MỤC LỤC

A. PHẦN ĐỀ THI

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2022 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}+\frac{4+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}}=\frac{\sqrt{2+x}}{x}.$$

Câu 2. (1,5 điểm) Một người có kế hoạch đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian dự định. Nếu tăng vận tốc thêm $4\ km/h$ thì người đó đến B sớm 12 phút, nếu giảm vận tốc đi $4\ km/h$ thì người đó đến B muộn 15 phút. Tính độ dài quãng đường AB.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các số thực m khác 1 sao cho đồ thị hàm số $y=(m-1)x+m+6$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên.

2) Cho đa thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ có hai nghiệm là 2 và 3.
Chứng minh rằng $b^2-a^2=4ac$.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và có số đo góc A bằng 60°. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Tia AI cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai D (D khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BDCO$ là hình thoi.

b) Các điểm B,I,O,C cùng thuộc một đường tròn.

c) $IB+IC\leq 2R$.

Câu 5. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left|10^x-4y^2+28y-26\right|$ với x,y là các số nguyên dương thay đổi.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{x+1}{x-1}$ với $x\geq 0; x\neq 1$

a) Chứng minh rằng $B=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A+\frac{1}{B}\leq 4$.

Câu 2. (2 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-my=5-3m \\ mx-y=2 \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{5}{x}+4=\frac{3}{y}$.

Câu 3. (2 điểm) Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 3 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 150% lượng gạo đã nhập vào kho trong ngày trước đó. Từ ngày thứ tư kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\frac{1}{10}$ lượng gạo trong kho ở ngày trước đó. Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau:

a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 380 tấn gạo.

b) Số gạo đã xuất trong ngày thứ năm là 342 tấn.

Câu 4. (3 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM; E là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O).

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A). Tính số đo góc AKH.

c) Chứng minh KE là tia phân giác của góc MKH.

Câu 5. (1 điểm) Xét các số thực a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn $1\leq a,b,c\leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}{a+b+c}$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho $a=\sqrt[3]{2}+2$ và đa thức $P(x)=(x-3)(x-1)^3$. Tính giá trị của $P(a)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2=x^2+xy-2y^2 \\ x^2y=x^2+4y^2 \end{cases}$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho số nguyên dương m thoả mãn 3^m+5^m+14 chia hết cho 15. Chứng minh rằng 3^m+5^m+14 chia hết cho 16.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số dương a,b. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+b+\frac{|a-b|}{b^2}+\frac{|b^2-b|}{a}\geq 2$$

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC, với $AB<AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F tương ứng là tiếp điểm của BC,CA,AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI,BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

a) $\widehat{KIF}=\widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) $LK\cdot BC=AI\cdot EF$.

c) Các đường thẳng DK,HJ,AL đồng quy.

Câu 5. (1 điểm) Lần lượt ghi các số 1000, 1001, 1002,.., 1010 lên 11 tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả 11 tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp, một chiếc màu xanh và một chiếc màu đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Hỏi, trong mỗi hộp có bao nhiêu tấm thẻ?

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Chứng minh rằng $A=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Tìm tất cả các số thực x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm) Một hội trường có 374 ghế, được xếp thành nhiều dãy, số ghế ở mỗi dãy bằng nhau và không vượt quá 30 . Hãy tìm số dãy ghế của hội trường biết rằng: nếu kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=(m-1)x+2m+3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 .

2) Chứng minh rằng, với hai số thực a, b bất kì, ít nhất một trong hai phương trình (ẩn là x) sau đây có nghiệm: $x^2-2ax-(a^2-4b^2+1)=0$ và $x^2-4bx-(b^2-2ab-a)=0$.

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm nằm trên (O)(M khác A, B). Trong nửa mặt phẳng chứa M, có bờ là đường thẳng AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D.

1) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

2) Vẽ đường tròn (I) qua M, tiếp xúc với Ax tại C. Tia OC cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai J. Chứng minh rằng J là trung điểm của OC.

3) Gọi E là trung điểm của OA. Chứng minh rằng đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại một điểm thuộc đường tròn (I).

Câu 5. (1 điểm)

1) Hãy chỉ ra một số thực x khác $0, \pm 1$ để $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên.

2) Cho x là một số thực khác $0, \pm 1$ thỏa mãn $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-y}=4\\ \sqrt{3y+1}+\sqrt{5-x}=4\end{cases}$.

2) Cho a,b,c,d là các số thực khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$\frac{a^2-1}{5a}=\frac{b^2-1}{5b}=\frac{c^2-1}{3c}=\frac{d^2-1}{3d}=n$$

với n là một số nguyên. Chứng minh: $P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 2. (3 điểm)

1) Chứng minh rằng $1+2^2+3^3+\ldots+2039^{2039}$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

2) Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}$.

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với các cạnh AC,AB. Gọi (K) là đường tròn đi qua B, tiếp xúc với đường thẳng AI tại I. Đường tròn này cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai P (khác B). Gọi (L) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AI tại I, đường tròn này cắt đường thẳng AC tại điểm thứ hai Q (khác C).

Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

b. Đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn (I).

c. Các đường thẳng KF và LE cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 4. (1 điểm) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Lần lượt điền 2023^2 số nguyên dương đầu tiên: $1,2,3,4\ldots,2023^2$ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô được điền đúng một số, ở mỗi dòng tính từ trái sang phải hoặc ở mỗi cột tính từ trên xuống dưới, các số được điền theo thứ tự tăng dần. Thực hiện việc thay đổi số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn 2 ô chung nhau cạnh hoặc chung nhau đúng một đỉnh.

1/ Nếu hai ô đó chung cạnh thì tăng số ở một ô thêm 2 đơn vị và giảm số trong ô còn lại 2 đơn vị.

2/ Nếu hai ô đó chung nhau đúng một đỉnh thì cùng tăng hoặc cùng giảm số trong hai ô đó 2 đơn vị.

Hỏi sau một số lần chơi ta có thể thu được bảng gồm toàn các số 2023 được không? Vì sao?

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\dfrac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{a-b}-1$ với $a>0,b>0$ và $a\neq b$.

a) Chứng minh $M=\dfrac{a+b}{a-b}$.

b) Tính $\dfrac{a}{b}$ biết $M>0$ và $M\cdot\left(a^2-b^2\right)=\dfrac{9}{2}ab$.

Câu 2. (2 điểm) a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: y=2x+3$ và $d': y=mx+m^2-1\left(m\neq 0\right)$. Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

b) Giá cước dịch vụ của một hãng taxi vào tháng 4/2023 như sau:

Giá cước mở cửa 1 km đầu tiên	Giá cước những km tiếp theo	Giá cước từ km thứ 21 trở đi
20 000 đồng	14 000 đồng	12 000 đồng

Gọi x $(x>0)$ là số km mà hành khách di chuyển. Khi đó, số tiền mà hành khách phải trả được tính bởi công thức:

$$T=20\ 000 \text{ nếu } 0<x\leq 1$$

$$T=20\ 000+14\ 000\left(x-1\right) \text{ nếu } 1<x\leq 20$$

$$T=286\ 000+12\ 000\left(x-20\right) \text{ nếu } x>20$$

Cô Hằng di chuyển bằng xe của hãng taxi trên và đã trả số tiền là 322 000 đồng. Hỏi cô Hằng đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu km?

Câu 3. (2 điểm) Cho phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-1=0$, (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(1-x_1\right)\left(x_2-m\right)^2=9$.

Câu 4. (3 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ sao cho tam giác ABD nhọn và không là tam giác cân. Gọi O là giao điểm của AC với BD và E,F,G tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AC,AB,BC.

a) Chứng minh $ED^2=EF.EG$.

b) Chứng minh bốn điểm O,E,G,F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của các đường thẳng FG và AC. Chứng minh $DH\perp DB$.

Câu 5. (1 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương a và b thỏa mãn: Nếu c và d là các số thực sao cho các phương trình $x^2+ax+1=c$ và $x^2+bx+1=d$ có nghiệm thì phương trình $x^2+\left(a+b\right)x+1=cd$ cũng có nghiệm.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm)

Cho ba phương trình:

$$x^2 - ax + 1 = 0\,(1),\quad x^2 - bx + 1 = 0\,(2),\quad x^2 - cx + 1 = 0\ (3),$$

trong đó a,b,c là các số thực.

Biết rằng, phương trình (1) có nghiệm $x = x_1$, phương trình (2) có nghiệm $x = x_2$ và phương trình (3) có nghiệm $x = x_1x_2$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\left(\sqrt{y+4}+\sqrt{y+11}\right)=35 \\ y\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)=35 \end{cases}$

2) Chứng minh rằng, với mọi số thực x,y,z ta có:

$$(z+x-y)x^5 + (x+y-z)y^5 + (y+z-x)z^5 \ge 0.$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng, tồn tại vô số bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn phương trình sau:

$$x^{31} + y^5 = z^{2023}.$$

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến d của (O) tại B. Gọi H là trung điểm của OB. Các điểm M,N thay đổi trên d, không trùng với B sao cho H là trực tâm của tam giác AMN. Gọi E,F lần lượt là giao điểm thứ hai của AM,AN với đường tròn (O). Chứng minh rằng

a) Tứ giác MNFE nội tiếp.

b) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1 điểm) Có 2023 viên bi đựng trong 14 cái hộp. Mỗi lần cho phép lấy hai viên bi ở hai hộp nào đó và bỏ vào một trong 12 hộp còn lại. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ hết bi vào một hộp.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x>0;y>0;x\neq y$

a) Rút gọn M.

b) Tính M biết $x^2-5xy+4y^2=0$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cửa hàng An Bình niêm yết giá một bông hồng là 25000 đồng. Nếu khách hàng mua nhiều hơn 10 bông thì từ bông thứ 11 trở đi, mỗi bông được giảm 10% trên giá niêm yết. Nếu mua nhiểu hơn 20 bông thì từ bông thứ 21 trở đi, mỗi bông được giàm thêm 20% trên giá đã giảm.

a) Nếu khách hàng mua 30 bông hồng tại cửa hàng An Bình thì phải trả bao nhiêu tiền?

b) Bạn Dũng đã mua một số bông hồng tại cửa hàng An Bình với số tiền 925000 đồng. Hỏi bạn Dũng đã mua bao nhiêu bông hồng?

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=5\\ mx+y=m+5\end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất ở trên thỏa mãn điều kiện $x\geq y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=x+y$.

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường kính AK của (O). Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành và $S_{ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, T là điểm đối xứng với O qua M. Chứng minh T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và $AH^2+BC^2=4R^2$.

c) Biết $AH^2+BH^2+CH^2=7$ và $AH\cdot BH\cdot CH=3$. Tính R.

Câu 5. (1 điểm) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn

$$x^2+xy+y^2=3;\ \ y^2+yz+z^2=1;\ \ z^2+zx+x^2=4.$$

Tính $S=x+y+z$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,5 điểm)

a) Giả sử a,b là các số thực thoả mãn: với x,y là hai số thực bất kì ta luôn có

$$\left|(ax+by)(ay+bx)\right| \le x^2+y^2.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2\le 2$.

b) Giải phương trình $x+4=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{(5-x)(2-x)}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a\ne c$ và $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=2.$

Tính giá trị biểu thức $S=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}$

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB<AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho $AM \parallel BC$. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB,AC tại các điểm thứ hai F,E (F,E khác A). Các đường thẳng OM,BC cắt nhau tại điểm D.

(a) Chứng minh rằng các điểm D,E,F thẳng hàng.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh rằng $AHDL$ là hình bình hành.

Câu 5. (1 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p,q,r sao cho $pq-6, qr+1, rp+10$ là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

------------------------------ HẾT ------------------------------

B. PHẦN ĐÁP ÁN

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2022 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}+\frac{4+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}}=\frac{\sqrt{2+x}}{x}.$$

Lời giải

+) $\dfrac{4-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}=\dfrac{4-\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(2+x-\sqrt{(2+x)(2-x)}+2-x\right)}$

$=\dfrac{4-\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$

+) $\dfrac{4+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}}=\dfrac{4+\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(2+x+\sqrt{(2+x)(2-x)}+2-x\right)}$

$=\dfrac{4+\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(4+\sqrt{4-x^2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

Biểu thức vế trái bằng: $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2\sqrt{2+x}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2+x}}{2+x-(2-x)}=\dfrac{2\sqrt{2+x}}{2x}=\dfrac{\sqrt{2+x}}{x}$

Câu 2. (1,5 điểm) Một người có kế hoạch đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian dự định. Nếu tăng vận tốc thêm 4 km/h thì người đó đến B sớm 12 phút, nếu giảm vận tốc đi 4 km/h thì người đó đến B muộn 15 phút. Tính độ dài quãng đường AB.

Lời giải

Đổi 12 phút $=0,2$ giờ ; 15 phút $=0,25$ giờ.

Gọi vận tốc dự định là $x\left(\text{km/h}\right)$, thời gian dự định là y (giờ) $(x>4, y>0,25)$.

Khi đó, độ dài quãng đường AB là : x.y (km).

Nếu vận tốc tăng thêm 4 km/h thì đến sớm 0,2 giờ nên $AB=(x+4)(y-0,2)$ (km).

Nếu giảm vận tốc đi 4 km/h thì đến muộn 0,25 giờ nên $AB=(x-4)(y+0,25)$ (km).

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+4)(y-0,2)=xy\\(x-4)(y+0,25)=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-0,2x+4y=0,8\\0,25x-4y=1\end{cases}$

Giải hệ ta được $x=36$, $y=2$.

