MỤC LỤC

A. PHẦN ĐỀ THI

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2015 - 2016
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Dành cho học sinh chuyên Toán)

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10x-10y \end{cases}$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $n^4-1\,\vdots\,40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$

Câu III. (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh $ab+ac+bc\le\frac{3}{4}$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM,BN,CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E,F là điểm đối xứng của Q qua AB,AC.

1) Chứng minh rằng $MH.MA=MP.MN$

2) Chứng minh rằng E,F,H thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Câu V. (1,0 điểm) Chứng minh tồn tại các số nguyên a,b,c sao cho $0<\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|<\frac{1}{1000}$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 9/6/2016
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Dành cho học sinh chuyên Toán)

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^4-2x^3+x-\sqrt{2\left(x^2-x\right)}=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2y-4x=0 \\ 4x^2-4xy^2+y^4-2y+4=0 \end{cases}$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc\neq 0$. Tính

$$P=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}.$$

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $2^x\cdot x^2=9y^2+6y+16$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}\geq a+b+c.$$

2) Cho số nguyên dương n thơa mân $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhon ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BB',CC' cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm P.

1) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'},\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB,AC tại các điểm E và F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF; K là giao điểm của HM và AO'.

a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.

b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O)

Câu V. (1,0 điểm) Cho 2017 số hữu tỷ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

---------------------------- HẾT ----------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 10/6/2017
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{6x-x^2}+2x^2-12x+15=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2=y+\dfrac{3}{y} \\ 4y^2=x+\dfrac{3}{x} \end{cases}$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2017-p^2$ chia hết cho 24.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^3+y^3-9xy=0$.

3) Cho a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh $a+b+2\sqrt{ab+c^2}$ không phải là số nguyên tố.

Câu III. (1,5 điểm) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh

$$\frac{x}{3-yz}+\frac{y}{3-zx}+\frac{z}{3-xy}\le\frac{3}{2}.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (với $AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, D là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng BC và G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn (O). Gọi F là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O). Đường thẳng FG cắt đường thẳng ID tại điểm H.

1) Chứng minh tứ giác $IBHC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi J là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh $BH=CJ$.

3) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng FH với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh đường thẳng NJ đi qua trung điểm của cạnh BC.

Câu V. (1,0 điểm) Xét tập hợp S gồm các số nguyên dương có tính chất : với hai phần tử phân biệt bất kì x,y thuộc S, ta luôn có $30|x-y|\ge xy$. Hỏi tập hợp S có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 10/6/2017
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{5x-x^2}+2x^2-10x+6=0$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cá các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $x+y-z=2$ và $3x^2+2y^2-z^2=13$.

2) Cho các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a+b+c$.

3) Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn $2n+1, 3n+1$ là các số chính phương và $2n+9$ là số nguyên tố.

Câu III. (1,5 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (với $AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh $BC^2=4\cdot DA\cdot DF$.

2) Tia DH cát đường tròn (O) tại điểm G. Chứng minh bốn điểm A,G,E và D cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE.

Câu V. (1,0 điểm) Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,\ldots,99$. Ta thực hiện thao tác sau: Xoá ba số a,b,c bất kỳ trên bảng rồi lại viết lên bảng số $(abc+ab+bc+ca+a+b+c)$. Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 8/6/2018
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2+3x+8=(x+5)\sqrt{x^2+x+2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Cho p,q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.

2) Cho các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a<b\le c<d; ad=bc$ và $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$.

a) Chứng minh $a+d>b+c$.

b) Chứng minh a là một số chính phương.

Câu III. (1,5 điểm)

1) Với x,y,z là các số thực thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$

2) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.

1) Chứng minh tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.

2) Gọi M,N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD,BC. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Chứng minh đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác EMN.

Câu V. (1,0 điểm) Cho tập hợp $S=\{x\in\mathbb{Z} \mid 1\le x\le 50\}$. Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

1) Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.

2) Có hay không có một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài? Hãy giải thích câu trả lời.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 8/6/2018
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2+2x+7=(x+3)\sqrt{x^2+5}$..

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=1\\(x+y)(x^2+y^2)=1.\end{cases}$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0$.

2) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $3a^2+a=4b^2-b$. Chứng minh rằng $a+b$ là một số chính phương.

Câu III. (1,5 điểm)

a) Với x,y,z là các số thực thay đổi thỏa mãn $xyz=1$ và $(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)\neq 0$,

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{xy+x+1}+\dfrac{1}{yz+y+1}+\dfrac{1}{zx+z+1}=1$.

b) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz\geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao BE và nội tiếp đường tròn (O,R). Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng BE cắt các đường thẳng AD và AO lần lượt tại các điểm I và H.

1) Chứng minh rằng $BH\cdot BI=2R^2$.

2) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N thuộc tia đối của tia OA sao cho $ON=\dfrac{1}{2}R$. Chứng minh rằng tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi K là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Câu V. (1,0 điểm) Trên một đường tròn cho 2018 điểm phân biệt. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ nối hai điểm trong 2018 điểm đã cho để được một dây cung sao cho dây cung vừa được vẽ không có điểm chung với bất kỳ dây cung nào đã vẽ trước đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người đi trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2019 - 2020
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 3/6/2019
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+5x}\right)=5.$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+7=4y^2+4y \\ x^2+3xy+2y^2+x+y=0. \end{cases}$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $P=abc(a-1)(b+4)(c+6)$ với a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=2019$. Chứng minh rằng P chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để biểu thức $Q=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}$ là số nguyên.

Câu III. (2,0 điểm) Cho biểu thức $K=ab+4ac-4bc$ với a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $a+b+2c=1$.

1) Chứng minh rằng $K\ge -\frac{1}{2}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đoạn thẳng BC tại điểm J, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A).

a) Chứng minh rằng $MI^2=MJ\cdot MA$.

b) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Đường thẳng AN cắt các tia phân giác trong của góc ABC và góc ACB lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng N là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

c) Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung nhỏ MC của đường tròn (O) (E khác M). Gọi F là điểm đối xứng với điểm I qua điểm E. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh rằng bốn điểm P,Q,R,F cùng thuộc một đường tròn.

Câu V. (1,0 điểm) Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực dương d, trong mặt phẳng đó tồn tại hai điểm được tô bởi cùng một màu và có khoảng cách bằng d.

b) Gọi tam giác có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu là tam giác đơn sắc. Chứng minh rằng trong mặt phẳng đó tồn tại hai tam giác đơn sắc là tam giác vuông và đồng dạng với nhau theo tỉ số $k=\frac{1}{2019}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 3/6/2019
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2-1=\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2+x-y=0,\\ x^2+x+1=y^2.\end{cases}$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $P=ab(a+b)+2$ với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì P chia hết cho 9.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị của biểu thức $P=x^3+3x^2+x+3$ là lũy thừa của một số nguyên tố.

Câu III. (2,0 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thay đổi và thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1.$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4}+\frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4}+\frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+4}.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường tròn (O) cắt đường tròn đường kính AH tại điểm thứ hai F (F khác A).

a) Chứng minh rằng tam giác BEF đồng dạng với tam giác CDF.

b) Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O). Đường thẳng FN cắt cạnh BC tại điểm K. Chứng minh rằng tia HK là tia phân giác của góc BHC.

c) Hai tia phân giác của góc ABH và góc ACH cắt nhau tại điểm I. Gọi P là giao điểm của đoạn thẳng ON và cạnh BC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AH. Chứng minh rằng ba điểm P,I,Q thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm) Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 22 viên kẹo, túi thứ hai có 29 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ chọn một túi kẹo và lấy ít nhất một viên kẹo trong túi kẹo đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+3x+5=(x+3)\sqrt{x^2+5}$.

2. Cho hai số thực a,b,c thỏa mãn $a+b-2c=0$ và $2ab-bc-ca=0$. Chứng minh rằng $a=b=c$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $A=11^n+7^n-2^n-1$ chia hết cho 15.

2. Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn $\sqrt{11}-\frac{m}{n}>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{11}-\frac{m}{n}\geq\frac{3\left(\sqrt{11}-3\right)}{mn}.$$

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1)=3$ và $P(3)=7$. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức x^2-4x+3.

2. Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+abc=4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=ab+bc+ca.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB<AC$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm I đến các đường thẳng BC,CA,AB. Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt D và M. Đường thẳng qua K song song với đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng tam giác MFD đồng dạng với tam giác BNK.

b) Gọi P là giao điểm của BI và FD. Chứng minh góc BMF bằng góc DMP.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC đi qua trung điểm của đoạn thẳng KN.

Câu V. (1,0 điểm) Cho một bảng ô vuông kích thước 6×7 (6 hàng, 7 cột) được tạo bởi các ô vuông kích thước 1×1. Mỗi ô vuông kích thước 1×1 được tô bởi một trong hai màu đen hoặc trắng sao cho trong mọi bảng ô vuông kích thước 2×3 hoặc 3×2, có ít nhất hai ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen có chung cạnh. Gọi m là số ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen trong bảng.

a) Chỉ ra một cách tô sao cho $m=20$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của m.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x^2+1}=x^2+2x+1.$.

2. Chứng minh rằng $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2021\sqrt{2020}+2020\sqrt{2021}}=1-\frac{1}{\sqrt{2021}}$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $A=59^n-17^n-9^n+2^n$ chia hết cho 35.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2y-3y-4x-1=0$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số thực a,b,c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2+b^2+c^2=38$, $a+b=8$ và $b+c\ge 7$

2. Cho ba số thực không âm điều kiện a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{2abc}.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$ và ba đường cao AD, BE,CF cùng đi qua điểm $H(D\in BC,E\in CA,F\in B)$. Gọi (S) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

1. Chứng minh rằng đường tròn (S) đi qua trung điểm của đoạn AH.

2. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường tròn (S) với các đoạn thẳng BH và CH. Tiếp tuyến tại điểm D của đường tròn (S) cắt đường thẳng MN tại điểm T. Chứng minh rằng đường thẳng HT song song với đường thẳng EF.

3. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng BH và DF,Q là giao điểm của hai đường thẳng CH và DE. Chứng minh rằng ba điểm T,P,Q thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm) Trên bàn có 6 hộp kẹo, mỗi hộp có 5 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, An sẽ chọn một hộp tùy ý và lấy ít nhất một viên kẹo ở hộp đó; còn Bình thì chọn một số hộp và trong các hộp đã chọn, mỗi hộp lấy đúng một viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để Bình là người thắng cuộc.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 14/6/2021
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+x+2-2\sqrt{x+1}=0$.
2. Cho ba số thực a,b và c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh
$$\frac{a-b}{1+c^2}+\frac{b-c}{1+a^2}+\frac{c-a}{1+b^2}=0$$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2+5xy+6y^2+x+2y-2=0$.
2. Chứng minh với mỗi số nguyên n, số n^2+n+16 không chia hết cho 49.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x+\frac{2}{x}$ và x^3 dều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.
2. Cho các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+b+c=5$. Chứng minh $2a+2ab+abc\le 18$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), với góc $\widehat{BAC}=60^\circ$ và $AB<AC$. Các đường thẳng BO,CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC,AB tại M,N. Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

1. Chứng minh năm điểm A,N,O,M và F cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi P,Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN,FM với đường tròn (O). Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ. Chứng minh tia AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
3. Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF. Chứng minh AB vuông góc với AK.

Câu V. (1,0 điểm) Cho A là một tập con có 100 phần tử của tập hợp $\{1,2,3,\cdots,178\}$.

1. Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.
2. Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2,3,4,\cdots,22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 14/6/2021
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2=3y \\ y^3+2=3x \end{cases}$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh với mỗi số nguyên n, số $n^2+3n+16$ không chia hết cho 25.

2. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2-xy-2y^2+x+y-5=0$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho a,b và c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh

$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}=-1.$$

2. Cho biểu thức $P=\frac{a}{\sqrt{1+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{1+2ca}}+\frac{c}{\sqrt{1+2ab}}$ với a,b và c là các số thực không âm thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá tự lớn nhất của biểu thức P.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB<AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M(M khác A). Gọi D,E và F lần lượt là các hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC,CA và AB.

1. Chứng minh tam giác MBI là tam giác cân.

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A). Chứng minh P,M và D là ba điểm thẳng hàng.

3. Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF. Chứng minh HD song song với AM.

Câu V. (1,0 điểm) Trên bàn có n viên kẹo. Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Hai bạn luân phiên lấy kẹo trên bàn, mỗi lần chi được lấy $1,2,3,4$ hoặc 5 viên kẹo và phải lấy số viên kẹo khác với số viên kẹo của bạn còn lại vừa lấy ngay trước đó. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước,

1. Với $n=7$, hãy chi ra chiến thuật chơi của Bình khiến An là người thua cuộc.

2. Với $n=22$, hãy chi ra chiến thuật chơi của An khiến Bình là người thua cuộc.

---------- HẾT ----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 20/6/2022
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2-4x+2\sqrt{2x-1}+1=0$.
2. Cho các số thực a,b và c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}-\frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1}-7$ chia hết cho 20.
2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $y\left(x^2+x+1\right)=(x+1)\left(y^2-1\right)$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m^3}{m+n}$ và $\frac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố.
2. Với a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+2bc+3ca-3abc$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC,CA và AB lần lượt tại ba điểm D,E và F.

1. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và DF. Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI.
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân.
3. Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K;KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID.

Câu V. (1,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x+y$ với $x\in A$ và $y\in A$ (x,y không nhất thiết phân biệt).

1. Chứng minh $68\in B$.
2. Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 20/6/2022
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2-2x+2=\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+1\right)}$.

2. Với a,b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc=3$, tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2\left(b+c\right)+3}+\frac{1}{b^2\left(c+a\right)+3}+\frac{1}{c^2\left(a+b\right)+3}.$$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2. Tìm tất cà các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Với a,b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc=2$, chứng minh

$$a^2+b^2+c^2-3\left(a+b-c\right)\geq-\frac{9}{4}.$$

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a,b và c sao cho các phương trình $x^2-2ax+b=0$, $x^2-2bx+c=0$ và $x^2-2cx+a=0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC với $AB<AC$, nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Ba đường cao AD,BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC.

1. Chứng minh $\dfrac{AI}{AK}=\dfrac{HI}{HK}$.

2. Chứng minh đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK.

3. Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng EF. Chứng minh đường thẳng DP song song với đường thẳng AI.

Câu V. (1,0 điểm)

Trên bảng có hai số tự nhiên m và n. An và Bình chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn chọn một trong hai số trên bảng để xóa và viết lên bảng một số mới là hiệu không âm của số vừa xóa với một ước số tự nhiên bất kỳ của số vừa xóa. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Biết rằng An là người thực hiện lượt chơi đầu tiên:

1. Với $m=2022$ và $n=2023$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

2. Với $m=2022$ và $n=1981$, hãy chi ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 12/6/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8$.

2. Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2-c^2=c, c^2-b^2=b$ và $b^2-a^2=a$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2. Tim tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) sao cho xy là số chính phương và x^2+xy+y^2 là số nguyên tố.

2. Với các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tim giá trị lớn nhất và giả trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+6b+6c)(a+b+c)$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD,BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH. Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K.

1. Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM.

2. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A,T,H và M cùng thuộc một đường tròn.

3. Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh ba điểm A,K và P là ba điểm thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm) Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

1. Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.

2. Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 12/6/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2022x+2023$. Chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

2. Với các số thực a,b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B $(R<R'<OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P\in(O)$ và $Q\in(O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S. Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E,F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G,H sao cho $SE<SF<SG<SH$.

1. Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.

2. Chứng minh $SA^2=SP.SQ$.

3. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N. Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I. Chứng minh $\frac{EA^2}{EB^2}=\frac{IA}{IB}$ và ba điểm N,I,H là ba điểm thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

B. PHẦN ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT **NĂM HỌC 2015 - 2016** Môn: **TOÁN** Thời gian làm bài: **150 phút** *(Dành cho học sinh chuyên Toán)*

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10x-10y \end{cases}$

Lời giải

1) Giải phương trình: $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0.$ (1)

ĐK: $x \ge 8$

$(1) \Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x-8}-6\sqrt{x}+2=0$

$\Leftrightarrow (x-8-2\sqrt{x-8}+1)+(x-6\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-8}-1)^2+(\sqrt{x}-3)^2=0 (2)$

Ta có: $\begin{cases} \left(\sqrt{x-8}-1\right)^2 \ge 0 \\ \left(\sqrt{x}-3\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{x-8}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-3\right)^2 \ge 0$

Do đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-8}-1=0 \\ \sqrt{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{9\}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10x-10y \end{cases}$ (I)

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=2(x^2+y^2)(x-y) (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow x^3+2y^3=2x^3-2x^2y+2xy^2-2y^3$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2y+2xy^2-4y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2y^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x^2+2y^2=0 \end{array}\right.$

Ta có $x^2+2y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ không là nghiệm của hệ.

Do đó $(I) \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2+y^2=5 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(2;1)$ và $(-2;-1)$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $n^4-1 \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$

Lời giải

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\vdots 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

$\Rightarrow$ n chỉ có thể có dạng $10k \pm 1$ và $10k \pm 3$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Do n lẻ nên $n-1 \vdots 2$; $n+1 \vdots 2$ và $n^2+1 \vdots 2 \Rightarrow n^4-1 \vdots 8$. (1)

• Nếu $n = 10k \pm 1 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^2-1 \vdots 10 \Rightarrow n^4-1 \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4-1 \vdots 40$

• Nếu $n = 10k \pm 3 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)2 = 9 \pmod{10} \Rightarrow n^2+1 \vdots 10 \Rightarrow n^4-1 \vdots 5$ (3)

Từ (1) và (3) chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4-1 \vdots 40$

Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4-1 \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow p-1$ là số chẵn $\Rightarrow p$ là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được $p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$

$\Rightarrow 2(y-x)(y+x+2) \vdots p$. Mà $(2;p)=1$ nên xảy ra 2 TH:

+) $y-x \vdots p \Rightarrow y-x=kp\ (k \in \mathbb{N}^*)$

Khi đó từ (*) $\Rightarrow p-1=2k(x+y+2) \Rightarrow kp-k=2k^2(x+y+2) \Rightarrow y-x-k=2k^2(x+y+2)$

(loại vì $x+y+2>y-x-k>0; 2k^2>1 \Rightarrow 2k^2(x+y+2)>y-x-k$)

+) $y+x+2 \vdots p \Rightarrow x+y+2=kp\ (k \in N^*)$

Từ (*) $\Rightarrow p-1=2k(y-x) \Rightarrow kp-k=2k^2(y-x) \Rightarrow x+y+2-k=2k^2(y-x)\ (**)$

Ta chứng minh $k=1$. Thật vậy nếu $k \geq 2$ thì từ (**) $\Rightarrow x+y=2k^2(y-x)+k-2 \geq 8(y-x)$ (vì $y-x>0$)

$\Rightarrow 9x \geq 7y \Rightarrow 7y<14x \Rightarrow y<2x$

Do đó từ $(2) \Rightarrow (p-1)(p+1)=2y(y+2)<4x(2x+2)<4x(2x+4)=8x(x+2)=4(p-1)$

(vì $2x)(x+2)=p-1$ theo (1))

$\Rightarrow p+1<4 \Rightarrow p<3$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó $k=1$, suy ra $\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$

Thay $p-1=4x+2$ vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2)\Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x\Leftrightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow y=4, p=7$ (thỏa mãn)

Vậy $x=1, y=4$ và $p=7$.

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn

$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\ge 1$

Từ (1) $\Rightarrow$ $0<y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1)\Rightarrow ny^2z^2-1>0\Rightarrow ny^2z^2-1\ge 1$

$\Rightarrow y^3+z^3=x^2\left(ny^2z^2-1\right)\ge x^2$ (*)

Vì $x\ge y\ge z$ nên $3x^3\ge x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2\Rightarrow ny^2z^2\Rightarrow 9x^2\ge n^2y^4z^4$

Kết hợp với (*) ta có $9\left(y^3+z^3\right)\ge 9x^2\ge n^2y^4z^4\Rightarrow 9\left(1+\dfrac{z^3}{y^3}\right)\ge n^2yz^4$

Mà $y\ge z\Rightarrow \dfrac{z^3}{y^3}\le 1\Rightarrow n^2yz^4\le 9\left(1+\dfrac{z^3}{y^3}\right)\le 18$(**)

Ta có: (**) $\Rightarrow z^4\le 18\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1\\ z=2\end{array}\right.$

• Nếu $z=2$: (**) $\Rightarrow 16n^2y\le 18\Rightarrow n=y=1$ (loại vì $y<z$)

• Nếu $z=1$: (**) $\Rightarrow n^2y\le 18\Rightarrow n^2\le 18\Rightarrow n\le 4$

Ta chứng minh $n\notin\{2;4\}$. Thật vậy,

*Nếu $n=4$ thì từ $n^2y\le 18\Rightarrow 16y\le 18\Rightarrow y=1$. Từ $(1)\Rightarrow x^3+2=4x^2\Rightarrow x^2(4-x)=2\Rightarrow x^2$ là ước của $2\Rightarrow x=1$ (không thỏa mãn)

*Nếu $n=2$ thì từ $n^2y\le 18$ suy ra $4y\le 18\Rightarrow 1\le y\le 4$.

+ $y=1$: (1) $\Rightarrow x^3-2x^2+2=0\Rightarrow x^2(x-2)=-2<0\Rightarrow x<2\Rightarrow x=1(L)$

+ $y=2$: (1) $\Rightarrow x^3-8x^2+9=0\Rightarrow 9=x^2(8-x)$. Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2\ge y^2=4$ nên x=3 (không thỏa mãn)

+ $y=3$: (1) $\Rightarrow x^3-18x^2+28=0\Rightarrow x^2(18-x)=28$. Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2\ge y^2=9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y=4$: (1) $\Rightarrow x^3-32x^2+65=0\Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy $n\notin\{2;4\}$. Do đó $n\in\{1;3\}$

Thử lại với $n=1$, tồn tại bộ $(x;y;z)$ nguyên dương chẳng hạn $(x;y;z)=(3;2;1)$ thỏa mãn (1)

với $n=3$, tồn tại bộ $(x;y;z)=(1;1;1)$ thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n\in\{1;3\}$

Câu III. (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh $ab+ac+bc\le\frac{3}{4}$

Lời giải

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn (a + b)(b + c)(c + a) = 1. Chứng minh ab + ac + bc ≤ $\frac{3}{4}$

Áp dụng BĐT Cô–si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}=3\Rightarrow a+b+c\ge\frac{3}{2}(2)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases}a+b\ge 2\sqrt{ab}\\ b+c\ge 2\sqrt{ac}\\ c+a\ge 2\sqrt{ca}\end{cases}\Rightarrow 1=(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc\Rightarrow abc\le\frac{1}{8}(3)$$

Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+c^2+ca)=1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+ca)+ac^2+bc^2=1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)-abc=1$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=1$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca=\frac{1+abc}{a+b+c}\le\frac{1+\frac{1}{8}}{3}=\frac{3}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

