (do $a\neq b$)

x_2 là nghiệm chung của hai phương trình $x^2+x+a=0\ (3);\ x^2+cx+b=0\ (4)$.

Do $a\neq b$ tìm được $x_1=\frac{c-1}{a-b},\ x_2=\frac{a-b}{c-1}\Rightarrow x_1x_2=1.$

Theo định lí Viét suy ra x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Do đó $\begin{cases}x_2^2+ax_2+1=0\\ x_2^2+x_2+a=0\end{cases}\Rightarrow (a-1)(x_2-1)=0.$

Nếu $a=1,$ thay vào phương trình (1) được $x^2+x+1=0,$ phương trình này vô nghiệm (loại).

Với $x_2=1,$ thay vào các phương trình (3) và (4) ta được $\begin{cases}2+a=0\\ 1+b+c=0\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-3.$

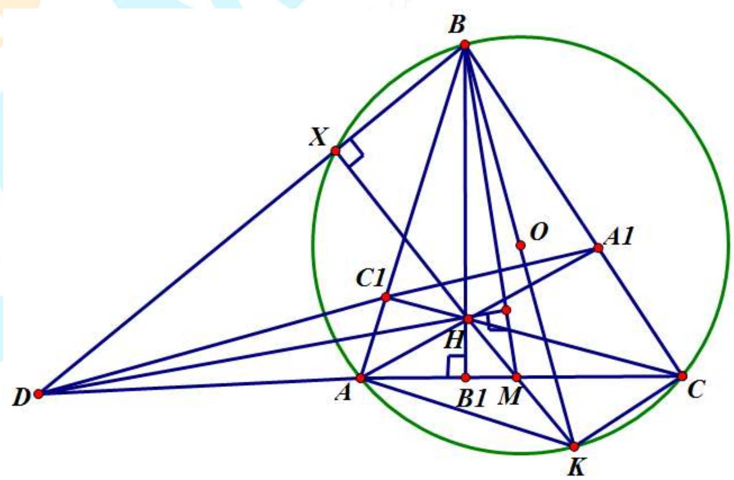
Vậy $a+b+c=-3.$

Câu IV. Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao $AA_1=BB_1=CC_1$ cắt nhau ở H, AC_1 cắt AC tại D và X là giao điểm thứ 2 của BD và (O).

1. Chứng minh $DX.DB=DC_1.DA_1$.

2. Gọi M là trung điểm $AC.$ Chứng minh $DH\perp BM$.

Lời giải



1) Do $B, X, A, C\in(O)$ nên $DX.DB=DA.DC.$

Dễ thấy A_1, C_1, A, C thuộc đường tròn đường kính AC nên $DA.DC=DC_1.DA_1$.

Suy ra $DX.DB=DC_1.DA_1$.

2) Từ 1) suy ra X thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1C_1 đường kính BH nên $HX \perp XB$.

Gọi $XH \cap (O) = K$ thì BK là đường kính của đường tròn (O) nên $KC \perp BC$.

Mà $AA_1 \perp BC$ suy ra $KC // AA_1$. Tương tự $KA // CC_1$.

Do đó tứ giác $CKAH$ là hình bình hành, suy ra M, H, K, X thẳng hàng.

Vậy H là trực tâm tam giác BDM, suy ra $DH \perp BM$.

Câu V. Các số thực x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2011}+\sqrt{y+2012}+\sqrt{z+2013}=\sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{x+2013} \\ \sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{z+2013}=\sqrt{z+2011}+\sqrt{x+2012}+\sqrt{y+2013} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq -2011,\ y \geq -2011,\ z \geq -2011$.

Không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

Ta có $\sqrt{x+2013}-\sqrt{x+2012}+\sqrt{x+2012}-\sqrt{x+2011}=\sqrt{y+2012}-\sqrt{y+2011}$
$$+\sqrt{z+2013}-\sqrt{z+2012}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2012}}+\frac{1}{\sqrt{x+2012}+\sqrt{x+2011}}=\frac{1}{\sqrt{y+2012}+\sqrt{y+2011}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{z+2013}+\sqrt{z+2012}} \quad (1).$$

Do $x \geq y,\ x \geq z$ nên $VT(1) \leq VP(1)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. 1) Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức sau:

(i): $(a+b)(b+c)(c+a)=abc$.

(ii): $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3$.

Chứng minh rằng $abc=0$.

2) Các số thực dương a, b thỏa mãn $ab>2013a+2014b$.

Chứng minh bất đẳng thức $a+b>\left(\sqrt{2013}+\sqrt{2014}\right)^2$.

Lời giải

1) Từ i) và ii) suy ra $abc\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)=a^3b^3c^3$.

Nếu $abc\neq 0$ thì suy ra $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ac+a^2\right)=a^2b^2c^2 \quad (1)$

Lại có $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ac+a^2\right)\geq |ab|.|bc|.|ca|=a^2b^2c^2$

Kết hợp với (1) suy ra $a=b=c$, do đó $8a^3=0\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow abc=0$, mâu thuẫn với $abc\neq 0$.

Vậy $abc=0$.

2) Từ giả thiết suy ra $1>\dfrac{2013}{b}+\dfrac{2014}{a}\Rightarrow a+b>2013+\dfrac{2013a}{b}+\dfrac{2014b}{a}+2014$

$$\geq 2013+2\sqrt{\frac{2013a}{b}.\frac{2014b}{a}}+2014=\left(\sqrt{2013}+\sqrt{2014}\right)^2.$$

Câu II. Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}x^3-2y^3=x+4y\\ 6x^2-19xy+15y^2=1\end{cases}$.

Lời giải

Với x = 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.

Với $x\neq 0$, đặt $y=tx\left(t\in\mathbb{Q}\right)$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases}x^2\left(1-2t^3\right)=1+4t\\ x^2\left(15t^2-19t+6\right)=1\end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{1+4t}{1-2t^3}=\dfrac{1}{15t^2-19t+6}\Leftrightarrow(2t-1)\left(31t^2-15t-5\right)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ (do $t\in\mathbb{Q}$).

Do đó $x=\pm 2\Rightarrow y=\pm 1$.

Vậy $(x;y)\in\left\{(2;1);(-2;1)\right\}$.

Câu III. Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên $\left(S_1=2, S_2=2+3, S_3=2+3+5,...\right)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1, S_2, S_3, ...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương.

Lời giải

Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ *n*.

Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ mà $S_{m-1} = k^2$; $S_m = l^2$; $k, l \in \mathbb{N}^*$.

Vì $S_2 = 5, S_3 = 10, S_4 = 17$ nên $m > 4$.

Ta có $p_m = S_m - S_{m+1} = (l-k)(l+k)$.

Suy ra $\begin{cases} l-k=1 \\ l+k=p_m \end{cases}$.

Do đó $p_m = 2l - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1 \Rightarrow S_m = \left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2$. (1)

Do $m > 4$ nên $S_m \le (1+3+5+7+...+p_m) + 2 - 1 - 9$

$= 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + ... + \left[\left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{p_m-1}{2}\right)^2\right] - 8$

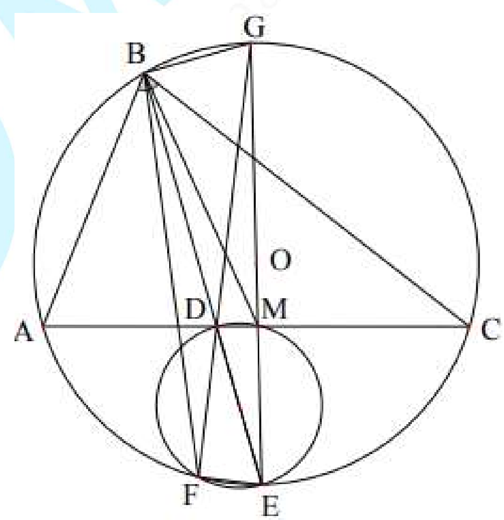
$= \left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2 - 8 < \left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2$. Mâu thuẫn với (1).

Câu IV. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), BD là đường phân giác của góc ABC. Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Đường tròn (O_1) đường kính DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với BF qua đường thẳng BD đi qua trung điểm cạnh AC.

2) Biết tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và bán kính của đường tròn (O) bằng R. Hãy tính bán kính của đường tròn (O_1) bằng R.

Lời giải



1) Gọi $G = DF \cap (O)$ thì GE là đường kính của (O).

Ta có $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EC}$. Gọi M là trung điểm của AC suy ra G, M, O, E thẳng hàng.

Do đó $\angle GBE = 90^0$, mà $\angle GMD = 90^0$ nên tứ giác $BDMG$ nội tiếp đường tròn đường kính GD.

Ta có $\widehat{MBD} = \widehat{DGM} = \widehat{FGE} = \widehat{FBE}$. Suy ra BF và BM đối xứng nhau qua BD.

2) Khi $\widehat{ABC} = 90°, \widehat{BAC} = 60°$ thì $AB = R,\ BC = R\sqrt{3},\ AC = 2R$.

Theo tính chất phân giác $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \sqrt{3}DA$.

Kết hợp với $DA + DC = 2R$ suy ra $\begin{cases} DA = \left(\sqrt{3}-1\right)R;\ DM = R - DA = \left(2-\sqrt{3}\right)R \\ DE = \sqrt{ME^2 + MD^2} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}R \end{cases}$.

Vậy bán kính đường tròn $\left(O_1\right)$ bằng $2\sqrt{2-\sqrt{3}}R$.

Câu V. Độ dài ba cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên tố. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Lời giải

Giả sử a, b, c là các số nguyên tố và là độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Đặt P, S thứ tự là chu vi, diện tích của tam giác ABC.

Ta có $16S^2 = P\left(P-2a\right)\left(P-2b\right)\left(P-2c\right)$. $\quad (1)$

Giả sử S là số tự nhiên. Từ (1) suy ra $P = a+b+c$ là số chẵn.

Nếu a, b, c có một số chẵn và hai số lẻ, giả sử a chẵn thì $a = 2$.

Nếu $b \neq c$ thì $\left|b-c\right| \geq 2 = a$, vô lý

Nếu $b = c$ thì $S^2 = b^2 - 1 \Rightarrow \left(b-S\right)\left(b+S\right) = 1$. $\quad (2)$

Đẳng thức (2) không xảy ra vì b, S là các số tự nhiên.

Câu VI. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các số nguyên dương lớn hơn bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 407$. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho tổng các số dư của các phép chia n cho 22 số $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ bằng 2012.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đề bài, ta luôn có tổng các số dư trong phép chia n cho $a_1, a_2, ..., a_{11}$ không thể vượt quá $407 - 11 = 396$; cho các số $4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không vượt quá $4.407 - 11 = 1617$. Suy ra tổng các số dư trong phép chia n cho các số $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không thể vượt quá $396 + 1617 = 2013$. Kết hợp với giả thiết tổng các số dư bằng 2012, suy ra khi chia n cho 22 số trên thì có 21 phép chia có số dư lớn nhất và một phép chia có số dư nhỏ hơn số chia 2 đơn vị.

Do đó tồn tại k sao cho $a_k, 4a_k$ thỏa mãn điều kiện trên. Khi đó một trong hai số $n + 1$; $n + 2$ chia hết cho a_k, số còn lại chia hết cho $4a_k$. Suy ra ƯCLN $\left(n+1; n+2\right) \geq a_k \geq 2$, điều này không đúng. Vậy không tồn tại n thỏa mãn đề ra.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho các số thực dương $a, b; a \neq b$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0.$

Lời giải

$$Q=\frac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}-\frac{3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}=0 \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Câu II. Quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường, xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không đổi .Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Lời giải

Gọi vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $x\ (\text{km/h})\ (x>10)$.

Thì vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $x-10\ (\text{km/h})$.

Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $\frac{90}{x}$ (giờ).

Thời gian đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $\frac{30}{x}$ (giờ).

Vì thời gian đi cả 2 quãng đường là 11 giờ 40 phút – 7 giờ – 10 phút $=\frac{9}{2}$ (giờ).

Ta có phương trình:

$$\frac{90}{x}+\frac{30}{x-10}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{180(x-10)}{2x(x-10)}+\frac{60x}{2x(x-10)}=\frac{9x(x-10)}{2x(x-10)}$$

$$\Leftrightarrow 240x-1800=9x^2-90x\Leftrightarrow 9x^2-330x+1800=0.$$

Giải ra $x=30$ thỏa mãn điều kiện. Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu $\frac{90}{30}=3$ (giờ).

Vậy xe hỏng lúc 10 giờ.

Câu III. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng

$(d): y=-\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3}$ (m là tham số).

1) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi $x_1; x_2$ là là hoành độ các giao điểm (d) và (P), đặt $f(x)=x^3+(m+1)x^2-x$.

Chứng minh rằng: $f(x_1)-f(x_2)=\frac{-1}{2}(x_1-x_2)^3$.

Lời giải

1) Xét hệ phương trình $\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{-2(m+1)}{3}x+\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^2 \\ 3x^2+2(m+1)x-1=0\ (1)\end{cases}$.

Phương trình (1) có hệ số a và c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

2) Theo Viét $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-2(m+1)}{3} \\ x_1x_2=\frac{-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m+1=\frac{-3(x_1+x_2)}{2} \\ 3x_1x_2=-1\end{cases}$

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3+(m+1)(x_1^2-x_2^2)-x_1+x_2$

$\Leftrightarrow 2[f(x_1)-f(x_2)]=2x_1^3-2x_2^3-3(x_1+x_2)(x_1^2-x_2^2)-2x_1+2x_2$

$\Leftrightarrow 2[f(x_1)-f(x_2)]=-x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_2-x_1)-2(x_1-x_2)$

$\Leftrightarrow 2[f(x_1)-f(x_2)]=-x_1^3+x_2^3+(x_1-x_2)-2(x_1-x_2)$

$\Leftrightarrow 2[f(x_1)-f(x_2)]=-[x_1^3-x_2^3-3x_1x_2(x_1-x_2)]$

$\Leftrightarrow 2[f(x_1)-f(x_2)]=-[(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)]$

$\Leftrightarrow 2\left[f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right]=-\left(x_1-x_2\right)^3$.

Vậy $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=-\frac{1}{2}\left(x_1-x_2\right)^3$.

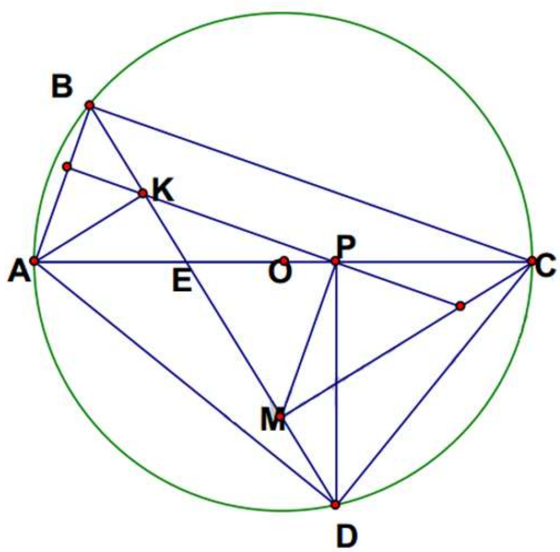
Câu IV. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC=2R$. Gọi K, M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE $(K\neq B; K\neq E)$. Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

1) Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh $KP\perp PM$.

3) Biết $\widehat{ABD}=60^\circ$ và $AK=x$. Tính BD theo R và x.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{PAD}=\widehat{PKD}$ (cùng bằng $\widehat{CBD}$) nên tứ giác $AKPD$ nội tiếp.

2) Vì tứ giác $AKPD$ nội tiếp nên $\widehat{APD}=\widehat{AKD}=90^\circ \Rightarrow \widehat{DPC}=\widehat{DMC}=90^\circ$

$\Rightarrow MDCP$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPD}=\widehat{MCD}$.

Mà $\widehat{MCD}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau là $\widehat{MDC}=\widehat{ACB}$) bêb $\widehat{MPD}=\widehat{ACB}$.

Lại có $\widehat{APK}=\widehat{ACB}$ (đồng vị) nên $\widehat{MPD}=\widehat{APK}$.

Mặt khác $\widehat{MPD}+\widehat{MPE}=90^\circ \Rightarrow \widehat{APK}+\widehat{MPE}=90^\circ$ suy ra $KP\perp PM$.

3) Ta có $AD=R\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông AKD vuông tại K, ta được $KD=\sqrt{3R^2-x^2}$.

Xét tam giác BAK vuông tại K có $\widehat{ABK}=60^\circ \Rightarrow BK=AK.\cot\widehat{ABK}=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Vậy $BD=BK+KD=\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{3R^2-x^2}$ (đơn vị độ dài).

Câu V. Giải phương trình: $\frac{x\left(x^2-56\right)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq \frac{4}{7}; x \neq \sqrt[3]{2}$.

Đặt $4-7x=b;\ x^3+2=a;\ (a;\ b\neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} x^3-56x=x^3+2+8(4-7x)-34=a+8b-34 \\ 21x+24=-3(4-7x)+34=32-3b \end{cases}$.

Ta có phương trình $\frac{a+8b-34}{b}-\frac{34-3b}{a}=4 \Leftrightarrow a^2+8ab-34a-34b+3b^2=4ab$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+3b-34)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+3b=34 \end{array}\right.$$.

Với $a+b=0$ ta có $x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Với $a+3b=34$ ta có $x^3-21x+20=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \\ x=5 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;-3;-1;1;2;5\}$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{cxy+ayz+bxz}{abc}\right)=1. \quad (*)$$

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0 \Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$ thay vào $(*)$, ta được

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Câu II. Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^3}=3$.

Lời giải

Điều kiện xác định $|x|\le\sqrt{3}; |y|\le 1; |z|\le\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AB\le\frac{A^2+B^2}{2}$ ta có

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}\le\frac{x^2+1-y^2}{2}+\frac{y^2+2-z^2}{2}+\frac{z^2+3-x^3}{2}=3$$

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2} \\ y=\sqrt{2-z^2} \\ z=\sqrt{3-x^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=2 \\ z^2+x^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=0 \\ z^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy cặp số $(x;y;z)$ thoả mãn là $(x;y;z)=(1;0;\sqrt{2})$.

Câu III. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n\ge 6$ thì số $a_n=1+\frac{2.6.10...(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có: $a_n=1+\frac{2^n.[1.3.5...(2n-1)].(n+4)!}{(2n)!}=1+\frac{2^n.(n+4)!}{2.4.6...2n}$

$$=1+\frac{2^n.1.2.3...n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2^n.1.2.3.4...n}=1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=(n^2+5n+5)^2.$$

Vì n nguyên nên a_n là số chính phương.

Câu IV. Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{ab+a+2}+\dfrac{1}{bc+b+2}+\dfrac{1}{ca+c+2}\le\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{x}{y}; b=\dfrac{y}{z}; c=\dfrac{z}{x}$, ta có

$$P=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}=\frac{yz}{xy+xz+2yz}+\frac{zx}{xy+yz+2xz}+\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$\Leftrightarrow 3-P=1-\frac{yz}{xy+xz+2yz}+1-\frac{zx}{xy+yz+2xz}+1-\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$\Leftrightarrow 3-P=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz}+\frac{1}{xy+yz+2xz}+\frac{1}{xz+yz+2xy}\right)$$

$$\ge(xy+yz+xz)\frac{9}{4xy+4yz+4xz}=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}xy+yz+2xz=xy+2yz+xz=2xy+yz+xz\\ xyz=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

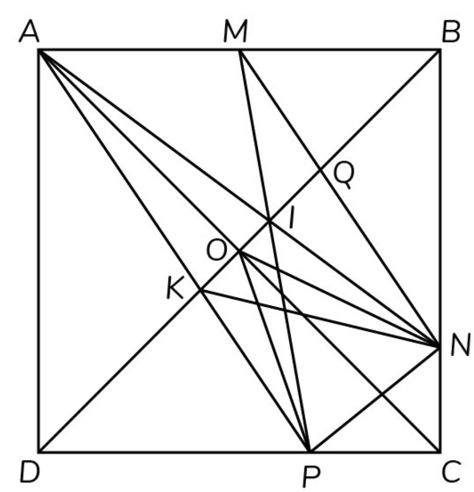
Câu V. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho $MN // AP$. Chứng minh rằng

1) Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\widehat{NOP}=45°$.

2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Lời giải



1) Đặt $AB=a$, ta có $AC=BD=a\sqrt{2}$.

Ta có $AP // MN$ và $BN // AD \Rightarrow \widehat{DAP}=\widehat{MNB}$

$$\Rightarrow \Delta ADP\backsim\Delta NBM\Rightarrow\frac{BM}{DP}=\frac{BN}{AD}\Rightarrow BN.DP=\frac{a^2}{2}.$$

Mà $OB.OD=\dfrac{a^2}{2}$ nên $OB.OD=BN.DP$

$$\Rightarrow\frac{OD}{BN}=\frac{DP}{OB}\Rightarrow\Delta BNO\backsim\Delta DOP\ (c.g.c)$$

$$\Rightarrow\widehat{BON}=\widehat{OPD}$$

$$\Rightarrow\widehat{NOP}=180°-\widehat{BON}-\widehat{POD}$$

$$=180°-\widehat{OPD}-\widehat{POD}=\widehat{ODP}=45°.$$

2) Theo chứng minh trên, ta có $\Delta BNO \backsim \Delta DOP \Rightarrow \frac{ON}{OP} = \frac{OB}{DP} = \frac{OD}{DP}$.

Mà $\widehat{ODP} = \widehat{NOP} = 45°$ nên $\Delta DOP \backsim \Delta ONP$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{DOP} = \widehat{ONP}$

$\Rightarrow DO$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN.

Mặt khác $OD \perp OC$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN thuộc OC.

3) Gọi giao điểm của BD với MN và AP lần lượt là Q và K.

Áp dụng tính chất tia phân giác, ta có $\frac{QM}{QN} = \frac{BM}{BN}; \frac{KP}{KA} = \frac{DP}{AD} \Rightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow \frac{QM}{KP} = \frac{QN}{KA}$. (1)

Giả sử MP cắt AN tại I và KI cắt MN tại H.

Áp dụng định lí Thales, ta có $\frac{HM}{PK} = \frac{HN}{KA}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{HM}{HN} = \frac{QM}{QN} \Leftrightarrow Q \equiv H$.

Vậy ba đường thẳng BD, PM, AN đồng quy.

Câu VI. Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;\ldots;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$, thì $\frac{y^2}{x-y} \in A$.

Lời giải

Với mỗi tập A là tập con của $S = \{1;2;3;...;2014\}$ thỏa mãn đề bài, gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A $(a, b \in S, a < b)$.