So sánh với điều kiện ta thấy hai giá trị $x=36$, $y=2$ thỏa mãn.

Vậy, độ dài quãng đường AB là $36.2=72$ km.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các số thực m khác 1 sao cho đồ thị hàm số $y=(m-1)x+m+6$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên.

2) Cho đa thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ có hai nghiệm là 2 và 3.

Chứng minh rằng $b^2-a^2=4ac$.

Lời giải

1) Với $x=0$, ta có $y=m+6$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;m+6)$.

Theo giả thiết thì $m+6$ là số nguyên nên m là số nguyên.

Với $y=0$, ta có $(m-1)x+m+6=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{m+6}{m-1}=-1-\dfrac{7}{m-1}$.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $\left(-1-\dfrac{7}{m-1};0\right)$.

Với m nguyên thì $-1-\dfrac{7}{m-1}$ là số nguyên khi và chỉ khi $m-1$ là ước số của 7.

Ta có $m-1$ thuộc tập hợp $\{-7;-1;1;7\}$.

Tất cả các giá trị m thỏa mãn là $-6;0;2;8$.

2) Vì 2 và 3 là nghiệm của $f(x)$ nên: $\begin{cases}4a+2b+c=0\\9a+3b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2b+c=-4a\\3b+c=-9a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-5a\\c=6a\end{cases}$

Do đó: $b^2-a^2-4ac=25a^2-a^2-4a.6a=0$.

Vậy $b^2-a^2=4ac$.

Chú ý: Có thể sử dụng định lý Vi-et:

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2=2+3=5\Rightarrow b=-5a,$$

$$\frac{c}{a}=x_1x_2=2.3=6\Rightarrow c=6a.$$

- Có thể sử dụng định lí Vi-et $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$. Suy ra $1=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\dfrac{c}{a}$ từ đó có đpcm.
- Có thể viết $f(x)=a(x-2)(x-3)=ax^2-5ax+6a$, từ đó tính b,c theo a.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và có số đo góc A bằng $60°$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Tia AI cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai D (D khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BDCO$ là hình thoi.

b) Các điểm B,I,O,C cùng thuộc một đường tròn.

c) $IB+IC\le 2R$.

Lời giải

a) Xét (O), ta có $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=120°$.

Do AD là phân giác của góc BAC nên D là điểm chính giữa cung BC.

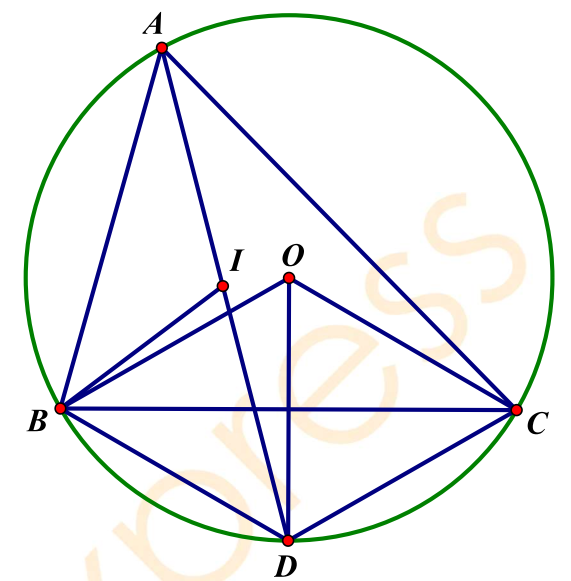
Suy ra: $\widehat{BOD}=\widehat{COD}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}=60°$

Các tam giác OBD và OCD là tam giác cân đỉnh O và có một góc bằng $60°$ nên là tam giác đều. Suy ra $BO=BD=CO=CD=OD$. Vậy $BOCD$ là hình thoi.

b) $\widehat{BIC}=180°-\left(\widehat{IBC}+\widehat{ICB}\right)=180°-\dfrac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)$

$=180°-60°=120°$

Do I và O cùng phía với đường thẳng BC và $\widehat{BIC}=\widehat{BOC}=120°$ nên các điểm B,I,O,C cùng thuộc một đường tròn



c) Gọi K là giao điểm thứ hai của tia BI và (O). Ta có:

$\widehat{KIC}=\widehat{KCI}\left(=\dfrac{1}{2}\widehat{ABC}+\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}\right)$

Do đó tam giác KIC cân tại K.

Mặt khác: $\widehat{IKC}=\widehat{BAC}=60°$.

Suy ra tam giác IKC đều. Do đó: $IK=IC$ và $IB+IC=BK$.

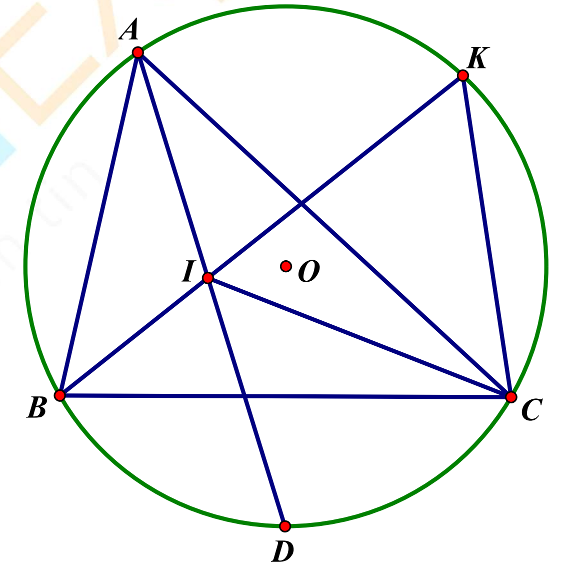
Xét (O): $BK\le 2R$. Suy ra $IB+IC\le 2R$.

Chú ý:

+) Có thể giải cách khác bằng cách chứng minh lại kết quả: Nếu điểm I thay đổi trên cung BC cố định thì biểu thức IB + IC đạt giá trị lớn nhất khi I là điểm chính giữa cung đó.

+) Có thể giải cách khác bằng cách lấy E là điểm đối xứng với O qua BC, chứng minh tam giác BCE đều nội tiếp đường tròn bán kính R và $IB+IC=IE\le 2R$.

Nếu học sinh sử dụng định lý Ptoleme hoặc kết quả của Bài toán Pompei và làm đúng thì được 0,5 điểm câu $4c$.



Câu 5. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left|10^x-4y^2+28y-26\right|$ với x,y là các số nguyên dương thay đổi.

Lời giải

Ta có: $A=\left|10^x-4y^2+28y-26\right|=\left|10^x+23-(2y-7)^2\right|$

Do $10^x + 23$ có chữ số tận cùng bằng 3 và $(2y-7)^2$ là bình phương của một số nguyên nên không thể có tân cùng bằng 3 , suy ra A khác 0 .

Do A là số tự nhiên chẵn và khác 0 nên $A \geq 2$.

Với $x=2, y=9$ thì $A=2$. Vây giá trị nhỏ nhất của A là 2 .

Chú ý: Có thể chứng minh A khác 0 bằng phương pháp phản chứng. Nếu A bằng 0 thì 10^x chia 4 dư 2, suy ra $x=1$. Tuy nhiên, khi $x=1$ thì y lại không nhận giá trị nguyên.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+1}{x-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A+\dfrac{1}{B}\le 4$.

Lời giải

a) $B=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

b) $A+\dfrac{1}{B}\le 4\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+1\le 4\Leftrightarrow \dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}\le 0\Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1}\le 0$

Trường hợp 1. $\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1}=0\Leftrightarrow x=4$

Trường hợp 2. $\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1}<0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-2\ne 0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 4\\ 0\le x<1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x<1.$

Vậy $0\le x<1$ hoặc $x=4$

Câu 2. (2 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=5-3m\\ mx-y=2\end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{5}{x}+4=\dfrac{3}{y}$.

Lời giải

$\begin{cases}x-my=5-3m & (1)\\ mx-y=2 & (2)\end{cases}$

Từ $(1)\Rightarrow x=my+5-3m$, thay vào (2) ta được $m\left(my+5-3m\right)-y=2$

$\Leftrightarrow y\left(m^2-1\right)=3m^2-5m+2\Leftrightarrow y\left(m-1\right)\left(m+1\right)=\left(m-1\right)\left(3m-2\right)$ (3)

Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow (m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Với điều kiện $m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{5}{m+1}; \frac{3m-2}{m+1}\right)$

Với điều kiện $m \neq \pm 1, m \neq \frac{2}{3}$ thì $\frac{5}{x} + 4 = \frac{3}{y} \Leftrightarrow m+1+4 = \frac{3(m+1)}{3m-2}$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 10m - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-13}{3} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện, ta tìm được $m = \frac{-13}{3}$

Câu 3. (2 điểm) Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 3 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 150% lượng gạo đã nhập vào kho trong ngày trước đó. Từ ngày thứ tư kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\frac{1}{10}$ lượng gạo trong kho ở ngày trước đó. Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau:

a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 380 tấn gạo.

b) Số gạo đã xuất trong ngày thứ năm là 342 tấn.

Lời giải

b) Gọi x (tấn) là lượng gạo nhập vào kho trong ngày thứ nhất. Khi đó lượng gạo nhập vào kho trong các ngày thứ hai, thứ ba lần lượt là $150\%x = \frac{3}{2}x$; $150\%\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{9}{4}x$

Tổng lượng gạo nhập vào kho sau ngày thứ ba là $x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x = \frac{19}{4}x$.

Theo giả thiết ta có phương trình $\frac{19}{4}x = 380 \Leftrightarrow x = 80$

Vậy, ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 80 tấn gạo

b) Lượng gạo đã xuất trong các ngày thứ tư và thứ năm lần lượt là

$$\frac{1}{10}\left(\frac{19}{4}x\right); \frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}\left(\frac{19}{4}x\right)\right] = \frac{171}{400}x$$

Theo giả thiết ta có $\frac{171}{400}x = 342 \Leftrightarrow x = 800$

Vậy, ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 800 tấn gạo

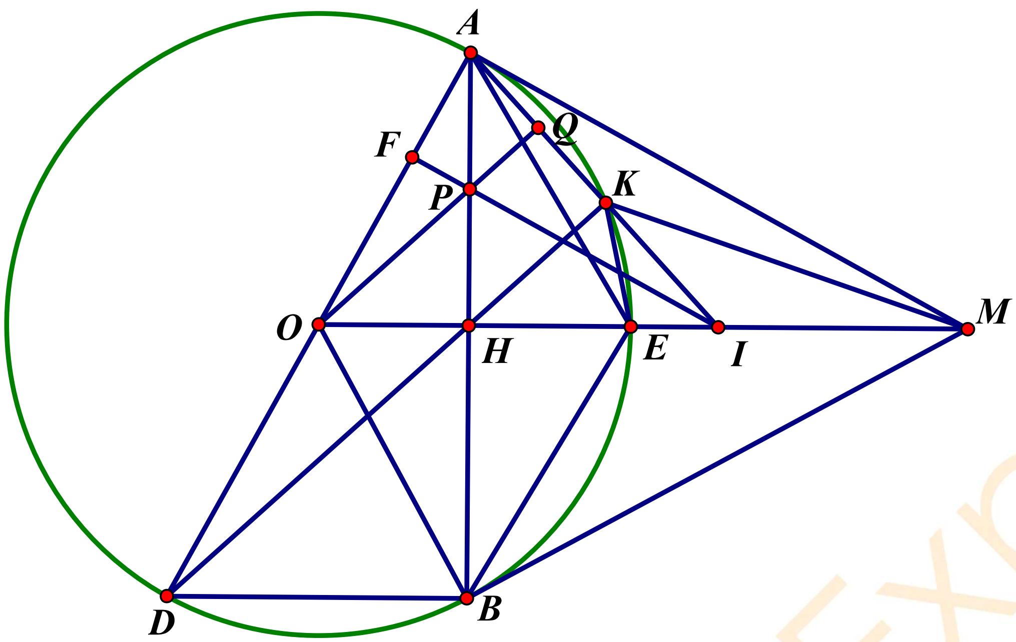
Câu 4. (3 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) $(A, B$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM; E là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O).

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A). Tính số đo góc AKH.

c) Chứng minh KE là tia phân giác của góc MKH.

Lời giải



Cách 1

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì MH là phân giác của góc AMB và MO là đường trung trực của AB, suy ra $EA = EB$ hay tam giác EAB cân tại E, từ đó dẫn đến $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

Ta có $\widehat{EBA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{MAE}$, suy ra AE là phân giác của góc MAB Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi P là trung điểm của AH. Tam giác MAH có IP là đường trung bình suy ra $IP / /MA$.