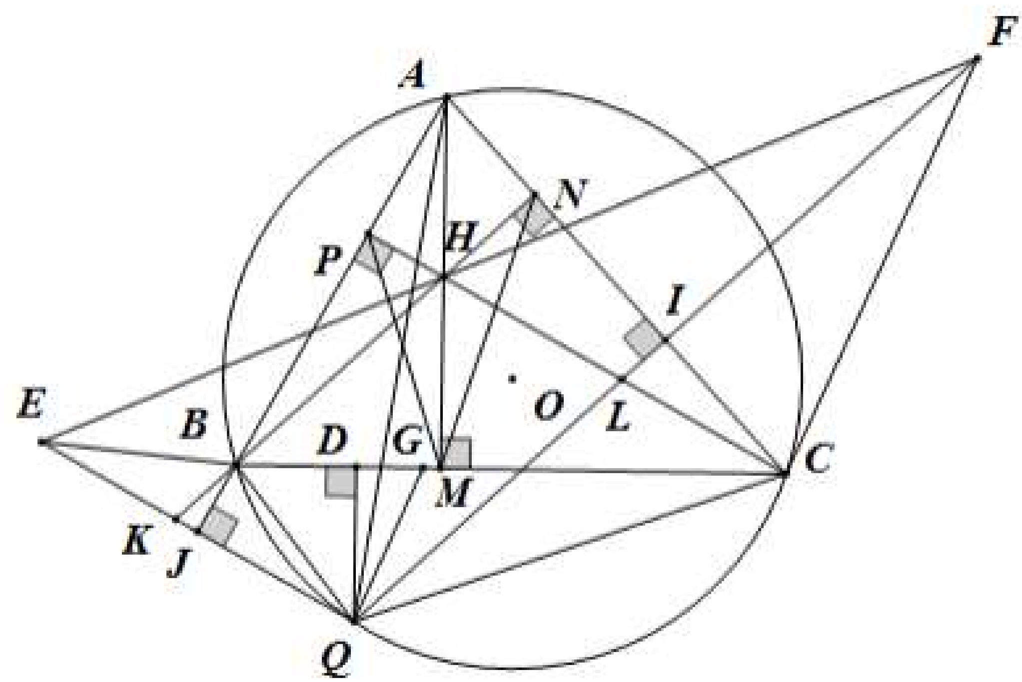
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM,BN,CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E,F là điểm đối xứng của Q qua AB,AC.

1) Chứng minh rằng $MH.MA=MP.MN$

2) Chứng minh rằng E,F,H thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Lời giải



1) Xét tứ giác $ANMB$ có $\widehat{ANB}=\widehat{AMB}=90^\circ$ nên nó là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{BNM}$ hay $\widehat{PAM}=\widehat{HNM}$ (1)

Xét tứ giác $CNHM$ có $\widehat{HNC}+\widehat{HMC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên $CNHM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NHM}+\widehat{NCM}=180^\circ$ (2)

Tứ giác $APMC$ có $\widehat{APC}=\widehat{AMC}=90^\circ$ nên $APMC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{APM}+\widehat{ACM}=180^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{NHM}=\widehat{APM}$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \Delta NHM \backsim \Delta APM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{NM}{AM}=\dfrac{HM}{PM} \Rightarrow MH.MA=MN.MP.$

2) Gọi K là giao BH và QE, L là giao CH và QF.

Tứ giác $AJQI$ có $\widehat{AIQ}+\widehat{AJQ}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\widehat{JAI}+\widehat{JQI}=180^\circ$

Mà $\widehat{JAI}+\widehat{BQC}=180^\circ$ (do $ABQC$ là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{JQI}=\widehat{BQC} \Rightarrow \widehat{BQE}=\widehat{CQF}$ (5)

Vì E, F đối xứng với Q qua AB, AC nên $BQ=BE,\ CQ=CF \Rightarrow \Delta BEQ$ và ΔCQF cân

$\Rightarrow \widehat{CQF}=\widehat{CFQ}$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{CFL}=\widehat{BQK}$ (7)

Ta có $LH // QK$ (cùng vuông góc AB); $KH // QL$ (cùng vuông góc AC) nên $QKHL$ là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{QKH}=\widehat{QLH}=\widehat{FLC}$ hay $\widehat{QKB}=\widehat{FLC}$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \Delta QKB \backsim \Delta FLC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{QK}{FL}=\dfrac{QB}{FC}$

Hai tam giác cân BQE và CFQ đồng dạng, nên $\dfrac{QB}{FC}=\dfrac{QE}{QF} \Rightarrow \dfrac{QK}{FL}=\dfrac{QE}{QF} \Rightarrow \dfrac{QK}{QE}=\dfrac{FL}{FQ}$

Mà $QK = LH$ (do $QKHL$ là hình bình hành) nên $\frac{LH}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Vì $LH'//QE$ nên theo định lý Ta–lét ta có: $\frac{LH'}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Do đó $LH = LH' \Rightarrow H' \equiv H \Rightarrow H \in EF \Rightarrow H, E, F$ thẳng hàng.

3) Vẽ $QD \perp BC$ tại D. Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho $\widehat{CQG} = \widehat{BQA} \Rightarrow \widehat{BQG} = \widehat{CQA}$

Vì $ABQC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BAQ} = \widehat{GCQ} \Rightarrow \Delta BAQ \backsim \Delta GCQ\ (g.g) \Rightarrow \frac{BA}{GC} = \frac{AQ}{CQ}$

Vì $\widehat{JAQ} = \widehat{DCQ}$; $\widehat{QJA} = \widehat{QDC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta JAQ \backsim \Delta DCQ\ (g.g) \Rightarrow \frac{AQ}{CQ} = \frac{JQ}{DQ}$

Do đó $\frac{BA}{GC} = \frac{JQ}{DQ} \Rightarrow \frac{AB}{QJ} = \frac{GC}{DQ}$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{AC}{QI} = \frac{GB}{DQ}$

$\Rightarrow \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = \frac{GC+GB}{DQ} = \frac{BC}{DQ}$

Vì BC không đổi nên $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ DQ lớn nhất $\Leftrightarrow$ Q là điểm chính giữa cung BC nhỏ của đường tròn (O).

Câu V. (1,0 điểm) Chứng minh tồn tại các số nguyên a,b,c sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \frac{1}{1000}$

Lời giải

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \frac{1}{1000}$

Xét nửa khoảng $A = (0;1]$. Chia nửa khoảng này thành 1000 nửa khoảng

$A_1 = \left(0;\frac{1}{1000}\right], A_2 = \left(\frac{1}{1000};\frac{2}{1000}\right], ..., A_n = \left(\frac{n-1}{1000};\frac{n}{1000}\right], ..., A_{1000} = \left(\frac{999}{1000};1\right]$

Xét bộ số $x_1;x_2;...;x_{1001}$ với $x_k = \left[1 - k\sqrt{2}\right] + k\sqrt{2}\ \ (k \in \mathbb{N}^*, k \le 1001)$

Với mọi k ta có $-k\sqrt{2} < \left[1 - k\sqrt{2}\right] \le 1 - k\sqrt{2}$ (tính chất phần nguyên) nên

$0 < \left[1 - k\sqrt{2}\right] + k\sqrt{2} \le 1 \Rightarrow x_k \in A$

$\Rightarrow x_k$ thuộc một trong các 1000 khoảng $A_1, A_2, ..., A_{1000}$

Có 1001 số x_k mà có 1000 nửa khoảng, do đó tồn tại 2 số x_i, x_j thuộc cùng một nửa khoảng A_m nào đó $0 < \left|x_i - x_j\right| < \frac{1}{1000}$.

Đặt $a = \left[1 - i\sqrt{2}\right] - \left[1 - j\sqrt{2}\right], b = i - j \Rightarrow x_i - x_j = a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}$

Mà a là số nguyên, $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $a+b\sqrt{2}\neq 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0$

Do đó $0<\left|x_i-x_j\right|<\dfrac{1}{1000} \Rightarrow 0<\left|a+b\sqrt{2}+0.\sqrt{3}\right|<\dfrac{1}{1000}$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 9/6/2016
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Dành cho học sinh chuyên Toán)

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^4-2x^3+x-\sqrt{2\left(x^2-x\right)}=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2y-4x=0 \\ 4x^2-4xy^2+y^4-2y+4=0 \end{cases}$

Lời giải

1) Điều kiện xác định của phương trình là $x\le 0$ hoặc $x\ge 1$. Biến đổi tương đương phương trình

$$x^4-2x^3+x-\sqrt{2\left(x^2-x\right)}=0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x^2-x-1\right)-\sqrt{2x\left(x-1\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x\left(x-1\right)}\left[\sqrt{x^2-x}\left(x^2-x-1\right)-\sqrt{2}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x\left(x-1\right)}=0 \\ \sqrt{x^2-x}\left(x^2-x-1\right)-\sqrt{2}=0 \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{x\left(x-1\right)}=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;1\right\}$.

Với $\sqrt{x^2-x}\left(x^2-x-1\right)-\sqrt{2}=0$. Đặt $\sqrt{x^2-x}=a\ge 0$, khi đó phương trình trên trở thành

$$a^3-a-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a^2+a\sqrt{2}+1\right)=0\Leftrightarrow a=\sqrt{2}\ \left(\text{vì } a^2+a\sqrt{2}+1>0\right)$$

Từ đó ta được $\sqrt{x^2-x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x-2\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1;2\right\}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-1;0;1;2\right\}$.

2) Ta có $\begin{cases} x^2+2y-4x=0 \\ 4x^2-4xy^2+y^4-2y+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x-2)^2+2y-4=0 \\ \left(2x-y^2\right)^2-2y+4=0 \end{cases}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được $(x-2)^2+\left(2x-y^2\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=\pm 2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc\ne 0$. Tính $P=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$.

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $2^x\cdot x^2=9y^2+6y+16$.

Lời giải

1) Ta có $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

Ta luôn có $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$. Tuy nhiên vì a,b,c đôi một khác nhau nên không xảy ra đẳng thức.

Do đó suy ra $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b=-c-a \\ c=-a-b \end{cases}$.

Từ đó ta được $P=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2-(-a-b)^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-(-b-c)^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2-(-c-a)^2}$

$$=\frac{ab^2}{-2ab}+\frac{bc^2}{-2bc}+\frac{ca^2}{-2ca}=-\frac{a+b+c}{2}=0$$

Vậy $P=0$

2) Ta có $9y^2+6y+16\equiv 1(\text{mod}3)$ nên $2^x x^2\equiv 1(\text{mod}3)$.

Mà $x^2\equiv 0;1(\text{mod}3)$ nên $\begin{cases} 2^x\equiv 1(\text{mod}3) \\ x^2\equiv 1(\text{mod}3) \end{cases}$.

Nếu x lẻ, ta đặt $x=2k+1(k\in N)\Rightarrow 2^x=2\cdot 4^k\equiv 2(\text{mod}3)$, điều này vô lí, suy ra loại x lẻ.

Nếu x chẵn, ta đặt $x=2k(k\in N)\Rightarrow 2^x=4^k\equiv 1(\text{mod}3)$, điều này đúng. Do đó khi x chẵn thì

$$2^x\cdot x^2=9y^2+6y+16 \Leftrightarrow \left(2k\cdot 2^k\right)^2=(3y+1)^2+15 \Leftrightarrow \left(2k\cdot 2^k-3y-1\right)\left(2k\cdot 2^k+3y+1\right)=15$$

Vì $y,k\in N$ nên $2k.2^k+3y+1>2k.2^k-3y-1>0$. Vậy ta có các trường hợp

Trường hợp 1. $\begin{cases} 2k\cdot 2^k-3y-1=1 \\ 2k\cdot 2^k+3y+1=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k\cdot 2^k=8 \\ 3y+1=7 \end{cases} \Rightarrow k\notin \mathbb{N}$ (loại).