Ta chứng minh $b \le 2a$, thật vậy, giả sử $b > 2a$.

Theo giả thiết $c = \frac{a^2}{b-a} \in A$.

Mà $b > 2a \Rightarrow b - a > a > 0 \Rightarrow c = \frac{a^2}{b-a} < \frac{a^2}{a} = a$, mâu thuẫn với a là phần tử nhỏ nhất của A.

Vậy $b \le 2a$.

Gọi d là phần tử lớn nhất của tập $B = A \setminus \{b\}$.

Ta chứng minh $b \ge 2d$. Thật vậy giả sử $b < 2d$, theo giả thiết thì $d < b \Rightarrow e = \frac{d^2}{b-d} \in A$.

Mà $b < 2d$ nên $0 < b - d < d \Rightarrow e > \frac{d^2}{d} = d$.

Suy ra $e \in A$ nhưng $e \notin B \Rightarrow e = b \Rightarrow \frac{d^2}{b-d} = b \Rightarrow d^2 = b^2 - bd \Rightarrow 5d^2 = 4b^2 - 4bd + d^2 = (2b-d)^2$

(mâu thuẫn vì VP là số chính phương, VT không là số chính phương).

Vậy $b \ge 2d \Rightarrow 2d \le b \le 2a \Rightarrow d \le a$.

Mà $a \le d$ (a và d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của B) nên $a = d \Rightarrow b = 2a$.

Vậy $A = \{a;2a\}$.

Kiểm tra lại ta thấy A thỏa mãn đề bài.

Vì $a \in S$ và $2a \in S$ nên $2 \le 2a \le 2014 \Rightarrow 1 \le a \le 1007$.

Vậy số tập con A thỏa mãn đề bài là 1007 tập.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)}$ với $a>0,\ b>0,\ a\ne b.$

1) Chứng minh $P=\dfrac{1}{ab}$.

2) Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a+b+\sqrt{ab}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

1) Ta có: $P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)}=\dfrac{\left(\dfrac{a^2}{ab}+\dfrac{b^2}{ab}+\dfrac{ab}{ab}\right)\left(\dfrac{a-b}{ab}\right)^2}{\dfrac{a^4}{a^2b^2}+\dfrac{b^4}{a^2b^2}-\left(\dfrac{a^3b}{a^2b^2}+\dfrac{ab^3}{a^2b^2}\right)}$

$$=\dfrac{\left(\dfrac{a^2+b^2+ab}{ab}\right)\dfrac{(a-b)^2}{a^2b^2}}{\dfrac{a^4+b^4-a^3b-ab^3}{a^2b^2}}=\dfrac{\dfrac{\left(a^3-b^3\right)(a-b)}{a^3b^3}}{\dfrac{\left(a^3-b^3\right)(a-b)}{a^2b^2}}=\dfrac{1}{ab}$$

Vậy $P=\dfrac{1}{ab}$.

2) Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương $4a$ và b ta có:

$$4a+b\ge 2\sqrt{4a.b}=4\sqrt{ab}\Rightarrow 1=4a+b+\sqrt{ab}\ge 5\sqrt{ab}\Leftrightarrow \sqrt{ab}\le\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow 0<ab\le\dfrac{1}{25}\Rightarrow P=\dfrac{1}{ab}\ge 25.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}b=4a>0\\4a+b+\sqrt{ab}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4a>0\\10a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{10}\\b=\dfrac{2}{5}\end{cases}.$

Vậy $\min P=25\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{10},\ b=\dfrac{2}{5}.$

Câu II. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=2-4m\\mx+y=3m+1\end{cases}$ với m là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

2) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m. Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của hệ. Chứng minh đẳng thức $x_0{}^2+y_0{}^2-5(x_0+y_0)+10=0.$

Lời giải

1) Thay $m=2,$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}x-2y=-6\\2x+y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=-12\\2x+y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5y=-19\\2x+y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{19}{5}\\2x+\dfrac{19}{5}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}\\y=\dfrac{19}{5}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{19}{5}\right)$.

2) Ta có: $\begin{cases}x-my=2-4m\\mx+y=3m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=my+2-4m\\m\left(my+2-4m\right)+y=3m+1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=my+2-4m\\m^2y+2m-4m^2+y=3m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=my+2-4m & (1)\\\left(m^2+1\right)y=m+1+4m^2 & (2)\end{cases}.$$

Phương trình (2) là phương trình bậc nhất ẩn y có hệ số $a=m^2+1\neq0,\ \forall m$ nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $y=\dfrac{m+1+4m^2}{m^2+1},\ \forall m.$

Thay vào (1) ta được: $x=my+2-4m=\dfrac{m^2+m+4m^3+2\left(m^2+1\right)-4m\left(m^2+1\right)}{m^2+1}=\dfrac{3m^2-3m+2}{m^2+1}.$

Do đó: ∀ m, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(x_0;y_0\right)=\left(\dfrac{3m^2-3m+2}{m^2+1};\dfrac{m+1+4m^2}{m^2+1}\right).$

Vì $\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho nên $\begin{cases}x_0-my_0=2-4m\\mx_0+y_0=3m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\left(y_0-4\right)=x_0-2\\1-y_0=m\left(x_0-3\right)\end{cases}.$

Xét $m=0\Rightarrow x_0=2$ và $y_0=1.$ Khi đó $(*)$ đúng.

Xét $m\neq0.$ Ta có: $m\left(y_0-4\right)\left(1-y_0\right)=m\left(x_0-2\right)\left(x_0-3\right)\Leftrightarrow -{y_0}^2+5y_0-4={x_0}^2-5x_0+6$

$$\Leftrightarrow {x_0}^2+{y_0}^2-5\left(x_0+y_0\right)+10=0.$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh đúng với mọi m.

Câu III. Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a\left(a-x\right)^2+b\left(x-b\right)^2=0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh $|a|=|b|$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$a\left(x^2-2ax+a^2\right)+b\left(x^2-2bx+b^2\right)=0\Leftrightarrow ax^2-2a^2x+a^3+bx^2-2b^2x+b^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b\right)x^2-2x\left(a^2+b^2\right)+a^3+b^3=0.$$

• Xét a + b = 0 ⇔ b = –a, phương trình (1) trở thành:

$$-2x\left(a^2+a^2\right)+a^3-a^3=0\Leftrightarrow-4a^2x=0\Leftrightarrow x=0\ \left(\text{do } a\neq0\right).$$

Do đó với $a+b=0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x=0.$

• Xét $a+b\neq 0$. Khi đó (1) là phương trình bậc hai ẩn x.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta=\left(a^2+b^2\right)^2-(a+b)\left(a^3+b^3\right)=0\Leftrightarrow a^4+2a^2b^2+b^4-\left(a^4+ab^3+a^3b+b^4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2a^2b^2-ab^3-a^3b=0\Leftrightarrow -ab(a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b\ \left(\text{do } ab\neq 0\right)$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $b=\pm a\Leftrightarrow |a|=|b|$.

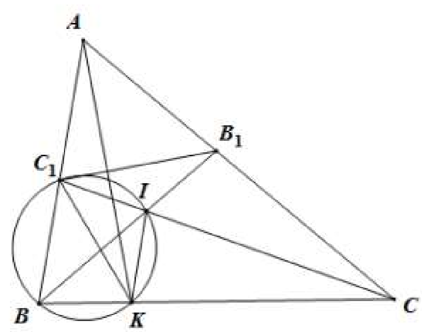
Câu IV. Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{ABC};\ \widehat{ACB}$ nhọn và $\widehat{BAC}=60°$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1) Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.

2) Gọi K là giao điểm thứ hai (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

3) Chứng minh $AK\perp B_1C_1$.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{B_1IC_1}=\widehat{BIC}$ (hai góc đối đỉnh);

$$\widehat{BIC}=180°-\widehat{IBC}-\widehat{ICB}=180°-\frac{\widehat{ABC}}{2}-\frac{\widehat{ACB}}{2}=180°-\frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}}{2}=180°-\frac{180°-\widehat{BAC}}{2}=120°$$

$\Rightarrow \widehat{B_1IC_1}+\widehat{BAC}=120°+60°=180°$.

Mà hai góc này là hai góc đối nhau của tứ giác AC_1IB_1 nên tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp.

2) Vì tứ giác BC_1IK là tứ giác nội tiếp (giả thiết) nên $\widehat{BKI}=\widehat{AC_1I}$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện). $\quad(1)$

Vì tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp (chứng minh trên) nên $\widehat{AC_1I}=\widehat{IB_1C}$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện). $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IB_1C}=\widehat{BKI}=180°-\widehat{CKI}\Rightarrow \widehat{IB_1C}+\widehat{CKI}=180°$.

Đây là hai góc đối của tứ giác $CKIB_1$ nên tứ giác này là tứ giác nội tiếp.

3) Vì BC_1IK là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BKC_1}=\widehat{BIC_1}=180°-\widehat{BIC}=60°$

$\Rightarrow \widehat{CKC_1}=180°-\widehat{BKC_1}=120°\Rightarrow \widehat{CKC_1}+\widehat{CAC_1}=180°$.

Suy ra tứ giác AC_1KC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{C_1KA} = \widehat{C_1CA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung C_1A)

$\Rightarrow \widehat{C_1AK} = \widehat{C_1CK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung C_1K).

Mặt khác CC_1 là phân giác $\widehat{C}$ (giả thiết) nên $\widehat{C_1CK} = \widehat{C_1CA} \Rightarrow \widehat{C_1KA} = \widehat{C_1AK}$.

Suy ra tam giác C_1AK cân tại $C_1 \Rightarrow C_1A = C_1K$. $\quad (3)$

Tương tự ta có: $B_1A = B_1K$. $\quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra C_1B_1 là trung trực của đoạn thẳng $AK \Rightarrow AK \perp B_1C_1$ (điều phải chứng minh).

Câu V. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Với mọi x, y không âm, ta có: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{4} \ge x.$ $(*)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$.

Từ $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy.$ $(**)$

Dấu "=" xảy ra $x=y$.

Áp dụng BĐT $(*)$ với $x=a$ và $x=b$ ta được $\begin{cases} a^2+b+\frac{3}{4}=\left(a^2+\frac{1}{4}\right)+b+\frac{1}{2} \ge a+b+\frac{1}{2}>0 \\ b^2+a+\frac{3}{4}=\left(b^2+\frac{1}{4}\right)+a+\frac{1}{2} \ge b+a+\frac{1}{2}>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Áp dụng BĐT $(**)$ ta được:

$$\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2=\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)\right]^2 \ge 4\left(a+\frac{1}{4}\right)\left(b+\frac{1}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy $a=b=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

Câu I. 1) Cho $a\ge 0, a\ne 1$.

Rút gọn biểu thức $S=\sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}:\left[\dfrac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}-1\right]$.

2) Cho x, y thỏa mãn $0<x<1, 0<y<1$ và $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}=1$.

Tính giá trị của biểu thức $P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}$.

Lời giải

1) Ta có $S=\sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}:\left[\dfrac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}-1\right]$

$=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{a}-1\right):\dfrac{a-2\sqrt{a}+1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}=2+2=4.$

2) Ta có $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}=1\Leftrightarrow 2(x+y)=1+3xy\Leftrightarrow x+y=\dfrac{1+3xy}{2}$.

Thay $x+y=\dfrac{1+3xy}{2}$, ta có

$P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}$

$=x+y+\sqrt{(x+y)^2-3xy}=\dfrac{1+3xy}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1+3xy}{2}\right)^2-3xy}=\dfrac{1+3xy}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1-3xy}{2}\right)^2}=\dfrac{1+3xy}{2}+\left|\dfrac{1-3xy}{2}\right|$

Nếu $xy>\dfrac{1}{3}$ thì $P=2$.

Nếu $xy<\dfrac{1}{3}$ thì $P=3xy$.

Câu II. Một xe tải có chiều rộng $2,4\text{m}$ và chiều cao $2,5\text{m}$ muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dầy của cổng)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi parabol $(P): y=ax^2$ với $a<0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a=-1$.

2) Hỏi xe tải có thể qua cổng được không? Tại sao?

Lời giải

1) Áp dụng định lý Pytago ta có $|y|=4$.

Thay $x=2$, ta được $4=|x|.4$ suy ra $a=-1 \Rightarrow y=-x^2$.

2) Thay $x=1,2$ ta có $y=1,44$.

Khoảng cách còn lại $4-1,44=2,56$ vậy ô tô đi qua được.

Câu III. Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Ta có $a^2+b^2+1=2(ab+a+b) \Leftrightarrow a^2+b^2+1-2ab+2a-2b=4a \Leftrightarrow (a-b+1)^2=4a$ là số chính phương suy ra a là số chính phương $a=x^2$ (x là số nguyên).

Suy ra $(x^2-b+1)^2=4x^2 \Leftrightarrow x^2-b+1=2x \Leftrightarrow b=(x-1)^2$.

Vậy a và b là hai số chính phương liên tiếp.

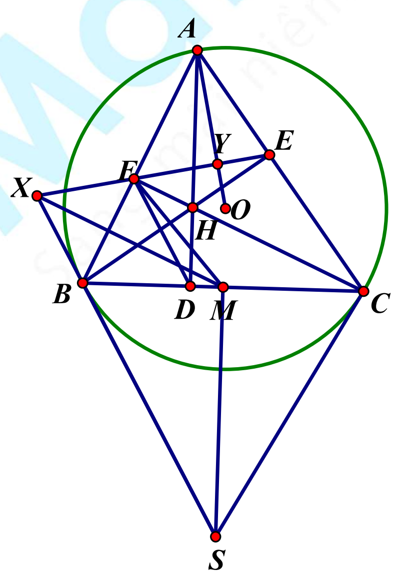
Câu IV. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$. M là trung điểm của cạnh BC. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau tại S. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

1) $MX \perp BF$.

2) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

3) $\dfrac{EF}{FY}=\dfrac{BC}{CD}$.

Lời giải



1) Ta có BE, CF, AD là ba đường cao.

Suy ra các tứ giác $BFHD$, $BFEC$, $BFEC$ nội tếp

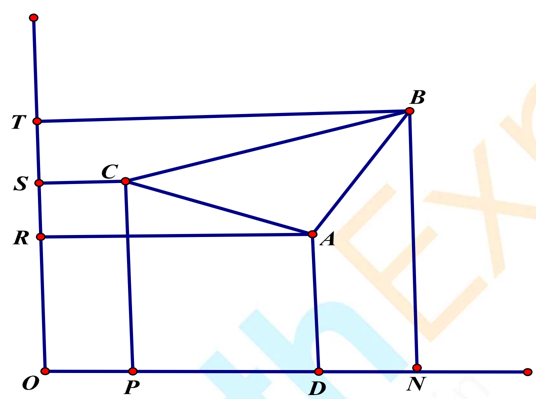
$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{XFB}=\widehat{FBX}$ (cùng chắn cung AB, góc trong bằng góc ngoài đối diện).

Tam giác BXF cân suy ra $XF=XB$.

Vì M là trung điểm của BC nên FM là trung tuyến suy ra $FM = MB$.
Vậy XM là trung trực BF hay $MX \perp BF$.
2) Xét hai tam giác FHD và tam giác XMS.
Ta có $\widehat{DFH} = \widehat{SXM}$ (vì cùng phụ với hai góc bằng nhau);
$\widehat{FDH} = \widehat{FBH} = \widehat{BSM}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).
Vậy hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.
3) Ta chứng minh được tam giác AFE đồng dạng tam giác ACB và tam giác AFY đồng dạng tam giác ADC suy ra $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$.

Câu V. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác ABC là một số nguyên.

Lời giải



Đặt $A(x_2;y_2)$; $B(x_3;y_3)$; $C(x_1;y_1)$ thì P có hoành độ là x_1; D có hoành độ x_2, N có hoành độ là x_3, R có tung độ y_2, S có tung độ là y_1, T có tung độ là y_3..

$$S_{ABC} = S_{CBNP} - S_{ABND} - S_{ADPC} = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(y_3x_3 - y_3x_1 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_3x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 + y_2x_2 - y_2x_2 + y_2x_1 - y_1x_2 + y_1x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(-y_3x_1 - y_2x_1 + y_3x_2 + y_2x_1) = \frac{1}{2}x_1(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}y_3(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC} = x_1(y_2 - y_1) + y_3(x_2 - x_1).$$

Vì các tọa độ là các số nguyên vậy diên tích hai lần diện tích tam giác ABC là số nguyên.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$ với $0<a<1$.

Chứng minh rằng $P=-1$.

Lời giải

Điều kiện xác định của biểu thức $0<a<1$

$$P=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-(1-a)}\right]\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{(1+a)}-\sqrt{1-a}}\right]\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}-1}{a}=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{-\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)^2}{2a}$$
$$=\frac{-\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)}{2a}=\frac{-2a}{2a}=-1$$

Vậy $P=-1$ hay bài toán được chứng minh.

Câu II. Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx-1$ với m là tham số.

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=1$.

2) Chứng minh với mỗi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $\left|y_1^2-y_2^2\right|=3\sqrt{5}$.

Lời giải

1) Gọi (x_0, y_0) là tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m=1$. Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}y_0=-x_0^{\ 2}\\ y_0=2x_0-1\end{cases}\Rightarrow x_0^{\ 2}+2x_0-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{2}\\ x_0=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=-3+2\sqrt{2}\\ y_0=-3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m=1$ là $\left(-1+\sqrt{2};-3+2\sqrt{2}\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-3-2\sqrt{2}\right)$

2) Gọi (x_0, y_0) là tọa độ giao điểm của d và (P). Tương tự ta có $x_0^{\ 2}+2mx_0-1=0$

Phương trình trên là phương trình bậc hai có $\Delta = 4m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A và B. Theo hệ thức Viét ta có $x_1 + x_2 = -2m; x_1x_2 = -1$

Ta có $\begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases}$

Suy ra $\left|y_1^2 - y_2^2\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|(2mx_1 - 1)^2 - (2mx_2 - 1)^2\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|4m\left(x_1^2 - x_2^2\right)\left[m\left(x_1 + x_2\right) - 1\right]\right|$

$\Leftrightarrow \left|4m\left(x_1^2 - x_2^2\right)\left[m\left(x_1 + x_2\right) - 1\right]\right| = \left|4m\left(2m^2 + 1\right)\left(x_1 - x_2\right)\right| = 4\left(2m^2 + 1\right)\left|m\left(x_1 - x_2\right)\right|$

Ta tính $\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2} = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$

Khi đó $\left|y_1^2 - y_2^2\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 8\left(2m^2 + 1\right)\sqrt{m^2 + 1}\left|m\right|$. Bình phương hai vế ta có

$$y_1^2 - y_2^2 = 45 \Leftrightarrow 16\left(4m^4 + 4m^2 + 1\right)\left(4m^4 + 4m^2\right) = 45$$

Đặt $4m^4 + 4m^2 = t > 0$ .Khi đó phương trình trên trở thành $16t^2 + 16t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$ (vì $t > 0$)

Suy ra $16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Vậy với $m = \pm\frac{1}{2}$ ta được $\left|y_1^2 - y_2^2\right| = 3\sqrt{5}$.

Câu III. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120km. Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau bằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Lời giải

Gọi x là vận tốc xe máy đã đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau $(x > 0)$

Vận tốc xe máy đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu là 2x. Vận tốc xe máy đi từ B trở về A là $2x + 10$

Ta có phương trình $\frac{90}{2x} + \frac{30}{x} + \frac{120}{2x + 10} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \frac{45}{x} + \frac{30}{x} + \frac{60}{x + 5} = 8 \Leftrightarrow (x - 15)(8x + 25) = 0$

Vì $8x + 25 > 0$ ta được $x - 15 = 0$ hay $x = 15$.

Vậy vận tốc xe máy đi từ B về A là $2x+10=40$ (km/h).

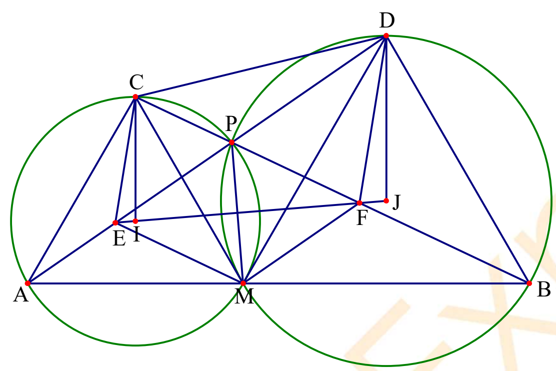
Câu IV. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa $A, B.$ Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và $BMD.$ Gọi P là giao điểm của AD và $BC.$

1) Chứng minh rằng $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=AB.$

3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA, PB tương ứng tại $E, F.$ Chứng minh rằng tứ giác $CDFE$ là hình thang.

Lời giải



1) Ta có $AM=CM; MD=MB; \widehat{AMD}=\widehat{CMB}$

Suy ra $\Delta CMB=\Delta AMD \Rightarrow \widehat{BCM}=\widehat{DAM}; \widehat{MBC}=\widehat{MDA}$

Suy ra tứ giác CPMA và tứ giác MPDB nội tiếp

2) Vì $\widehat{MPB}=\widehat{MDB}=\widehat{CMA}=60^0$. Suy ra $180^0-\widehat{CMA}=180^0-\widehat{BPM} \Rightarrow \widehat{CPM}=\widehat{CMB}$ lại có $\widehat{BCM}$ chung nên $\Delta MPC \backsim \Delta BMC$ suy ra $CP.CB=CM^2$

Chứng minh tương tự ta có $DP.DA=AM^2$. Khi đó $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=\sqrt{AM^2}+\sqrt{CM^2}=AB$

3) Để chứng minh được CDFE là hình thang ta cần chứng minh được CE song song với DF. Để ý ta thấy EF là trục đối xứng của PM. Mà do ta đã có $\widehat{APM}=\widehat{BPM}=60°$ nên ta dễ dàng suy ra được PEMF là hình thoi. Mà theo định lý Talets ta có $\dfrac{AE}{AP}=\dfrac{AM}{AB}$ hay $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{MF}{MD}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{CAE}=\widehat{PMD}$ nên tam giác ACE đồng dạng với tam giác MDF.

Do đó $\widehat{CFM}=\widehat{CEA}$, từ đây ta suy ra DF son song với CE.

Vậy CEDF là hình thang.