Từ đó dẫn đến $IP \perp AO$

Tam giác AOI có P là trực tâm nên $OP \perp AI$

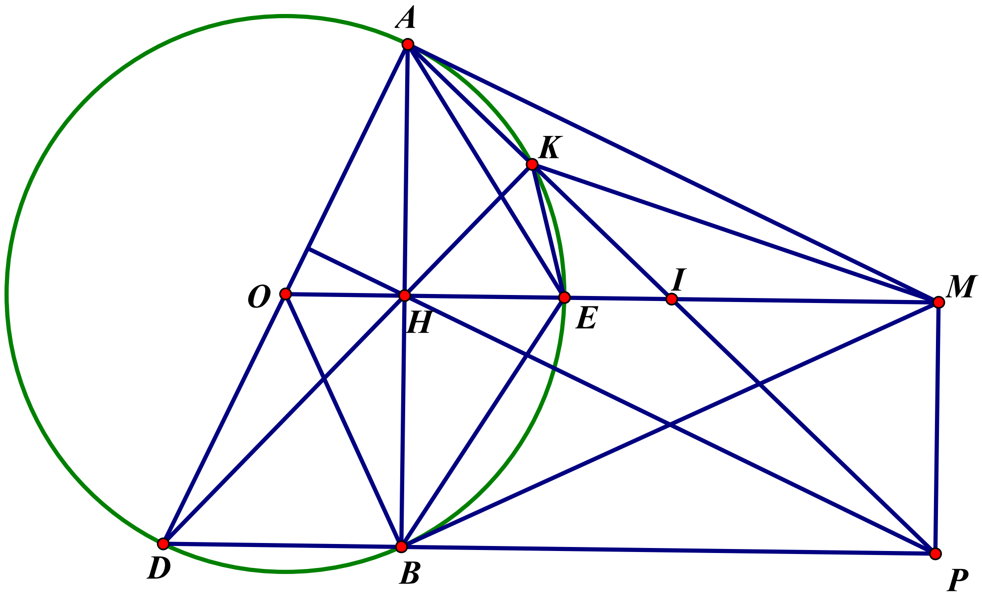
Gọi Q là giao điểm của OP và AI. Ta có Q là trung điểm của AK và PQ là đường trung bình của tam giác AHK, suy ra $PQ // HK$ và kết hợp với $PQ \perp AI \Rightarrow HK \perp AI$. Vậy $\widehat{AKH} = 90°$

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của KH và (O).

Ta chứng minh được $HM.HO = HA.HB$ và $HA.HB = HK.HD$.

Từ đó suy ra $HM.HO = HK.HD \Rightarrow \Delta HKM \backsim \Delta HOD\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{DOH}$

Lại có $\widehat{EKD} = \dfrac{1}{2}\widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{EKD} = \dfrac{1}{2}\widehat{MKH}$ hay KE là tia phân giác của góc MKH.



Cách 2:

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì MH là phân giác của góc AMB và MO là đường trung trực của AB, suy ra $EA = EB$ hay tam giác EAB cân tại E, từ đó dẫn đến $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

Ta có $\widehat{EBA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{MAE}$, suy ra AE là phân giác của góc MAB Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi P đối xứng với A qua I. Tứ giác $AMPH$ là hình bình hành, từ đó suy ra $MP // AH; MP = AH \Rightarrow MP // HB; MP = HB$. Vậy tứ giác $MPBH$ là hình bình hành.

Kết hợp với $\widehat{MHB} = 90°$ ta được $MPBH$ là hình chữ nhật.

Gọi D là giao điểm thứ hai của PB và (O) (D khác B).

Vì góc ABD vuông nên AD là đường kính của (O).

Vậy DK vuông góc với KA hay DK vuông góc với AP (1)

Tam giác ADP có $AB \perp PD; PH \perp AD$ (vì $PH // AM$). Do đó H là trực tâm của tam giác ADP.

Vậy $DH \perp AP$ (2)

Từ (1), (2) suy ra ba điểm D, H, K thẳng hàng. Vậy góc AKH bằng 90°.

c) Ta chứng minh được $HM.HO = HA.HB$ và $HA.HB = HK.HD$.

Từ đó suy ra $HM.HO = HK.HD \Rightarrow \Delta HKM \backsim \Delta HOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{DOH}$

Lại có $\widehat{EKD} = \frac{1}{2}\widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{EKD} = \frac{1}{2}\widehat{MKH}$ hay KE là tia phân giác của góc MKH.

Câu 5. (1 điểm) Xét các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $1 \le a, b, c \le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}}{a + b + c}$.

Lời giải

Giả sử b nằm giữa a và c. Ta có

$$\left(b-c\right)\left(b^2-a^2\right)\le 0 \Rightarrow b^3+a^2c\le b^2c+ba^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c}+\frac{a^2}{b}\le b+\frac{a^2}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\le \frac{a^2}{c}+b+\frac{c^2}{a}=\frac{\left(a+c\right)\left(a^2-ac+c^2\right)}{ac}+b$$

Vì $1\le a,c\le 2$ nên $a\le 2c; c\le 2a$ suy ra $\left(a-2c\right)\left(2a-c\right)\le 0$, dẫn đến $\dfrac{a^2+c^2-ac}{ac}\le \dfrac{3}{2}$

Do đó $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\le \dfrac{3}{2}\left(a+c\right)+b=\dfrac{11}{8}\left(a+b+c\right)+\dfrac{1}{8}\left(a+c-3b\right)$

Vì b nằm giữa a,c và $1\le a,b,c\le 2$ nên $a+c\le 2+b\le 2b+b \Rightarrow a+c-3b\le 0$

Từ đó suy ra $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\le \dfrac{11}{8}\left(a+b+c\right)$

$M=\dfrac{\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}}{a+b+c}\le \dfrac{11}{8}$. Với $a=b=1; c=2$ thì $M=\dfrac{11}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M bằng $\dfrac{11}{8}$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho $a=\sqrt[3]{2}+2$ và đa thức $P(x)=(x-3)(x-1)^3$. Tính giá trị của $P(a)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2=x^2+xy-2y^2 \\ x^2y=x^2+4y^2 \end{cases}$

Lời giải

a) Đặt $\alpha=\sqrt[3]{2}$ thì $a=2+\alpha$. Ta có $P(a)=(\alpha-1)(\alpha+1)^3$.

Để ý rằng $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1=3(\alpha^2+\alpha+1)$.

Suy ra $(\alpha-1)(\alpha+1)^3=3\cdot(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=3(\alpha^3-1)=3$

Vậy $P(a)=3$.

b) Giả sử $(x;y)$ là một nghiệm của hệ. Ta thấy $y=0$ thì $x=0$. Xét $y\neq 0$. Khi đó $x\neq 0$.

Từ hệ đã cho, ta có $xy^2(x^2+4y^2)=x^2y(x^2+xy-2y^2)$

$x^3y^2+4xy^4=x^4y+x^3y^2-2x^2y^3$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ thì phương trình trở thành $t^3+4t=t^4+t^3-2t^2$

$$\Leftrightarrow t^3-2t-4=0$$
$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+2)=0$$
$$\Leftrightarrow t=2.$$

Từ đó $x=2y$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $y=2$. Do đó $x=4$.

Vậy ta thu được $(x;y)=(0;0)$ và $(2;4)$. Thử lại ta thấy 2 cặp này đều thoả mãn hệ phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(0;0)$ và $(4;2)$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho số nguyên dương m thoả mãn 3^m+5^m+14 chia hết cho 15. Chứng minh rằng 3^m+5^m+14 chia hết cho 16.

Lời giải

Do 3^m+5^m+14 chia hết cho 15 nên 5^m-1 chia hết cho 3 và 3^m-1 chia hết cho 5.

Nếu m là số lẻ thì từ $5\equiv -1\pmod 3$, ta có $5^m\equiv(-1)^m\equiv -1\pmod 3$ mâu thuẫn.

Vậy m là số chẵn. Nếu $m=4k+2$, với $k\in\mathbb{N}$ thì $3^m-1=3^{4k}.3^2\equiv -1.81^k\equiv -1\pmod 5$ mâu thuẫn.

Vậy $m=4k$.

Ta có 3^m-1 chia hết cho $3^4-1=80$ và 5^m-1 chia hết cho 5^4-1, nên $3^m-1, 5^m-1$ cùng chia hết cho 16.

Vậy $3^m+5^m+14=\left(3^m-1\right)+\left(5^m-1\right)+16$ chia hết cho 16.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số dương a,b. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+b+\frac{|a-b|}{b^2}+\frac{|b^2-b|}{a}\geq 2$$

Lời giải

Ta xét các khả năng:

- Với $a\geq b\geq 1$ thì $\frac{a}{b}+b\geq 2$, do đó bất đẳng thức đúng. $(0,25$ điểm)
- Với $a\geq b$ và $b<1$ thì

$$\begin{aligned}VT&=\frac{a}{b}+b+\frac{a-b}{b^2}+\frac{b-b^2}{a}\\&\geq\frac{a}{b}+b+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a}\\&\geq\frac{a}{b}+b+\frac{b}{a}-b\\&=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\end{aligned}$$

- Với $a\leq b\leq 1$ thì

$$\begin{aligned}VT&=\frac{a}{b}+b+\frac{b-a}{b^2}+\frac{b-b^2}{a}\\&=b+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{b\left(1-b\right)}{a}\\&=b+\frac{1}{b}+\left(b-1\right)\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a}\right)\\&=2+\frac{(b-1)^2}{b}+\left(b-1\right)\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a}\right)\\&=2+\frac{b-1}{b}\left(b-1+\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}\right)\\&=2+\frac{b-1}{b}\cdot\left(a-b\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 2\end{aligned}$$

- Với $a\leq b$ và $1\leq b$ thì

$$\begin{aligned}VT&=\frac{a}{b}+b+\frac{b-a}{b^2}+\frac{b^2-b}{a}\\&=\frac{a}{b}+b+\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}+\frac{b^2}{a}-\frac{b}{a}\\&\ge\frac{a}{b}+b+\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}\\&=\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{b}\right)+b+\frac{1}{b}\\&\ge b+\frac{1}{b}\ge 2\end{aligned}$$

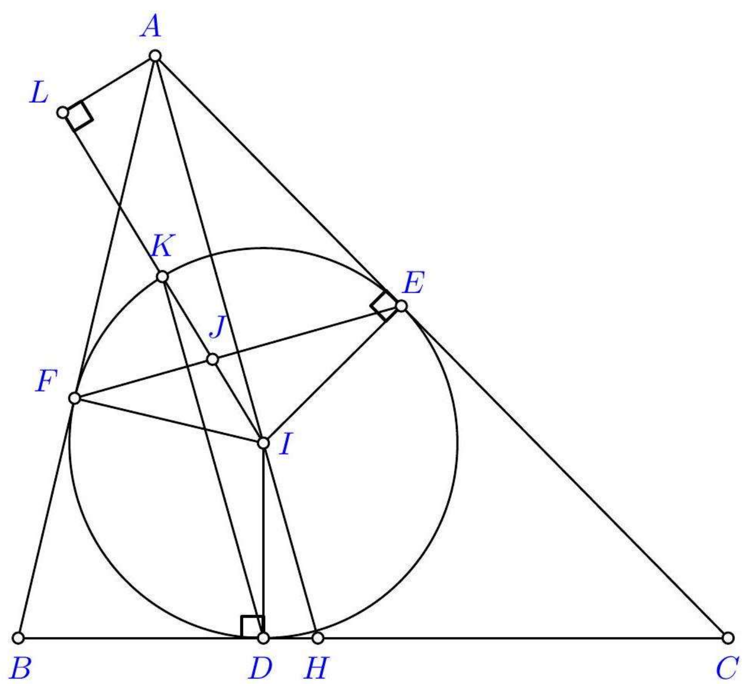
Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC, với $AB<AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F tương ứng là tiếp điểm của BC,CA,AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI,BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

a) $\widehat{KIF}=\widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) $LK\cdot BC=AI\cdot EF$.

c) Các đường thẳng DK,HJ,AL đồng quy.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{KIF}=2.\widehat{KDF}=2.\left(90^\circ-\widehat{DFE}\right)=2.\left(90^\circ-\widehat{EDC}\right)=\widehat{ACB}.$

Do $AL\perp IK$, nên L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Do đó $\widehat{LAF}=\widehat{LIF}=\widehat{ACB}$

Vậy, AL là tiếp tuyến của đường tròn (ABC).

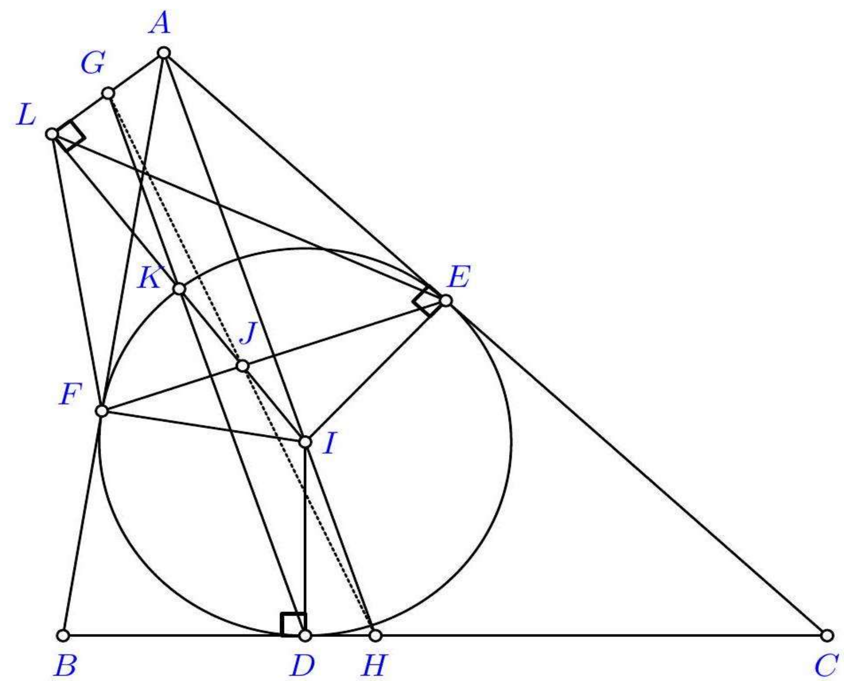
b) Ta có L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Do đó, $\widehat{LEF}=\widehat{LIF}=\widehat{ACB}$ và $\widehat{ELF}=\widehat{EAF}$. Vậy $\Delta LEF\backsim\Delta ACB$.