Trường hợp 2. $\begin{cases} 2k.2^k-3y-1=3 \\ 2k.2^k+3y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k.2^k=4 \\ 3y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(x;y)=(2;0)$

Câu III. (2,0 điểm)

1) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}\ge a+b+c.$$

2) Cho số nguyên dương n thoa mãn $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Lời giải

1) Ta có $3=a^2+b^2+c^2\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3} \Leftrightarrow a+b+c\le 3$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}=\frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2}+\frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2}+\frac{4c^4}{2c^3+2c^2a^2}$$

$$\geq\frac{\left(2a^2+2b^2+2c^2\right)^2}{2a^3+2b^3+2c^3+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}\geq\frac{36}{a^4+a^2+b^4+b^2+c^4+c^2+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}$$

$$=\frac{36}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^2+b^2+c^2}=\frac{36}{9+3}=3\geq a+b+c$$

Vậy ta được $\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}\geq a+b+c$. Đẳng thức xảy ta khi $a=b=c=1$.

2) Do $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên, mà $12n^2+1$ là số lẻ nên tồn tại số tự nhiên k thỏa mãn $12n^2+1=(2k+1)^2 \Leftrightarrow 12n^2+1=4k^2+4k+1 \Leftrightarrow k\left(k+1\right)=3n^2$

Vì $\left(k;k+1\right)=1$ nên xảy ra 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $\begin{cases}k=a^2\\ k+1=3b^2\end{cases}\left(a,b\in N\right)\Rightarrow a^2-3b^2=-1\equiv 2\left(\text{mod}3\right)\Leftrightarrow a^2\equiv 2\left(\text{mod}3\right)$(vô lí).

Trường hợp 2. $\begin{cases}k=3a^2\\ k+1=b^2\end{cases}\Rightarrow b^2\left(b^2-1\right)=3n^2$. Từ đó suy ra

$$2+2\sqrt{12n^2+1}=2+2\sqrt{4b^4-4b^2+1}=2+2\left(2b^2-1\right)=4b^2=(2b)^2$$

Do đó $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhon ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Các đường cao BB',CC' cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm P.

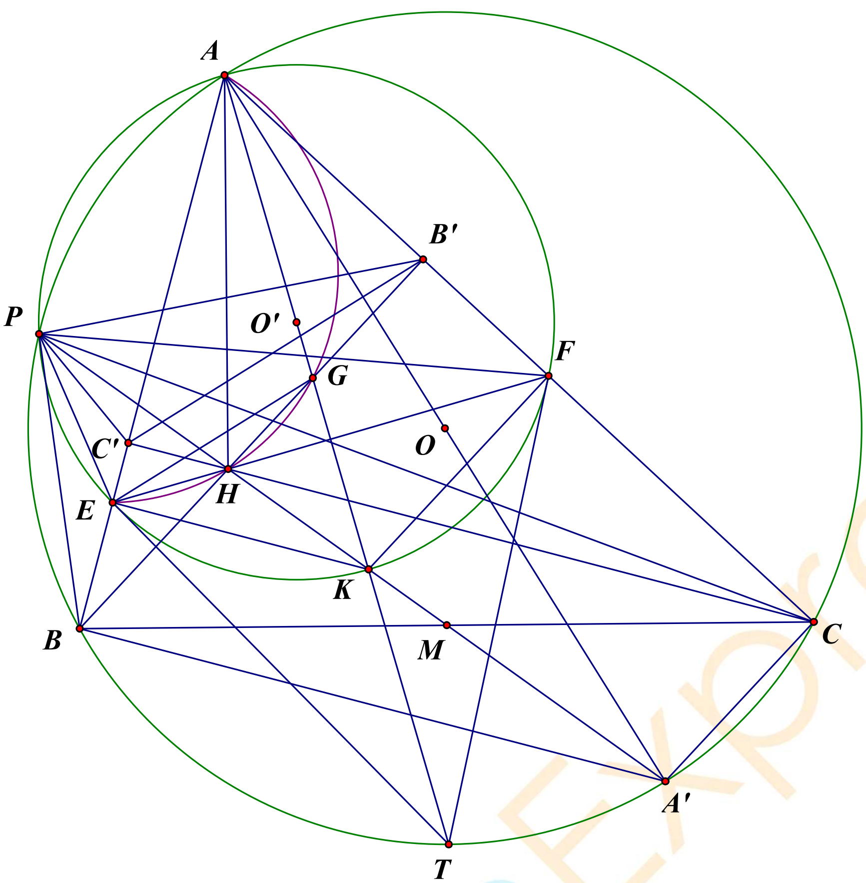
1) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'},\widehat{CPB}$ lần lượt cắt AB,AC tại các điểm E và F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF; K là giao điểm của HM và AO'.

a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.

b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn $\left(O'\right)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn $\left(O\right)$

Lời giải



1) Kẻ đường kính AA' của đường tròn đường tròn $\left(O\right)$, khi đó tứ giác $HBA'C$ là hình bình hành. Do đó HA' đi qua điểm M nên HA' cũng đi qua điểm P. Từ đó ta suy ra được

$\widehat{APH}=90^\circ=\widehat{AB'H}=\widehat{AC'H}$, suy ra tứ giác $PAB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Do đó $\widehat{PC'A}=\widehat{PB'A}$ nên $\widehat{PC'B}=\widehat{PB'C}$. Mà $\widehat{PBC'}=\widehat{PCB'}$ do đó $\Delta PBC'\backsim\Delta PCB'$.

2a) Kẻ đường kính AK' của đường tròn $\left(O'\right)$, khi đó ta có $\widehat{AEK'}=\widehat{AFK'}=90^\circ$.

Từ đó suy ra $HC';K'E;A'B$ song song với nhau và $HB';K'F;A'C$ song song với nhau.

Lại có $\dfrac{EC'}{EB}=\dfrac{PC'}{PB}=\dfrac{PB'}{PC}=\dfrac{FB'}{FC}$ nên K' thuộc $HA'\Rightarrow K'\equiv K$ nên tứ giác $AKEF$ nội tiếp.

Lại có $\widehat{PEA}=\widehat{PFA}$ (vì $\widehat{EPB}=\dfrac{\widehat{C'PB}}{2}=\dfrac{\widehat{B'PC}}{2}=\widehat{FPC}$ và $\widehat{PBE}=\widehat{PCF}$) suy ra tư giác $PAFE$ nội tiếp. Suy ra tứ giác $PEKF$ nội tiếp đường tròn.

2b) Ta có $\Delta PB'C'\backsim\Delta PCB$ nên $\dfrac{HC'}{HB}=\dfrac{HB'}{HC}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{PC'}{PB}=\dfrac{PB'}{PC}=\dfrac{FB'}{FC}=\dfrac{EC'}{EB}$

Do đó HE,HF lần lượt là phân giác của $\widehat{BHC}$, $\widehat{CHB'}$ nên ba điểm E,H,F thẳng hàng, mà ta lại có $AE=AF$ nên AK là phân giác của $\widehat{BAC}$.

Gọi giao điểm của AK với đường tròn $\left(O\right)$ là T và giao điểm của AK với BB' là G.

Ta có $\widehat{FHB'}=\dfrac{\widehat{CHB'}}{2}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=\widehat{GAE}$ nên tứ giác $AEHG$ nội tiếp.

Do đó suy ra $\widehat{AEG} = \widehat{AHG} = \widehat{AHB} = \widehat{ACB} = \widehat{ATB}$ nên tứ giác BEGT nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta được $\widehat{ATE} = \widehat{ABG} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.

Mà ta lại có $AT \perp EF$ suy ra $\widehat{TEF} = 90^\circ - \widehat{ATE} = \widehat{BAC}$ nên là tiếp tuyến của (O').

Mặt khác $TE = TF$ nên TF cũng là tiếp tuyến của (O'). Tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại T trên đường tròn (O).

Câu V. (1,0 điểm) Cho 2017 số hữu tỷ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

Lời giải

Giả sử tồn tại 2017 số hữu tỷ được sắp xếp một cách thoả mãn nếu bỏ 2 số bất kì cạnh nhau thì 2015 số còn lại chia được thành hai nhóm có tổng bằng nhau. Gọi 2017 số được sắp xếp thoả mãn là 2017 số có tính chất P.

Vì có 2017 số hữu tỷ có tính chất P nên nếu nhân mẫu của các số hữu tỷ đó lên thì được 2017 số tự nhiên có tính chất P. Gọi 2017 số đó lần lượt xếp theo chiều kim đồng hồ là $a_1;a_2;\ldots;a_{2017}$. Giả sử trong 2017 số đó có 1 số chẵn, 1 số lẻ thì vì 2017 là số lẻ nên lúc đó trên vòng tròn tồn tại 22 số liền kề cùng tính chẵn lẻ và 22 số liền kề không cùng tính chẵn lẻ. Vì vậy có thể bỏ một trong hai cặp số đó để tổng 2015 số còn lại lẻ, lúc đó thì không thể có cách chia 2015 số còn lại thoả mãn đề bài. Giả sử tất cả các số trên vòng tròn cùng tính chẵn lẻ, 2017 số đó không thể cùng lẻ vì cho dù bỏ đi 22 số nào thì tổng các số còn lại đều lẻ nên không thể chia được. Vậy tất cả các số trên vòng tròn đều chẵn. Đặt $a_i = 2b_i$ với i chạy từ 1 đến 2017. Vì 2017 số $a_1;a_2;\ldots;a_{2017}$ tính chất P nên $b_1;b_2;\ldots;b_{2017}$ cũng có tính chất P. Lập luận tương tự $b_1;b_2;\ldots;b_{2017}$ đều chẵn. Tiếp tục đặt $b_i = 2c_i$ và lặp lại vô hạn bước như vậy, ta có $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2017} = 0$ (vô lí vì các số hữu tỉ ban đầu dương).

Suy ra điều phải chứng minh.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 10/6/2017
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{6x-x^2}+2x^2-12x+15=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2=y+\dfrac{3}{y} \\ 4y^2=x+\dfrac{3}{x} \end{cases}$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $0\le x\le 6$

Phương trình tương đương với $\sqrt{6x-x^2}-2\left(6x-x^2\right)+15=0$

Đặt $t=\sqrt{6x-x^2}$ $\left(t\ge 0\right)\Rightarrow$ Ta có phương trình

$-2t^2+t+15=0\Rightarrow t=3$ (thoả mãn) hoặc $t=-\dfrac{5}{2}$ (loại)

Với $t=3\Rightarrow\sqrt{6x-x^2}=3\Leftrightarrow -x^2+6x-9=0\Leftrightarrow x=3$ (thoả mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$

2) ĐKXĐ: $x\ne 0;y\ne 0$

$$\begin{cases} 4x^2=y+\dfrac{3}{y} \\ 4y^2=x+\dfrac{3}{x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4x^2y=y^2+3 & (1) \\ 4y^2x=x^2+3 & (2) \end{cases}$$

Từ đó ta rút ra nhận xét: $x,y>0$

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow 4x^2y-4yx^2=y^2-x^2\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(4xy+x+y\right)=0$

Vì $x,y>0\Rightarrow 4xy+x+y>0$

$\Rightarrow x=y\Rightarrow 4x^3=x^2+3\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(4x^2+3x+3\right)=0\Rightarrow x=y=1$ (thoả mãn)

Vậy HPT có nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2017-p^2$ chia hết cho 24.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^3+y^3-9xy=0$.