Câu V. Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c=1.$

Chứng minh: $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\ge 7$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $0 \le a,b,c \le 1 \Rightarrow a^2 \le a; b^2 \le b; c^2 \le c$. Từ đó ta được

$$\sqrt{5a+4} = \sqrt{a+4a+4} \ge \sqrt{a^2+4a+4} = a+2$$
$$\sqrt{5b+4} = \sqrt{b+4b+4} \ge \sqrt{b^2+4b+4} = b+2$$
$$\sqrt{5c+4} = \sqrt{c+4c+4} \ge \sqrt{c^2+4c+4} = c+2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \ge a+b+c+6=7$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=1; b=c=0$ và các hoán vị.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n.

$$P=\left[\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right]\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}.$$

Lời giải

Biến đổi các biểu thức trong căn thức ta được

$$4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}=4n^2+2-2\sqrt{\left(2n^2+1\right)^2-4n^2}$$

$$=2n^2+2n+1-2\sqrt{\left(2n^2+1-2n\right)\left(2n^2+1+2n\right)}+2n^2-2n+1$$

$$=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)^2$$

Từ đó ta được $\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}=\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}$. Do đó

$$P=\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

$$=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)$$

$$=\left(2n^2+2n+1-2n^2+2n-1\right)=4n$$

Vậy P nhận giá trị nguyên dương với n là số nguyên dương.

Câu II. 1) Tìm các số nguyên dương $x,\ y$ thỏa mãn $x^8-y^8=95\left(x^2+y^2\right)$.

2) Tìm các số thực $x,\ y$ thỏa mãn $\dfrac{x^2-4}{x}+\dfrac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)$.

Lời giải

1) Đặt $d=(x,y)$ khi đó $x=da;y=db$ với $a,b\in N^*$ và $(a,b)=1$.

Và phương trình trở thành $d(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=95\left(a^2+b^2\right)$

Vì $\left(a^2+b^2,a^2+ab+b^2\right)=1$ nên $a^2+ab+b^2=(a-b)^2-3ab$ là ước của $95=5.19$, ước này chia 3 dư 1 hoặc 0 và lớn hơn 1 nên chỉ có thể là 19, như vậy $(a-b)^2-3ab=19$

Từ đó ta được $\begin{cases}a-b=1\\a.b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}\Rightarrow d=65\Rightarrow\begin{cases}x=195\\y=130\end{cases}$

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(x;y)=(195;130)$

2) Từ hệ thức bài toán cho ta có điều kiện xác định là $x>1; y>1$. Hệ thức đã cho có chứa cả biến ở mẫu và chứa cả căn thức bậc hai, do đó để tìm được các x, y thỏa mãn ta sẽ biến đổi hệ thức đã cho về dạng tổng các bình phương. Ta có

$$\frac{x^2-4}{x}+\frac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}-\frac{4x\sqrt{x-1}}{x}+4+\frac{y^2-4}{y}-\frac{4\sqrt{y-1}}{y}+4=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x^2-4+4x\sqrt{x-1}+4x\right)+\frac{1}{y}\left(y^2-4+4y\sqrt{y-1}+4y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-2\sqrt{y-1}\right)^2=0$$

Vì $x>1; y>1$ nên ta có $\frac{1}{x}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-2\sqrt{y-1}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\sqrt{x-1}=0 \\ y-2\sqrt{y-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy $(x;y)=(2;2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu III. Cho S là tập các số nguyên dương n có dạng $n=x^2+3y^2$, trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng:

1) Nếu $a, b\in S$ thì $ab\in S$.

2) Nếu $N\in S$ và N là số chẵn thì N chia hết cho 4 và $\frac{N}{4}\in S$.

Lời giải

1) Ta có $a,b\in S$ nên $a=m^2+3n^2$ và $b=p^2+3q^2$ với m, n, p, q là các số nguyên. Khi đó ta có

$$ab=\left(m^2+3n^2\right)\left(p^2+3q^2\right)=m^2p^2+3n^2p^2+3m^2q^2+9n^2q^2$$
$$=\left(m^2p^2+6mnpq+9n^2q^2\right)+3\left(m^2q^2-2mnpq+n^2p^2\right)$$
$$=\left(mp+nq\right)^2+3\left(mq-np\right)^2$$

Do vậy $ab\in S$.

2) Do $N\in S$ nên ta có $N=x^2+3y^2$ với x, y là các số nguyên và do N là số chẵn nên x, y có cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trương hợp sau

+ Xét trường hợp x và y đều là số chẵn. Khi đó dễ thấy N chia hết cho 4.

Đặt $x=2a; y=2b\left(a,b\in Z\right)$, khi đó $\frac{N}{4}=a^2+3b^2$ nên $\frac{N}{4}\in S$.

+ Xét trường hợp x và y đều là số lẻ. Khi đó đặt $x=2a+1; y=2b+1\left(a,b\in Z\right)$

Ta có $N=x^2+3y^2=\left(2a+1\right)^2+3\left(2b+1\right)^2=4a^2+4a+12b^2+12b+4$ nên N chia hết cho 4.

Mặt khác do x, y là các số lẻ nên $x^2-y^2\,\vdots\,8$ nên $x-3y\,\vdots\,4$ hoặc $x+3y\,\vdots\,4$.

Với $x-3y\,\vdots\,4$ ta được $\frac{N}{4}=\left(\frac{x-3y}{4}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{4}\right)^2$ nên $\frac{N}{4}\in S$

Với $x+3y \vdots 4$ ta được $\frac{N}{4}=\left(\frac{x-3y}{4}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{4}\right)^2$ nên $\frac{N}{4}\in S$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu IV. Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$. Kẻ đường cao AH và đường tròn (O) đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại D và E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S.

1) Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

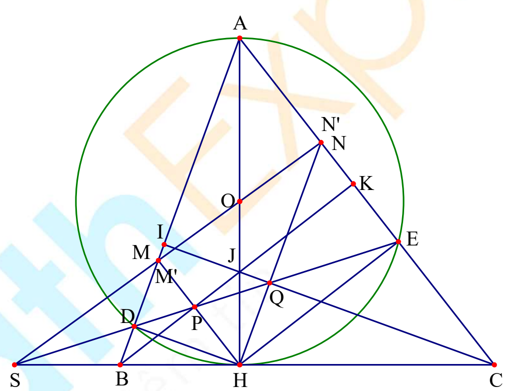
2) Chứng minh rằng $SB.SC=SH^2$.

3) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N. Đường thẳng DE cắt HM và HN tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng BP, CQ, AH đồng quy.

Lời giải

1) Chứng minh rằng tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

Ta có $\widehat{AED}=\widehat{AHD}$ (cùng chắn cung AD) và $\widehat{AHD}=\widehat{ABH}$ (cùng phụ $\widehat{DHB}$). Do đó suy ra $\widehat{AED}=\widehat{DBC}$ nên tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.



2) Chứng minh rằng $SB.SC=SH^2$.

Xét hai tam giác SBD và tam giác SEC có $\widehat{DSB}$ chung và $\widehat{DBS}=\widehat{DEC}$ (vì tứ giác BDEC nội tiếp)

Từ đó suy ra tam giác SBD đồng dạng với tam giác SEC. Do đó ta được $SB.SC=SD.SE$

Xét tam giác SBH và tam giác SEH có $\widehat{DSH}$ chung và $\widehat{SHD}=\widehat{SEH}$ (cùng chắn cung DH) nên suy ra tam giác SHD đồng dạng tam giác SEH. Do đó ta được $SH^2=SD.SE$

Kết hợp các kết quả trên ta được $SB.SC=SH^2$

3) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N. Đường thẳng DE cắt HM và HN tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng BP, CQ, AH đồng quy

Kẻ đường thẳng HM' song song với AC (M' thuộc AB) và đường thẳng HN' song song với AB (N' thuộc AC). Khi đó ta có AM'HN' là hình bình hành. Suy ra M', O, N' thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ABC với ba điểm S, D, E thẳng hàng ta có $\frac{SB}{SC}.\frac{EC}{EA}.\frac{AD}{DB}=1$.

Mà ta lại có $\frac{EC}{EA}=\frac{HC^2}{HA^2}$ và $\frac{DB}{DA}=\frac{HB^2}{HA^2}$ nên ta được $\frac{SB}{SC}.\frac{HC^2}{HA^2}.\frac{HA^2}{HB^2}=1\Rightarrow\frac{SB}{SC}.\frac{HC^2}{HB^2}=1$

Áp dụng định lý Talets ta có $\frac{HC}{HB}=\frac{AM'}{M'B}$ và $\frac{HC}{HB}=\frac{CN'}{AN'}$ nên suy ra $\frac{SB}{SC}.\frac{AM'}{BM'}.\frac{CN'}{AN'}=1$

Từ đó suy ra ba điểm S, M’,N’ thẳng hàng, do đó M trùng với M’ và N trùng với N’. Từ đó ta có AMHN là hình bình hành nên ta được $\widehat{PHE}=\widehat{HEC}=90^0$ do đó $\widehat{PHE}=\widehat{HDB}=90^0$

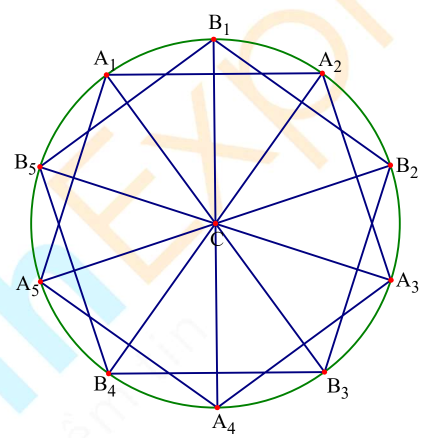
Mà $\widehat{PEH}=\widehat{DHB}$ nên $\widehat{DBH}=\widehat{EPH}$, do đó tứ giác BDPH nội tiếp. Suy ra ta được $\widehat{BPH}=90^0$ hay BP vuông góc AC. Chứng minh tương tự CQ vuông góc AB.

Trong tam giác ABC có các đường cao là AH, BP, CQ nên AH, BP, CQ đồng quy.

Câu V. Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác cân.

Lời giải

Ta xét một đường tròn tâm C . Trên đường tròn (C) lấy ra hai ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Giả sử C được tô màu xanh. Khi đó nếu trong 10 điểm $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ có hai điểm được tô xanh thì ta có điều phải chứng minh. Xét trong trường hợp 10 điểm chỉ có nhiều 1 điểm được tô xanh khi đó trong hai ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$ tồn tại một ngũ giác không có điểm được tô xanh.



Giả sử ngũ giác $B_1B_2B_3B_4B_5$ không có điểm xanh khi đó tồn tại 3 đỉnh trong ngũ giác đều này được tô cùng màu.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right)$ với $a,b>0$, $a\neq b$ và $a+b\neq a^2$.

1) Chứng minh rằng $P=a-b$.

2) Tìm các số a và b biết $P=1$ và $a^3-b^3=7$.

Lời giải

1) Với $a,b>0;\ a\neq b;\ a+b\neq a^2$ ta có

$$P=\frac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)$$

$$=\frac{a^4-a^2-2ab-b^2}{\left(a-\sqrt{a+b}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\frac{a^3+a^2+ab+a^2b+b(a+b)}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{a^4-(a+b)^2}{a^2-(a+b)}:\frac{a^2(a+b)+(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\left[a^2+a+b\right]:\frac{a^2+a+b}{a-b}=a-b$$

Từ đó ta được $P=a-b$.

2) Với $a,b>0;a\neq b;a+b\neq a^2$ ta được $P=a-b$. Khi $P=1$ và $a^3-b^3=7$ ta có hệ

$$\begin{cases}a-b=1\\a^3-b^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\(a-b)\left[(a-b)^2+3ab\right]=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $(a;b)=(2;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu II. Giả sử x,y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$.

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}$.

Lời giải

Thực hiện biến đổi giả thiết của bài toán ta có

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{xy+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy-y^2}{\left(x^2+1\right)\left(xy+1\right)}+\frac{xy-x^2}{\left(y^2+1\right)\left(xy+1\right)}=0\Leftrightarrow\left(xy-y^2\right)\left(y^2+1\right)+\left(xy-x^2\right)\left(x^2+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y\left(x-y\right)\left(y^2+1\right)+x\left(y-x\right)\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\left(xy-1\right)=0$$

Do $x\neq y$ nên ta được $xy=1$. Kết hợp với giả thiết $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ ta có

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}=\frac{2}{xy+1}+\frac{2}{xy+1}=\frac{4}{xy+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

Vậy ta được $P=2$.

Câu III. Cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right):y=-2ax-4a$ (với a là tham số).

1) Tìm tọa độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ khi $a=-\frac{1}{2}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=3$.

Lời giải

1) Khi $a=-\frac{1}{2}$ thì đường thẳng $\left(d\right)$ có phương trình $y=x+2$.

Hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ là nghiệm của phương trình

$$x^2=x+2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1;2\right\}$$

Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ là $A\left(-1;1\right)$ và $B\left(2;4\right)$.

2) Xét phương trình hoành độ của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ là $x^2+2ax+4a=0$

Để $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ phải có hai nghiệm phân biệt .

Từ đó ta có $\Delta'=a^2-4a=a\left(a-4\right)>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>4\end{array}\right.$.

Khi đó theo hệ thức Viét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2a\\x_1x_2=4a\end{cases}$.

Ta có $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=3\Leftrightarrow\left(\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\right)^2=9\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+2\left|x_1x_2\right|=9$.

Kết hợp với hệ thức Vi – et ta được $4a^2-8a+\left|8a\right|=9$.

+ Với $a<0$ ta được $4a^2-8a+|8a|=9 \Leftrightarrow 4a^2-16a-9=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$, thỏa mãn

+ Với $a>4$ ta được $4a^2-8a+|8a|=9 \Leftrightarrow 4a^2=9 \Rightarrow a=\pm\frac{3}{2}$, không thỏa mãn.

Vậy $a=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu IV. Anh nam đi xe đạp từ A đến C. Trên quãng đường AB ban đầu (B nằm giữa A và C). Anh Nam đi với vận tốc không đổi a(km/h) và thời gian đi từ A đến B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm t (tính bằng giờ) kể từ B là $v=-8t+a\left(\text{km/h}\right)$. Quãng đường đi được từ B đến thời điểm t đó là $S=-4t^2+at$. Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16km.

Lời giải

Vì xe đến C dừng hẳn nên thời gian xe đi từ B đến C thỏa mãn $-8t+a=0 \Rightarrow t=\frac{a}{8}$ do đó quảng đường BC là $S=-4t^2+at=16 \Rightarrow -4\left(\frac{a}{8}\right)^2+\frac{a^2}{8}=16 \Leftrightarrow a^2=256 \Leftrightarrow a=16$.

Từ đó ta được $S_{AB}=1,5.a=24(km)$.

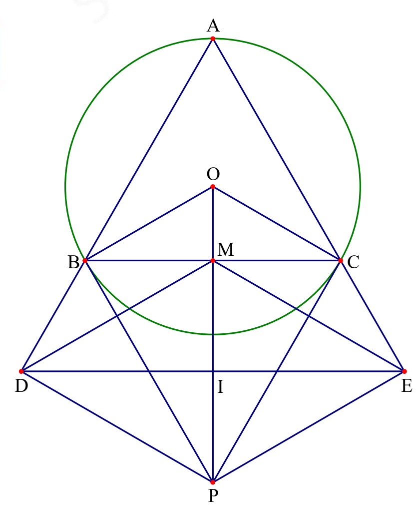
Câu V. Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm P. Gọi D, E tương ứng là chân đường các đường vuông góc kẻ từ P xuống các đường thẳng AB và AC và M là trung điểm cạnh BC.

1) Chứng minh rằng $\widehat{MEP}=\widehat{MDP}$.

2) Giả sử B, C cố định và A chạy trên (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

3) Khi tam giác ABC đều. Hãy tính diện tích tam giác ADE theo R.

Lời giải



1) Tứ giác BDPM có $\widehat{BDP}+\widehat{BMP}=90^0+90^0=180^0$ nên nội tiếp được, suy ra $\widehat{MBP}=\widehat{MDP}$.

Tương tự ta có tứ giác CEPM nội tiếp đường tròn, do đó ta lại có $\widehat{MCP}=\widehat{MEP}$.

Mặt khác do BP và CP là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $\widehat{MBP}=\widehat{MCP}$.

Từ đó ta được $\widehat{MEP}=\widehat{MBP}=\widehat{MBP}=\widehat{MDP}$.

2) Ta có $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^0$ và $\widehat{CBP}+\widehat{ABC}+\widehat{PBD}=180^0$

Mà ta lại có $\widehat{BAC}=\widehat{CBP}$ nên ta được $\widehat{ACB}=\widehat{PBD}=\widehat{DMP}$.

Mặt khác ta có $\widehat{ACB}=\widehat{MPE}$ nên suy ra $\widehat{DMP}=\widehat{MPE}$, từ đó ta được MD song song với PE.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được ME song song với PD.

Điều này dẫn đến tứ giác MEPD là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo MP và DE cắt nhau tai trung điểm I của mỗi đường.

Do B, C cố định trên đường tròn (O) nên PM cố định, do đo I cố định. Vậy đường thẳng DE luôn đi qua điểm I cố định.

3) Khi tam giác ABC đều thì ta có A, O, M, P thẳng hàng và AI vuông góc với DE.

Do đó ta có $S_{ADE}=\frac{1}{2}DE.AI$. Do tam giác ABC đều nên ta có $AB=R\sqrt{3};OA=R$.

Do đó ta tính được $AM=\frac{3R}{2};AI=\frac{3R}{2}+\frac{3R}{4}=\frac{9R}{4}$.

Dễ thấy $\Delta ABC\backsim\Delta ADE$ nên ta được $\frac{BC}{DB}=\frac{AM}{AI}=\frac{2}{3}$. Do đó suy ra $DE=\frac{3R\sqrt{3}}{2}$

Từ đó ta có $S_{ADE}=\frac{1}{2}.\frac{9R}{4}.\frac{3R\sqrt{3}}{2}=\frac{27R^2\sqrt{3}}{16}$ (đvdt)

Câu VI. Các số thực không âm $x_1; x_2; ...; x_9$ thỏa mãn hệ điều kiện $\begin{cases}x_1+x_2+...+x_9=10\\x_1+2x_2+...+9x_9=18\end{cases}$.

Chứng minh rằng $1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9\ge 270$.

Lời giải

Từ $x_1+x_2+x_3+....+x_9=10$ ta được $9\left(x_1+x_2+x_3+...+x_9\right)=90$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}9\left(x_1+x_2+x_3+...+x_9\right)=90\\10\left(x_1+2x_2+3x_3+...+9x_9\right)=180\end{cases}\Rightarrow 19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9=270$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}&1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9=19x_1+36x_2+51x_3+...+99x_9\\&=(19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9)+(7x_2+12x_3+15x_4...+7x_8)\\&=270+(7x_2+12x_3+15x_4...+7x_8)\end{aligned}$$

Để ý ta thấy $7x_2+12x_3+15x_4...+7x_8\geq 0$.

Nên ta được $270+(7x_2+12x_3+15x_4+...+7x_8)\geq 270$.

Vậy ta có $1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+....+9.11x_9\geq 270$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}7x_2+12x_3+15x_4+...+7x_8=0\\x_1+x_2+x_3+....+x_9=10\\x_1+2x_2+3x_3+....+9x_9=18\\19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9=270\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=9\\x_2=x_3=x_4=...=x_8=0\\x_9=1\end{cases}$$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng trong 4 số $a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; $b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; $c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; $d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Lời giải

Giả sử cả bốn số trên đều nhỏ hơn 3. Khi đó ta có

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<12$$

Mặt khác $P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta chứng minh được

$$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge(a+b+c+d)^2;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{16}{a+b+c+d}.$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$P\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{4}+\frac{16}{a+b+c+d}+\frac{16}{a+b+c+d}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c+d)^2}{4}.\frac{16}{a+b+c+d}.\frac{16}{a+b+c+d}}=12$$

Trái điều giả sử trên. Do vậy không thể có cả bốn số cùng nhỏ hơn 3 hay trong bốn số có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu II. Giải phương trình $\sqrt{(x^2+2x)^2+4(x+1)^2}-\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2}=2017.$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\in R$. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\sqrt{(x^2+2x)^2+4(x+1)^2}-\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2}=2017$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x^4+2x^3+4x^2+4x^2+8x+8}-\sqrt{x^2+x^2+2x+1+x^4+2x^3+x^2}=2017$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+2x+2)^2}-\sqrt{(x^2+x+1)^2}=2017\Leftrightarrow x^2+2x+2-x^2-x-1=2017\Leftrightarrow x=2016$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2016$.

Câu III. 1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 = b^3$; $c^3 = d^4$; $a = d + 98$.

2) Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số $x-\sqrt{2}$; $x^2+2\sqrt{2}$; $x-\frac{1}{x}$; $x+\frac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

Lời giải

1) Giả sử $a = p_1^{x_1}.p_2^{x_2}.p_3^{x_3}....p_n^{x_n}$ trong đó $p_1;p_2;...,p_n$ là các số nguyên tố $x_1;x_2;...;x_n \in N$

Tượng tự $d = q_1^{y_1}.q_2^{y_2}.q_3^{y_3}....q_n^{y_n}$ trong đó $q_1;q_2;...,q_n$ là các số nguyên tố $y_1;y_2;...;y_n \in N$

Ta có $a>1; d>1$. Vì $a^2 = p_1^{2x_1}.p_2^{2x_2}.....p_n^{2x_n} = b^3 \Rightarrow 2x_1;2x_2;...;2x_3 \vdots 3 \Rightarrow x_1;x_2;...;x_3 \vdots 3 \Rightarrow a = x^3, \left(x \in Z^+\right)$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $d = y^3, \left(y \in Z^+\right)$.

Từ giả thiết $a = d + 98$ ta được $x^3 = y^3 + 98 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = 98$.

Do $a > d$ nên ta suy ra được $x - y > 0$ từ đó dẫn đến

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 < x^2 + xy + y^2 \Rightarrow x - y < x^2 + xy + y^2$$

Do đó ta đi xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=98 \end{cases}$, khi đó ta được

$$\begin{cases} x = y+1 \\ (y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ 3y^2+3y-97=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \notin \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$, khi đó ta được

$$\begin{cases} x = y+2 \\ (y+2)^2 + (y+2)y + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+2 \\ y^2+2y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; y=3 \\ x=-3; y=-5 \end{array}\right. \Rightarrow x=5; y=3$$

Vậy từ đó ta tính được $a = 5^3 = 125; d = 3^3 = 27; b = 25; c = 81$.

2) Nếu $x-\frac{1}{x}; x+\frac{1}{x}$ nguyên thì ta có $x-\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x} = 2x \in Z \Rightarrow x \in Q$.