Vì $IE=IF$, nên LI là phân giác của $\widehat{ELF}$. Mặt khác, $\widehat{LEF}=\widehat{KIF}=2\widehat{KEF}$, ta suy ra EK là phân giác của $\widehat{LEF}$. Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác LEF.

Từ đó, $\Delta LKF\backsim\Delta AIB$ (g.g). Vậy, $\dfrac{LK}{AI}=\dfrac{LF}{AB}=\dfrac{EF}{BC}$

Suy ra, $LK.BC=AI.EF$.

c) Gọi G là giao điểm của DK và AL.



Ta có $IJ\cdot LK=IJ\cdot LI-IJ\cdot IK=IK^2-IJ\cdot IK=IK\cdot KJ$.

Suy ra $\dfrac{LK}{KJ}=\dfrac{IK}{IJ}$. Mặt khác, $\dfrac{GK}{LK}=\dfrac{AI}{LI}$. Suy ra $\dfrac{GK}{KJ}=\dfrac{IK}{IJ}\cdot\dfrac{AI}{LI}$.

Vì $IJ\cdot LI=IE^2=IK^2$, nên $\dfrac{GK}{KJ}=\dfrac{AI}{IK}(1)$.

Dễ thấy $\Delta JEI\backsim\Delta HAB$. Suy ra $\dfrac{AI}{IH}=\dfrac{BA}{BH}=\dfrac{IE}{IJ}=\dfrac{IK}{IJ}$.

Kết hợp với (1), ta có: $\dfrac{GK}{KJ}=\dfrac{IH}{IJ}$.

Vậy G,J,H thẳng hàng.

Câu 5. (1 điểm) Lần lượt ghi các số 1000, 1001, 1002,.., 1010 lên 11 tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả 11 tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp, một chiếc màu xanh và một chiếc màu đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Hỏi, trong mỗi hộp có bao nhiêu tấm thẻ?

Lời giải

Gọi tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh là a và tổng các số được ghi trong hộp đỏ là b.
Ta có $x, y \in \mathbb{N}^*$. Theo giả thiết x chia hết cho y nên $x = ky$, với k là một số nguyên dương nào đó.
Vì $1000+1001+1002+\cdots+1010 = 11\times 1000 + (0+1+\cdots+10) = 11055$ nên $x+y=11055$.

Vậy ta có phương trình $y(k+1)=11055$.

Do mỗi tấm thẻ đều ghi một số không nhỏ hơn 1000 nên $y \geq 1000$.
Suy ra $k+1 \leq 11{,}055$.
Vậy $k+1 \leq 11$.
Mặt khác $11055 = 3\times 5\times 11\times 67$ và $k+1$ là một ước lớn hơn 1 của 11055.
Suy ra $k+1 \in \{3;5;11\}$. Vậy $k \in \{2;4;10\}$.
Với $k=2$: thì $y=3685$. Vì tổng 3 số ở 3 tấm thẻ lớn nhất là $1010+1009+1008<3685$. Vậy khả năng này không xảy ra.
Với $k=4$ thì $y=2211$: Vì mỗi tấm thẻ ít nhất là 1000 nên tổng của 4 tấm thẻ lớn hơn 4000. Vậy khả năng này không thể xảy ra.
Với $k=10$ thì $y=1005$: Như vậy hộp đỏ có chiếc thẻ 1005 và hộp xanh chứa các thẻ còn lại. Trường hợp này xảy ra, vì khi đó tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ là
$10000+50=10050=10\times 1005$.
Do đó hộp xanh có 10 tấm thẻ và hộp đỏ có 1 tấm thẻ.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Chứng minh rằng $A=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Tìm tất cả các số thực x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) $A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}$

$$A=\frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$A=\frac{4}{\sqrt{x}-2}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$A=\frac{4\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{3x-3\sqrt{x}-6}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{3\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$$

2) Dễ chứng minh: $0<A\le 3$

Vì A là số nguyên nên $A\in\{1;2;3\}$

Với $A=1\Rightarrow x=1$

Với $+)A=2\Rightarrow x=\frac{1}{16}$

Với $+)A=3\Rightarrow x=0$

Kết hợp điều kiện ta có các giá trị x thỏa mãn là $0,\frac{1}{16},1$.

(Ghi chú: Nếu học sinh lập luận $2\sqrt{x}+1$ là ước của 3 và tìm ra $x\in\{0;1\}$ thì không cho điểm nào từ đó đến hết câu.)

Câu 2. (2 điểm) Một hội trường có 374 ghế, được xếp thành nhiều dãy, số ghế ở mỗi dãy bằng nhau và không vượt quá 30 . Hãy tìm số dãy ghế của hội trường biết rằng: nếu kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432.

Lời giải

Gọi x là số dãy ghế và y là số ghế mỗi dãy trong hội trường lúc bình thường. $\left(x,y \in N^*; y \le 30\right)$

Vì bình thường hội trường có 374 ghế và số ghế mỗi dãy bằng nhau nên ta có phương trình:
$xy = 374$ (1)

Vì khi kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432 nên ta có phương trình: $\left(x+1\right)\left(y+2\right) = 432$ (2)

Từ (2) ta có: $xy + y + 2x + 2 = 432$ (3)

Lấy (3) - (1) theo vế ta thu được: $y + 2x = 56$ (4)

Từ (4) ta có: $y = 56 - 2x$, thế vào (1) ta thu được: $x\left(56-2x\right) = 374$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 56x + 374 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 28x + 187 = 0 \Leftrightarrow \left(x-17\right)\left(x-11\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17 \\ x = 11 \end{array}\right.$$

Với $x = 17 \Rightarrow y = 22$

Với $x = 11 \Rightarrow y = 34$

Kết hợp điều kiện $y \le 30$ ta có $x = 17, y = 22$.

Vậy bình thường hội trường có 17 dãy ghế

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \left(m-1\right)x + 2m + 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 .

2) Chứng minh rằng, với hai số thực a, b bất kì, ít nhất một trong hai phương trình (ẩn là x) sau đây có nghiệm: $x^2 - 2ax - \left(a^2 - 4b^2 + 1\right) = 0$ và $x^2 - 4bx - \left(b^2 - 2ab - a\right) = 0$.

Lời giải

3.1) Vì hàm số $y = \left(m-1\right)x + 2m + 3$ là hàm bậc nhất nên $m \ne 1$. Khi đó đồ thị của hàm số cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A\left(\dfrac{-2m-3}{m-1}; 0\right), B\left(0; 2m+3\right)$.

Khi đó $OA = \left|\dfrac{-2m-3}{m-1}\right|, OB = \left|2m+3\right| \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \dfrac{OA \cdot OB}{2} = \dfrac{(2m+3)^2}{2\left|m-1\right|}$

Từ giả thiết, ta có: $\dfrac{(2m+3)^2}{2\left|m-1\right|} = 4 \Leftrightarrow (2m+3)^2 = 8\left|m-1\right| \left(*\right)$

TH1: $m \ge 1$. Phương trình $\left(*\right)$ trở thành:

$4m^2 + 12m + 9 = 8m - 8 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 17 = 0$

$\Delta' = -64 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

TH2: $m<1$. Phương trình (*) trở thành:

$$4m^2+12m+9=-8m+8\Leftrightarrow 4m^2+20m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m=\dfrac{-2\sqrt{6}-5}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m=\dfrac{-2\sqrt{6}-5}{2}\end{array}\right.$

Ghi chú: nếu trong bài làm học sinh không chỉ ra $m\neq 1$ thì trừ 0,25 điểm.

3.2) Ta thấy $x^2-2ax-\left(a^2-4b^2+1\right)=0$ có: $\Delta'_1=a^2+\left(a^2-4b^2+1\right)=2a^2-4b^2+1$

và $x^2-4bx-\left(b^2-2ab-a\right)=0$ có $\Delta'_2=4b^2+\left(b^2-2ab-a\right)=5b^2-2ab-a$

Xét $\Delta'_1+\Delta'_2=2a^2+b^2-2ab-a+1$

$$\Delta'_1+\Delta'_2=2a^2+b^2-2ab-a+1=(a-b)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Ta thấy $\Delta'_1+\Delta'_2>0$ nên có ít nhất một trong hai số Δ'_1 ; Δ'_2 là số dương. Từ đó suy ra it nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

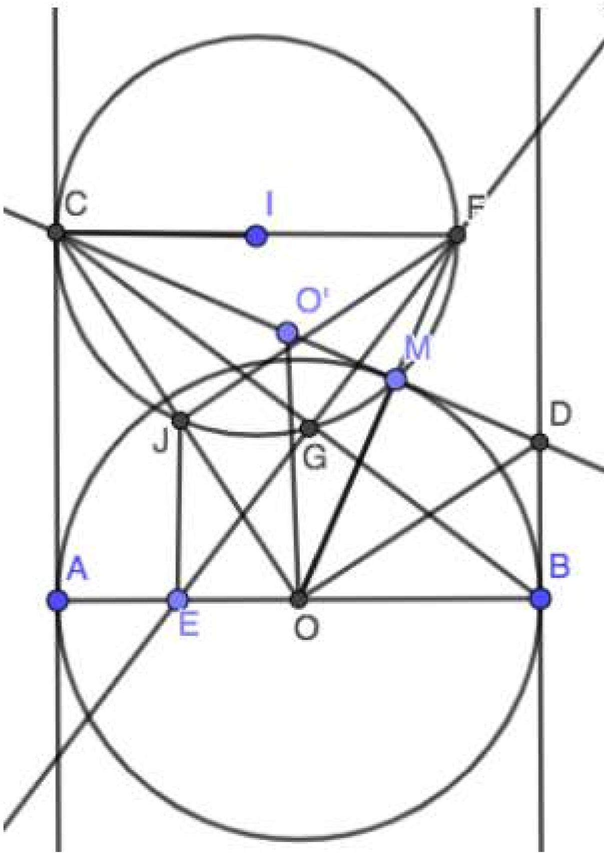
Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm nằm trên (O)(M khác A,B). Trong nửa mặt phẳng chứa M, có bờ là đường thẳng AB vẽ các tia Ax,By vuông góc với AB. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt các tia Ax,By lần lượt tại C,D.

1) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

2) Vẽ đường tròn (I) qua M, tiếp xúc với Ax tại C. Tia OC cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai J. Chứng minh rằng J là trung điểm của OC.

3) Gọi E là trung điểm của OA. Chứng minh rằng đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại một điểm thuộc đường tròn (I).

Lời giải



4.1) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OC là phân giác của góc AOM, OD là phân giác của góc BOM

$\Rightarrow \widehat{COD} = 90° \Rightarrow \Delta COD$ vuông tại $O \Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính CD. (1)

Gọi O' là trung điểm của CD thì O' là tâm của đường tròn đường kính CD. (2)

Mặt khác OO' là đường trung bình của hình thang $ABDC$ nên $OO' // AC // BD$.

$\Rightarrow OO' \perp AB (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD $(dpcm)$.

4.2) OM cắt đường tròn (I) tại F khác M.

Vì CM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{CMO} = 90° \Rightarrow \widehat{CMF} = 90°$

$\Rightarrow C, I, F$ thẳng hàng hay CF là đường kính của đường tròn (I).

Vì đường tròn (I) tiếp xúc với Ax tại C nên $IC \perp AC$ hay $CF // AB$

$\Rightarrow \widehat{FCO} = \widehat{COA} (4)$

Mặt khác, OC là phân giác của góc AOM (theo phần 4.1) nên $\widehat{COA} = \widehat{COF}$ (5)

Từ (4), (5) $\Rightarrow \widehat{FCO} = \widehat{COF}$ hay tam giác FCO cân tại F. (6)

Mặt khác, J thuộc đường tròn đường kính CF nên $\widehat{CJF} = 90°. \Rightarrow FJ \perp CO (7)$

Từ (6), (7) suy ra tam giác FCO cân tại F có FJ là đường cao đồng thời là trung tuyến. Do đó, J là trung điểm của OC(đpcm).

4.3) Ta sẽ chứng minh FE vuông góc với BC. Thật vậy, gọi G là giao điểm của FE và BC.

Ta thấy EJ là đường trung bình của tam giác OCA nên $EJ // CA,\ EJ = \frac{CA}{2} \Rightarrow EJ \perp AB$

Ta thấy: ΔFJO đồng dạng với ΔJEO (g.g) do $\widehat{FJO} = \widehat{JEO} = 90°,\ \widehat{FOJ} = \widehat{JOE}$

$\Rightarrow \frac{FJ}{JE} = \frac{JO}{EO} = \frac{CO}{AO} = \frac{CO}{BO}$ (do J, E lần lượt là trung điểm của CO, AO). (8)

Mặt khác, theo tính chất góc ngoài tam giác: $\widehat{COB} = \widehat{EJO} + 90° = \widehat{FJE}$ (9)

Từ $(8),(9)$ suy ra ΔFJE đồng dạng với ΔCOB (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{JEF} = \widehat{OBC} \Rightarrow \widehat{OBC} + \widehat{OEG} = \widehat{JEF} + \widehat{OEG} = \widehat{JEO} = 90° \Rightarrow EF \perp BC$

Từ đó, ta thấy đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại điểm F thuộc đường tròn (I).

Câu 5. (1 điểm)

1) Hãy chỉ ra một số thực x khác $0, \pm 1$ để $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên.