3) Cho a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh $a+b+2\sqrt{ab+c^2}$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

1) Vì $p>3$ và p là số nguyên tố nên $p\not\vdots\, 3$ $\Rightarrow p^2$ chia 3 dư 1

Lại có 2017 chia 3 dư 1

$\Rightarrow 2017 - p^2 \vdots 3$ (1)
Vì $p > 3$ và p là số nguyên tố nên p là số lẻ $\Rightarrow p^2$ chia 8 dư 1
Mà 2017 chia 8 dư 1
$\Rightarrow 2017 - p^2 \vdots 8$ (2)
Ta lại có $(3,8) = 1$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow 2017 - p^2 \vdots 24$ (đpcm)
2) Phương trình đã cho có thể được viết lại dưới dạng

$$x^3 + y^3 + 3^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot 3 = 27.$$

Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$,

ta có phương trình trên tương đương với $(x+y+3)(x^2 + y^2 + 9 - xy - 3x - 3y) = 27$,

hay $(x+y+3)\left[(x+y)^2 + 9 - 3(x+y) - 3xy\right] = 27$.

Do $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 3 \geq 5$, suy ra $x + y + 3$ là ước không nhỏ hơn 5 của 27. Từ đây, ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1 : $x + y + 3 = 9, (x+y)^2 + 9 - 3(x+y) - 3xy = 3$. Trong trường hợp này, ta có $x + y = 6$ và $xy = 8$. Từ đó suy ra $x = 4$, $y = 2$ hoặc $x = 2, y = 4$.
- Trường hợp 2: $x + y + 3 = 27, (x+y)^2 + 9 - 3(x+y) - 3xy = 1$. Trong trường hợp này, ta có $x + y = 24$ và $xy = \dfrac{512}{3}$, vô lý vì $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Vậy các cặp số (x,y) thỏa mãn yêu cầu là $(4,2)$ và $(2,4)$.

3) Giả sử $p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$ là số nguyên tố, khi đó ta có $\sqrt{ab+c^2}$ là số hữu tỉ. Theo bổ đề 1 đề tuyển sinh THPT chuyên KHTN năm 2015 - vòng 2 (bạn đọc vui lòng xem lại phần trước), ta có $ab + c^2$ là số chính phương.
Đặt $ab + c^2 = d^2$ với $d \in \mathbb{N}^*$ thì ta có $d > c$ và $p = a + b + 2d$.
Suy ra $a \equiv -b - 2d \pmod{p}$ và $d^2 - c^2 \equiv -b^2 - 2bd \pmod{p}$
Từ đây, ta có $d^2 + b^2 + 2bd - c^2$ chia hết cho p, hay $(b+d-c)(b+d+c)$ chia hết cho p. Do đó, một trong hai số $b + d - c$ và $b + d + c$ sẽ chia hết cho p. Chú ý rằng $b + d + c > b + d - c > 0$ nên trong cả hai trường hợp, ta đều có $b + d + c \geq p = a + b + 2d$, hay $a + d - c < 0$, mâu thuẫn vì $d > c$.
Do đó, với mọi a, b, c nguyên dương thì $a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$ không thể là số nguyên tố.

Câu III. (1,5 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{x}{3 - yz} + \frac{y}{3 - zx} + \frac{z}{3 - xy} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

+) Trước tiên, ta chứng minh: Với $a, b, c > 0$ ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$

Nhân hai bất đẳng thức ta có: $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}$

+) Theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $yz\le \frac{y^2+z^2}{2}\Rightarrow \frac{x}{3-yz}\le \frac{x}{3-\frac{y^2+z^2}{2}}$

Từ đó suy ra $P=\frac{x}{3-yz}+\frac{y}{3-xz}+\frac{z}{3-xy}$

$$\le \frac{x}{3-\frac{y^2+z^2}{2}}+\frac{y}{3-\frac{x^2+z^2}{2}}+\frac{z}{3-\frac{y^2+x^2}{2}}$$

$$=\frac{x}{3-\frac{3-x^2}{2}}+\frac{y}{3-\frac{3-y^2}{2}}+\frac{z}{3-\frac{3-z^2}{2}}$$

$$=\frac{2x}{x^2+3}+\frac{2y}{y^2+3}+\frac{2z}{z^2+3}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $2x\le x^2+1$, $2y\le y^2+1$, $2z\le z^2+1$

Từ đó suy ra: $P\le \frac{x^2+1}{x^2+3}+\frac{y^2+1}{y^2+3}+\frac{z^2+1}{z^2+3}=3-\left(\frac{2}{x^2+3}+\frac{2}{y^2+3}+\frac{2}{z^2+3}\right)$

Sử dụng bất đẳng thức phụ ta có: $\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{y^2+3}+\frac{1}{z^2+3}\ge \frac{9}{x^2+y^2+z^2+9}=\frac{3}{4}$

Do đó $P\le 3-2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

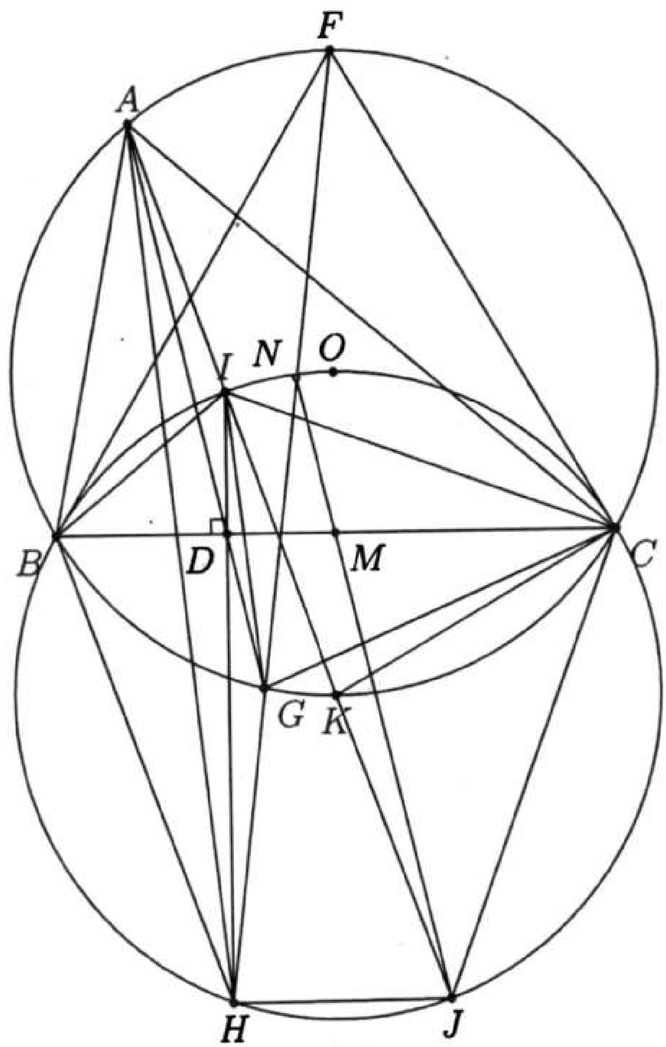
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (với $AB<AC$) nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, D là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng BC và G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn $\left(O\right)$. Gọi F là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn $\left(O\right)$. Đường thẳng FG cắt đường thẳng ID tại điểm H.

1) Chứng minh tứ giác $IBHC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi J là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh $BH=CJ$.

3) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng FH với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh đường thẳng NJ đi qua trung điểm của cạnh BC.

Lời giải



1) Gọi K là giao điểm của AI và (O). Ta có $KF \perp BC, IH \perp BC \Rightarrow KF // IH \Rightarrow \widehat{HIK} = \widehat{AKF}$ (1)

Mà $\widehat{AKF} = \widehat{AGF}$ (hai góc nội tiếp chắn cung AF của (O)). (2)

Lại có: $\widehat{AIH} + \widehat{HIK} = 180°, \widehat{AGH} + \widehat{AGF} = 180°$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AIH} = \widehat{AGH}$ nên tứ giác $AIGH$ nội tiếp.

$\Delta DIA \backsim \Delta DGH$ (g.g) nên $DI.DH = DG.GA$.

$\Delta DAB \backsim \Delta DCG$ (g.g) nên $DA.DG = DC.DB$.

Vì vậy ta có $DI \cdot DH = DC \cdot DB \Rightarrow \dfrac{DI}{DB} = \dfrac{DC}{DH}$.

Ta lại có $\widehat{IDC} = \widehat{BDH}$ (đối đỉnh) nên suy ra $\Delta DBH \backsim \Delta DIC$ (c.g.c). Vì vậy $\widehat{DBH} = \widehat{DBC} \Rightarrow$ tứ giác $IBHC$ nội tiếp.

2) Ta có: $\begin{cases} \widehat{KIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right) \\ \widehat{KCI} = \widehat{KCB} + \widehat{BCI} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right) \end{cases}$

Do đó $\widehat{KCI} = \widehat{KIC}$ nên ΔKIC cân tại K. Tương tự suy ra $KI = KC = KB$.

Vậy K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBIC. Do đó IJ là đường kính của đường tròn (K), suy ra $\widehat{IHJ}=90^\circ$, hay $HI\perp HJ$. Mặt khác $IH\perp BC$ nên $HJ//BC$.

Do tứ giác $BCHJ$ nội tiếp nên $\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{CJ}\Rightarrow BH=CJ$.

3) Gọi M là giao điểm của NJ và BC.

Ta có FK là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{FBK}=\widehat{FCK}=90^\circ$. Mà KB,KC là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBIC nên FB,FC là các tiếp tuyến.

Lại có FNH là cát tuyến nên: $\Delta FBN\backsim\Delta FHB\Rightarrow \dfrac{FN}{FB}=\dfrac{BN}{BH}=\dfrac{FB}{FH}$

Do đó: $\dfrac{FN}{FH}=\dfrac{FN}{FB}\dfrac{FB}{FH}=\left(\dfrac{BN}{BH}\right)^2$. Tương tự: $\dfrac{FN}{FH}=\left(\dfrac{CN}{CH}\right)^2$.

Suy ra: $\dfrac{CN}{CH}=\dfrac{BN}{BH}\Rightarrow\dfrac{CN}{BJ}=\dfrac{BN}{CJ}$ (3) (do $BCJH$ là hình thang cân).

Mặt khác $\Delta MCN\backsim\Delta MBJ$ (g.g) nên ta có $\dfrac{CM}{MJ}=\dfrac{CN}{BJ}$ (4).

$\Delta MBN\backsim\Delta MCJ$ (g.g) nên ta có $\dfrac{BN}{CJ}=\dfrac{MB}{MJ}$ (5).

Từ (3), (4), (5) ta có: $\dfrac{MC}{MJ}=\dfrac{MB}{MJ}\Rightarrow M$ là trung điểm BC.

Câu V. (1,0 điểm) Xét tập hợp S gồm các số nguyên dương có tính chất : với hai phần tử phân biệt bất kì x,y thuộc S, ta luôn có $30|x-y|\ge xy$. Hỏi tập hợp S có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?

Lời giải

Ta có nhận xét A chỉ chứa nhiều nhất một phần tử lớn hơn hoặc bằng 30. Giả sử $x,y\in A$ sao cho $x>y>30$.

Theo đề bài ta có $x-y=|x-y|\ge\dfrac{xy}{30}\ge x$ (vô lý).