Từ đó suy ra $x-\sqrt{2}; x^2+2\sqrt{2}$ đều không là số hữu tỷ. Do vậy một trong hai số $x-\frac{1}{x}; x+\frac{1}{x}$ không là số nguyên khi đó $x-\sqrt{2} \in Z; x^2+2\sqrt{2} \in Z \Rightarrow x-\sqrt{2}+x^2+2\sqrt{2} \in Z$

Đặt $x-\sqrt{2} = a, (a \in Z)$. Khi đó ta được $x^2+2\sqrt{2} = \left(a+\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} = a^2+2+2\sqrt{2}(a+1) \in Z$.

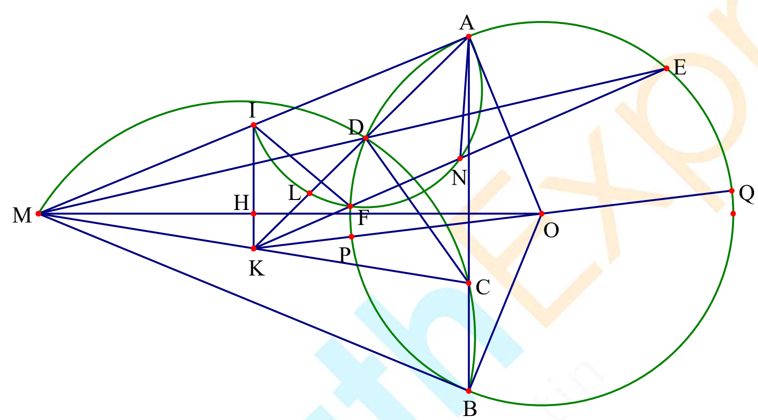
Từ đó dẫn đến $2\sqrt{2}(a+1) \in Z \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$ nên ta được $x = \sqrt{2}-1$

Thử lại ta thấy $x=\sqrt{2}-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy số cần tìm là $x=\sqrt{2}-1$.

Câu IV. Cho đường tròn (O) bán kính R và một điểm M nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, C khác B). Gọi I; K là trung điểm MA, MC. Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

1) Chứng minh $KO^2-KM^2=R^2$.
2) Chứng minh tứ giác $BCDM$ là tứ giác nội tiếp.
3) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm KE, đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



1) Ta có $IM=IA$ và $KM=KC$ nên IK là đường trung bình tam giác AMC, do đó IK song song với AC.

Lại có $MA=MB$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau tại M) và $OA=OB=R$ nên OM là trung trực của AB. Do đó ta được $OM\perp AB$, suy ra $IK\perp OM$. Gọi giao điểm của IK và OM là H.

Áp dụng định lý Pitygo cho các tam giác vuông $MHI;KHO;MHK;OHI$ ta có

$$MI^2=MH^2+HI^2;KO^2=KH^2+HO^2;MK^2=MH^2+HK^2;OI^2=KH^2+HO^2$$

Do $IM=IA$ nên từ đó ta suy ra được

$$MI^2+KO^2=MK^2+IO^2\Rightarrow KO^2-KM^2=IO^2-MI^2=IO^2-IA^2=OA^2=R^2$$

Vậy ta được $KO^2-KM^2=R^2$

2) Đường thẳng KO cắt đường tròn (O) tại Q và P.

Ta có $KC=KM$ nên suy ra $KO^2-KM^2=R^2\Leftrightarrow KO^2-KC^2=R^2$

Từ đó ta được $KC^2=KO^2-OP^2=(KO+OP)(KO-OP)=KQ.KP$

Do từ giác ADPQ nội tiếp đường tròn nên ta có $KQ.KP = KD.KA$ nên suy ra $KC^2 = KD.KA$.

Từ đó dẫn đến $\Delta CKD \backsim \Delta AKD$ nên $\widehat{DCK} = \widehat{KAC} = \widehat{DBM}$

Vậy tứ giác MDCB nội tiếp đường tròn.

3) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm KE đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Gọi L là trung điểm của KD ta có $\Delta MKD \backsim \Delta AKM$ nên suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{MAK} = \widehat{EMK}$. Do đó ta được AE song song với KM.

Mặt khác ta có $KF.KE = KD.KA \Rightarrow KF.KN = KL.KA$ nên tứ giác $ANFL$ nội tiếp

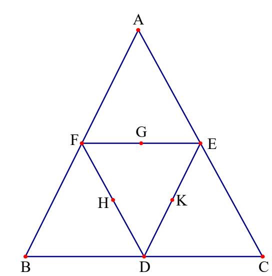
Suy ra ta được $\widehat{LAF} = \widehat{LNF} = \widehat{MEK} = \widehat{FMK}$ (vì $KF.KE = KD.KA = KC^2 = KM^2$).

Từ đó suy ra $\widehat{KAF} = \widehat{KMF}$ nên tứ giác MKFA nội tiếp. Do đó ta được $\widehat{AFN} = \widehat{AMK} = \widehat{AIN}$.

Dẫn đến tứ giác IANF cùng thuộc một đường tròn

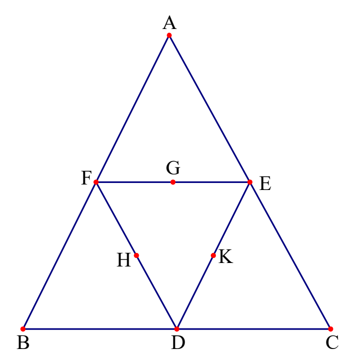
Câu V.

Xét hình bên: Ta viết các số 1, 2, 3, 4, ..., 9 vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ bên sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng ba số trên một cạnh của tam giác bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm $(A; B; C; D; E; F; G; H; K)$ của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?



Lời giải

Cách 1: Ta thấy trong dãy 1; 2; 3; 4; ...; 9 có hai số là 8 và 9 khi lấy tổng 2 đố với số 1 thì bằng 18. Do đó ta thấy tại điểm A(tương tự B, C) không thể điền số 1 vì nếu trái lại thì B và F phải điền cặp 8 và 9, tại C và E cũng phải điền cặp số 8 và 9. Điều này vô lí vì mỗi số chỉ điển vào một điểm. Tương tự tại D, E, F cũng không thể điền số 1. Do đó số 1 được điền tại một trong các điểm H, G, K.



Xét trường hợp số 1 được điền tại G (tương tự tại H, K) khi đó E điền số 8 và F điền số 9 (hoặc ngược lại). Giả sử tại A điền a, tại C điền c, tại D điền d, tại K điền k, tại H điền $k+1$, tại B điền $c+1$.

Khi $a;\ d;\ c;\ c+1;\ k;\ k+1$ phân biệt thuộc tập hợp $\{2;3;4;5;6;7\}$

Từ đó ta có $\begin{cases} a+c=9 \\ d+k=9 \\ d+2c=17 \end{cases} \Rightarrow d \in \{3;5;7\}$. Thử từng trường hợp ta được $d=7$ thỏa mãn

Từ đó ta suy ta được $a=4; c=5; k=2$

Như vậy ứng với mỗi cách điền số 1 và số 2 ta có một cách duy nhất để điểm các số còn lại. Vậy có tất cả 6 cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Để ý rằng ta có tất cả các bộ ba số phân biệt thuộc tập hợp $\{1;2;3;...;9\}$ mà tổng bằng 18

$$18 = 9+8+1 = 9+7+2 = 9+6+3 = 9+5+5 = 8+7+3 = 8+7+4 = 7+6+5$$

Trong tất cả các vị trí A, B, C, D, E, F, G, H, K thì

+ A, B, C xuất hiện trong hai tổng (do là giao điểm của của hai cạnh).

+ D, E, F xuất hiện trong ba tổng (do là giao điểm của ba cạnh).

+ G, H, K xuất hiện trong một tổng.

Do 1 và 2 chỉ xuất hiện trong một tổng nên các vị trí A, B, C, D, E, F không thể điền số 1 và số 2.

Các số 1 và 2 chỉ có thể điểm vào điểm G, H, K. Có tất cả 6 cách điển số 1 và 2 và ba điểm G, H, K.

Không mất tính tổng quát ta có cách điền $G=1; H=2$.

Do số 9 xuất hiện trong các tổng chứa 1 và chứa 2 nên dễ thấy đỉnh $F=9$, suy ra $E=8; D=7$. Từ đó dẫn đến $K=3$ và $A, B, C \in \{4;5;6\}$.

Lại có $A+F+B=18;\ B+C+D=18;\ C+E+A=18$ nên $A=3;\ B=5;\ C=6$.

Như vậy ứng với mỗi cách điền số 1 và số 2 ta có một cách duy nhất để điểm các số còn lại.

Vậy có tất cả 6 cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\dfrac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}}.\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}$ với $x>1$.

1) Rút gọn biểu thức P.
2) Tìm x để $P=x-1$.

Lời giải

1) Đặt $\sqrt{x+1}=a,\sqrt{x-1}=b$, khi đó $2x=a^2+b^2$ và

$$P=\frac{2}{a^3+b^3}.\frac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}.\frac{\dfrac{a^2+b^2-ab}{b}}{\dfrac{a-b}{ab}}=\frac{2a}{a^2-b^2}$$

Vậy $P=\dfrac{2\sqrt{x+1}}{x+1-(x-1)}=\sqrt{x+1}$

2) Với điều kiện x > 1 thì $\sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow x+1=x^2-2x+1\Leftrightarrow x=3\ (\text{do } x>1)$.

Vậy $x=3$ là giá trị cần tìm.

Câu II. Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2015, nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của thị trường tiêu thụ nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2016 và 2017 đều giảm. Cụ thể: số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016 giảm x% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015, số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 cũng giảm x% so với số lượng sản xuất được năm 2016. Biết rằng số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015. Tìm x.

Lời giải

Số lượng sản phẩm sản xuất được trong năm 2016 là $5000-5000.x\%=5000-50x$

Số lượng sản phẩm sản xuất được trong năm 2017 là

$$5000-50x-(5000-50x).x\%=\frac{x^2}{2}-100x+5000=\frac{1}{2}(x-1000)^2$$

Theo giả thiết số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015 nên ta có phương trình

$$\frac{1}{2}(x-1000)^2=5000-5000.51\%\Leftrightarrow\frac{1}{2}(x-100)^2=2450\Leftrightarrow(x-100)^2=4900\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=170\\x=30\end{array}\right.$$

Vì $0<x<100$ nên $x=30$.

Câu III. Cho phương trình $x^3-x-1=0$. Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho.

1) Chứng minh $x_0 > 0$.

2) Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{x_0^2 - 1}{x_0^3}\sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2}$.

Lời giải

1) Vì x_0 là nghiệm của phương trình nên $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0^2 - x_0 - 1 = x_0^2$

$\Leftrightarrow x_0^2(x_0+1) - (x_0+1) = x_0^2 \Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2-1) = x_0^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2(x_0-1) = x_0^2 \ (1)$

Dễ thấy $x_0 = -1$ và $x_0 = 0$ không thỏa mãn (1) nên $x_0 - 1 = \dfrac{x_0^2}{(x_0+1)^2} > 0 \Rightarrow x_0 > 1 \Rightarrow x_0 > 0$

Chú ý: Đây là cách chứng minh trực tiếp $x_0 > 1$. Ta có thể chứng minh $x_0 > 0$ bằng phương pháp phản chứng như sau:

Giả sử $x_0 \le 0$. Ta có $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = x_0 + 1$.

Dễ thấy $x_0 = 0$ không thỏa mãn.

Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0^3 < 0 \Rightarrow x_0 + 1 < 0 \Rightarrow x_0 < -1 \Rightarrow x_0^2 > 1$

$\Rightarrow x_0(x_0^2 - 1) < 0 \Rightarrow x_0^3 - x_0 < 0$ (vô lý vì $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0^3 - x_0 = 1$)

Và từ $x_0 > 0 \Rightarrow x_0 + 1 > 1 \Rightarrow x_0^3 > 1 \Rightarrow x_0 > 1$

2) Vì x_0 là nghiệm của phương trình nên $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = x_0 + 1$

Kết hợp với $x_0 > 1$ ta được

$$M = \frac{x_0^2-1}{x_0^3}\sqrt{2x_0^2+3x_0+2} = \frac{(x_0-1)(x_0+1)}{x_0^3}\sqrt{2x_0^2+3x_0+2}$$

$$= (x_0-1)\sqrt{2x_0^2+3x_0+2} = \sqrt{(x_0-1)^2(2x_0^2+3x_0+2)} = \sqrt{2x_0^4 - x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2}$$

$$= \sqrt{2x_0(x_0+1) - (x_0+1) - 2x_0^2 - x_0 + 2} = \sqrt{2x_0^2 + 2x_0 - x_0 - 1 - 2x_0^2 - x_0 + 2} = 1.$$

Câu IV. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $BC = a$, $AB = b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$ tại điểm P và cắt đường thẳng BC tại điểm Q sao cho B nằm giữa C và Q.

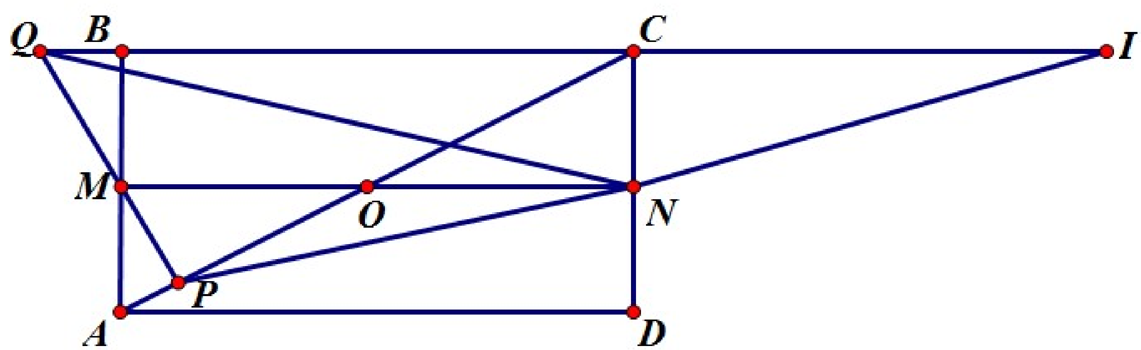
1) Khi $MP \perp AC$, hãy:

a) Tính PQ theo a và b.

b) Chứng minh $a.BP = b.PN$.

2) Chứng minh $\widehat{MNP} = \widehat{MNQ}$ (không nhất thiết MP và AC vuông góc với nhau).

Lời giải



1a) Ta có M là trực tâm giác ACQ. Suy ra $BQ.BC = BM.BA$.

Từ đó $BQ = \dfrac{BM.BA}{BC} = \dfrac{b^2}{2a} \Rightarrow CQ = BC + BQ = a + \dfrac{b^2}{2a} = \dfrac{2a^2 + b^2}{2a}$.

Ta lại có $PQ.AC = AB.QC$ nên suy ra $PQ = \dfrac{AB.QC}{AC} = \dfrac{b\left(2a^2 + b^2\right)}{2a\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Ta có các tứ giác $BMNC, BMPC$ nội tiếp nên 5 điểm B, M, P, N, C cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó $\widehat{PBM} = \widehat{PNM}, \widehat{PAM} = \widehat{PMN}$ nên các tam giác PBA và PNM đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{PB}{PN} = \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow a.BP = b.PN$.

2) Gọi I là giao điểm của PN và BC, O là giao điểm của AC và MN.

Ta có $OM = ON$ nên $CI = CQ \Rightarrow \widehat{CQN} = \widehat{CIN}$ suy ra $\widehat{MNQ} = \widehat{MNP}$ (điều phải chứng minh)

Câu V. Các số nguyên $x, x_1, x_2, ..., x_9$ thỏa mãn:

$$\left(1 + x_1\right)\left(1 + x_2\right)...\left(1 + x_9\right) = \left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right)...\left(1 - x_9\right) = x.$$

Tính $P = x.x_2.x_2...x_9$.

Lời giải

Từ đẳng thức đề bài ta suy ra $\left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)...\left(1 - x_9^2\right) = \left(1 + x_1\right)^2\left(1 + x_2\right)^2...\left(1 + x_9\right)^2$.

Nếu trong các số $x_1, x_2, ..., x_9$ có một số bằng 0 thì $P = 0$. Trong trường hợp ngược lại, tất cả các thừa số ở vế trái đều ≤ 0, do đó vế trái ≤ 0 (có 9 thừa số), trong khi đó tất cả các thừa số về phải không âm, do đó vế phải ≥ 0. Vì hai vế bằng nhau nên ta suy ra hai vế đều bằng 0.

Vậy $x = 0$, suy ra $P = 0$. Như vậy trong mọi trường hợp ta có $P = 0$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

Câu I. Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện $(x+1)(y+1)=2.$

Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy.$

Lời giải

Đặt $S=x+y$ và $T=xy.$

Từ giả thiết, ta có $S+T=1,$ suy ra

$$x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2=S^2-2T+2-\sqrt{2\left[(1-T)^2+S^2\right]}$$

$$=S^2-2(1-S)+2-\sqrt{2(S^2+S^2)}=S^2.$$

Từ đó ta có $P=S+T=1.$

Vậy giá trị của biểu thức P cần tính là 1.

Câu II. Cho các số thực không âm x, y, z thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6.$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+y+z.$

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất của P:

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$x^2y^2+1\ge 2xy,\qquad y^2z^2+1\ge 2yz,\qquad z^2x^2+1\ge 2zx.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, sau đó cộng hai vế của bất đẳng thức thu được với $x^2+y^2+z^2$, ta được $(x+y+z)^2\le x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3=9.$

Từ đó suy ra $Q\le 3.$

Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ nên ta có kết luận $\max Q=3.$

Giá trị nhỏ nhất của P: Ta sẽ chứng minh $Q\ge\sqrt{6}$ với dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $Q\ge\sqrt{6}$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2xy+x^2y^2\le x^2+y^2+x^2y^2\le x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6,$$

Từ đó suy ra $xy\le\sqrt{7}-1<2.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $yz<2,\ zx<2.$

Do đó, ta có $Q^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\ge x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6.$

Hay $Q\ge\sqrt{6}.$

Vậy $\min Q=\sqrt{6}.$

Câu III. 1) Cho a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức $M = \dfrac{(a+b)^2}{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}$.

Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.

2) Cho a, b là hai số nguyên dương, đặt $A = (a+b)^2 - 2a^2$, $B = (a+b)^2 - 2b^2$.

Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

Lời giải

1) Ta có biến đổi $M = \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}$.

Giả sử M là số nguyên, khi đó ta có $(a+b)^2$ chia hết cho a^2+b^2.

Suy ra $2ab$ chia hết cho a^2+b^2. Điều này vô lý do $0 < 2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 < a^2 + b^2$.

Vậy M không thể là số nguyên.

2) Giả sử tồn tại các số dương a, b sao cho $(a+b)^2 - 2a^2$ và $(a+b)^2 - 2b^2$ đều là số chính phương.

Trong các cặp số nguyên dương (a,b) như vậy, ta xét cặp sao cho a nhỏ nhất.

Đặt $(a+b)^2 - 2a^2 = x^2$, $(a+b)^2 - 2b^2 = y^2$ với x, y nguyên dương.

Ta có $(a+b)^2 - x^2 = 2a^2$ nên $a+b$ và x cùng cùng tính chẵn lẻ, suy ra $(a+b)^2 - 2a^2$ chia hết cho 4. Từ đó ta có $2a^2$ chia hết cho 4, suy ra a chia hết cho 2.

Chứng minh tương tự, ta cũng có chia hết cho 2, suy ra x, y chẵn.

Từ đó, ta có $\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$, $\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{y}{2}\right)^2$.

Đều là số chính phương. Do đó cặp số $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ cũng thỏa mãn yêu cầu.

Điều này mâu thuẫn với cách chọn cặp (a, b).

Vậy với mọi a, b nguyên dương, các số A, B không thể đồng thời là số chính phương.

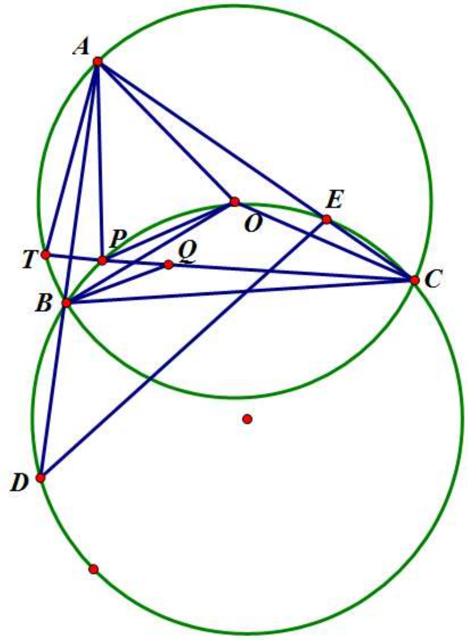
Câu IV. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q. Chứng minh rằng

1) $PB = PQ$.

2) O là trực tâm của tam giác ADE.

3) $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{BPQ} = \widehat{BOC}$ và $\widehat{PQB} = \widehat{OPQ} = \widehat{OBC}$ nên các tam giác PBQ và OCB đồng dạng (g-g). Mà $OB = OC$ nên ta có $PB = PQ$.

2) Ta có $\widehat{OBE} = \widehat{OCB} = \widehat{OAC}$, mà $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$ nên $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.
Từ đó suy ra $EA = EB$. Lại có $OA = OB$ nên $OE \perp AB$.
Chứng minh tương tự, ta cũng có $OD \perp AC$ nên O là trực tâm của tam giác ADE.
3) Gọi T là giao điểm thứ hai của CP và (O).

Ta có $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$ nên $PT = PB$.
Mà $PB = PQ$ nên $PT = PQ$.

Mà $\widehat{APQ} = 90^\circ$ nên $\widehat{PAQ} = \widehat{PAT} = 90^\circ - \widehat{ATP} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{OAC}$.

Từ đó, ta có $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.
Câu V. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen thuộc nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).
1) Xây dựng ví dụ để $S = 870$.
2) Chứng minh rằng $S \le 870$.
Lời giải
1) Chia 45 người thành 9 nhóm, nhóm thứ i có i người $(1 \le i \le 9)$. Ta xét ví dụ khi mỗi người ở một nhóm đều quen tất cả mọi người ở nhóm khác, nhưng không quen ai ở chính nhóm mình. Nói cách khác, mỗi người ở nhóm i quen đúng $45 - i$ người khác.

Khi đó $S = \frac{1}{2}(1.44 + 2.43 + ... + 9.36) = 870$.