2) Cho x là một số thực khác $0, \pm 1$ thỏa mãn $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

Lời giải

1) Để chỉ ra có số thực x để $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên ta xét phương trình $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

2) Trước hết ta chứng minh x là số vô tỉ. Thật vật, giả sử x là số hữu tỉ thì x có dạng $\frac{m}{n}$ với $m \in Z, n \in N^*, (m,n) = 1$. Khi đó, $x + \frac{1}{x} = \frac{m^2 + n^2}{mn}$.

Vì $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên nên $(m^2 + n^2) \vdots m.n$. Do đó, $m^2 \vdots n, n^2 \vdots m$.

Mà $(m,n) = 1$ nên $m \vdots n, n \vdots m$. Lại do $(m,n) = 1$ nên $m = \pm 1$.

Tương tự $n = \pm 1$. Do đó $x = \pm 1$ (trái giả thiết $|x| \neq 1$).

Vậy x là số vô tỉ. (1)

Ta thấy: $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=2x$. Nếu $x-\frac{1}{x}$ là số hữu tỉ thì $\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2}=x$ là số hữu tỉ (trái với (1)). Do đó $x-\frac{1}{x}$ là số vô tỉ. (2)

Mặt khác, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$. Vì $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên nên $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ là số nguyên. Do đó $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2022}$ cũng là số nguyên

Do $|x|\neq 1$ nên $x-\frac{1}{x}\neq 0$.

Ta thấy: $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2022}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Nếu $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số hữu tỉ thì $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}:\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2022}=x-\frac{1}{x}$ là số hữu tỉ (trái với (2)).

Vậy $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2

Môn: **TOÁN CHUYÊN**

Thời gian làm bài: **120 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (3 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-y}=4\\ \sqrt{3y+1}+\sqrt{5-x}=4\end{cases}$.

2) Cho a,b,c,d là các số thực khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$\frac{a^2-1}{5a}=\frac{b^2-1}{5b}=\frac{c^2-1}{3c}=\frac{d^2-1}{3d}=n$$

với n là một số nguyên. Chứng minh: $P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

1) Điều kiện: $\frac{-1}{3}\le x,y\le 5$

Từ hệ suy ra $\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}=\sqrt{3y+1}-\sqrt{5-y}$

Nếu $x>y$ thì $VT>VP$

Nếu $x<y$ thì $VT<VP$

Do đó $x=y$

Thay $x=y$ vào pt (1) ta được

$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}=4\Leftrightarrow 6+2x+2\sqrt{(3x+1)(5-x)}=16\Leftrightarrow\sqrt{(3x+1)(5-x)}=5-x$

$\Leftrightarrow(3x+1)(5-x)=(5-x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=1\end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(5;5)$ và $(1;1)$.

2) Từ giả thiết suy ra a,b là hai nghiệm của phương trình $x^2-5nx-1=0$ và c,d là hai nghiệm của phương trình $x^2-3nx-1=0$. Theo định lý Viet ta có $\begin{cases}a+b=5n\\ ab=-1\\ c+d=3n\\ cd=-1\end{cases}$.

Ta có $P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=\left(ab-(a+b)c+c^2\right)\left(ab+(a+b)d+d^2\right)$

$=\left(c^2-5cn-1\right)\left(d^2+5dn-1\right)$

Vì $c^2-3nc-1=0$ và $d^2-3nd-1=0$ nên $P=(-2nc)(8nd)=-16n^2cd=16n^2$.

Do đó P là bình phương của một số nguyên.

Câu 2. (3 điểm)

1) Chứng minh rằng $1+2^2+3^3+\ldots+2039^{2039}$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

2) Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1+x^2}{z+2}+\dfrac{1+y^2}{x+2}+\dfrac{1+z^2}{y+2}$.

Lời giải

1) Ta chứng minh $A=1+2^2+3^3+\ldots+2039^{2039}$ không thể là số chính phương. Thật vậy, xét số dư của các số hạng trong A theo mod 3 ta có dãy số dư lần lượt là $1,1,0,1,-1,0,1,1,0,1,-1,0,\ldots$

Ta có $2039:6=339$ dư 5. Do đó tổng A chia 3 dư 2. Vậy A không là số chính phương.

Ta chứng minh A không thể là lũy thừa của số tự nhiên với số mũ lớn hơn 2.

Ta xét số dư của A theo mod 8.

Ta có $n^n\equiv n\pmod 8,\forall n$ lẻ và $n^n\equiv 0\pmod 8$ với mọi n chẵn >2

Suy ra $A\equiv 2^2+1+3+\ldots+2039\equiv 4+1020^2\equiv 4\pmod 8$

Vì A chẵn nên nếu $A=m^k,k\ge 3$ thì m chẵn và do đó $A\equiv 0\pmod 8$ (mẫu thuẫn).

Vậy ta có đpcm.

2) Cách 1

$$P=\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}=\frac{\left(1+x^2\right)^2}{(z+2)\left(1+x^2\right)}+\frac{\left(1+y^2\right)^2}{(x+2)\left(1+y^2\right)}+\frac{\left(1+z^2\right)^2}{(y+2)\left(1+z^2\right)}$$

$$\ge\frac{\left(3+x^2+y^2+z^2\right)^2}{(z+2)\left(1+x^2\right)+(x+1)\left(1+y^2\right)+(y+2)\left(1+z^2\right)}$$

$$=\frac{36}{x+y+z+6+x^2z+y^2x+z^2y+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Vì $(x+y+z)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=9$ nên $x+y+z\le 3$ và

$$\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)^2\le\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\le\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=9$$

Nên $P\ge\dfrac{36}{3+6+3+6}=2$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy min $P=2$.

Cách 2: $\dfrac{1+x^2}{z+2}+\dfrac{\left(1+x^2\right)(z+2)}{9}\ge\dfrac{2}{3}\left(1+x^2\right)$

$$\Rightarrow\frac{1+x^2}{z+2}\ge\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)-\frac{\left(1+x^2\right)(z+2)}{9}=\frac{4}{9}\left(1+x^2\right)-\frac{z\left(1+x^2\right)}{9}$$

Tương tự, ta suy ra

$$VT \ge \frac{4}{9}\cdot 6-\frac{1}{9}\left(z\left(1+x^2\right)+x\left(1+y^2\right)+y\left(1+z^2\right)\right)$$
$$\ge \frac{8}{3}-\frac{1}{9}\left(\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{2}+\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}{2}+\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+y^2\right)}{2}\right)$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{18}\left(3+2\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\right)$$
$$\ge \frac{8}{3}-\frac{1}{18}\left(3+6+\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\right)=2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy min $P=2$.

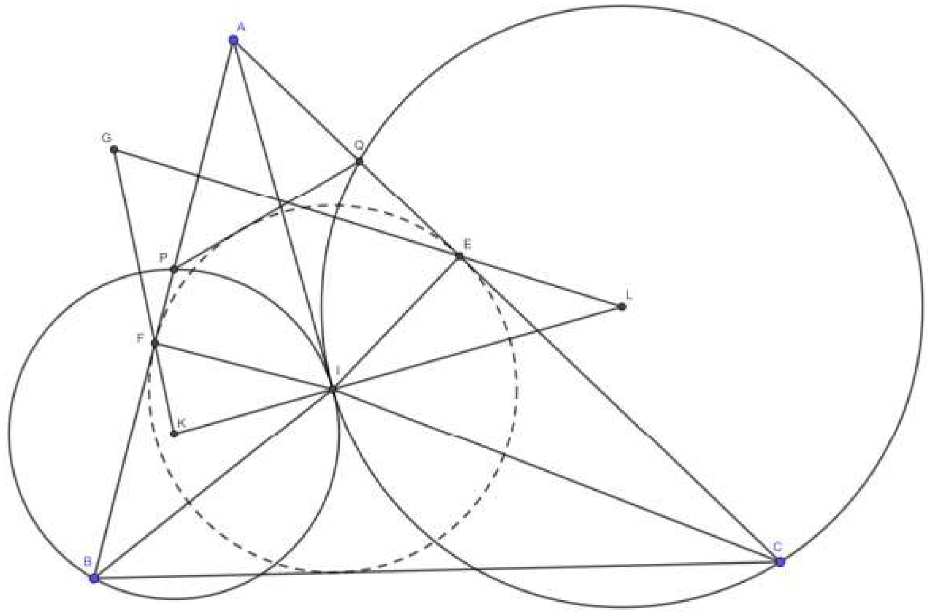
Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với các cạnh AC,AB. Gọi (K) là đường tròn đi qua B, tiếp xúc với đường thẳng AI tại I. Đường tròn này cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai P (khác B). Gọi (L) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AI tại I, đường tròn này cắt đường thẳng AC tại điểm thứ hai Q (khác C). Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

b. Đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn (I).

c. Các đường thẳng KF và LE cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



a) Vì đường tròn (K) tiếp xúc với AI nên $AI^2=AB\cdot AP$. Tương tự $AI^2=AC\cdot AQ$.

Do đó $AC \cdot AQ = AB \cdot AP$. Vậy tứ giác $BPQC$ nội tiếp. (Chú ý cần chứng minh lại các tính chất phương tích)

b) Ta có $\widehat{BPI} = 180^\circ - \widehat{AIB} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{BPQ}}{2}$

Suy ra PI là phân giác ngoài $\widehat{BPQ}$. Mà AI là phân giác $\widehat{PAQ}$. Do đó I là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác APQ. Vậy PQ tiếp xúc với đường tròn (I).

c) Gọi G là giao điểm của EL và FK.

Ta có $\widehat{BKP} = 2\widehat{BIP} = 2\left(\widehat{AIB} - \widehat{AIP}\right) = 2\left(90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2}\right) = 180^\circ + \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$

Chứng minh tương tự $\widehat{QLC} = 180^\circ + \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{BKP} = \widehat{QLC}$. Mà 2 tam giác BKP, QLC đều là các tam giác cân. Do đó $\Delta BKP \backsim \Delta QLC$.

Lại có, theo chứng minh phần b), $\widehat{FIP} = 90^\circ - \widehat{FPI} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Suy ra $\Delta FIP \backsim \Delta ECI$. Do đó $FP.EC = IE.IF$.

Chứng minh tương tự $EQ.FB = IE.IF$. Vậy $\frac{FB}{FP} = \frac{EC}{EQ}$.

Suy ra $\Delta KFB \backsim \Delta LEC$

Lại có $EF // KL$ (cùng vuông góc với AI)

Do đó ta có $\frac{FG}{FB} = \frac{FG}{FK} \cdot \frac{FK}{FB} = \frac{EG}{EL} \cdot \frac{EL}{EC} = \frac{EG}{EC}$. .

Mặt khác $\widehat{BFG} = 180^\circ - \widehat{BFK} = 180^\circ - \widehat{LEC} = \widehat{GEC}$, suy ra $\Delta GFB \backsim \Delta GEC$.

Do đó $\widehat{GBF} = \widehat{GCE}$. Vậy G thuộc đường tròn (ABC).

Câu 4. (1 điểm) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Lần lượt điền 2023^2 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, 3, 4 \ldots, 2023^2$ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô được điền đúng một số, ở mỗi dòng tính từ trái sang phải hoặc ở mỗi cột tính từ trên xuống dưới, các số được điền theo thứ tự tăng dần. Thực hiện việc thay đổi số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn 2 ô chung nhau cạnh hoặc chung nhau đúng một đỉnh.

-/ Nếu hai ô đó chung cạnh thì tăng số ở một ô thêm 2 đơn vị và giảm số trong ô còn lại 2 đơn vị.

-/ Nếu hai ô đó chung nhau đúng một đỉnh thì cùng tăng hoặc cùng giảm số trong hai ô đó 2 đơn vị.

Hỏi sau một số lần chơi ta có thể thu được bảng gồm toàn các số 2023 được không? Vì sao?

Lời giải

Sau mỗi lần thay đổi, các số luôn giữ nguyên tính chẵn lẻ. Do đó không thể có toàn bộ các số là 2023.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\dfrac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{a-b}-1$ với $a>0,b>0$ và $a\neq b$.

a) Chứng minh $M=\dfrac{a+b}{a-b}$.

b) Tính $\dfrac{a}{b}$ biết $M>0$ và $M\cdot\left(a^2-b^2\right)=\dfrac{9}{2}ab$.

Lời giải

a) $M=\dfrac{\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}-\dfrac{a-b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$

$M=\dfrac{2a+\sqrt{ab}-b+b-\sqrt{ab}-a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{a+b}{a-b}$

b) $M\cdot\left(a^2-b^2\right)=\dfrac{9}{2}ab\cdot\Leftrightarrow(a+b)^2=\dfrac{9}{2}ab\Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-5\cdot\dfrac{a}{b}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Do $M>0$ và $a,b>0$ nên $a-b>0$. Suy ra $\dfrac{a}{b}>1$.

Vậy $\dfrac{a}{b}=2$.

Câu 2. (2 điểm) a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d:y=2x+3$ và $d':y=mx+m^2-1\left(m\neq 0\right)$. Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

b) Giá cước dịch vụ của một hãng taxi vào tháng 4/2023 như sau:

Giá cước mở cửa 1 km đầu tiên	Giá cước những km tiếp theo	Giá cước từ km thứ 21 trở đi
20 000 đồng	14 000 đồng	12 000 đồng

Gọi x $(x>0)$ là số km mà hành khách di chuyển. Khi đó, số tiền mà hành khách phải trả được tính bởi công thức:

$$T=20\,000 \text{ nếu } 0<x\le 1$$
$$T=20\,000+14\,000\left(x-1\right) \text{ nếu } 1<x\le 20$$
$$T=286\,000+12\,000\left(x-20\right) \text{ nếu } x>20$$

Cô Hằng di chuyển bằng xe của hãng taxi trên và đã trả số tiền là 322 000 đồng. Hỏi cô Hằng đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu km?