Giả sử A có n phần tử $x_1<x_2<\cdots<x_n$. Với $x_i>x_j$, theo giả thiết ta có

$$x_i-x_j\ge\frac{x_ix_j}{30}\Rightarrow x_i\ge\frac{30x_j}{30-x_j}\ \forall i>j$$

Suy ra $x_i\ge -30+\dfrac{900}{30-x_j}\ \forall i>j$

Áp dụng BĐT trên ta có: $x_2\ge -30+\dfrac{900}{30-1}\ge 2$

Tiếp tục áp dụng BĐT trên ta có: $x_3\ge 3,x_4\ge 4,x_5\ge 5,x_6\ge 6,x_7\ge 8,x_8\ge 11,x_9\ge 18,x_{10}\ge 45$

Vì vậy S có nhiều nhất 10 phần tử. Ví dụ $A=\{1,2,3,4,5,6,8,11,18,45\}$

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 10/6/2017
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{5x-x^2}+2x^2-10x+6=0$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $0\le x\le 5$

Ta có phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)}+2x(x-5)+6=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)}-2x(5-x)+6=0$

$\Leftrightarrow 2x(5-x)-\sqrt{x(5-x)}-6=0$

Đặt $t=\sqrt{x(5-x)}$ $(t\ge 0)$

$\Rightarrow 2t^2-t-6=0\Leftrightarrow (t-2)(2t+3)=0\Rightarrow t=2$ (thoả mãn) hoặc $t=-\dfrac{3}{2}$ (loại)

Với

$t=2\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)}=2\Leftrightarrow x(5-x)=4\Leftrightarrow 5x-x^2=4\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm) \\ x=4(tm) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;4\}$

2) ĐKXĐ $x\ge 0; y\ge 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} x+y+xy=3 & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 & (2) \end{cases}$

Bình phương 2 vế của phương trình (2) ta được: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=4\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=4$ (3)

Đặt $\begin{cases} x+y=a\ge 0 \\ \sqrt{xy}=b\ge 0 \end{cases}$. Khi đó ta có hệ phương trình mới gồm 2 phương trình (1) và (3) là:

$$\begin{cases} a+b^2=3 \\ a+2b=4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a+b^2=3 \\ a=4-2b \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-2b+4-3=0 \\ a=4-2b \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-2b+1=0 \\ a=4-2b \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ a=4-2.1=2(tm) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt{xy}=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$$

Khi đó hai số $x;y$ là hai nghiệm của phương trình: $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow (t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(1;1)$.

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cá các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $x+y-z=2$ và $3x^2+2y^2-z^2=13$.

2) Cho các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a+b+c$.

3) Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn $2n+1, 3n+1$ là các số chính phương và $2n+9$ là số nguyên tố.

Lời giải

1) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x^2+2y^2-z^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y-2 & (1) \\ z^2=3x^2+2y^2-13 & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta có: $(x+y-2)^2=3x^2+2y^2-13$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-4x-4y+4=3x^2+2y^2-13$

$\Leftrightarrow 2x^2+y^2-2xy+4x+4y-17=0$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4x+4y+4+x^2+8x+16-37=0$

$(y-x+2)^2+(x+4)^2=37\ (*)$

Ta có $(y-x+2)^2;(x+4)^2$ là các số chính phương, lại có x,y,z nguyên dương nên:

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (y-x+2)^2=1 \\ (x+4)^2=36 \end{cases} \\ \begin{cases} (y-x+2)^2=36 \\ (x+4)^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x+2)^2=1 \\ (x+4)^2=36 \end{cases} \text{ (vì } \begin{cases} (y-x+2)^2=36 \\ (x+4)^2=1 \end{cases} \text{vô nghiệm khi } x,y,z \text{ nguyên dương)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x+2=1 \\ x+4=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x+2=-1 \\ x+4=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x+2=1 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x+2=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} (ktm) \end{array}\right.$$

Khi đó $z=x+y-2=2+1-2=1$ ™

Vậy $x=2;y=1;z=1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2) Đặt $t=a+b+c\,(t\ge 0)\Rightarrow c=t-a-b$ ta có:

$$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=(t-a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=t^2+a^2+b^2-2ta-2tb+2ab$$

$$\Leftrightarrow 0=t^2-2ta-2tb+2ab$$

$$\Leftrightarrow ab=\frac{-t^2+2ta+2tb}{2}=t\left(\frac{-t+2a+2b}{2}\right)=(a+b+c)\left(\frac{-t+2a+2b}{2}\right)$$

Vậy ab chia hết cho $a+b+c$ (đpcm)

3) Do $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên:

$$\begin{cases} 2n+1=a^2 \\ 3n+1=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=b^2-a^2 \\ 1=3a^2-2b^2 \end{cases} \Rightarrow 2n+9=2(b^2-a^2)+9(3a^2-2b^2)=25a^2-16b^2$$

$\Rightarrow 2n+9=(5a-4b)(5a+4b)$

Do $2n+9$ là số nguyên tố mà $5a+4b \ge 5a-4b \Rightarrow \begin{cases} 5a+4b=2n+9 \\ 5a-4b=1 \end{cases} \Rightarrow b=\dfrac{5a-1}{4}$

Thay vào $3a^2-2b^2=1$ ta có

$3a^2-2\left(\dfrac{5a-1}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow a^2-10a+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=9 \end{array}\right.$

TH1: $a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow n=0$. Loại vì 9 không là số nguyên tố

TH2: $a=9 \Rightarrow b=11 \Rightarrow n=40$. Thử lại thấy 89 là số nguyên tố

Vậy $n=40$.

Câu III. (1,5 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{1}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{1}{(2c+a+b)^2}$.

Lời giải

Ta áp dụng BĐT quen thuộc sau: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Ta có: $\dfrac{1}{2a+b+c}=\dfrac{1}{(a+b)+(a+c)} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)$

Tương tự và cộng các vế ta có:

$$P \le \frac{1}{16}\left[\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)^2+\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2+\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 16P \le \frac{2}{(a+b)^2}+\frac{2}{(a+c)^2}+\frac{2}{(b+c)^2}+\frac{2}{(a+b)(a+c)}+\frac{2}{(a+c)(b+c)}+\frac{2}{(a+b)(b+c)}$$

Ta tiếp tục áp dụng bổ đề sau:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+z\right)^2-2xy-2yz-2xz \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+xz$$

Với x,y,z tương ứng là $\dfrac{1}{a+b},\dfrac{1}{a+c},\dfrac{1}{b+c}$ ta có ngay:

$$16P \le \frac{4}{(a+b)^2}+\frac{4}{(a+c)^2}+\frac{4}{(b+c)^2}$$

Tiếp tục áp dụng bổ đề đầu tiên: $\dfrac{1}{a+b} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \to \dfrac{1}{(a+b)^2} \le \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$

Tương tự và cộng vế với vế ta có:

$$16P \le 4\cdot\frac{1}{16}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}\right)$$

Tiếp tục áp dụng bổ đề số 2 với x,y,z lần lượt là: $\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}$ thì:

$$16P \le \frac{1}{4}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=3 \to P \le \frac{3}{16}.$$

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{16}$, đạt tại chẳng hạn $a=b=c=1$.

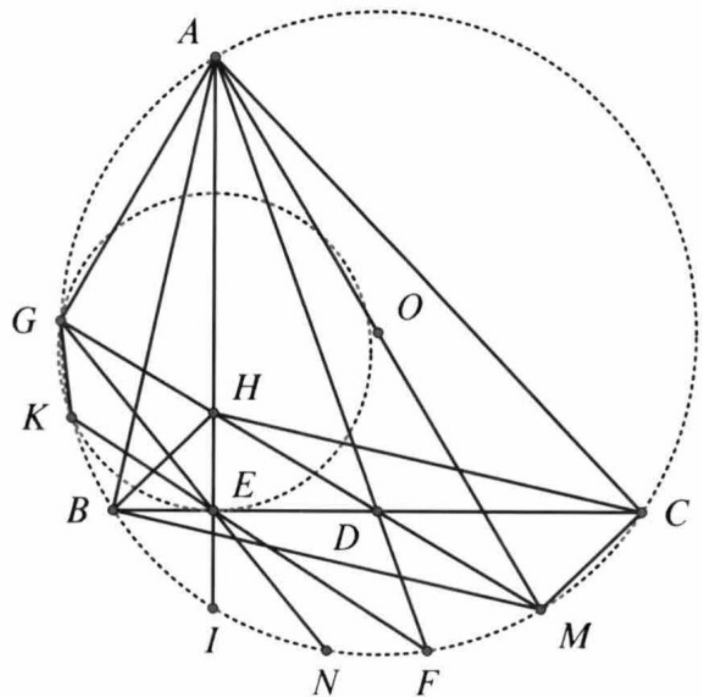
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh $BC^2 = 4\cdot DA\cdot DF$.

2) Tia DH cát đường trồn (O) tại điểm G. Chứng minh bốn điểm A, G, E và D cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE.

Lời giải



1) Xét ΔADC và ΔBDF có

$\widehat{ADC}=\widehat{BDF}$ (đối đỉnh); $\widehat{DAC}=\widehat{DBF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CF)

$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta BDF(g\cdot g) \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{DC}{DF}$

$\Rightarrow AD\cdot DF = BD\cdot DC = \frac{BC}{2}\cdot\frac{BC}{2} = \frac{BC^2}{4} \Rightarrow BC^2 = 4DA.DF$

2) Gọi M là giao điểm của AO và (O).

Ta có AM là đường kính của (O) nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 90^\circ$,

từ đó suy ra $BH // CM$ và $CH // MB$. Do đó, tứ giác $BHCM$ là hình bình hành. Mà D là trung điểm của BC nên cũng là trung điểm của HM.

Từ đây, ta suy ra bốn điểm G,H,D,M thẳng hàng và $\widehat{AGD} = \widehat{AGM} = 90^\circ$.

Tứ giác $AGED$ có $\widehat{AGD} = \widehat{AED} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ 4 điểm A,G,E,D cùng nằm trên một đường tròn.

3) Gọi N là giao điểm khác G của GE và (O), I là giao điểm khác A của AE và (O). Ta có $\widehat{IAB} = \widehat{HCB} = \widehat{CBM} = \widehat{CAM}$. Từ đó suy ra, trên đường tròn (O) thì $\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{CM}$ (1)

Theo câu b), ta có tứ giác $AGED$ nội tiếp nên $\widehat{AEG} = \widehat{ADG}$. Suy ra, trên đường tròn (O), ta cũng có $\overset{\frown}{IN} = \overset{\frown}{MF}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CF}$.

Xét trên đường tròn (O), ta có $\widehat{KGN} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{KN} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{KB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BN}\right)$

Và $\widehat{KEB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{KB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CF}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{KB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BN}\right)$

Do đó, ta có $\widehat{KGN} = \widehat{KEB}$. Từ đây, ta suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGE

Câu V. (1,0 điểm) Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,\ldots,99$. Ta thực hiện thao tác sau: Xoá ba số a,b,c bất kỳ trên bảng rồi lại viết lên bảng số $(abc+ab+bc+ca+a+b+c)$. Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

Lời giải

Ta có $abc+ab+bc+ca+a+b+c = (a+1)(b+1)(c+1)-1$

Tại mỗi thao tác thứ nhất ta chọn xóa 3 số a,b,c và thay bằng $(a+1)(b+1)(c+1)-1$, ta thấy thao tác này không làm thay đổi tích $S = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_i+1)$ với $a_1,a_2,\ldots,a_i$ là tất cả các số còn lại trên bảng.

Vì vậy số cuối cùng còn lại bằng: $(1+1)(2+1)(3+1)\ldots(99+1)-1 = 100!-1$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 8/6/2018
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2+3x+8=(x+5)\sqrt{x^2+x+2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Lời giải

a) Do $x^2+x+2>0$ nên phương trình đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}$, ta viết được phương trình dưới dạng $t^2+2x+6=(x+5)t$,

Hay $(t-2)(t-x-3)=0$.

Từ đó ta có $t=2$ và $t=x+3$.

- Với $t=2$, ta có $x^2+x+2=4$. Giải phương trình này, ta được $x=1$ hoặc $x=-2$.
- Với $t=x+3$, ta có $x>-3($ do $t>0)$ và $x^2+x+2=(x+3)^2$. Giải phương trình này với chú ý $x>-3$, ta được $x=-\frac{7}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=1, x=-2$ và $x=-\frac{7}{5}$.

b) Cộng hai vế của phương trình thứ nhất với x^2, ta được $(y-x)^2=(3x-1)^2$.