2) Gọi a_i là số người quen đúng i người khác $\left(1 \le i \le 44\right)$. Nếu một người P quen i người thì anh ta không quen ai trong a_i người này, nghĩa là P quen nhiều nhất $45 - a_i$ người, hay $i \le 45 - a_1$ suy ra $a_i \le 45 - i$. Ta có $a_1 + ... + a_{44} = 45$ và

$$S = \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + ... + 44a_{44}\right) \le \frac{1}{2}\left(36a_1 + 36a_2 + ... + 36a_{36} + 37a_{37} + ... + 44a_{44}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(36\left(a_1 + a_2 + ... + a_{44}\right) + a_{37} + 2a_{38} + ... + 8a_{44}\right) \le \frac{1}{2}\left(36.45 + 1.8 + 2.7 + ... + 8.1\right) = 870.$$

Khẳng định được chứng minh.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Cho a là số thực khác 1 và -1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}$.

b) Cho các số thực x, y, a thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Lời giải

a) Ta có $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{\dfrac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\dfrac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}}\div\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}$

$$=\frac{4(a^2-a+1)}{4(a^2+a+1)}.\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}.\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}-\frac{2a}{a-1}=\frac{a+1}{a-1}-\frac{2a}{a-1}=\frac{1-a}{a-1}=-1.$$

Vậy $P=-1$.

b) Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$.

Do $s,t\ge 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$.

Suy ra $s+t=\sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu II. Trên quãng đường dài 20 km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tối của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quáng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi a (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC, b (km/h) là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Rõ ràng $a>1, b>0$.

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là $2a$ (km) và độ dài quãng đường BC là $2b$ (km).

Do $AC+BC=AB$ nên ta có $2a+2b=20$, tức $a+b=10\,(1)$

Thời gian An đi trên quãng đường BC là $\dfrac{2b}{a-1}$ (giờ).

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là $\dfrac{2a}{b-1}$ (giờ).

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là $\dfrac{4}{5}$ (giờ) (48 phút $=\dfrac{4}{5}$ giờ)

Nên $\dfrac{2a}{b+1}-\dfrac{2b}{a-1}=\dfrac{4}{5}$ hay $\dfrac{a}{b+1}+1-1-\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{2}{5}$.

Một cách tương đương, ta có $\dfrac{a+b+1}{b+1}-\dfrac{a+b-1}{a-1}=\dfrac{2}{5}$. (2)

Từ (1), ta có $b=10-a$.

Thay vào phương trình (2), ta được $\dfrac{11}{11-a}-\dfrac{9}{a-1}=\dfrac{2}{5}$, hay $(a+44)(a-6)=0$.

Do $a>1$ nên ta có $a=6$, suy ra $b=4$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là 6 (km/h).

Câu III. Cho các đa thức $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x)=0$.

b) Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$.

Chứng minh rằng $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Lời giải

a) Để 1 và a là nghiệm thì ta phải có $P(1)=1+a+b=0$, $P(a)=a^2+a^2+b=0$.

Rút $b=-1-a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2-a-1=0$.

Từ đó $a=1$ hoặc $a=-\dfrac{1}{2}$, tương ứng $b=-2$ hoặc $b=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy có hai cặp (a,b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x)=0$ nên $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(x)=(x-x_3)(x-x_4)$.

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành $(x_3-x_1)(x_3-x_2+x_1-x_4)+(x_4-x_1+x_2-x_3)(x_4-x_2)=0$.

Hay $(x_3-x_2+x_1-x_4)(x_3-x_1+x_2-x_4)=0$.

Một cách tương đương, ta có $(x_1-x_2)^2=(x_3-x_4)^2$ hay $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Câu IV. Cho đường tròn (O), bán kính R, ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC (A_1 thuộc BC, B_1 thuộc CA, C_1 thuộc AB). Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HC_1.A_1C = A_1C_1.HB_1$.

b) Chứng minh rằng ba điểm B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R.

Lời giải

a) Hai tam giác AB_1H và AA_1C có $\widehat{AB_1H} = \widehat{AA_1C} = 90°$ và chung góc $\widehat{HAB_1}$ nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra $\dfrac{HB_1}{A_1C} = \dfrac{AH}{AC}$. (1)

Tứ giác AC_1A_1C có $\widehat{AC_1C} = \widehat{AA_1C} = 90°$ nên nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HC_1A_1} = \widehat{CAH}$ (cùng chắn cung A_1C của đường tròn (AC_1A_1C)) và $\widehat{HA_1C_1} = \widehat{HCA}$ (cùng chắn cung AC_1 của đường tròn (AC_1A_1C)).

Từ đó, ta có $\Delta C_1A_1H \backsim \Delta ACH$ (g-g). Suy ra $\dfrac{HC_1}{A_1C_1} = \dfrac{HA}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $\dfrac{HB_1}{A_1C} = \dfrac{HC_1}{A_1C_1}$ hay $HB_1.A_1C_1 = HC_1.A_1C$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $OB' \perp A'C'$. (3)

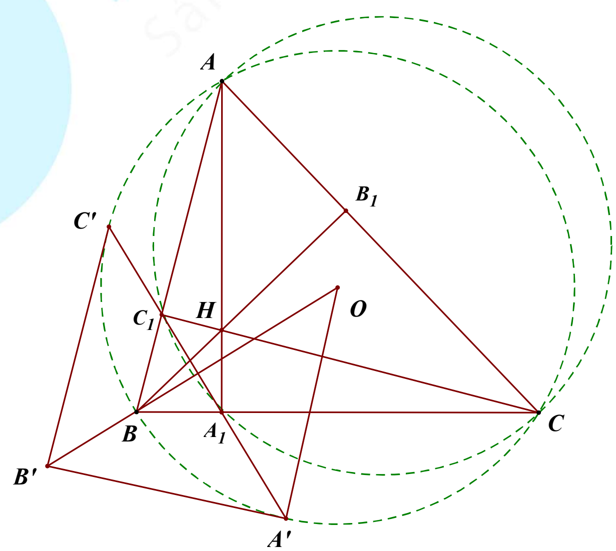
Ta sẽ chứng minh $OB \perp A'C'$, hay $OB \perp A_1C_1$.

Do tam giác OBC cân tại O nên $\widehat{OBA_1} = \dfrac{180° - \widehat{BOC}}{2} = \dfrac{180° - 2\widehat{BAC}}{2} = 90° - \widehat{BAC}$.

Mặt khác, do tứ giác AC_1AC nội tiếp nên $\widehat{C_1A_1B} = \widehat{BAC}$ (cùng bù với $\widehat{C_1A_1C}$).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $\widehat{OBA_1} = \widehat{C_1A_1B} = 90° - \widehat{BAC} = 90^0$.

Do đó $OB \perp A_1C_1$, hay $OB \perp A'C'$. Kết hợp với (3), ta suy ra B, B', O thẳng hàng.



c) Khi tam giác ABC đều thì BO đi qua B_1, B_1 là trung điểm của AC và $A'C' \perp BO$.

Gọi K là giao điểm BO và $A'C_1$ thì K là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác AB_1C_1 đều và $OB \perp A_1C_1$ nên K cũng là trung điểm của A_1C_1.

Do tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra $OC_1 = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$.

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác OC_1B vuông tại C_1 có C_1K là đường cao, ta có $OC_1^2 = OK.OB$. Suy ra $OK = \frac{OC_1^2}{OB} = \frac{1}{4}R$.

Từ đây, sử dụng định lý Pythagoras trong tam giác $A'KO$ vuông tại K, ta có

$$A'K = \sqrt{OA'^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

Vậy $A'C' = 2A'K = \frac{R\sqrt{15}}{2}$.

Câu V. Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46.$$

Lời giải

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng $P = x(x-2)y(y+6) + 13x(x-2) + 4y(y+6) + 46$.

Đặt $a = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ và $b = y(y-+6) = (y+3)^2 - 9$ thì ta có

$P = ab + 13a + 4b + 46 = (a+4)(b+13) - 6 = \left[(x-1)^2 + 3\right]\left[(y+3)^2 + 4\right] - 6 \geq 3.4 - 6 = 6$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = -3$. Vậy $\min P = 6$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho hai số thực phân biệt a và b thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=a^2b^2\left(ab-3\right)$.

Tính giá trị của biểu thức $T=a+b-ab$.

Lời giải

Nếu $a=0$ thì ta có $b^3=0$ suy ra $b=0=a$, vô lý vì $a\neq b$. Do đó $a\neq 0$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $b\neq 0$. Từ đó giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}=1-\dfrac{3}{ab}$.

Đặt $x=\dfrac{1}{a}$ và $y=\dfrac{1}{b}$ thì ta có $x\neq y$ và $x^3+y^3=1-3xy$.

Sử dụng kết quả quen thuộc $A^3+B^3+C^3=\left(A+B+C\right)\left(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA\right)$, ta được

$$0=x^3+y^3-1+3xy=x^3+y^3+\left(-1\right)^3-3.x.y.\left(-1\right)=\left(x+y-1\right)\left(x^2+y^2+1-xy+x+y\right).$$

Mặt khác ta lại có $x^2+y^2+1-xy+x+y=\dfrac{1}{2}\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(x-y\right)^2\right]>0$.

Nên từ kết quả ở trên, ta suy ra $x+y=1$, tức là $a+b=ab$.

Vậy $T=0$.

Câu II. Cho các đa thức $P\left(x\right)=m_1x^2+n_1x+k_1$, $Q\left(x\right)=m_2x^2+n_2x+k_2$, $R\left(x\right)=m_3x^2+n_3x+k_3$ với m_i, n_i, k_i là các số thực và $m_i>0,\ i=1,2,3$. Giả sử phương trình $P\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2; phương trình $Q\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt b_1, b_2; phương trình $R\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt c_1, c_2 thỏa mãn

$$P\left(c_1\right)+Q\left(c_1\right)=P\left(c_2\right)+Q\left(c_2\right),$$
$$P\left(b_1\right)+R\left(b_1\right)=P\left(b_2\right)+R\left(b_2\right),$$
$$Q\left(a_1\right)+R\left(a_1\right)=Q\left(a_2\right)+R\left(a_2\right).$$

Chứng minh rằng $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$.

Lời giải

Sử dụng định lý Viét, ta có $S_1=a_1+a_2=-\dfrac{n_1}{m_1}$, $S_2=b_1+b_2=-\dfrac{n_2}{m_2}$, $S_3=c_1+c_2=-\dfrac{n_3}{m_3}$.

Ta có $P\left(c_1\right)-P\left(c_2\right)=m_1\left(c_1^2-c_2^2\right)+n_1\left(c_1-c_2\right)=\left(c_1-c_2\left[m_1\left(c_1+c_2\right)+n_1\right]\right)=m_1\left(c_1-c_2\right)\left(S_3-S_1\right)$.

Tương tự, ta cũng có $Q\left(c_1\right)-Q\left(c_2\right)=m^2\left(c_1-c_2\right)\left(S_3-S_2\right)$.

Do $P\left(c_1\right)-P\left(c_2\right)+Q\left(c_1\right)-Q\left(c_2\right)=0$ và $c_1\neq c_2$ nên từ hai biến đổi trên, ta suy ra

$$m_1\left(S_3-S_1\right)+m_2\left(S_3-S_2\right)=0.\ (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$m_2(S_1-S_2)+m_3(S_1-S_3)=0. \ (2)$$

$$m_3(S_2-S_3)+m_1(S_2-S_1)=0. \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3), có thể thấy vai trò của S_1, S_2, S_3 là như nhau. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $S_1=\max\{S_1, S_2, S_3\}$. Khi đó, ta có $S_1-S_2\ge 0$ và $S_1-S_3\ge 0$. Lại có $m_2, m_3>0$ nên $VT_{(2)}\ge 0$. Để xảy ra dấu đẳng thức như (2) thì dấu bằng trong các đánh giá phải xảy ra, tứ ta phải có $S_1=S_2=S_3$. Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Câu III. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2y^2-4x^2y+y^3+4x^2-3y^2+1=0$.

b) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

Lời giải

a) Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^2(y-2)^2+y^3-3y^2+4=3$

hay $(y-2)^2(x^2+y+1)=3$.

Suy ra $(y-2)^2=1$ và $x^2+y+1=3$. Giải ra, ta được $x=\pm1$ và $y=1$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $(1;1)$ và $(-1;1)$.

b) Do $a^3+b^3+c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x\equiv \pm1, \pm2, \pm3 \pmod 7$, suy ra $x^3\equiv \pm1 \pmod 7$.

Do đó $a^3\equiv \pm1 \pmod 7$, $b^3\equiv \pm1 \pmod 7$, $c^3\equiv \pm1 \pmod 7$.

Suy ra $a^3+b^3+c^3\equiv -3, -1, 1, 3 \pmod 7$, tức $a^3+b^3+c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn.

Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $(2;7)=1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu IV. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB>AC$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A, B. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh rằng B, D, E, F là bốn đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

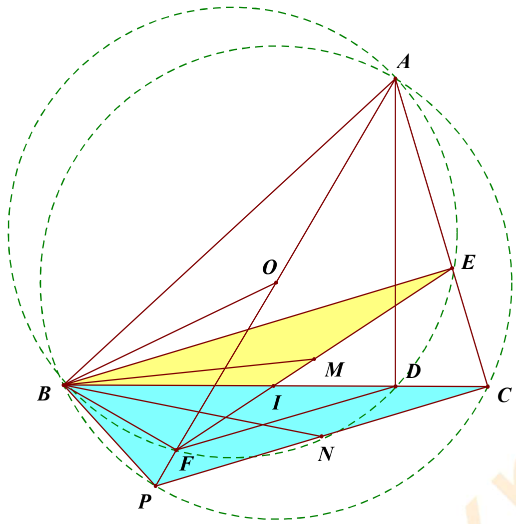
c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O), M và N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính số đo góc BMN.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{AFB}=\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90^\circ$ nên năm điểm A, B, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lại có $\widehat{DAE}=90^\circ-\widehat{ACB}$ và $\widehat{FAB}=\widehat{OAB}=\dfrac{180^\circ-\widehat{AOB}}{2}=\dfrac{180^\circ-2\widehat{ACB}}{2}=90^\circ-\widehat{ACB}$

Nên $\widehat{FAB}=\widehat{DAE}$. Đây là góc nội tiếp chắn các cung tương ứng là BF và DE của đường tròn $(ABFDE)$, do đó $FB=DE$. Tứ giác $BFDE$ nội tiếp và có $BF=DE$ nên là hình thang cân.



b) Gọi I là giao điểm của EF và BC. Do tứ giác $BFDE$ là hình thang cân nên $BI=IE$. Suy ra tam giác BIE cân tại I. Từ đó, ta có $\widehat{IBE}=\widehat{IEB}$.

Lại có $\widehat{IBE}=90^\circ-\widehat{ICE}$ và $\widehat{IEB}=90^\circ-\widehat{IEC}$ nên $\widehat{ICE}=\widehat{IEC}$.

Suy ra tam giác IEC cân tại I, tức ta có $IC=IE=IB$. Vậy EF đi qua trung điểm I của BC.

c) Do tứ giác $ABFE$ nội tiếp nên $\widehat{BFE}=180^\circ-\widehat{BAC}$.

Lại có $\widehat{BPC}=180^\circ-\widehat{BAC}$ (do tứ giác $APBC$ nội tiếp) nên $\widehat{BFE}=\widehat{BPC}$. (1)

Do $BFDE$ là hình thang cân nên $DF\,//\,BE$. Mà $BE\perp AC$ nên $DF\perp AC$.

Lại có $PC\perp AC$ nên $DF\,//\,PC$. Suy ra $\widehat{BCP}=\widehat{BDF}=\widehat{BEF}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\Delta BEF\backsim\Delta BCP$ (g-g).

Lại có M là trung điểm của EF và N là trung điểm của CP nên từ kết quả trên, ta cũng suy ra $\Delta BEM\backsim\Delta BCN$. Từ đó, ta có $\Delta NBC\backsim\Delta MBE$ (3) và $\dfrac{BN}{BM}=\dfrac{BC}{BE}$. (4)

Từ (3), ta suy ra $\widehat{CBE}=\widehat{MBN}$. Kết hợp với (4), ta được $\Delta BMN\backsim\Delta BEC$.

Do đó $\widehat{BMN}=\widehat{BEC}=90^\circ$.

Câu V. Cho tập hợp X thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$ của X sao cho mỗi tập con $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$ có đúng ba phần tử và hai tập A_i, A_j đều có đúng một phần tử chung với mọi $1\le i<j\le 2019$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$ sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

b) Số phần tử của X phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

Lời giải

a) Xét tập hợp A_1 có ba phần tử a,b,c. Mỗi một tập hợp A_i với $i=2,...,2019$ sẽ phải có chung với A_1 đúng một phần tử. Ta chia các tập hợp A_i với $i=2,...,2019$ tạo thành ba nhóm. Nhóm thứ nhất gồm các tập hợp chứa phần tử a, nhóm thứ hai gồm các tập hợp chứa phần tử b và nhóm thứ ba gồm các tập hợp chứa phần tử c. Ba nhóm này tổng hợp lại có 2018 tập hợp, do đó phải có một nhóm chứa ít nhất 673 tập hợp. 673 tập hợp này cùng với A_1 sẽ tạo thành 674 tập hợp có đúng một phần tử chung. Chỉ cần lấy 4 tập hợp trong chúng ra sẽ được 4 tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán. (Chú ý, giao của bốn tập hợp không thể có quá một phần tử).

b) Xét bốn tập hợp A_1, A_2, A_3, A_4 có chung phần tử a. Ta chứng minh tất cả các tập hợp còn lại đều có chung phần tử a. Thật vậy, giả sử tồn tại tập hợp A không chứa a. Khi đó mỗi một tập trong các A_1, A_2, A_3, A_4 sẽ có chung với A một phần tử (khác a). Vì A chỉ có ba phần tử nên theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai tập hợp trong chúng có chung phần tử chung với A. Chẳng hạn A_1, A_2 có chung phần tử b với A. Nhưng lúc này ta có điều mâu thuẫn vì khi đó A_1, A_2 có chung hai phần tử a và b. Vậy tất cả các tập hợp đều có chung phần tử a. Do giao của hai tập hợp bất kỳ có đúng một phần tử nên tất cả các phần tử khác a còn lại đều đôi một khác nhau, suy ra $\left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{2019}\right| \ge 1+2019\times 2=4039$.

Từ đó suy ra số phần tử của X không ít hơn 4039.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{8x}{4-x}\right)\div\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$ với $x>0, x\neq 4$ và $x\neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các số thực m sao cho bất đẳng thức $m\left(\sqrt{x}-3\right)P>x+1$ đúng với mọi $x>9$.

Lời giải

a) Với điều kiện $x>0, x\neq 4$ và $x\neq 9$, ta có

$$=\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\frac{8x}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}=\frac{4\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)+8x}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}=\frac{4\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}=\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$

Và $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}$

Do đó $P=\dfrac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\div\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}=\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}$.

Vậy với $x>0, x\neq 4$ và $x\neq 9$ thì $P=\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}$.

b) Theo câu a), ta cần tìm tất cả các số thực m sao cho bất đẳng thức $m\left(\sqrt{x}-3\right)\cdot\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}>x+1$

đúng với mọi $x>9$, hay ta phải có $4m>\dfrac{x+1}{x}\Leftrightarrow 4m-1>\dfrac{1}{x}$.

Trước hết, ta sẽ chứng minh với $m\geq\dfrac{5}{18}$ thì bất đẳng thức trên được thỏa mãn với mọi số thực

$x>9$. Thật vậy, với $m\geq\dfrac{5}{18}$ thì ta có $4m-1-\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{10}{9}-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-9}{9x}>0,\ \forall x>9$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh không tồn tại số thực $m<\dfrac{5}{18}$ để bất đẳng thức (1) đúng với mọi $x>9$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $m_0<\dfrac{5}{18}$ sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi $x>9$. Rõ ràng $4m_0-1>0$.

Chọn $x=x_0=\dfrac{1}{4m_0-1}$ thì rõ ràng $x_0>\dfrac{1}{4\cdot\dfrac{5}{18}-1}=9$. Khi đó, theo bất đẳng thức (1), ta phải có

$4m_0-1>\dfrac{1}{x_0}=4m_0-1$, mâu thuẫn.

Từ các lý luận trên, ta suy ra $m \ge \frac{5}{18}$ chính là điều kiện cần tìm. Bình luận. Có lẽ, sẽ có nhiều thí sinh từ bất đẳng thức $4m-1>\frac{1}{x}$ với $x>9$ sẽ "suy ra trực tiếp" luôn $4m-1\ge\frac{1}{9}$. Tuy nhiên, viết như vậy là không chặt chẽ.

Ở chương trình cấp ba, khi đã học về giới hạn và liên tục, các em học sinh có thể suy ra kết quả nhờ lấy giới hạn $x \to 9^+$. Tuy nhiên, với các em học sinh cấp hai, việc trình bày chặt chẽ để suy ra điều kiện chặn $m \ge \frac{5}{18}$ khá vất vả. Lời giải trên sử dụng phương pháp phản chứng để có một lời giải chặt như vậy.

Có thể thấy câu này "gài" khá hiểm hóc, có lẽ sẽ có nhiều thí sinh bị trừ điểm khi làm câu này.

Câu II. a) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y=5x+9$ và $(d_2): y=\left(m^2-4\right)x+3m$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $\left(x_1^2-2mx_1+2m-1\right)(x_2-2)\le 0$.

c) Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng vận tốc của mỗi ô tô là không đổi trên cả quãng đường AB.

Lời giải

a) Để (d_1) và (d_2) song song với nhau thì ta phải có: $\begin{cases} m^2-4=5, \\ 3m\ne 9. \end{cases}$

Hệ này có duy nhất một nghiệm là $m=-3$. Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn là $m=-3$.

b) Phương trình đã cho là phương trình bậc hai ẩn x. Vì biệt thức của phương trình

$\Delta'=(m-1)^2-(2m-5)=(m-2)^2+2>0$

với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Do x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có $x_1^2-2(m-1)x_1+2m-5=0$, hay

$x_1^2-2mx_1+2m-1=-2x_1+4=-2(x_1-2)$.

Do đó, điều kiện đã cho có thể được viết lại thành $-2(x_1-2)(x_2-2)\le 0$, hay $(x_1-2)(x_2-2)\ge 0$.

Một cách tương đương, ta phải có: $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0.$

Áp dụng định lý Vieta, ta có $x_1+x_2=2(m-1)$ và $x_1x_2=2m-5$. Do đó, bất đẳng thức (1) có thể được viết lại thành $2m-5-4(m-1)+4\ge 0$, từ đó ta phải có $m\le\frac{3}{2}$.

Vậy $m\le\frac{3}{2}$ chính là điều kiện cần tìm.