Lời giải

a) Đường thẳng d cắt đường thẳng d' khi và chi khi $m \neq 2$

Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm $A(0;3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $A(0;3) \Leftrightarrow m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0; m \neq 2$ ta suy ra giá trị cần tìm của m là $m = -2$

b) Nếu hành khách di chuyển quãng đường 20 km thì phải trả số tiền là

$20000 + 14000.(20-1) = 286000$

Do $322000 > 286000$ nên cô Hằng di chuyển quãng đường nhiều hơn 20 km hay $x > 20$.

Do đó, tổng số tiền cô Hằng phải trả (tính theo x) là:

$286000 + 12000(x-20)$ (đồng)

Theo giả thiết, ta có phương trình $286000 + 12000(x-20) = 322000$

$\Leftrightarrow x = 23$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy cô Hằng đã di chuyển quãng đường là 23 km.

Câu 3. (2 điểm) Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$, ($m$ là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(1-x_1)(x_2-m)^2 = 9$.

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 1.(m^2-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow 5 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{4}$

Theo định lí Vi - ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ nên

$x_2^2 - (2m-1)x_2 + m^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 - 2mx_2 + x_2 + m^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_2^2 - 2mx_2 + m^2 = 1 - x_2 \Rightarrow (x_2 - m)^2 = 1 - x_2$

Thay vào giả thiết ta được $(1-x_1)(1-x_2) = 9 \Leftrightarrow 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow -(2m-1) + m^2 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện phương trình có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m = -2$

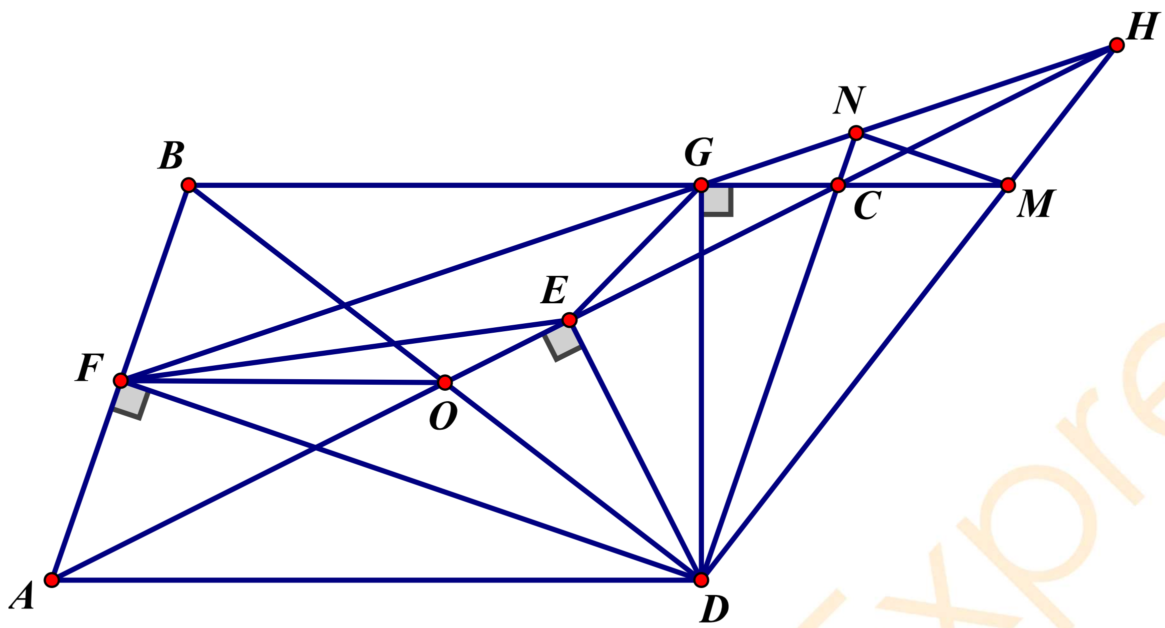
Câu 4. (3 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ sao cho tam giác ABD nhọn và không là tam giác cân. Gọi O là giao điểm của AC với BD và E, F, G tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AC, AB, BC.

a) Chứng minh $ED^2 = EF.EG$.

b) Chứng minh bốn điểm O, E, G, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của các đường thẳng FG và AC. Chứng minh $DH \perp DB$.

Lời giải



a) Vì tứ giác $ADEF$ nội tiếp nên $\widehat{EFD} = \widehat{EAD}$

Vì tứ giác $CDEG$ nội tiếp nên $\widehat{EDG} = \widehat{ECG}$

Mà $\widehat{EAD} = \widehat{ECG}$ (so le trong) nên $\widehat{EFD} = \widehat{EDG}$

Tương tự $\widehat{EGD} = \widehat{EDF}$

Do đó $\triangle EFD \sim \triangle EDG \Rightarrow \dfrac{EF}{ED} = \dfrac{ED}{EG} \Rightarrow EF.EG = ED^2$

b) **Cách 1.** Vì tứ giác $DEGC$ nội tiếp nên $\widehat{CEG} = \widehat{CDG}$

Vì tứ giác $DFBG$ nội tiếp nên $\widehat{BFG} = \widehat{BDG}$

Tam giác BFD vuông tại F có FO là trung tuyến nên $FO = OD$. Suy ra $\widehat{OFD} = \widehat{ODF}$

Do đó $\widehat{OFG} = 90^\circ - \widehat{OFD} - \widehat{BFG} = 90^\circ - \widehat{ODF} - \widehat{BDG} = \widehat{CDG} = \widehat{CEG}$

Vậy tứ giác $OEGF$ nội tiếp.

Cách 2

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BGDF$ nên $\widehat{FOG} = 2\widehat{FDG}$

Khi đó $\widehat{GEF} = 180^\circ - \widehat{GEC} - \widehat{FEA} = 180^\circ - \widehat{GDC} - \widehat{FDA} = \left(90^\circ - \widehat{GDC}\right) + \left(90^\circ - \widehat{FDA}\right)$

$= \widehat{GCD} + \widehat{FAD} = 2\widehat{BAD} = 2\widehat{FDG} = \widehat{FOG}$

Vậy tứ giác $OEGF$ nội tiếp.

c) **Cách 1.**

Gọi M là giao điểm của BC và $DH; N$ là giao điểm của DC và FG.

Theo định lí Ta - let ta có $\frac{HM}{HD}=\frac{HC}{HA}=\frac{HN}{HF}\Rightarrow MN//DF$

Vì DF vuông góc với DN nên DN vuông góc với MN.

Từ đó dẫn đến tứ giác $DGNM$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MDN}=\widehat{MGN}$

Ta có $\widehat{MGN}=\widehat{BGF}$ (đối đỉnh)

Vì tứ giác $DFBG$ nội tiếp nên $\widehat{BGF}=\widehat{BDF}$

Do đó $\widehat{MDN}=\widehat{BDF}\Rightarrow\widehat{BDH}=\widehat{BDN}+\widehat{NDM}=\widehat{BDN}+\widehat{BDF}=\widehat{NDF}=90^\circ$ (đpcm)

Cách 2. Với chú ý tam giác OGF cân tại $O\left(OG=OF=\frac{1}{2}BD\right)$ và tứ giác $OEGF$ nội tiếp ta có

$\widehat{OEF}=\widehat{OGF}=\widehat{OFG}$ dẫn đến $\Delta OEF\backsim\Delta OFH\Rightarrow\frac{OE}{OF}=\frac{OF}{OH}\Rightarrow OE.OH=OF^2$

Vì $OF=OD$ nên $OE.OH=OD^2\Rightarrow\frac{OE}{OD}=\frac{OD}{OH}\Rightarrow\Delta OED\backsim\Delta ODH(c.g.c)$. Từ đó suy ra được ngay

$\widehat{ODH}=\widehat{OED}=90^\circ$

Câu 5. (1 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương a và b thỏa mãn: Nếu c và d là các số thực sao cho các phương trình $x^2+ax+1=c$ và $x^2+bx+1=d$ có nghiệm thì phương trình $x^2+(a+b)x+1=cd$ cũng có nghiệm.

Lời giải

Bài toán phát biểu lại như sau: Tìm tất cả các số nguyên dương a và b có tính chất: nếu c,d thỏa mãn $a^2+4c-4\ge 0;b^2+4d-4\ge 0$ thì ta luôn có $(a+b)^2-4+4cd\ge 0$

Nếu $a\ge 3$, ta có thể chọn như sau

Cách 1 . Chọn $c=\frac{-a^2}{8},d=4b^2$ (thỏa mãn điều kiện $a^2+4c-4\ge 0;b^2+4d-4\ge 0$)

mà $(a+b)^2-4+4cd=a^2+2ab+b^2-4-2a^2b^2$

$=-(ab-1)^2-\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2<0$ vì a,b là các số nguyên dương

Do đó $a\ge 3$ không thỏa mãn.

Cách 2. Chọn $c=\frac{4-a^2}{4},d=2+2ab+b^2$ (thỏa mãn điều kiện $a^2+4c-4\ge 0;b^2+4d-4\ge 0$)

mà $(a+b)^2-4+4cd=a^2+2ab+b^2-4+\left(4-a^2\right)d=td+2ab+b^2-t$

$=t\left(2+2ab+b^2\right)+2ab+b^2-t=t+2ab(t+1)+b^2(t+1)$

Vì $t=4-a^2\le -5;ab>0;b^2>0$ nên $t+2ab(t+1)+b^2(t+1)<0$

$\Rightarrow(a+b)^2-4+4cd<0$. Do đó $a\ge 3$ không thỏa mãn.

Chú ý: Khi $a\ge 3$ thì $c=\frac{4-a^2}{4}<0$, ta có thể chọn $c=\frac{4-a^2}{4}$;

chọn d lớn hơn cả hai số $\frac{4-(a+b)^2}{4c}$ và $\frac{4-b^2}{4}$

$\left(d > \max\left\{\frac{4-(a+b)^2}{4c};\frac{4-b^2}{4}\right\}\right)$

Vậy $a \in \{1;2\}$. Tương tự $b \in \{1;2\}$

Với $a,b \in \{1;2\}$ thì $(a+b)^2 \ge 4$ và $a^2+4c-4 \ge 0 \Rightarrow c \ge \frac{4-a^2}{2} \ge 0; b^2+4d-4 \ge 0 \Rightarrow d \ge \frac{4-b^2}{2} \ge 0$

Từ đó dẫn đến $(a+b)^2-4+4cd \ge 0$

Các giá trị nguyên dương cần tìm của a,b là $a,b \in \{1;2\}$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm)

Cho ba phương trình:

$$x^2-ax+1=0\,(1),\quad x^2-bx+1=0\,(2),\quad x^2-cx+1=0\ (3),$$

trong đó a,b,c là các số thực.

Biết rằng, phương trình (1) có nghiệm $x=x_1$, phương trình (2) có nghiệm $x=x_2$ và phương trình (3) có nghiệm $x=x_1x_2$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2-abc$.

Lời giải

Ta có: $x_1^2-ax_1+1=0$, $x_2^2-bx_2+1=0$, $(x_1x_2)^2-c(x_1x_2)+1=0$.

Suy ra $a=x_1+\dfrac{1}{x_1}$, $b=x_2+\dfrac{1}{x_2}$, $c=x_1x_2+\dfrac{1}{x_1x_2}$

Ta có $ab=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=c+\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$

$$\Rightarrow abc=c^2+\left(x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)=c^2+x_1^2+\frac{1}{x_1^2}+x_2^2+\frac{1}{x_2^2}=c^2+a^2-2+b^2-2$$

Suy ra $T=4$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x\left(\sqrt{y+4}+\sqrt{y+11}\right)=35\\ y\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)=35\end{cases}$

2) Chứng minh rằng, với mọi số thực x,y,z ta có:

$$(z+x-y)x^5+(x+y-z)y^5+(y+z-x)z^5\ge 0.$$

Lời giải

1) Điều kiện: $x,y>0$. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}x=5\left(\sqrt{y+11}-\sqrt{y+4}\right)\\ y=5\left(\sqrt{x+11}-\sqrt{x+4}\right)\end{cases}$

Trừ theo từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$x-y=5\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{y+4}\right)-5\left(\sqrt{x+11}-\sqrt{y+11}\right)$$

$$\Leftrightarrow x-y=5\frac{x-y}{\sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}}-5\frac{x-y}{\sqrt{x+11}+\sqrt{y+11}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(1-\frac{5}{\sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}}+\frac{5}{\sqrt{x+11}+\sqrt{y+11}}\right)=0$$

Từ hệ đã cho suy ra x,y không đồng thời nhỏ hơn 5. Do đó

$$\frac{5}{\sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}}-\frac{5}{\sqrt{x+11}+\sqrt{y+11}}<\frac{5}{\sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}}<\frac{5}{3+2}=1$$

Từ (1) suy ra $x=y$.

Với $x=y$ ta có: $x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)=35$ (2).

Xét $f(x)=x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)$, ta có $f(5)=35$. Nếu $x>5$ thì $f(x)>f(5)=35$.

Nếu $x<5$ thì $f(x)<f(5)=35$. Do đó, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=5$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=5$.

2) Chứng minh: $(z+x-y)x^5+(x+y-z)y^5+(y+z-x)z^5\geq 0$.