Từ đó, ta có $y=4x-1$ hoặc $y=1-2x$.

- Với $y=4x-1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $(4x-1)^2=x^3+8x^2-x+1$,

hay $x(x-1)(x-7)=0$. Từ đó, ta có $x=0$ (tương ứng, $y=-1$), hoặc $x=1$ (tương ứng, $y=3$), hoặc $x=7$ (tương ứng, $y=27$).

- Với $y=1-2x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$(1-2x)^2=x^3+8x^2-x+1,$$

hay $x(x+1)(x+3)=0$. Từ đây, ta tìm được các nghiệm (x,y) của hệ trong trường hợp này là $(0,1),(-1,3)$ và $(-3,7)$.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có tất cả 6 nghiệm (x,y) là

$$(0,-1),(1,3),(7,27),(0,1),(-1,3),(-3,7).$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Cho p,q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.

2) Cho các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a<b\le c<d; ad=bc$ và $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$.
a) Chứng minh $a+d>b+c$.
b) Chứng minh a là một số chính phương.

Lời giải

a) Do p,q là các số nguyên tố lớn hơn 5 nên p,q là các số nguyên tố lẻ, suy ra các số khi chia p,q cho 4 chỉ có thể là 1 hoặc 3 . Từ đây, dễ thấy p^4,q^4 cùng có số dư là 1 khi chia cho 4 . Như vậy, ta có $p^4+2019q^4=\left(p^4-1\right)+2019\left(q^4-1\right)+2020$ chia hết cho 4.

Mặt khác, cũng do p,q là các số nguyên tố lớn hơn 5 nên p,q không chia hết cho 5 , suy ra các số dư khi chia p,q cho 5 chỉ có thể là $1,2,3,4$. Từ đó, các số dư của p^2,q^2 khi chia 5 chỉ có thể là $1,4$. Suy ra số dư của p^4,q^4 khi chia 5 chỉ có thể là 1 . Như thế, ta có
$p^4+2019q^4=\left(p^4-1\right)+2019\left(q^4-1\right)+2020$ chia hết cho 5 .

Từ (1) và (2), với chú ý $(4,5)=1$, ta suy ra $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20 .

b) i) Từ giả thiết, ta có
$d(a+d-b-c)=d^2+da-db-dc=d^2+bc-db-dc=(d-c)(d-b)>0$, suy ra $a+d>b+c$. Đây chính là kết quả cần chứng minh.

ii) Đặt $(a,b)=m$ với m nguyên dương, khi đó tồn tại các số nguyên dương x,y với $(x,y)=1$ sao cho $a=mx$ và $b=my$. Giả thiết $ad=bc$ có thể được viết lại thành $dx=cy$.

Từ đây, ta suy ra dx chia hết cho y. Mà $(x,y)=1$ nên d chia hết cho y. Đặt $d=ny$ với n nguyên dương thì ta có $c=nx$.

Do $d>c, d>b$ nên ta có $y>x$ và $n>m$. Từ đó suy ra

$$\sqrt{d}-\sqrt{a}=\sqrt{ny}-\sqrt{mx}\ge\sqrt{(m+1)(x+1)}-\sqrt{mx}.$$

Kết hợp với giả thiết $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$, ta thu được $1+\sqrt{mx}\ge\sqrt{(m+1)(x+1)}$.

Bình phương hai vế bất đẳng thức trên và rút gọn, ta được $0\le(\sqrt{m}-\sqrt{x})^2$.

Do $(\sqrt{m}-\sqrt{x})^2\ge 0$ nên dấu bằng trong bất đẳng thức trên phải xảy ra, tức ta có $m=x$. Vậy $a=m^2$ là một số chính phương.

Bình luận. Ngoài cách giải trên, ý ii) của câu b) còn có thể tiếp cận bằng hai cách khác như sau:

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $d+a-2\sqrt{da}\le 1$.

Do $ad=bc$ nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành $d+a-2\sqrt{bc}\le 1$,

Hay $(d+a-b-c-1)+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\le 0$.

Do $d+a\ge b+c+1$ (theo a)) và $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\ge 0$ nên dấu bằng trong bất đẳng thức trên phải xảy ra.

Nói cách khác, ta phải có $b=c$ và $a+d=b+c+1$. Lại có $ad=bc$ nên $ad=b^2$ và $a+d=2b+1$, suy ra

$$a=a(a+d-2b)=a^2+ad-2ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

Cách 2. Đặt $b=a+x, d=a+x+y$ và $d=a+x+y+z$ với $x,z\in\mathbb{N}^*$ và $y\in\mathbb{N}$. Giả thiết của bài toán có thể được viết lại lần lượt dưới dạng $a(z-x)=x^2+xy$ và $\sqrt{a+x+y+z}\le\sqrt{a}+1$.

Bình phương hai vế bất đẳng thức trên và rút gọn, ta được $x+y+z-1\le 2\sqrt{a}$ (3)

Do $a(z-x)=x^2+xy>0$ nên $z-x>0$, suy ra $z\ge x+1$ và $a\le x^2+xy$. Từ đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sqrt{a}\le 2\sqrt{x^2+xy}\le x+(x+y)\le(z-1)+(x+y)=x+y+z-1.$$

Kết hợp với (3), ta suy ra dấu đẳng thức trong các đánh giá trên phải xảy ra. Nói cách khác, ta phải có $y=0$ và $a=x^2+xy=x^2$.

Câu III. (1,5 điểm)

1) Với x,y,z là các số thực thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$

2) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}.$$

Lời giải

1) Do $xyz=1$ nên ta có $\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xyz+xy+x}+\frac{xy}{x^2yz+xyz+xy}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{1+xy+x}+\frac{xy}{x+1+xy}=1$$

2) Sử dụng các bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}=\frac{1}{\sqrt{2(x^2+1)+(y^2+1)}}\le\frac{1}{\sqrt{2(2x+y)}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3(2x+y)}}\le\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\le\frac{\sqrt{6}}{4}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{3}\right]=\frac{\sqrt{6}}{36}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+3\right).$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}}\le\frac{\sqrt{6}}{36}\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+3\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}\le\frac{\sqrt{6}}{36}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{x}+3\right).$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế với chú ý $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, ta được $P\le\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ nên ta có kết luận $\max P=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bình luận. Học sinh cần chứng minh lại bất đẳng thức Cauchy-Schwarz khi sử dụng. Ngoài cách trên, ta còn có thể tiếp cận câu b) bằng cách khác dựa trên ý tưởng câu a) như sau: Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\\&=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xyz+xy+x}+\frac{xy}{x^2yz+xyz+xy}\\&=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{1+xy+x}+\frac{xy}{x+1+xy}=1\end{aligned}$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}&=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)+(x^2+1)+2}}\le\frac{1}{\sqrt{2(xy+x+1)}}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3(xy+x+1)}}\le\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{3}\right)\\&\le\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}}\le\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{3}\right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}\le\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{zx+z+1}+\frac{1}{3}\right).$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$P\le\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}+1\right)\le\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ nên $\max P=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

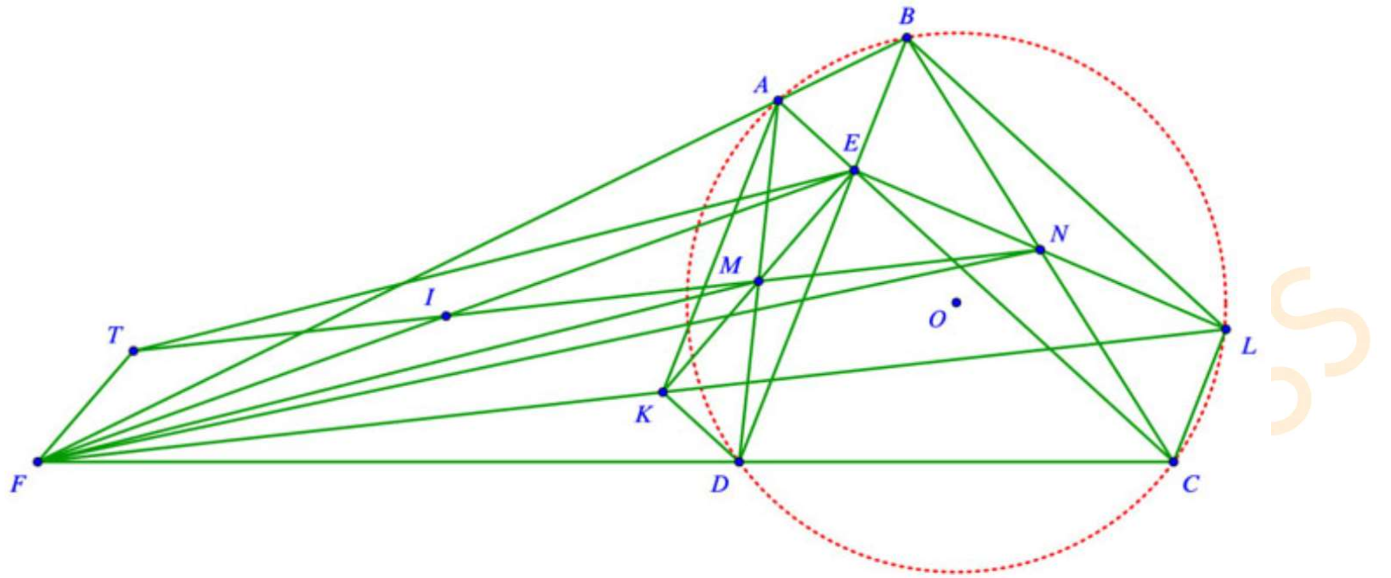
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.

1) Chứng minh tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.

2) Gọi M,N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD,BC. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Chứng minh đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác EMN.

Lời giải



a) Do tứ giác $AEDK$ là hình bình hành nên $DK // AC$, suy ra $\widehat{FDK}=\widehat{DCA}=\widehat{DBA}$.

Ta có $\Delta FDA \backsim \Delta FBC\left(\text{g}-\text{g}\right)$ và $\Delta EDA \backsim \Delta ECB$ (g-g) nên $\dfrac{DF}{BF}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{DK}{EB}$,

Hay $\dfrac{DF}{DK}=\dfrac{BF}{BE}\,(1)$

Từ đó, ta có các tam giác FKD và FEB đồng dạng (c-g-c).

b) Gọi I là trung điểm của EF. Do tứ giác $DKAE$ là hình bình hành nên M là trung điểm của EK, từ đó suy ra $MI // FK$. Bây giờ, dựng hình bình hành $BECL$, ta có

$$\widehat{FCL}=180^\circ-\widehat{BDC}=180^\circ-\widehat{BAC}=\widehat{FAC}.$$

Lại có $\vartriangle FDA \sim \vartriangle FBC$ (g-g) và $\Delta EDA \backsim \Delta ECB$ (g-g) nên $\dfrac{FC}{FA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{CL}{AE}\quad(2)$

Từ đó suy ra các tam giác FCL và FAE đồng dạng (c-g-c).

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{KFD}=\widehat{EFA}=\widehat{LFC}$ nên ba điểm F,K,L thẳng hàng. Lại có N là trung điểm của EL nên $IN // FL$. Từ đó suy ra ba điểm I,M,N thẳng hàng.

c) Gọi T là điểm đối xứng với M qua I. Ta có tứ giác $METF$ là hình bình hành nên $\widehat{FTE}=\widehat{FME}$. Lại có $\Delta FAD \backsim \Delta FCB$ và M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC nên $\Delta FAM \backsim \Delta FCN$ (c-g-c). Từ đó suy ra $\widehat{FMA}=\widehat{FNC}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\Delta EDA \backsim \Delta ECB$ (g-g) nên $\Delta EMA \backsim \Delta ENB$, suy ra $\widehat{EMA}=\widehat{ENB}=\widehat{CNL}$.