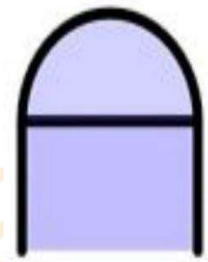
c) Gọi vận tốc của ô tô thứ hai là $x(\text{ km/h})$ (điều kiện: $x>0$). Khi đó, vận tốc của ô tô thứ nhất là $x+10(\text{ km/h})$. Khi đó, Thời gian để ô tô thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{120}{x+10}$ giờ.

Vì ô tô thứ nhất đến sớm hơn ô tô thứ hai 0,4 giờ nên ta có

$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=0,4 \Leftrightarrow \frac{1200}{x(x+10)}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow x(x+10)=3000 \Leftrightarrow (x+5)^2=3025.$

Từ đó $x+5=55$, tức $x=50(\text{ km/h})$, thỏa mãn điều kiện $x>0$. Vậy vận tốc của hai ô tô đã cho lần lượt là $60(\text{ km/h})$ và $50(\text{ km/h})$.

Câu III. Bác An muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài các khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình vẽ bên dưới, bỏ qua độ rộng của khuôn gỗ) là 8 m. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa số có diện tích lớn nhất.



Lời giải

Gọi $a(\text{ m})$ là đường kính của nửa hình tròn (điều kiện: $a>0$). Gọi $b(\text{ m})$ là độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật. Theo giả thiết, ta có $2b+a+\frac{a\pi}{2}=8$, hay $\left(1+\frac{\pi}{2}\right)a+2b=8.$

Diện tích của cửa sổ mà bác An muốn làm là

$$S=ab+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=a\left(\frac{\pi}{8}a+b\right)=\frac{1}{2}a\left(\frac{\pi}{4}a+2b\right)=\frac{1}{2}a\left[\frac{\pi}{4}a+8-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)a\right]=\frac{1}{2}a\left[8-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta có

$$\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a\left[8-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a\right]\le\left[\frac{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a+8-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a}{2}\right]^2=16$$

Do đó $a\left[8-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a\right]\le\frac{16}{1+\frac{\pi}{4}}=\frac{64}{\pi+4}$. Từ đây, ta suy ra $S\le\frac{32}{\pi+4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a=8-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a$, tức $a=\frac{16}{\pi+4}(\text{ m})$. Khi đó

$$2b=8-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)a=8-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{16}{\pi+4}=\frac{16}{\pi+4},$$

tức $b=\frac{8}{\pi+4}(\text{ m})$. Vậy diện tích cửa sổ bác An muốn làm lớn nhất là $\frac{32}{\pi+4}\left(\text{ m}^2\right)$, điều này đạt được khi và chỉ khi $a=\frac{16}{\pi+4}(\text{ m})$ và $b=\frac{8}{\pi+4}(\text{ m})$.

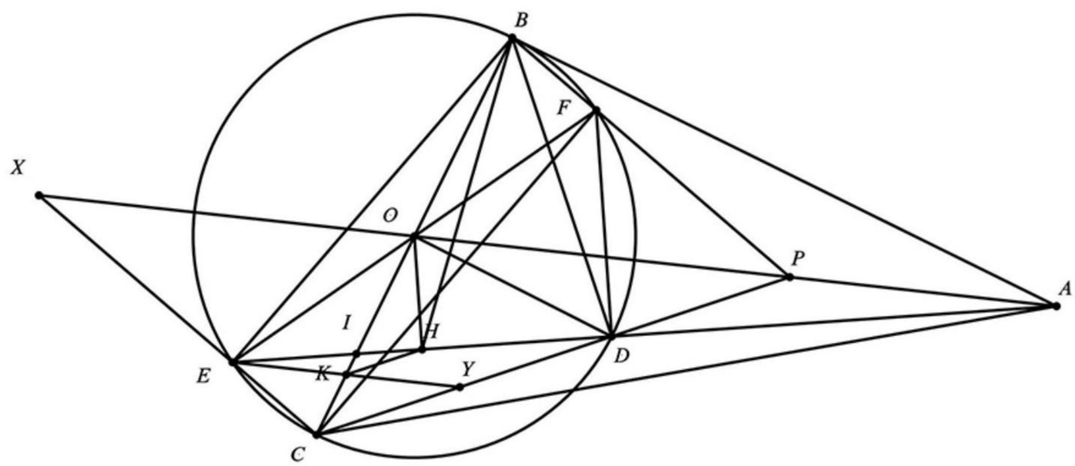
Câu IV. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Qua A, kẻ tiếp tuyến AB đến đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Kẻ đường kính BC của đường tròn (O). Trên đoạn CO, lấy điểm I khác C và D. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn DE.

a) Chứng minh rằng $AB \cdot BE = BD \cdot AE$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm K. Chứng minh rằng $HK // CD$.

Lời giải

a) Hai tam giác ABD và AEB có góc chung $\widehat{BAD}$ và $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp cùng chắn cung đó) nên tam giác ABD đồng dạng với tam giác AEB. Suy ra $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AE}{BE}$, hay $AB \cdot BE = BD \cdot AE$.



b) Theo đề bài, ta có $\widehat{ABO} = 90^\circ$ (AB là tiếp tuyến của (O)) và $\widehat{AHO} = 90^\circ$ (H là trung điểm dây cung DE của (O)) nên $\widehat{ABO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $ABHO$ nội tiếp đường tròn đường kính AO. Từ đó $\widehat{OBH} = \widehat{OAH}$.

Mặt khác, với chú ý $EK // AO$, ta có $\widehat{KEH} = \widehat{OAH} = \widehat{OBH} = \widehat{KBH}$. Suy ra tứ giác $BEKH$ nội tiếp. Kết hợp với tứ giác $BECD$ nội tiếp, ta có $\widehat{HKB} = \widehat{HEB} = \widehat{DEB} = \widehat{DCB}$. Suy ra $HK // CD$.

c) Gọi Y là giao điểm của EK và CD, X là giao điểm của EC và AO. Vì tứ giác $BEKH$ nội tiếp nên $\widehat{EKB} = \widehat{EHB}$. Khi đó, hai tam giác EKC và BHD có $\widehat{ECK} = \widehat{ECB} = \widehat{EDB} = \widehat{HDB}$ và $\widehat{EKC} = 180^\circ - \widehat{EKB} = 180^\circ - \widehat{EHB} = \widehat{BHD}$ nên đồng dạng với nhau (g-g). Suy ra $\dfrac{EK}{KC} = \dfrac{BH}{HD}$.

Vì $\widehat{KCY} = \widehat{BCD} = \widehat{BED} = \widehat{BEH}$ và $\widehat{CKY} = \widehat{EKB} = \widehat{EHB}$ nên hai tam giác CKY và EHB đồng dạng với nhau (g-g). Suy ra $\dfrac{KY}{KC} = \dfrac{HB}{HE}$.

Vì H là trung điểm DE nên $\dfrac{HB}{HE} = \dfrac{BH}{HD}$. Do đó $\dfrac{EK}{KC} = \dfrac{KY}{KC}$, suy ra $KE = KY$. Sử dụng định lý Thales, với chú ý $EY // XP$ (do $EK // AO$) và $KE = KY$, ta suy ra $OP = OX$. Do đó, tứ giác $BPCX$ là hình bình hành, suy ra $BP // CX$ hay $BP // CE$. Mà $CE \perp BE$ nên $BP \perp BE$. Do F là giao điểm của BP và EO nên $\widehat{EBF} = 90^\circ$, dẫn đến EF là đường kính của (O). Vậy tứ giác $BFCE$ là hình chữ nhật.

Câu V. Tìm tất cả các số thực x,y,z với $0<x,y,z\le 1$ thỏa mãn

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}=\frac{3}{x+y+z}$$

Lời giải

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $1+y+zx\ge x^2+xy+xz=x\left(x+y+z\right)$. Suy ra

$$\frac{x}{1+y+zx}\le\frac{x}{x\left(x+y+z\right)}=\frac{1}{x+y+z}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $\dfrac{y}{1+z+xy}\le\dfrac{1}{x+y+z},\ \dfrac{z}{1+x+yz}\le\dfrac{1}{x+y+z}$.

Do đó: $\dfrac{x}{1+y+zx}+\dfrac{y}{1+z+xy}+\dfrac{z}{1+x+yz}\le\dfrac{3}{x+y+z}$.

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức trên phải xảy ra. Nghĩa là, dấu đẳng thức trong từng đánh giá phụ cũng phải xảy ra, tức ta phải có $x=y=z=1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một bộ số (x,y,z) thỏa mãn yêu cầu là $(1,1,1)$.

Cách 2. Từ giả thiết, ta có $(1-x)(1-z)\ge 0$, hay $1+xz\ge x+z$. Từ đó suy ra $\dfrac{x}{1+y+zx}\le\dfrac{x}{x+y+z}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\dfrac{y}{1+z+xy}\le\dfrac{y}{x+y+z},\ \dfrac{z}{1+x+yz}\le\dfrac{z}{x+y+z}$.

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được $\dfrac{x}{1+y+zx}+\dfrac{y}{1+z+xy}+\dfrac{z}{1+x+yz}\le 1$.

Mặt khác, ta cũng có $\dfrac{3}{x+y+z}\ge 1$. Do đó $\dfrac{x}{1+y+zx}+\dfrac{y}{1+z+xy}+\dfrac{z}{1+x+yz}\le 1\le\dfrac{3}{x+y+z}$.

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức trên phải xảy ra. Nghĩa là, dấu đẳng thức trong từng đánh giá phụ cũng phải xảy ra, tức ta phải có $x=y=z=1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một bộ số (x,y,z) thỏa mãn yêu cầu là $(1,1,1)$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2x^3=3y^3=4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2+3y^2+4z^2}=2+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6} \\ x.y.z>0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Lời giải

Đặt $2x^3=3y^3=4z^3=t$

Ta có: $t^3=24(x.y.z)^3\Rightarrow t>0\Rightarrow x,y,z>0$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{2x^2+3y^2+4z^2}=\sqrt[3]{t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$. Mặt khác, $\sqrt[3]{2}\cdot x=\sqrt[3]{3}\cdot y=\sqrt[3]{4}\cdot z=\sqrt[3]{t}$.

$\Rightarrow 2+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\sqrt[3]{t}$

Vậy $\sqrt[3]{t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. (Do $t>0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$).

Câu II. Xét phương trình bậc $2: ax^2+bx+c=0(1)$, trong đó a,b,c là các số nguyên dương. Biết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn: phương trình (1) có nghiệm; số $\overline{a2020b}$ chia hết cho 12 ; số c^3+3 chia hết cho $c+3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $a+b+c$.

Lời giải

Vì $\overline{a2020b}$ chia hết cho 12 nên $\begin{cases} a+b+4\vdots 3 \\ b\vdots 4 \end{cases}\Rightarrow b\in\{4;8\}\Rightarrow b\le 8$.

Lại có, $b^2-4ac\ge 0$ nên $ac\le 16\Rightarrow c\le 16$ (Vì a là số nguyên dương).

Mà $c^3+3\vdots c+3; c^3+3=c^3+27-24=(c+3)(c^2-3c+9)-24$ nên $24\vdots c+3$.

Vì c là số nguyên dương và $c\le 16$ nên ta có $c+3\in\{4;6;8;12\}\Rightarrow c\in\{1;3;5;9\}$.

Xét các trường hợp sau:

$b=8$ thì $\begin{cases} ac\le 16 \\ a\vdots 3; c\in\{1;3;5;9\} \end{cases}$

Khi đó $a+c$ lớn nhất khi $(a;c)=(9;1)\Rightarrow a+b+c=18$.

2) $b=4$ thì $\begin{cases} ac \le 4 \\ a \equiv 1(\text{mod}3); c \in \{1;3;5;9\} \end{cases}$

Trong trường hợp này chỉ có cặp $(a;c)$ là $(1;1),(1;3),(4;1)$ thỏa mãn; khi đó $a+c$ lớn nhất khi $(a;c)=(4;1) \Rightarrow a+b+c=9$.

Vậy giá trị lớn nhất của $a+b+c=18$.

Câu III. Tìm số nguyên a bé nhất sao cho: $x^4+2x^2-4x+a \ge 0$ với mọi số thực x.

Lời giải

Do $x^4+2x^2-4x+a \ge 0$ đúng với mọi số thực x. Xét $x=\frac{1}{2}$ ta có:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+a \ge 0$$

$$\Rightarrow a \ge \frac{23}{16} \Rightarrow a \ge 2 \text{ (do } a \text{ nguyên).}$$

Ta chứng minh $a=2$ thỏa mãn điều kiện bài toán,

Thật vậy, ta có: $x^4+2x^2-4x+2=\left(x^2-1\right)^2+(2x-1)^2 \ge 0$ (đúng).

Vậy $a_{\min}=2$.

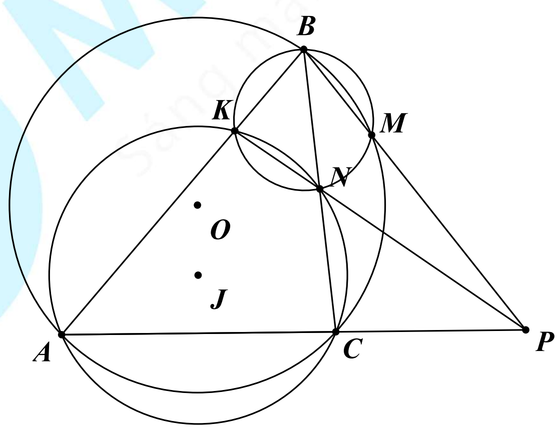
Câu IV. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $AB>BC$. Một đường tròn đi qua hai đỉnh A,C của tam giác ABC lần lượt cắt các cạnh AB,BC tại hai điểm K,N (K,N khác các đỉnh của tam giác ABC). Giả sử đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt nhau tại giao điểm thứ hai là $M(M$ khác $B)$. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng BM,KN,AC đồng quy tại điểm P

b) Tứ giác $MNCP$ nội tiếp

c) $BM^2-PM^2=BK.BA-PC.PA$

Lời giải



a) Gọi P là giao điểm của KN với AC, BP cắt (O) tại M'.

Do tứ giác $ABM'C$ nội tiếp $\Rightarrow \triangle PCM' \sim \triangle PBA(g.g) \Rightarrow \frac{PC}{PB}=\frac{PM'}{PA} \Rightarrow PB.PM'=PA.PC$.

Chứng minh tương tự, tứ giác $AKNC$ nội tiếp $\Rightarrow PA.PC=PK.PN$

$\Rightarrow PK.PN = PB \cdot PM' \Rightarrow \dfrac{PK}{PB} = \dfrac{PM'}{PN} \Rightarrow \Delta PKB \backsim \Delta PM'N(c.g.c) \Rightarrow \widehat{PM'N} = \widehat{PKB}$

$\Rightarrow KBM'N$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow BM, KN, AC$ đồng quy tại P

b) Do $AKNC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CNP} = \widehat{BAC}$.

Do $ABMC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CMP} = \widehat{BAC}$.

Từ đây suy ra $\widehat{CNP} = \widehat{CMP} \Rightarrow CNMP$ là tứ giác nội tiếp.

c) Từ $CNMP$ là tứ giác nội tiếp, ta có $BM.BP = BN.BC$ (do $\triangle BNM \sim \triangle BPC$)

Mặt khác, $BN.BC = BK.BA$ (do $\Delta BKB \backsim \Delta BCA$) $\Rightarrow BM.BP = BK.BA$

Từ câu a ta có: $PM.PB = PC.PA$

$\Rightarrow BK.BA - PC.PA = BM.BP - PM.BP$

$= BP.(BM - PM) = (BM + PM)\cdot(BM - PM) = BM^2 - PM^2$ (đpcm)

Câu V. Cho hai số A, B cùng có 2020 chữ số. Biết rằng: số A có đúng 1945 chữ số khác 0 , bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 15 chữ số ngoài cùng về bên phải; số B có đúng 1954 chữ số khác 0 , bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 24 chữ số ngoài cùng về bên phải. Chứng minh rằng ƯCLN (A, B) là một số có không quá 1954 chữ số.

Lời giải

Viết $A = \overline{x00\ldots0y}$ và $B = \overline{z00\ldots0t}$. Với x, z có 1930 chữ số và y có 15 chữ số, t có 24 chữ số.

Ta có: $A = 10^{90}.x + y$ và $B = 10^{90}.z + t$.

Đặt $d = UCLN(A, B)$ ta có $x \cdot B - z.A$ chia hết cho $d \Rightarrow xt - yz$ chia hết cho d.

Dễ thấy $xt > yz$ nên $xt - yz > 0 \Rightarrow d \le xt - yz < xt$.

Lại có: $x < 10^{1930}, t < 10^{24}$ nên $d < 10^{1930} \cdot 10^{24} = 10^{1954} \Rightarrow d$ có không quá 1954 chữ số.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $P=\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với ($a\ge 0$; $b\ge 0$; $a\ne b$).

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng $P\ge 0$.

Lời giải

a) Với $a\ge 0, b\ge 0, a\ne b$, ta có:

$$P=\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\left(\frac{a+2\sqrt{ab}+b-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

b) Chứng minh rằng $P\ge 0$.

Với $a\ge 0, b\ge 0, a\ne b\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{ab}\ge 0\\ a-\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}>0\end{cases}$

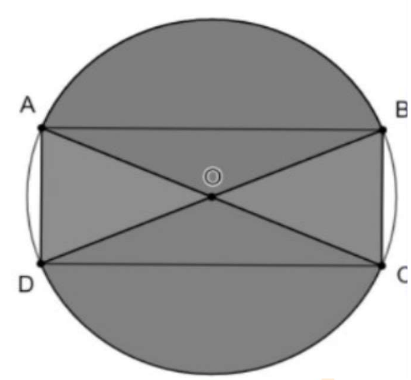
Suy ra $P=\dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}\ge 0$.

Vậy $P\ge 0$ (đpcm).

Câu II. a) Chứng minh rằng: Với mọi m, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$x^2-(2m+1)x+m^2+3=0 \quad (1);\ x^2-mx+4m-11=0 \ (2)$$

b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm O, bán kính bằng 1,6m. Giả sử hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng 1,6m sao cho $\widehat{BOC}=45^\circ$ (Hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần tô đậm là 150 nghìn đồng/m² và phần còn lại là 200 nghìn đồng/m². Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho $\pi=3{,}14$.



Lời giải

a) Phương trình: $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0 \quad (1)$ là phương trình bậc hai ẩn x, có biệt thức

$\Delta_1=(2m+1)^2-4(m^2+3)=4m-11$.

Phương trình: $x^2-mx+4m-11=0 \ (2)$ là phương trình bậc hai ẩn x, có biệt thức

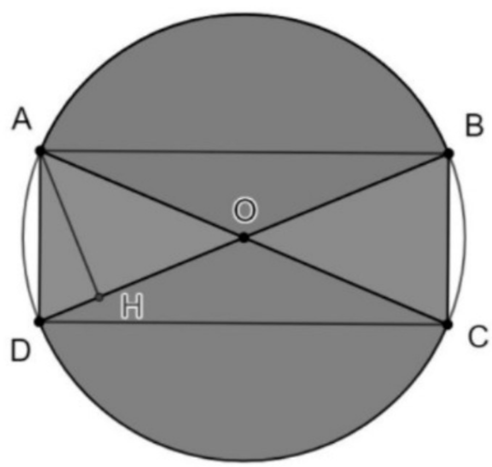
$\Delta_2=m^2-4(4m-11)=m^2-16m+44$

Khi đó: $4\Delta_1+\Delta_2=4(4m-11)+(m^2-16m+44)=m^2\ge 0\ ;\forall m$

Từ đó suy ra ít nhất một trong hai số $4\Delta_1$, Δ_2 lớn hơn hoặc bằng 0 hay ít nhất một trong hai số Δ_1, Δ_2 lớn hơn hoặc bằng 0.

Do vậy ít nhất một trong hai phương trình bài cho có nghiệm (đpcm).

b)



Kẻ $AH\perp BD$ tại H (như hình vẽ).

Khi đó, ta có: $AH=AO.\sin\widehat{AOH}=1{,}6.\sin 45^\circ=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}(m)$

Suy ra $S_{AOD}=\dfrac{1}{2}AH.OD=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4\sqrt{2}}{5}.1{,}6=\dfrac{16\sqrt{2}}{25}(m^2)$

Vì $\widehat{BOC}=45°$ nên $\widehat{AOB}=135°$. Khi đó ta có

$S_{\text{hình quạt } AOB}=\pi.1,6^2.\dfrac{135}{360}\approx 3,0144(m^2)$

Vì $S_{BOC}=S_{AOD}$, $S_{\text{hình quạt } COD}=S_{\text{hình quạt } AOB}$

nên ta có $S_{\text{tô đậm}}=2\left(\dfrac{16\sqrt{2}}{25}+3,0144\right)\approx 7,839(m^2)$

Khi đó $S_{\text{không tô đậm}}=S_{\text{hình tròn}}-S_{\text{tô đậm}}\approx 3,14.1,6^2-7,839=0,1994\left(m^2\right)$

Vậy, số tiền cần để sơn toàn bộ biển quảng cáo là:

7,839.150 + 0,1994.200 ≈ 1216(nghìn đồng).

Câu III. Cho 3 điểm A,B,C cố định sao cho A,B,C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (d) là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB. Lấy điểm M tuỳ ý trên (d). Đường thẳng đi qua B vuông góc với AM cắt các đường thẳng AM ,(d) lần lượt tại các điểm I và N. Đường thẳng MB cắt AN tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $CM.CN=AC.BC$.

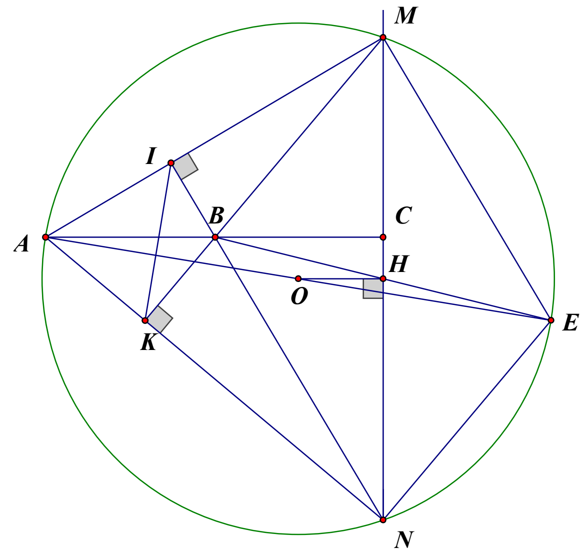
c) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Vẽ hình bình hành $MBNE$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BE. Chứng minh rằng OH vuông góc với đường thẳng (d) và $OH=\dfrac{1}{2}AB$.