Đpcm tương đương với $x^6+y^6+z^6-x^5y-y^5z-z^5x+x^5z+y^5x+z^5y\geq 0$

$\Leftrightarrow \sum\left(x^6+y^6-2x^5y+2y^5x\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \sum\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2-xy\right)^2\geq 0$: đúng

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng, tồn tại vô số bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn phương trình sau:

$$x^{31}+y^5=z^{2023}.$$

Lời giải

Chứng minh rằng, tồn tại vố số bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn

$$x^{31}+y^5=z^{2023}$$

Xét $x=2^{5m},y=2^{31m}\left(m\in\mathbb{Z}^+\right)$. Khi đó: $x^{31}+y^5=2^{155m+1}$.

Ta cần chọn m sao cho $155m+1=2023n\left(n\in\mathbb{Z}^+\right)(1)$.

Khi đó $z=2^n$.

Từ (1) suy ra $8n-1$ chia hết cho 155. Đặt $8n-1=155k\left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$ta có:

$$3k+1:8\Leftrightarrow 9k+3:8\Leftrightarrow k+3:8.$$

Đặt $k+3=8u\left(u\in\mathbb{Z}^+\right)$, ta có $n=155u-58,m=2023u-757$.

Như vậy, tất cả các bộ $x=2^{5(2023u-757)},y=2^{31(2023k-757)},z=2^{155u-}$ $u\in\mathbb{Z}^+$đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến d của (O) tại B. Gọi H là trung điểm của OB. Các điểm M,N thay đổi trên d, không trùng với B sao cho H là trực tâm của tam giác AMN. Gọi E,F lần lượt là giao điểm thứ hai của AM,AN với đường tròn (O). Chứng minh rằng

a) Tứ giác MNFE nội tiếp.

b) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định

Lời giải

a) Xét đường tròn (O) : Do AB là đường kính nên

$\overset{\frown}{AEB} = \overset{\frown}{AFB} = 90^\circ$.

Ta có $\overset{\frown}{AFE} = \overset{\frown}{ABE} = \overset{\frown}{AMB}\left(= 90^\circ - \overset{\frown}{MBE}\right)$

Suy ra tứ giác MNFE nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn (AMN) với đường thẳng AB.

Chứng minh $BA \cdot BK = BM \cdot BN = R^2$

Suy ra K cố định

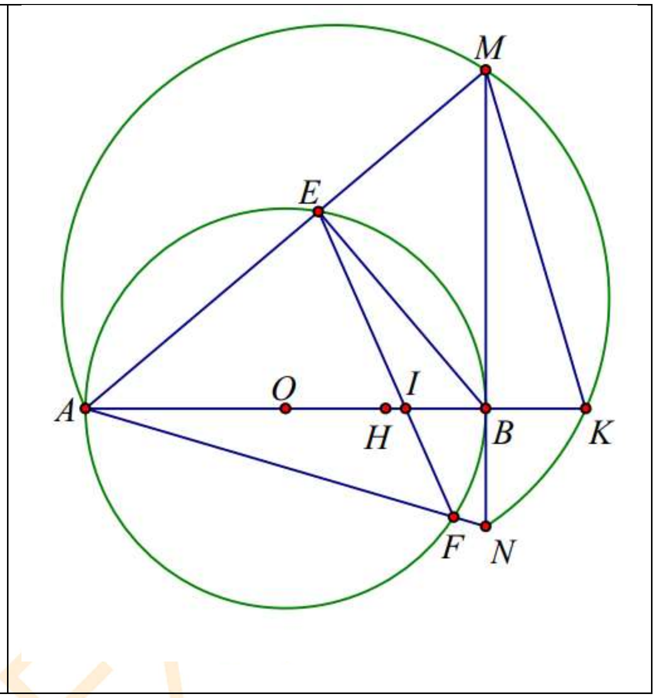
Gọi $I = EF \cap AB$. Do tứ giác MNFE nội tiếp nên

$\overset{\frown}{AEI} = \overset{\frown}{ANM} = \overset{\frown}{AKM}$.

Suy ra tứ giác MEIK nội tiếp.

Chứng minh: $AI \cdot AK = AE \cdot AM = AB^2 = 4R^2$.

Suy ra I cố định.



Câu 5. (1 điểm) Có 2023 viên bi đựng trong 14 cái hộp. Mỗi lần cho phép lấy hai viên bi ở hai hộp nào đó và bỏ vào một trong 12 hộp còn lại. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ hết bi vào một hộp.

Lời giải

Ta chứng minh bài toán tổng quát với m viên bi và n cái hộp $(m,n \ge 4)$. Quy nạp theo m :

Với $m = 4$: Số bi thuộc một trong các dạng sau:

$$(1;1;1;1;0;\ldots;0),\ (1;2;1;0;0;\ldots;0),$$
$$(2;2;0;0;0;\ldots;0),\ (1;3;0;0;0;\ldots;0),\ (4;0;0;0;\ldots;0)$$

Thực hiện như sau: $(1;1;1;1) \to (3;1;0;0) \to (2;0;2;0) \to (1;0;1;2) \to (0;0;0;4)$.

Giả sử bài toán đúng với mọi $m \le k$. Xét với $m = k+1$: Đưa về trường hợp $(1;k;0;0;\ldots;0)$

Sau đó thực hiện như sau:

$$(1;k;0;0;\ldots;0) \to (0;k-1;2;0;\ldots;0) \to (0;k-2;1;2;0;\ldots;0)$$
$$\to (2;k-3;0;2;0;\ldots;0) \to (1;k-1;0;1;0;\ldots;0)$$
$$\to (0;k+1;0;0;\ldots;0)$$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x>0$; $y>0$; $x\neq y$

a) Rút gon M.

b) Tính M biết $x^2-5xy+4y^2=0$.

Lời giải

a) $M=\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{xy}-x-y}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\frac{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\cdot 2\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) $x^2-5xy+4y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(x-4y)=0\Leftrightarrow x=4y$ vì $x\neq y$

$\Rightarrow P=-\frac{\sqrt{4y}}{\sqrt{4y}+\sqrt{y}}=\frac{-2}{3}$

Câu 2. (1,5 điểm) Cửa hàng An Bình niêm yết giá một bông hồng là 25000 đồng. Nếu khách hàng mua nhiều hơn 10 bông thì từ bông thứ 11 trở đi, mỗi bông được giảm 10% trên giá niêm yết. Nếu mua nhiểu hơn 20 bông thì từ bông thứ 21 trở đi, mỗi bông được giảm thêm 20% trên giá đã giảm.

a) Nếu khách hàng mua 30 bông hồng tại cửa hàng An Bình thì phải trả bao nhiêu tiền?

b) Bạn Dũng đã mua một số bông hồng tại cửa hàng An Bình với số tiền 925000 đồng. Hỏi bạn Dũng đã mua bao nhiêu bông hồng?

Lời giải

a) Giá tiền mua mỗi bông hồng từ bông 11 đến bông 20 là $25000.0,9=22500$ (đồng)
Giá tiền mua mỗi bông hồng từ bông 21 trở đi là $22500.0,8=18000$ (đồng)
Số tiền khách hàng phải trả khi mua 30 bông là
$25000.10+22500.10+18000.10=655000$ (đồng)

b) Gọi $x\left(x\in\mathbb{N}^*,x>20\right)$ là số bông hồng bạn Dũng mua.

Ta có phương trình $25000.10+22500.10+18000\cdot(x-20)=925000\Leftrightarrow x=45$ (bông)

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=5\\ mx+y=m+5\end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất ở trên thỏa mãn điều kiện $x \ge y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = x + y$.

Lời giải

a) Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất theo từng vế ta được $(m-2)x = m$ (1)

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m-2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 2$

Khi đó từ (1) suy ra $x = \dfrac{m}{m-2}$

$y = 5 - 2x = 5 - \dfrac{2m}{m-2} = \dfrac{3m-10}{m-2}$

Vậy $m \ne 2$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y) = \left(\dfrac{m}{m-2};\dfrac{3m-10}{m-2}\right)$.

b) **Cách 1.**

Theo giả thiết $2x + y = 5$ và $x \ge y$ ta suy ra $x \ge \dfrac{5}{3}$

Khi đó $H = x + y = x + (5-2x) = 5 - x$

Vì $x \ge \dfrac{5}{3}$ nên $H \le \dfrac{10}{3}$ và dấu bằng xảy ra khi $x = y = \dfrac{5}{3}$

Thay $x = y = \dfrac{5}{3}$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta tìm được $m = 5$ (thỏa mãn). Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức H bằng $\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow m = 5$

Cách 2.

$x \ge y \Leftrightarrow \dfrac{m}{m-2} \ge \dfrac{3m-10}{m-2} \Leftrightarrow \dfrac{2m-10}{m-2} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-5}{m-2} \le 0 \Leftrightarrow 2 < m \le 5$

Khi đó $H = x + y = \dfrac{m}{m-2} + \dfrac{3m-10}{m-2} = \dfrac{4m-10}{m-2} = \dfrac{4(m-2)-2}{m-2} = 4 - \dfrac{2}{m-2}$

Vì $2 < m \le 5 \Rightarrow 0 < m-2 \le 3 \Rightarrow \dfrac{1}{m-2} \ge \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{-2}{m-2} \le \dfrac{-2}{3} \Rightarrow 4 - \dfrac{2}{m-2} \le \dfrac{10}{3}$ hay $H \le \dfrac{10}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của H bằng $\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow m = 5$

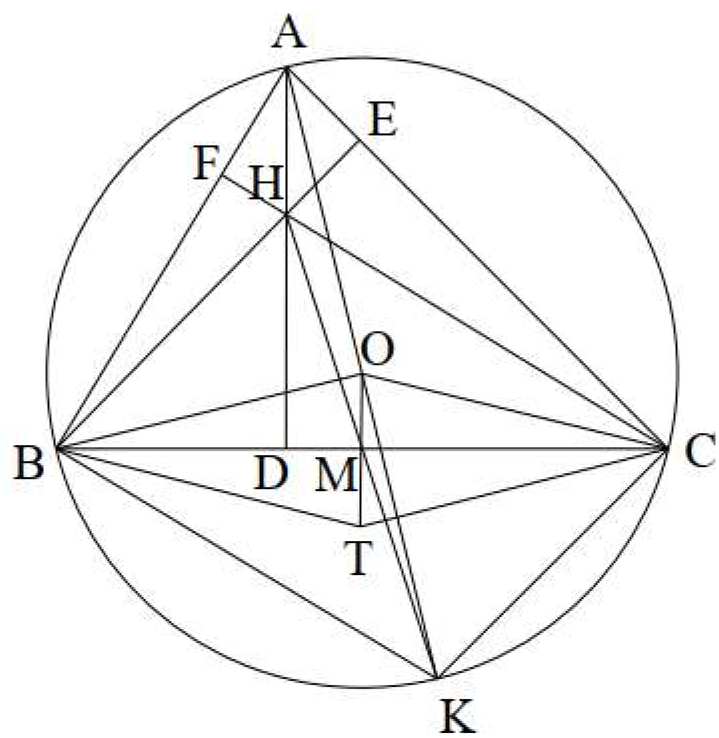
Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường trồn $(O;R)$. Kẻ đường kính AK của (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành và $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, T là điểm đối xứng với O qua M. Chứng minh T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và $AH^2 + BC^2 = 4R^2$.

c) Biết $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 7$ và $AH \cdot BH \cdot CH = 3$. Tính R.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $AB\perp BK$. Kết hợp với $AB\perp CH$, suy ra $BK//CH$. Tương tự $BH//CK$. Từ đó dẫn đến tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.

Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{AKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) và $\widehat{ADB}=\widehat{ACK}=90^\circ$ suy ra

$\Delta BAD\backsim\Delta KAC(g.g)\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{BA}{KA}\Rightarrow AD=\dfrac{AB\cdot AC}{KA}$ hay $AD=\dfrac{AB\cdot AC}{2R}$. Vậy

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AB\cdot AC}{2R}\cdot BC=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$.

Vì M là trung điểm của dây cung BC nên $OM\perp BC$

Tứ giác $BOCT$ có hai đường chéo BC và OT vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên $BOCT$ là hình thoi, từ đó dẫn đến $TB=TC=OB=OC=R(1)$

Vì $BHCK$ là hình bình hành nên hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tam giác AHK có OM là đường trung bình nền ta có ngay $AH=2OM=OT$.

Tứ giác $AHTO$ có $AH=OT$ và $AH//OT$ nên $AHTO$ là hình bình hành và $TH=OA=R(2)$

c) Từ (1) và (2) suy ra $TB=TC=TH=R$. Vậy T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.

Ta có $AH^2+BC^2=4OM^2+4MC^2=4\left(OM^2+MC^2\right)=4OC^2=4R^2$

Chú ý $\widehat{CHD}=\widehat{ABC}=\widehat{AKC}$ và áp dụng định lí Pytago ta có

$AC^2=AD^2+DC^2=\left(AH+HD\right)^2+DC^2=AH^2+HD^2+DC^2+2AH\cdot HD$

$AC^2=AH^2+CH^2+2AH\cdot CH\cdot\cos\widehat{CHD}=AH^2+CH^2+2AH\cdot CH\cdot\cos\widehat{AKC}$

$AC^2 = AH^2 + CH^2 + 2AH\cdot CH\cdot\dfrac{CK}{AK} = AH^2 + CH^2 + 2AH\cdot CH\cdot\dfrac{BH}{2R}$

$AC^2 = AH^2 + CH^2 + \dfrac{AH\cdot BH\cdot CH}{R}$

Tương tự ý b) ta có $BH^2 + AC^2 = 4R^2$ từ đó suy ra

$4R^2 - BH^2 = AH^2 + CH^2 + \dfrac{AH\cdot BH\cdot CH}{R} \Leftrightarrow 4R^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + \dfrac{AH\cdot BH\cdot CH}{R}$

Thay giả thiết, ta được phương trình

$4R^2 = 7 + \dfrac{3}{R} \Leftrightarrow 4R^3 - 7R - 3 = 0 \Leftrightarrow (2R-3)(2R^2+3R+1) \Leftrightarrow R = \dfrac{3}{2}$

Câu 5. (1 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x^2 + xy + y^2 = 3;\ \ y^2 + yz + z^2 = 1;\ \ z^2 + zx + x^2 = 4.$$

Tinh $S = x + y + z$.