Lời giải

a) Xét tam giác AMN có hai đường cao là AC và NI cắt nhau tại B nên suy ra B là trực tâm của tam giác AMN. Suy ra MB cắt và vuông góc với AN tại K. Do đó $\widehat{MKN}=\widehat{MIN}=90^0$ suy ra K và I cùng thuộc đường tròn đường kính MN. Vậy tứ giác $MIKN$ nội tiếp đường tròn đường kính MN.

b) Chứng minh rằng $CM.CN=AC.BC$

Ta có ΔMKN vuông tại K suy ra



$\widehat{BMC} = 90° - \widehat{ANM}$ và ΔACN vuông tại C suy ra $\widehat{NAC} = 90° - \widehat{ANM}$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{NAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ANM}$).

Xét ΔMBC và ΔANC có:

$\widehat{MCB} = \widehat{ACN} = 90°$ (vì $AC \perp MN$)

$\widehat{BMC} = \widehat{NAC}$

suy ra $\Delta MBC \backsim \Delta ANC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CB}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = AC \cdot BC$.

c) Chứng minh rằng OH vuông góc với đường thẳng (d) và $OH = \dfrac{1}{2}AB$.

Vì $BMEN$ là hình bình hành $\Rightarrow ME//BN$

mà $BN \perp AM \Rightarrow ME \perp AN \Rightarrow \widehat{AME} = 90°$

suy ra AE là đường kính của (O)

suy ra O là trung điểm của AE.

Vì $BMEN$ là hình bình hành, H là trung điểm của BE

nên H cũng là trung điểm của MN.

Xét ΔABE có H là trung điểm của BE, O là trung điểm của AE

suy ra OH là đường trung bình của ΔABE $\Rightarrow \begin{cases} OH//AB \\ OH = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}$.

Vì $OH//AB$ mà $AB \perp MN \Rightarrow OH \perp MN$ hay $OH \perp (d)$.

Câu IV. a) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 57 & (1) \\ |x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} = 1 & (2) \end{cases}$

b) Cho a và b là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.

Lời giải

a) **Cách 1.** Ta có $|x-1|^{2021} \geq 0; |x-2|^{2020} \geq 0$ và $|x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1$

nên $|x-1|^{2021} \leq 1$ và $|x-2|^{2020} \leq 1$.

Từ đó $|x-1| \leq 1$ và $|x-2| \leq 1$,

Suy ra tương ứng $0 \leq x \leq 2$ và $1 \leq x \leq 3$.

Kết hợp lại, ta được $1 \leq x \leq 2$.

Nếu $1<x<2$ thì $0<|x-1|<1$ và $0<|x-2|<1$. Do đó

$|x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}<|x-1|+|x-2|=x-1+2-x=1$ (mâu thuẫn).

Vậy $x=1$ hoặc $x=2$.

Thử lại $x=1$ hoặc $x=2$ thỏa mãn phương trình (2)

- Thay $x=1$ vào phương trình (1) của hệ, ta được $y^2=60 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{60}$.
- Thay $x=2$ vào phương trình (1) của hệ, ta được $y^2=61 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{61}$.

  Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x;y)$ là

  $\left(1,\sqrt{60}\right),\left(1,-\sqrt{60}\right),\left(2,\sqrt{61}\right),\left(2,-\sqrt{61}\right)$

Cách 2. Đặt $x-2=a$ thì phương trình (2) trở thành $|a|^{2021}+|a+1|^{2020}=1$

Từ đó suy ra $|a| \leq 1$ và $|a+1| \leq 1$

Hay $-1 \leq a \leq 1$ và $-1 \leq a+1 \leq 1$

Suy ra: $-1 \leq a \leq 0$

Ta có $|a|^{2021}+|a+1|^{2020} \leq |a|+|a+1|=-a+a+1=1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $a=-1$.

Suy ra $x=2$ hoặc $x=1$

- Thay $x=1$ vào phương trình (1) của hệ, ta được $y^2=60 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{60}$.
- Thay $x=2$ vào phương trình (1) của hệ, ta được $y^2=61 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{61}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x;y)$ là $\left(1,\sqrt{60}\right),\left(1,-\sqrt{60}\right),\left(2,\sqrt{61}\right),\left(2,-\sqrt{61}\right)$

b) Ta đặt: $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow c^2=\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)^2=2a^2+3b^2+6ab\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow c^2-2a^2-3b^2=6ab\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$

Nếu $6ab \neq 0 \Rightarrow \sqrt{6}=\dfrac{c^2-2a^2-3b^2}{6ab}$ là số hữu tỉ, vô lý.

Nếu $6ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $a=0 \Rightarrow b\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b=0$ (do $b \in \mathbb{Q}$).

Trường hợp 2: $b=0 \Rightarrow a\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a=0$ (do $a \in \mathbb{Q}$).

Vậy $a=b=0$ (đpcm).

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Tìm một đa thức bậc hai $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho α là nghiệm của $Q(x)$.

b) Cho đa thức $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Tính giá trị của $P(\alpha)$.

Lời giải

a) Ta có $2\alpha = 1+\sqrt{5}$ nên $(2\alpha-1)^2 = 5$ hay $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

Từ đó suy ra α là nghiệm của $Q(x) = x^2 - x - 1$.

b) Ta có $P(x) = (x^2 - x - 1)(x^3 + x + 1) + x + 2$.

Vậy $P(\alpha) = \alpha + 2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

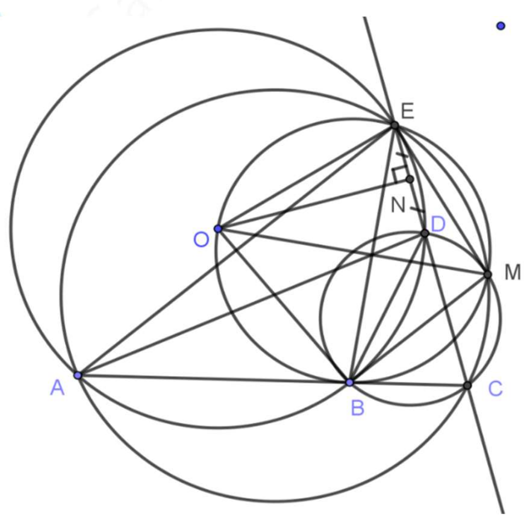
Câu II. Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $OBME$ nội tiếp.

b) $CD.CE = CO^2 - R^2$.

c) M luôn chuyển động trên một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Vì $AEMC, BCMD, EABD$ là các tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{EMB}=\widehat{EMC}-\widehat{BMC}=\widehat{EMC}-\widehat{BDC}=180^\circ-2\widehat{EAC}=180^\circ-\widehat{EOB}\Rightarrow\widehat{EMB}+\widehat{EOB}=180^\circ$.

Suy ra $OBME$ là tứ giác nội tiếp.

b) Qua điểm O kẻ đường thẳng ON vuông góc với đường thẳng DE tại N. Khi đó N là trung điểm của DE, ta có

$CE.CD=(CN+NE)(CN-DN)=(CN+NE)(CN-NE)=CN^2-NE^2=CO^2-OE^2=CO^2-R^2$.

c) Ta có các tứ giác $OBME, AEDB, BDMC$ nội tiếp suy ra

$\widehat{OMC}=\widehat{OMB}+\widehat{BMC}=\widehat{OEB}+\widehat{BDC}=\widehat{OEB}+\widehat{BAE}=\widehat{OEB}+\frac{1}{2}\widehat{BOE}=90^\circ$.

Mà O,C cố định nên M nằm trên đường tròn đường kính OC cố định.

Câu III. Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách dạng duy nhất ở dạng $\frac{x^2+y}{xy+1}$ với x,y là hai số nguyên dương.

Lời giải

Với $N=1$ thì ta thấy $x=y-1$ thỏa mãn do đó N có vô số cách biểu diễn. Vô lí nên loại $N=1$.

Với $N\geq 2$ ta sẽ chứng minh N có thể biểu diễn duy nhất. Thật vậy

$$N=\frac{x^2+y}{xy+1}\Leftrightarrow Nxy+N=x^2+y\Leftrightarrow x^2-Nxy+y-N=0\ \ (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta=(Ny)^2-4y+4N$ phải là số chính phương.

$(Ny-1)^2=(Ny)^2-2Ny+1\leq(Ny)^2-4y+1\leq(Ny)^2+4N<(Ny+2)^2$.

Mà $\Delta\equiv(Ny)^2\ (\text{mod}\ 2)$ nên $\Delta=(Ny)^2$ suy ra $y=N$, từ đó $x=N^2$ do x là số nguyên dương.

Do đó phương trình chỉ có nghiệm duy nhất (N^2,N) nên N cũng chỉ có một cách biểu diễn duy nhất.

Vậy $N>1$.

Câu IV. Cho a,b,c là 3 số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được ở dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2-bx+c=0$ (1) có hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $a=2^m, b=2^n, c=2^p$ với m,n,p là số tự nhiên.

Vì phương trình (1) có nghiệm nguyên nên ta có: $\Delta=b^2-4ac=2^{2n}-2^{m+p+2}$ phải là số chính phương.

Đặt $2^{2n}-2^{m+p+2}=u^2$ với u tự nhiên, khi đó ta có: $(2^n-u)(2^n+u)=2^{m+p+2}$ (2)

Giả sử $u>0$. Từ (2), ta suy ra 2^n-u và 2^n+u đều là lũy thừa của 2.

Đặt $2^n-u=2^k$ và $2^n+u=2^l$ với k,l là các số tự nhiên $(k<l)$, khi đó ta có

$2^{n+1}=2^k+2^l=2^k\left(2^{l-k}+1\right)$.

Suy ra $2^{l-k}+1$ là lũy thừa của 2, mâu thuẫn vì $2^{l-k}+1$ là số nguyên lẻ lớn hơn 1.

Như vậy , ta phải có $u=0$. Suy ra $\Delta=0$, tức là phương trình (1) có nghiệm kép.

Do đó hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho $A=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right)\div\dfrac{1}{x-1}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\dfrac{1}{A}$ là số nguyên dương.

Lời giải

a) Bằng biến đổi trực tiếp, dễ dàng chứng minh được với $x\ge 0$ và $x\ne 1$ thì $A=(\sqrt{x}+1)^2$.

b) Ta có $\dfrac{1}{A}>0$ và $\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\le 1$. Vì $\dfrac{1}{A}$ là số nguyên dương nên $\dfrac{1}{A}=1$

Từ đó $(\sqrt{x}+1)^2=1$, hay $x=0$ (thỏa mãn). Vậy $x=0$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu.

Câu II. a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng $(d): y=ax+b$ biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2,-1)$ và song song với đường thẳng $y=-3x+1$.

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Lời giải

a) Do đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y=-3x+1$ nên $a=-3$ và $b\ne 1$. Mặt khác, do đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2,-1)$ nên $-1=2a+b=-6+b$, từ đó $b=5$ (thỏa mãn $b\ne 1$). Vậy phương trình của đường thẳng (d) cần tìm là $(d): y=-3x+5$.

b) Gọi x (đồng) là giá tiền của chiếc tivi lúc nhập về. Rõ ràng $x>0$. Ta có tiền lãi của chiếc tivi đó khi bán là $10\%x=\dfrac{x}{10}$ (đồng), suy ra giá bán của chiếc tivi là $x+\dfrac{x}{10}=\dfrac{11x}{10}$ (đồng).

Nếu cửa hàng này nâng giá của chiếc tivi thêm 5% so với giá đã bán thì số tiền lãi thêm là $\dfrac{11x}{10}\cdot 5\%=\dfrac{11x}{200}$ (đồng). Thế thì, sau khi tăng thêm 5% giá đã bán thì giá mới của chiếc tivi (khi chưa giảm giá) là $\dfrac{11x}{10}+\dfrac{11x}{200}=\dfrac{231x}{200}$ (đồng). Khi giảm cho khách hàng 245000 đồng thì giá bán là $\dfrac{231x}{200}-245000$ (đồng). Với giá này thì cửa hàng thu được lãi 12% của giá nhập về, tức bằng $12\%x=\dfrac{3x}{25}$ (đồng). Như vậy, ta có

$\left(\frac{231x}{200}-245000\right)-x=\frac{3x}{25}$.

Giải phương trình này, ta được $x=7000000$. Vậy giá nhập về của chiếc tivi là 7000000 đồng.

Câu III. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ AB (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại các điểm B và C cắt đường thẳng AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CE và BG.

a) Chứng minh rằng hai tam giác EBC và BCG đồng dạng.

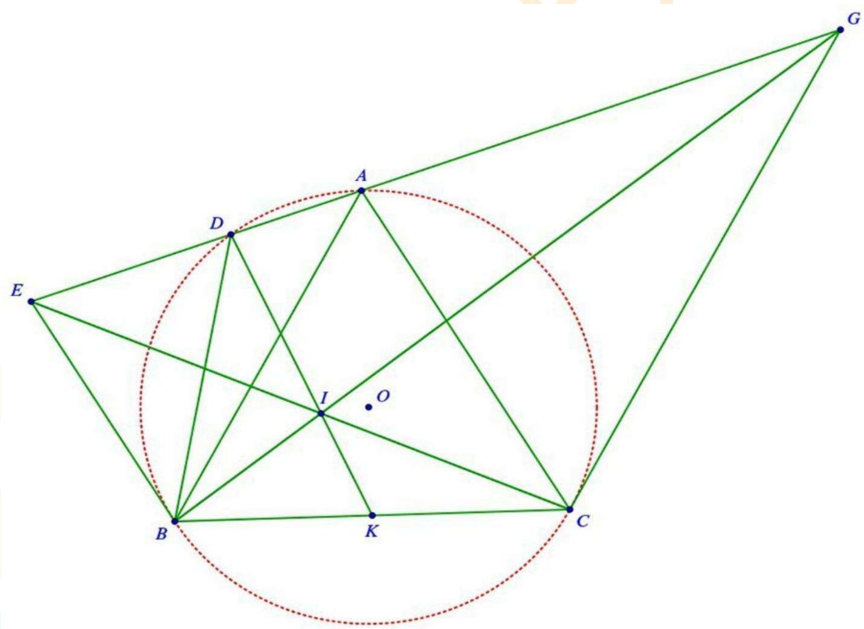
b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác $BIDE$ nội tiếp.

c) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2=KI\cdot KD$.

Lời giải

a) Do tam giác ABC dều nên $AB=BC=CA, \widehat{BAC}=\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=60°$, tâm đường tròn ngoại tiếp O cũng là trực tâm của tam giác ABC. Do đó $BO\perp AC$. Lại có BE là tiếp tuyến tại B của (O) nên $BE\perp BO$, từ đó $BE // AC$.

Tương tự, ta cũng có $CG // AB$. Suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{GAC}$ và $\widehat{BAE}=\widehat{AGC}$ (các góc đồng vị). Từ đó $\Delta AEB \backsim \Delta GAC$ (g-g), dẫn đến $\frac{BE}{AC}=\frac{BA}{CG}$. Mà $AC=AB=BC$ nên $\frac{BE}{BC}=\frac{CB}{CG}$. Từ đây, kết hợp với $\widehat{EBC}=\widehat{GCB}=120°$, ta được $\Delta EBC \backsim \Delta BCG$ (c-g-c).



b) Từ (1), ta có $\widehat{BEC}=\widehat{CBG}$. Từ đó $\Delta CEB \backsim \Delta CBI$, dẫn đến $\widehat{CIB}=\widehat{CBE}=120°$. Suy ra $\widehat{BIE}=180°-\widehat{BIC}=60°$.

Do tứ giác $ADBC$ nội tiếp (O) nên $\widehat{BDE}=\widehat{BCA}=60°$, suy ra $\widehat{BIE}=\widehat{BDE}$.

Tứ giác $BIDE$ có $\widehat{BIE}=\widehat{BDE}$, mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BE nên tứ giác $BIDE$ là tứ giác nội tiếp.

c) Do tứ giác $BIDE$ nội tiếp nên $\widehat{BDI} = \widehat{BEI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BI), mà $\widehat{BEC} = \widehat{CBG}$ nên $\widehat{KBI} = \widehat{KDB}$. Xét hai tam giác KBI và KDB có góc K chung và $\widehat{KBI} = \widehat{KDB}$ nên hai tam giác này đồng dạng $(\mathrm{g}-\mathrm{g})$. Suy ra $\dfrac{KB}{KI} = \dfrac{KD}{KB}$, từ đó $KB^2 = KI \cdot KD$.

Bình luận. Bài hình ra giống đề thi vòng 2 của chuyên Sư phạm năm 2004–2005. Câu a) gây khó khăn cho học sinh khi phải tìm ra hai tam giác đồng dạng góc góc thì mới chứng minh được cặp tam giác đề bài ra. Hai câu b) và $\mathbf{c}$) lại khá nhẹ nhàng khi chỉ cần dùng ý trước là có thể làm được ngay.

Câu IV. a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $a = x + \sqrt{2}$ và $b = x^3 + 5\sqrt{2}$ là hai số hữu tỉ.

b) Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}, b_1, b_2, \ldots, b_{2022}$ thỏa mãn mỗi phương trình $x^2 + a_i x + b_i = 0$ đều có hai nghiệm thực phân biệt x_0 và x_i với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2022$.

Chứng minh rằng số thực $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022}}{2022}$ là nghiệm của phương trình bậc hai

$x^2 + \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}}{2022} x + \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2022}}{2022} = 0$.

Lời giải

a) Ta có $x = a - \sqrt{2}$, do đó

$$b = x^3 + 5\sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + 5\sqrt{2} = a^3 + 6a + 3\sqrt{2}\left(1 - a^2\right).$$

Vì a, b là các số hữu tỉ nên $3\sqrt{2}\left(1 - a^2\right)$ là số hữu tỉ. Suy ra $1 - a^2 = 0$, tức $a = \pm 1$. Từ đây, ta có $x = 1 - \sqrt{2}$ hoặc $x = -1 - \sqrt{2}$. Thử lại, ta thấy các giá trị này đều thỏa mãn yêu cầu. Vậy, có hai giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = 1 - \sqrt{2}$ và $x = -1 - \sqrt{2}$.

b) Sử dụng định lý Vieta, ta có $x_0 + x_i = -a_i$ và $x_0 x_i = b_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2022$. Từ đó suy ra

$$-\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}\right) = 2022x_0 + \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022}\right) = 2022\left(x_0 + \alpha\right)$$

và

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2022} = x_0\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022}\right) = 2022x_0\alpha.$$

Như vậy, $x_0 + \alpha = -\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}}{2022}$ và $x_0\alpha = \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2022}}{2022}$. Do đó, theo định lý Vieta đảo, cả hai số x_0 và α đều là nghiệm của phương trình $x^2 + \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}}{2022} x + \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2022}}{2022} = 0$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức $P=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

b) Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$. Chứng minh rằng, nếu đa thức $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì $2a, a+b, c$ đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng nếu ba số $2a, a+b, c$ là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x.

Lời giải

a) Ta có $P=\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$.

b) Giả sử $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x. Khi đó, ta có $P(-1), P(0)$ và $P(1)$ là các số nguyên. Suy ra $a-b+c, c, a+b+c$ là các số nguyên. Từ đó ta có $a+b=(a+b+c)-c$ là số nguyên và $2a=(a+b+c)+(a-b+c)$ là số nguyên. Vậy $2a, a+b$ và c là các số nguyên.

Bây giờ, giả sử $2a, a+b$ và c là các số nguyên. Khi đó, ta có

$$P(x)=a\left(x^2-x\right)+(a+b)x+c=2a\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c$$

luôn nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x, do $\frac{x(x-1)}{2}$ là số nguyên với mọi x nguyên.

Câu II. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Cung nhỏ OB của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E. Tia BE cắt đường tròn (O) tai điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng tia EO là tia phân giác của góc CEF.

b) Chứng minh rằng tứ giác $ABOF$ nội tiếp.

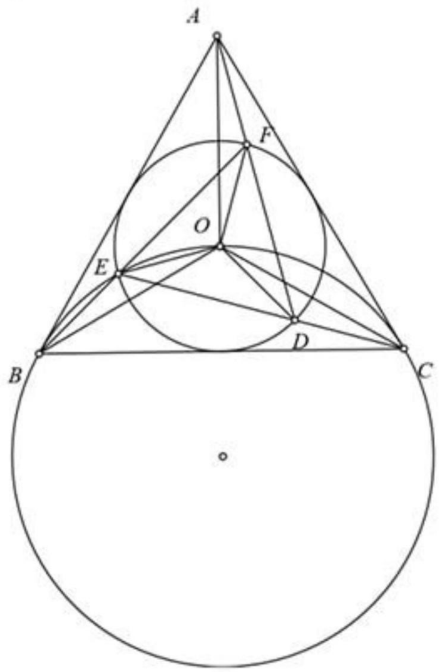
c) Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE và đường tròn (O). Chứng minh rằng ba điểm A, F, D thẳng hàng.

Lời giải

a) Do đường tròn (O) nội tiếp tam giác đều ABC nên $\widehat{BAC}=\widehat{CBA}=\widehat{ACB}=60^\circ$ và AO, BO, CO là các đường phân giác của tam giác ABC.

Do tứ giác $OEBC$ nội tiếp nên $\widehat{OEF}=\widehat{OCB}=30^\circ$ và $\widehat{OEC}=\widehat{OBC}=30^\circ$. Suy ra $\widehat{OEF}=\widehat{OEC}$ nên EO là tia phân giác của $\widehat{CEF}$.

b) Vì tam giác OEF cân tại O nên $\widehat{OFE}=\widehat{OEF}=30^\circ$. Do $\widehat{BAO}=\widehat{BFO}=30^\circ$ nên tứ giác $ABOF$ nội tiếp.



c) Hai tam giác OED, OEF có $OE = OF = OD$ và $\widehat{OEF} = \widehat{OED}$ nên chúng bằng nhau. Suy ra $ED = EF$. Từ đó, tam giác DEF cân tại E. Mà $\widehat{DEF} = 60°$ nên tam giác này là tam giác đều. Bây giờ, với chú ý rằng tứ giác $ABOF$ nội tiếp, ta có: $\widehat{AFB} + \widehat{BFD} = \widehat{AOB} + \widehat{EFD} = 120° + 60° = 180°$.
Vậy ba điểm A, F, D thẳng hàng.

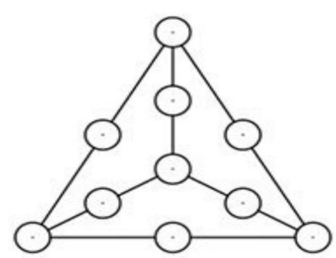
Câu III. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng sô $N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$ là hợp số.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{d^{2022}}{b^{2022}} = \frac{x}{y}$ với x, y là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Do $\frac{x}{y}$ là phân số tối giản nên tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $a^{2022} = mx$, $c^{2022} = my, d^{2022} = nx$ và $b^{2022} = ny$. Từ đó, ta có: $N = mx + ny + my + nx = (m+n)(x+y)$ là hợp số, do $m+n$ và $x+y$ là các số nguyên dương lớn hơn 1 .