Lời giải

$x^2 + xy + y^2 = 3\ (1);\ y^2 + yz + z^2 = 1\ (2);\ z^2 + zx + x^2 = 4\ (3)$

$2 = 3 - 1 = (x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2) = (x-z)(x+y+z)$ (5)

$1 = 4 - 3 = (z^2 + zx + x^2) - (x^2 + xy + y^2) = (z-y)(x+y+z)$ (6)

Từ (4) và (5) suy ra $x - z = 2(z-y) \Leftrightarrow x = 3z - 2y$

Thay $x = 3z - 2y$ vào $x^2 + xy + y^2 = 3$ ta được $y^2 - 3yz + 3z^2 = 1$.

Kết hợp với $y^2 + yz + z^2 = 1$ suy ra $y^2 - 3yz + 3z^2 = y^2 + yz + z^2 \Rightarrow z = 2y$ và từ (6) có $x = 4y$

Thay $x = 4y$ vào (1) dẫn đến $21y^2 = 3 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ và $S = x + y + z = 7y = \sqrt{7}$

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,5 điểm)

a) Giả sử a,b là các số thực thoả mãn: với x,y là hai số thực bất kì ta luôn có

$$\left|(ax+by)(ay+bx)\right| \le x^2+y^2.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2 \le 2$.

b) Giải phương trình $x+4=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{(5-x)(2-x)}$.

Lời giải

a) (1 điểm) Với $x=y=1$ ta được $(a+b)^2 \le 2$. Mặt khác, với $x=1, y=-1$ ta được $(a-b)^2 \le 2$. Vậy $2\left(a^2+b^2\right)=(a+b)^2+(a-b)^2 \le 4$. Suy ra $a^2+b^2 \le 2$.

Nhận xét. Có thể chỉ ra điều kiện cần và đủ là $(a\pm b)^2 \le 2$.

b) (1.5 điểm) Điều kiện: $x \le 2$.

Cách 1. Đặt $t=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}$, với $t \ge 0$. Ta có $\sqrt{(5-x)(2-x)}=\dfrac{t^2+2x-7}{2}$. Vậy, phương trình đã cho trở thành $x+4=t+\dfrac{t^2+2x-7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{t^2}{2}+t-\dfrac{15}{2}=0 \Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=-5$

Vì $t \ge 0$, nên $t=3$. Ta có: $\sqrt{(5-x)(2-x)}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ (5-x)(2-x)=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Cách 2. Đặt $a=\sqrt{5-x}, b=\sqrt{2-x}$ phương trình trở thành $x=a+b+ab-4$.

Ta có $a^2+x=5$ và $b^2+x=2$. Do đó $\begin{cases} (a+b)(a+1)=9 \\ (a+b)(b+1)=6 \end{cases}$

Suy ra $2(a+1)=3(b+1)$ hay $2a=3b+1$. Từ đó $2x=(3b+1)+2b+(3b+1)b-8=3b^2+6b-7$.

Từ đó $b^2+x=2 \Leftrightarrow 5b^2+6b-7=4 \Leftrightarrow 5b^2+6b-11=0 \Leftrightarrow (b-1)(5b+11)=0 \Leftrightarrow b=1$ (do $b \ge 0$).

Vậy $a=2$, do đó $x=1$. Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a \ne c$ và $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=2.$

Tính giá trị biểu thức $S=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{a}{a+b}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\frac{b}{b+c}$

$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{c}-b\sqrt{a}}{(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}=\frac{c\sqrt{a}-b\sqrt{c}}{(b+c)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{ac}-b\right)}{a+b}=\frac{\sqrt{c}\left(\sqrt{ac}-b\right)}{b+c}.$

Nếu $b\neq\sqrt{ac}$ thì $\frac{\sqrt{a}}{a+b}=\frac{\sqrt{c}}{b+c}$

$\Leftrightarrow b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=a\sqrt{c}+b\sqrt{c} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(b-\sqrt{ac}\right)=0$ (mâu thuẫn)

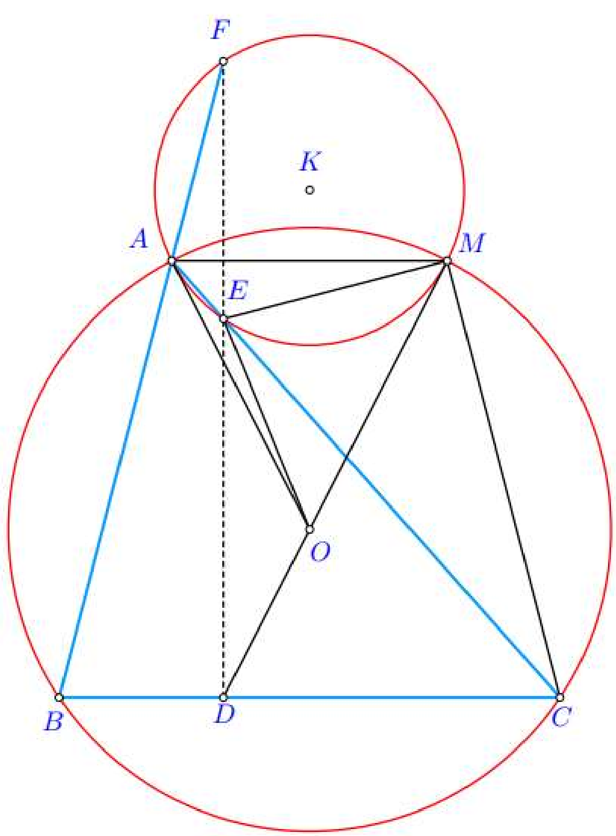
Vậy $b=\sqrt{ac}$. Từ đó $S=\frac{a}{a+\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ac}+c}=1.$

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB<AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho $AM \parallel BC$. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai F, E (F, E khác A). Các đường thẳng OM, BC cắt nhau tại điểm D.

(a) Chứng minh rằng các điểm D, E, F thẳng hàng.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh rằng $AHDL$ là hình bình hành.

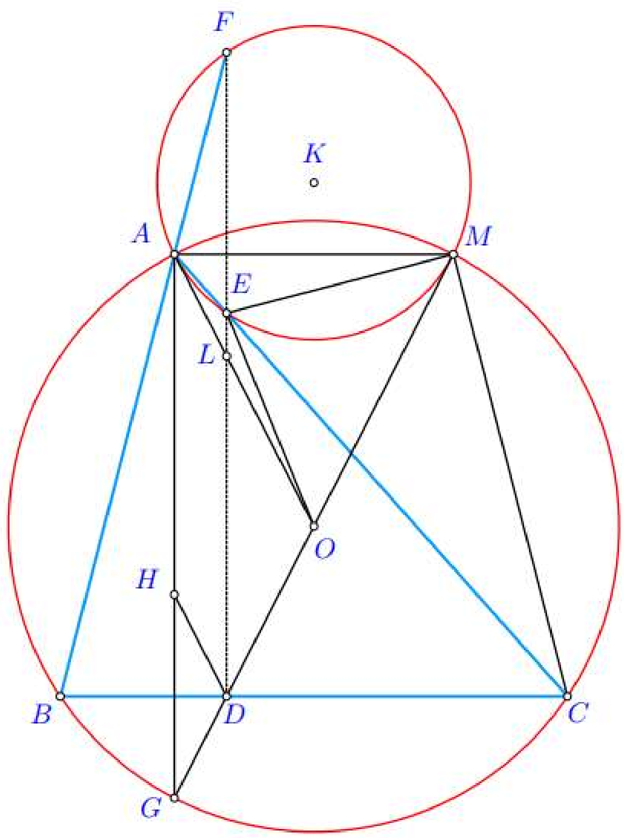
Lời giải



a) (1.5 điểm) Ta có O,K cách đều A,M. Vậy OK là đường trung trực của AM. Thành thử theo tính đối xứng, OM là tiếp tuyến tại M của (K).

Từ đó $\widehat{EMD}=\widehat{MAE}=\widehat{ECD}$.

Vậy tứ giác $DEMC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MED}+\widehat{MCB}=180°$. Mặt khác, theo tính chất của tứ giác nội tiếp $\widehat{FEM}=\widehat{FAM}=\widehat{MCB}$. Vậy $\widehat{FEM}+\widehat{MED}=180°$ hay các điểm D,E,F thẳng hàng.



b) (1.5 điểm) Kéo dài MD cắt (O) tại điểm thứ hai G. Do AG là đường kính nên $AM\perp AG$. Vì $AM//BC$ nên $AG\perp BC$. Vậy A,H,G thẳng hàng. Từ đó G,H đối xứng nhau qua BC.

Suy ra $\widehat{GHD}=\widehat{HGD}=\widehat{OAG}$.

Vậy, $HD//AL$. Mà $AH//LD$ (vì cùng vuông góc với BC). Suy ra $AHDL$ là hình bình hành.

Câu 4. (1 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p,q,r sao cho $pq-6,qr+1,rp+10$ là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

Lời giải

a) (1.5 điểm) Giả sử $pq-6=x^2,qr+1=y^2$ và $rp+10=z^2$. Nếu p,q,r cùng là các số lẻ thì x,z lẻ nên $pq\equiv rp\equiv 3 \pmod 4$. Vậy $q\equiv r \pmod 4$. Ngoài ra, $qr\equiv -1 \pmod 4$, mâu thuẫn. Vậy trong các số p,q,r có ít nhất một số là số chẵn.

$+/\ p,q,r$ phải phân biệt đôi một: Nếu $p=q$, ta được $p^2-x^2=6$. Khi đó p,x cùng tính chẵn lẻ nên $4\mid p^2-x^2$, mâu thuẫn. Vậy $p\neq q$. Tương tự $r\neq p$. Nếu $q=r$ ta được $q^2+1=y^2$, mâu thuẫn.

+/ Nếu $q=2$, ta được $2r+1=y^2$. Vậy y lẻ nên $y^2\equiv 1 \pmod 8$. Suy ra $8\mid 2r$, mâu thuẫn. Nếu $r=2$ thì tương tự. Do đó $p=2$. Ta có $\begin{cases} q-3=2x_1^2 \\ qr+1=y^2 \\ r+5=2z_1^2 \end{cases}$

Từ đó $qr=(y-1)(y+1)$. Nếu $q\mid y-1$, ta được $r=\dfrac{y-1}{q}\cdot(y+1)$.

Vậy $q=y-1$ và $r=y+1$. Suy ra $r-q=2$. Tương tự, $q\mid y+1$ thì $r=\dfrac{y+1}{q}.(y-1)$

do đó $y-1=1$ hoặc $q=y+1$. Khả năng thứ nhất, ta được $qr+1=4$, loại. Vậy $y+1=q$ và $r=y-1$. Từ đó $q-r=2$. Tóm lại $|q-r|=2$. Ta được

$+/\ r=q+2$ thì $q+7=2z_1^2$ và $q-3=2x_1^2$. Ta được $2z_1^2-2x_1^2=10$ hay $z_1^2-x_1^2=5$. Từ đó $z_1=3, x_1=2$ hay $q=11$ và $r=13$.

$+/\ q=r+2$ thì $r-1=2x_1^2$ và $r+5=2z_1^2$. Ta được $z_1^2-x_1^2=3$. Từ đó $z_1=2, x_1=1$. Vậy $r=3$ và $q=5$. Tóm lại (p,q,r) là $(2,5,3)$ hoặc $(2,11,13)$.

(b) (1.5 điểm) Ta bắt đầu bằng một nhận xét đơn giản: trong một đa giác lồi bất kì, đường trung trực của mỗi cạnh đi qua không quá một đỉnh của đa giác đó.

Phản chứng, giả sử rằng 3 đường chéo bất kì, luôn có hai đường chéo có độ dài bằng nhau. Vậy tồn tại a,b dương sao cho mỗi đường chéo có độ dài hoặc bằng a hoặc bằng b.

Xét một cạnh AB của bát giác lồi đã cho. Với mỗi đỉnh C mà không kề với A,B thì AC,BC là các đường chéo. Do đó $AC=BC=a$ hoặc $AC=BC=b$ hoặc $AC=a, BC=b$ hoặc $AC=b, BC=a$. Lưu ý rằng, nếu $CA=CB$ thì C nằm trên trung trực của AB, do đó số các điểm C thoả mãn $AC=BC=a$ hoặc $AC=BC=b$ tối đa là 1 điểm (do bát giác là lồi). Hơn nữa chỉ có tối đa 1 điểm C thoả mãn $AC=a, BC=b$, vì nếu có 2 điểm C_1,C_2 thì A,B nằm trên trung trực của C_1C_2, mâu thuẫn. Tương tự, cũng có tối đa 1 điểm C sao cho $AC=b, BC=a$. Vậy có tối đa 3 điểm C không kề với A,B. Thành thử đa giác có tối đa $2+3+2=7$ đỉnh, mâu thuẫn.

------------------------------- HẾT -------------------------------