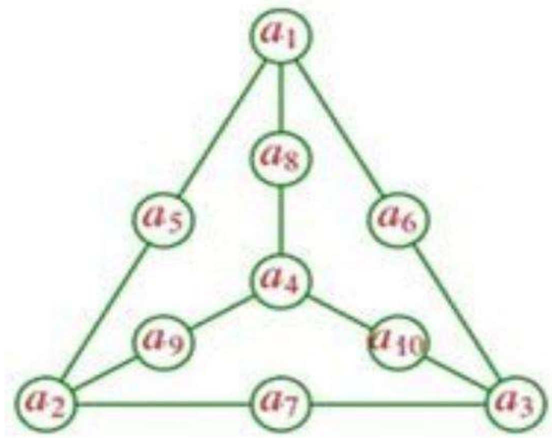
Câu IV.

Ta viết mười số $0, 1, 2, \ldots, 9$ vào mười ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng một lần. Sau đó, ta tính tổng của ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được sáu tổng. Có hay không một cách viết mười số như thế sao cho sáu tổng nhận được là bằng nhau?



Lời giải

Giả sử tồn tại một cách điền số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi các số được điền là a_1, $a_2, \ldots, a_{10}$ như hình vẽ.



Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}6S &= (a_1+a_5+a_2)+(a_2+a_7+a_3)+(a_3+a_6+a_1)+(a_3+a_{10}+a_4)\\ &\quad +(a_4+a_9+a_2)+(a_4+a_8+a_1)\\ &= 2(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})\\ &= 2(a_1+a_2+a_3+a_4)+(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\\ &= 2(a_1+a_2+a_3+a_4)+45.\end{aligned}$$

Suy ra 45 là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại cách điền số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu V. a) Trong mặt phẳng cho năm điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm đã cho.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho.

Lời giải

a) Xét năm điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Có thể thấy rằng bao lồi $\mathcal{C}$ của năm điểm này phải là một ngũ giác lồi hoặc một tứ giác lồi hoặc một tam giác.

- Trường hợp 1: Bao lồi C của năm điểm này là một ngũ giác lồi. Không mất tính tổng quát, giả sử ngũ giác đó là $A_1A_2A_3A_4A_5$. Khi đó, ta có

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \angle A_3A_4A_5 + \angle A_4A_5A_1 + \angle A_5A_1A_2 = 540^\circ.$$

Suy ra, trong các góc $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, A_4A_5A_1$ và $A_5A_1A_2$, phải có một góc lớn hơn 90°. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

- Trường hợp 2: Bao lồi $\mathcal{C}$ của năm điểm này là một tứ giác lồi. Không mất tính tổng quát, giả sử tứ giác đó là $A_2A_3A_4A_5$. Khi đó, điểm A_1 phải nằm trong tứ giác $A_2A_3A_4A_5$. Ta có $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \angle A_4A_1A_5 + \angle A_5A_1A_2 = 360^\circ$. Do đó, góc lớn nhất trong các góc $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4, A_4A_1A_5$ và $A_5A_1A_2$ phải có số đo không nhỏ hơn 90°. Nếu góc này có số đo bằng 90° thì cả bốn góc $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4, A_4A_1A_5, A_5A_1A_2$ đều phải bằng nhau và bằng 90°, suy ra $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 = 180^\circ$, tức ba điểm A_2. A_1, A_4 thẳng hàng, mâu thuẫn. Như vậy, góc lớn nhất trong các góc $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4$, $A_4A_1A_5$ và $A_5A_1A_2$ phải là góc tù. Ta có điều phải chứng minh.

- Trường hợp 3: Bao lồi $\mathcal{C}$ của năm điểm này là một tam giác. Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác đó là $A_2A_3A_4$. Khi đó, hai điểm A_1 và A_5 phải nằm trong tam giác này. Suy ra $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \angle A_4A_1A_2 = 360^\circ$. Từ đó, góc lớn nhất trong ba góc $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4$ và $A_4A_1A_2$ phải có số đo không nhỏ hơn $\dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ > 90^\circ$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát sau bằng quy nạp theo n : Với $n+4$ diểm trên mặt phẳng cho trước, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, tồn tại it nhất n tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ $n+4$ điểm đã cho.

Theo kết quả câu a), mệnh đề đúng với $n=1$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n=k$ với k nguyên dương, ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$. Xét $k+5$ điểm $A_1,\ A_2 ......, A_{k+5}$ trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó, với năm điểm $A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3}, A_{k+4}, A_{k+5}$, theo câu a), ta tìm được một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm này. Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác $A_{k+3}A_{k+4}A_{k+5}$ tù. Bỏ qua điểm A_{k+5} và xét $k+4$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{k+4}$. Theo giả thiết quy nạp, từ $k+4$ điểm đang xét, ta tìm được k tam giác tù có các đỉnh được lấy từ $k+4$ điểm này. Như vậy, từ $k+5$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{k+5}$, ta tìm được $k+1$ tam giác tù có các đỉnh được lấy từ $k+5$ điểm đang xét. Khẳng định cũng đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n nguyên dương.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Rút gọn biểu thức $A=\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2}$ với $x>0$.

b) Một khay nước có nhiệt độ $125^\circ F$ khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ khay nước chỉ còn là $64^\circ F$?

Lời giải

a) Với $x>0$, ta có

$$A=\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+8\right)}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}-\frac{4\left(x-4\right)}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-2\sqrt{x}+4\right)}{x-2\sqrt{x}+4}+2\sqrt{x}+1-\frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+2\sqrt{x}+1-4\left(\sqrt{x}-2\right)=x+2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}+8=x+9.$$

Vậy với $x>0$ thì $A=x+9$.

b) **Cách 1:**

Nhiệt độ của khay nước sau giờ thứ nhất là $125-125.20\%=80\%.125=100\ \left({}^\circ F\right)$.

Nhiệt độ của khay nước sau giờ thứ hai là

$$100-20\%.100=80\%.100=80\ \left({}^\circ F\right).$$

Nhiệt độ của khay nước sau giờ thứ ba là

$$80-20\%.80=80\%.80=64\ \left({}^\circ F\right).$$

Dễ thấy sau x giờ, với $x>3$ thì nhiệt độ của khay nước là nhỏ hơn $64^\circ F$ (không thỏa mãn)

Vậy sau 3 giời, nhiệt độ nước trong khay chỉ con là $64^\circ F$.

Cách 2:

Gọi t ($t>0$, đơn vị: giờ) là thời gian để sau t giờ đó nhiệt độ nước trong khau chỉ còn là $64^\circ F$.

Giả sử x $\left({}^\circ F\right)$ là nhiệt độ của khay nước khi bắt đầu cho vào tủ đá.

Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm 20%.

Do đó sau một giờ, nhiệt độ của khay nước là $x-20\%=80\%x$.

Sau hai giờ, nhiệt độ của khay nước là $x-20\%=80\%x-20\%=80\%x.\left(1-20\%\right)=\left(80\%\right)^2x$.

Sau t giờ, nhiệt độ của khay nước là $\left(80\%\right)^t x$.

Với $x=125^\circ F$ và sau t giờ, nhiệt độ của khay nước là $64^\circ F$, ta có:

$(80\%)^t.125=64$ hay $\left(\frac{4}{5}\right)^t=\left(\frac{4}{5}\right)^3$. Do đó $t=3$

Vậy sau 3 giời, nhiệt độ nước trong khay chỉ con là $64^\circ F$.

Câu II. a) Cho phương trình: $x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0.$ (1)

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1,x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

b) Cho Parabol $(P): y=ax^2$ $(a\neq 0)$ đi qua $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. Tìm toạ độ điểm M trên Parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

Lời giải

a) Xét phương trình (1) có

$\Delta=\left[-(2m-1)\right]^2-4.1.\left[-(m^2+1)\right]=8m^2-4m+5=2\left(2m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$ với mọi m.

Suy ra với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1,x_2.

Theo hệ thức Viét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\ x_1x_2=-(m^2+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{x_1+x_2+1}{2}\\ x_1x_2=-m^2-1\end{cases}$

Thay $m=\frac{x_1+x_2+1}{2}$ vào $x_1x_2=-m^2-1$ ta được: $x_1x_2=-\left(\frac{x_1+x_2+1}{2}\right)^2-1=-\frac{(x_1+x_2+1)}{4}-1$

Suy ra $x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+2x_1+2x_2+5=0$

Vậy biểu thức giữa hai nghiệm x_1,x_2 không phụ thuộc vào m là:

$$x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+2x_1+2x_2+5=0.$$

b) Vì Parabol $(P): y=ax^2$ $(a\neq 0)$ đi qua $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ nên $\frac{1}{2}=a.(-1)^2\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Khi đó $(P): y=\frac{1}{2}x^2$.

Vì $M\in(P): y=\frac{1}{2}x^2$ nên $M\left(k;\frac{1}{2}k^2\right)$.

Khoảng cách từ M đến trục tung là $|k|$.

Khoảng cách từ M đến trục hoành là $\left|\frac{1}{2}k^2\right|$.

Theo giả thiết, ta có phương trình $|k|=2\left|\frac{1}{2}k^2\right|\Leftrightarrow |k|=k^2\Leftrightarrow k^2=k^4\Leftrightarrow k^2(k^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=\pm 1\end{array}\right.$.

Vậy toạ độ các điểm M cần tìm là $M_1\left(0;0\right)$; $M_2\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$; $M_3\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

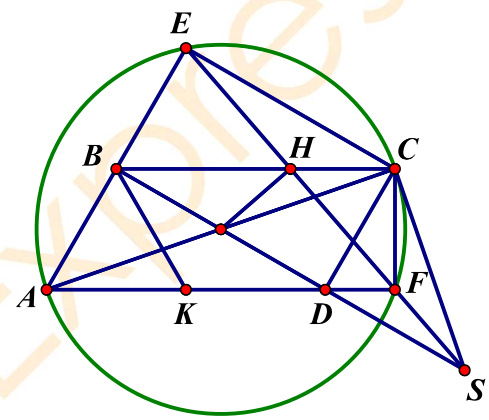
Câu III. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC}=120°$, $BC=2AB$. Dựng đường tròn tâm O đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn $\left(O\right)$. Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$.

Lời giải



a) Gọi K là trung điểm của đoạn AD

Ta có tam giác ABK đều (do $AB=AK=a$ và $\widehat{BAK}=60°$)

Suy ra $\widehat{ABK}=60°$ $\left(1\right)$

Tam giác KBD cân tại K và $\widehat{BKD}=120°$

Suy ra $\widehat{KBD}=30°$ $\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABD}=90°$

Vậy tam giác ABD là tam giác vuông tại B.

b) Do đó $OB\perp AE$ và $OA=OE$, suy ra B là trung điểm của AE.

Xét tam giác EAF có B là trung điểm của AE và $BH//AF$ nên H là trung điểm của EF.

Suy ra $OH\perp EF$.

Tứ giác $BEHO$ có $\widehat{OBE}=\widehat{OHE}=90°$ tứ giác $BEHO$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{CHS}=\widehat{BHE}$. Do tứ giác $BEHO$ nội tiếp nên $\widehat{BHE}=\widehat{BOE}=\widehat{BOA}=\widehat{COS}$.

Suy ra $\widehat{SCO}=\widehat{SHO}=90°$. Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$.

Câu IV. Có hay không các số nguyên a, b sao cho $\left(a+b\sqrt{2023}\right)^2=2024+2023\sqrt{2023}$?

Lời giải

Ta có $\left(a+b\sqrt{2023}\right)^2=2024+2023\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow a^2+2ab\sqrt{2023}+2023b^2=2024+2023\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow \left(a^2+2023b^2-2024\right)+\left(2ab-2023\right)\sqrt{2023}=0.$

Vì a, b nguyên nên $\begin{cases}a^2+2023b^2-2024=0\\2ab-2023=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2023b^2=2024\\ab=\dfrac{2023}{2}\end{cases}$.

Mà a, b nguyên nên ab nguyên.

Suy ra không tồn tại các cặp số nguyên a, b thoả mãn điều kiện bài toán.

Câu V. Trên bảng ta viết đa thức: $P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Ta viết đa thức mới: $P_1(x)=\dfrac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ rồi xoá đa thức $P(x)$.

Ta viết đa thức mới: $P_2(x)=\dfrac{P_1(x+1)+P_1(x-1)}{2}$ rồi xoá đa thức $P_1(x)$.

Ta tiếp tục làm thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $P(x)=ax^2+bx+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+2ax+a+bx+b+c \\ P(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x+1)+P(x-1)=2ax^2+2bx+2a+2c$$

$$\Rightarrow P_1(x)=\frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}=ax^2+bx+a+c.$$

Tương tự, ta tính được: $P_2(x)=ax^2+bx+2a+c$; $P_3(x)=ax^2+bx+3a+c$

Làm như vậy đến lần thứ n, ta nhận được đa thức: $P_n(x)=ax^2+bx+na+c$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $\Delta_n=b^2-4a(na+c)=(b^2-4ac)-4a^2n$.

Xét các trường hợp:

+) Nếu $P(x)$ vô nghiệm thì $b^2-4ac<0\Rightarrow \Delta_n<0\Rightarrow$ Đa thức $P_n(x)$ vô nghiệm.

+) Nếu $P(x)$ có nghiệm thì $b^2-4ac=k\geq 0$. Khi đó với n đủ lớn thì $\Delta_n=k-4a^2n<0$

$\Rightarrow$ Đa thức $P_n(x)$ vô nghiệm.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. a) Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$.

Lời giải

a) Gọi bốn số nguyên là $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3\ (n \in \mathbb{Z})$.

Xét $A = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1$

$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có $\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y-1) = 10 \\ (x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$.

Vì $x,\ y$ nguyên và $2y-1$ là số lẻ nên ta có $x \in Ư(10);\ x+1 \in Ư(12)$ và x là số chẵn.

Suy ra $x \in \{-10;-2;2;10\}$ và $x+1 \in \{-3;-1;1;3\}$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Thay vào hệ phương trình, ta chỉ tìm được cặp $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ thoả mãn.

Vậy $(x;y) = (2;3)$ là cặp số cần tìm.

Câu II. a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

b) Tìm các số nguyên dương a và b sao cho $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỉ.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. $\quad (1)$

Trường hợp 1: Nếu $b = c$ thì $\sqrt{a} - \sqrt{a} = \sqrt{c} + \sqrt{c} \Rightarrow c = 0$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Trường hợp 2: Nếu $b \neq c$, ta có $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c} \Leftrightarrow \dfrac{a-(a+b-c)}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b-c}} = \dfrac{b-c}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-(b-c)}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b-c}}=\dfrac{b-c}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{a+b-c}=-\sqrt{b}+\sqrt{c}.\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\sqrt{a}=\sqrt{c} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{b}\\ \sqrt[3]{a+b-c}=\sqrt[3]{b}\end{cases}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Đặt $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $(m,n)=1$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{m}{n} \Rightarrow n\sqrt{3}+n\sqrt{a}=m\sqrt{5}+m\sqrt{b} \qquad (*)$

$\Leftrightarrow n\sqrt{3}-m\sqrt{b}=m\sqrt{5}-n\sqrt{a} \Leftrightarrow 3n^2-2mn\sqrt{3b}+bm^2=5m^2-2mn\sqrt{5a}+an^2$

$\Leftrightarrow 2mn\sqrt{5a}-2mn\sqrt{3b}=5m^2+an^2-3n^2-bm^2$

$\Rightarrow 2mn\sqrt{5a}-2mn\sqrt{3b}$ là số hữu tỉ $\Rightarrow \sqrt{5a}-\sqrt{3b}$ là số hữu tỉ.

Trường hợp 1: $\sqrt{5a}-\sqrt{3b}=0 \Rightarrow \dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=k$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3k}}{\sqrt{5}+\sqrt{5k}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ không là số hữu tỉ.

Trường hợp 2: $\sqrt{5a}-\sqrt{3b}\neq 0$.

Mà $\left(\sqrt{5a}-\sqrt{3b}\right)\left(\sqrt{5a}+\sqrt{3b}\right)=5a-3b$ là số hữu tỉ nên $\sqrt{5a}+\sqrt{3b}$ là số hữu tỉ.

Do đó $\sqrt{5a}$ và $\sqrt{3b}$ là các số hữu tỉ.

Đặt $\sqrt{5a}=\dfrac{x}{y}$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$ và $(x,y)=1$.

Ta có $x^2=5ay^2 \Rightarrow x^2 \,\vdots\, y^2$. Mà $(x,y)=1$ nên $y=1 \Rightarrow a=\dfrac{x^2}{5}$.

Chứng minh tương tự, ta có $b=\dfrac{y^2}{3}$, $y \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào $(*)$, ta được: $n\sqrt{3}+\dfrac{nx}{\sqrt{5}}=m\sqrt{5}+\dfrac{my}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{5}(3n-my)=\sqrt{3}(5m-nx)$.

Mà $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ là các số vô tỉ nên $\begin{cases}3n-my=0\\5m-nx=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3n=my\\5m=nx\end{cases} \Rightarrow xymn=15mn$.

Mặt khác $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $xy=15$.

Từ đó, ta tìm được các cặp số $(x;y)$ và thử lại thấy $(x;y)=(5;3)$ thỏa mãn. Suy ra $(a;b)=(5;3)$.

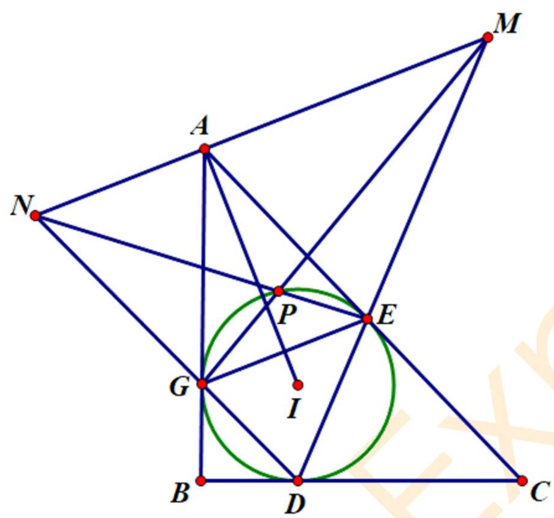
Vậy $(a;b)=(5;3)$.

Câu III. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại các điểm $D, E, G.$ Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại $M, N.$ Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm $P.$ Chứng minh:

a) $EG // MN.$

b) Điểm P nằm trên đường tròn $(I).$

Lời giải



a) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác trong của góc BAC. Mà AM là phân giác ngoài của góc BAC nên $MN \perp AI$

Do AE, AG là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $EG \perp AI$. Vậy $EG \perp AI$

b) Ta có $\widehat{GDE} = \widehat{GEA}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung)

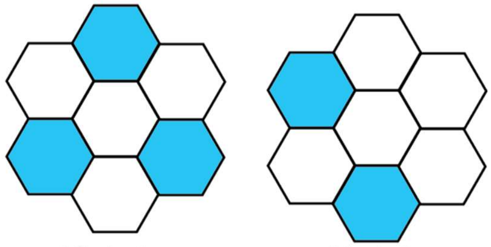
Mà $\widehat{GEA} = \widehat{EAM}$ (So le trong) suy ra $\widehat{GDE} = \widehat{EAM}.$ Do đó tứ giác $AEDN$ nội tiếp. Vì thế $\widehat{NED} = \widehat{NAD}.$

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $AGDM$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{MGD}.$

Ta có $\widehat{DEP} + \widehat{DGP} = \widehat{DEN} + \widehat{MGD} = \widehat{NAD} + \widehat{MAD} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $DEPG$ nội tiếp. Vậy điểm P nằm trên đường tròn $(I).$

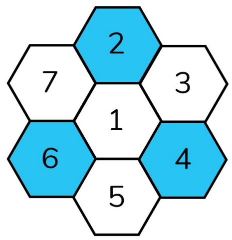
Câu IV. Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng 2 màu trắng, đen như Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách trên bao nhiêu lần đi nữa cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.



Hình 1 Hình 2

Lời giải

Giả sử ta đánh số các lục giác đều như hình vẽ.



Hình 1

Xét 4 lục giác đều ở vị trí số $3; 4; 6; 7$.

Khi thực hiện đổi màu của một lục giác và tất cả các lục giác có chung cạnh với lục giác đó thì 4 lục giác số $3; 4; 6; 7$ luôn có 2 lục giác hoặc cả 4 lục giác này đều đổi màu.

Suy ra số lục giác được tô màu trong 4 lục giác này không thay đổi tính chẵn lẻ.

Ban đầu có 2 lục giác được tô màu nên ta không thể có bước thực hiện để lúc sau có 1 lục giác được tô màu như Hình 2.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu V. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $n > 10^{2023}$ sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n là một số nguyên tố cùng nhau với n.

Lời giải

Gọi $p_1; p_2; p_3;...; p_k; ...$ là các số nguyên tố.

Đặt $S_k = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k$.

Giả sử không tồn tại số n thỏa mãn đề bài. Gọi p_i là số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn n. Như vậy với mọi i thì p_i cũng không thỏa mãn.

Xét p_i không thỏa mãn đề bài. Khi đó do p_i là số nguyên tố nên $S_{i-1} \vdots p_i$.

Mà $S_i = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_{i-1} + p_i = S_{i-1} + p_i$ nên $S_i \vdots p_i$.

Tương tự, ta chứng minh $S_i \vdots p_i$ và $S_i \vdots p_{i+1}$.

Mà p_i và p_{i+1} là hai số nguyên tố liên tiếp nên $\left(p_i, p_{i+1}\right) = 1$

$\Rightarrow S_i \vdots p_i p_{i+1}$. $(*)$

Mặt khác do $p_i < \dfrac{p_i + p_i + 1}{2}$ nên $S_i = p_1 + p_2 + ... + p_i = 2 + 3 + 5 + ... + p_i < \dfrac{1 + 2 + 3 + 4 + ... + p_i + p_i + 1}{2}$

$\Rightarrow S_i < \dfrac{(p_i+1)(p_i+2)}{4}$. $\quad (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra với i đủ lớn (để $p_{i+1} > p_i > 10^{2023}$) thì vô lí.

Hay sẽ tồn tại $n = p_i$ hoặc $n = p_{i+1}$ thoả mãn.

-------------------------------- HẾT --------------------------------