Từ đó, ta có $\widehat{FME}=\widehat{FNL}=180^\circ-\widehat{FNE}$, suy ra $\widehat{FTE}=180^\circ-\widehat{FNE}$. Do đó, tứ giác $ETFN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ENM}=\widehat{EFT}=\widehat{MEF}.$

Vậy EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

Câu V. (1,0 điểm) Cho tập hợp $S=\{x\in\mathbb{Z} \mid 1\le x\le 50\}$. Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

1) Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.

2) Có hay không có một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài ? Hãy giải thích câu trả lời.

Lời giải

a) Ta xét $A=S\setminus\{5,10,15,\ldots,50\}$. Tập hợp này thỏa mãn đề bài, bởi vì mỗi bộ ba Pythagoras đều có một số chia hết cho 5. Ta chứng minh khẳng định này. Xét đẳng thức

$$a^2+b^2=c^2,\ a,b,c\in\mathbb{N}.$$

Nếu a hoặc b chia hết cho 5 thì khẳng định là đương nhiên.

Nếu ngược lại, do $a^2\equiv 1,4\pmod{5}$ và $b^2\equiv 1,4\pmod{5}$, ta suy ra $c^2\equiv a^2+b^2\equiv 2,0,3\pmod{5}$.

Từ đây, dễ thấy ta phải có $c^2\equiv 0\pmod{5}$, hay c chia hết cho 5.

b) Xét tập $A=S\setminus\{5,20,30,35,50,8,9,24,36\}$.

Các số chia hết cho 5 nằm trong A là $10,15,25,40,45$.

- Chỉ có $(6,8,10)$ và $(10,24,26)$ là các bộ ba Pythagoras chứa 10, mà $8,24\notin A$ nên A không chứa có bộ ba Pythagoras nào có 10.
- Chỉ có $(8,15,17),(9,12,15),(15,20,25)$ và $(15,36,39)$ là các bộ ba Pythagoras chứa 15, mà $8,9,20,36\notin A$ nên A không chứa có bộ ba Pythagoras nào có 15.
- Chỉ có $(7,24,25)$ và $(15,20,25)$ là các bộ ba Pythagoras chứa 25, mà $24,20\notin A$ nên A không chứa có bộ ba Pythagoras nào có 25.
- Chỉ có $(9,40,41),(24,32,40)$ và $(30,40,50)$ là các bộ ba Pythagoras chứa 40, mà $9,24,30\notin A$ nên A không chứa có bộ ba Pythagoras nào có 40.

Chỉ có $(27,36,45)$ là bộ ba Pythagoras chứa 45, mà $36\notin A$ nên A không chứa bộ ba Pythagoras này.

Như vậy, tập A không chứa bộ ba Pythagoras nào (vì nếu có, thì một trong ba số phải chia hết cho 5 ,tức là bộ ba đó phải chứa một trong các số $10,15,25,40$ hoặc 45).

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 8/6/2018
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2+2x+7=(x+3)\sqrt{x^2+5}$. .

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=1\\(x+y)(x^2+y^2)=1.\end{cases}$

Lời giải

1) Do $x^2+5>0$ nên phương trình đã cho xác định với mọi x. Đặt $t=\sqrt{x^2+5}$ thì ta có $t>0$ và phương trình có thể được viết lại thành $t^2+2x+2=(x+3)t$,

Hay $(t-2)(t-x-1)=0$.

- Với $t=2$, ta có $x^2+5=4$, vô lý vì $x^2+5\geq 5>4$.
- Với $t=x+1$, ta có $x>-1($ do $t>0)$ và $x^2+5=(x+1)^2$. Giải phương trình này với chú ý $x>-1$, ta được $x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

2) Trừ tương ứng vế với vế hai phương trình của hệ, ta được

$$(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)(x^2-y^2)=0,$$

Hay $2xy(x+y)=0$.

Từ đó suy ra $x=0$, hoặc $y=0$, hoặc $x+y=0$ (loại do giả thiết, ta có $x+y\neq 0$).

- Với $x=0$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $y^3=1$ hay $y=1$.
- Với $y=0$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $x^3=1$ hay $x=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (x,y) là $(1,0)$ và $(0,1)$.

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0$.

2) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $3a^2+a=4b^2-b$. Chứng minh rằng $a+b$ là một số chính phương.

Lời giải

1) Để ý rằng $4x^2+8xy+3y^2=(2x+y)(2x+3y)$, ta thấy phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(2x+y)(2x+3y+1)=-2$.

Từ đây, ta có các trường hợp sau có thể xảy ra:

- Trường hợp 1: $2x+y=1, 2x+3y+1=-2$. Giải hệ phương trình này, ta được $x=\frac{3}{2}$ và $y=-2$, loại vì không thỏa mãn $x\in\mathbb{Z}$.
- Trường hợp 2: $2x+y=-1, 2x+3y+1=2$. Giải hệ này, ta được $x=-1, y=1$.
- Trường hợp 3: $2x+y=-2, 2x+3y+1=1$. Giải hệ phương trình này, ta được $x=-\frac{3}{2}$ và $y=1$, loại vì không thỏa mãn $x\in\mathbb{Z}$.
- Trường hợp 4: $2x+y=2, 2x+3y+1=-1$. Giải hệ này, ta được $x=2, y=-2$. Vậy có tất cả hai cặp số (x,y) thỏa mãn yêu cầu là $(-1,1)$ và $(2,-2)$.

2) Giả thiết đã cho có thể được viết lại thành $3\left(a^2-b^2\right)+a+b=b^2$,

Hay $(a+b)(3a-3b+1)=b^2.\#(1)$

Giả sử $a+b$ và $3a-3b+1$ không nguyên tố cùng nhau, gọi d là ước nguyên tố chung của chúng. Khi đó, từ đẳng thức trên, ta suy ra b chia hết cho p. Mà $a+b$ chia hết cho p nên ta cũng có a chia hết cho p. Lại có $3a-3b+1$ chia hết cho p nên 1 chia hết cho p, mâu thuẫn.

Vậy $(a+b, 3a-3b+1)=1$.

Kết hợp với (1), ta suy ra $a+b$ là số chính phương.

Câu III. (1,5 điểm)

1) Với x,y,z là các số thực thay đổi thỏa mãn $xyz=1$ và $(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)\neq 0$,

Chứng minh rằng $\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$

2) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz\geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}.$$

Lời giải

1) $\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xyz+xy+x}+\frac{xy}{x^2yz+xyz+xy}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{1+xy+x}+\frac{xy}{x+1+xy}=1$$

2) $P=\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}.$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xyz+xy+x}+\frac{xy}{x^2yz+xyz+xy}$$

$$\le \frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{1+xy+x}+\frac{xy}{x+1+xy}=1$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3(xy+x+1)}}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{3}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{3}\right).$$

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{1}{\sqrt{yz+y+1}}\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{yz+y+1}+\dfrac{1}{3}\right)$,

$$\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{zx+z+1}+\frac{1}{3}\right).$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$P\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}+1\right)\le\sqrt{3}.$$

Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ nên max $P=\sqrt{3}$.

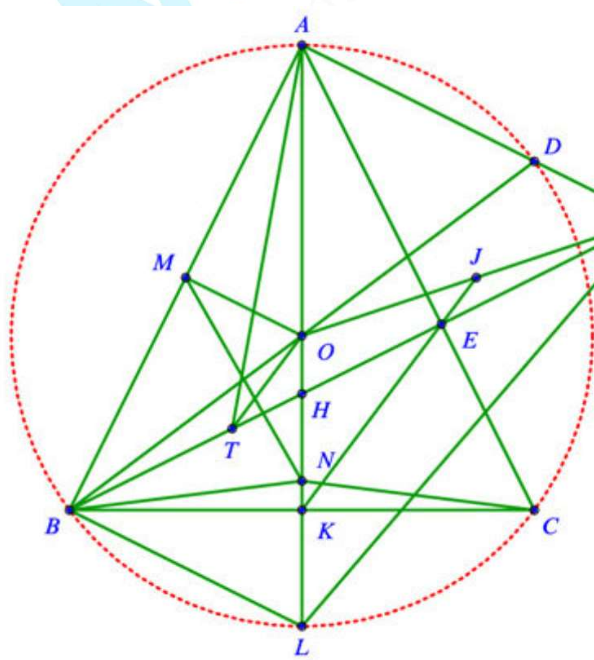
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao BE và nội tiếp đường tròn (O,R). Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng BE cắt các đường thẳng AD và AO lần lượt tại các điểm I và H.

1) Chứng minh rằng $BH\cdot BI=2R^2$.

2) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N thuộc tia đối của tia OA sao cho $ON=\dfrac{1}{2}R$. Chứng minh rằng tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi K là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Lời giải



1) Ta có $AB = AC$ nên $AO \perp BC$ tại trung điểm K của BC. Từ đó suy ra H là trực tâm của tam giác ABC. Do đó, ta có $\widehat{AHI} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ nên tứ giác $HODI$ nội tiếp. Từ đây dễ dàng suy ra các tam giác BOH và BID đồng dạng $(\text{g}-\text{g})$, do đó $BH \cdot BI = BO \cdot BD = 2R^2$.

2) Kẻ đường kính AL của đường tròn (O), Ta có $OMBL$ là hình thang vuông và N là trung điểm của OL nên $NM = NB = NC$. Suy ra $\widehat{NMB} = \widehat{NBM} = \widehat{NCA}$.
Từ đó, ta có tứ giác $AMNC$ nội tiếp.

3) Gọi J là giao điểm của các đường thẳng KE và OI. Gọi T là điểm đối xứng với I qua E, ta có $\widehat{ATE} = \widehat{AIE} = \widehat{BOH}$ nên $\widehat{ATB} = \widehat{AOB}$,
suy ra tứ giác $AOTB$ nội tiếp. Từ đây, ta có $\widehat{OTH} = \widehat{OAB} = \widehat{HEK}$ (do $ABKE$ nội tiếp). Suy ra $OT // KE$.
Mà E là trung điểm của IT nên J là trung điểm của OI.

Câu V. (1,0 điểm) Trên một đường tròn cho 2018 điểm phân biệt. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ nối hai điểm trong 2018 điểm đã cho để được một dây cung sao cho dây cung vừa được vẽ không có điểm chung với bất kỳ dây cung nào đã vẽ trước đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người đi trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

Lời giải

Do khoảng cách giữa các điểm không quan trọng, có thể coi 2018 điểm đã cho chia đều đường tròn.
Chiến thuật của An như sau: Vẽ một đường kính d, nó chia đường tròn thành hai nửa bằng nhau. Kể từ đây, mỗi người chỉ được phép vẽ dây cung nối hai điểm trên cùng một trong hai nửa đường tròn.
Cứ khi Bình vẽ một dây cung, An chỉ cần vẽ dây đối xứng của nó qua d. An luôn làm được như vậy, dù Bình có vẽ như thế nào. Trong khi đó, chỉ vẽ được một số hữu hạn dây, nên chắc chắn Bình là người đầu tiên không vẽ được dây nào nữa.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2019 - 2020
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 3/6/2019
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+5x}\right)=5.$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+7=4y^2+4y \\ x^2+3xy+2y^2+x+y=0. \end{cases}$

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge 0$. Để ý rằng $5=(x+5)-x=\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)$

Và $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}>0,$

Ta viết được phương trình đã cho dưới dạng $1+\sqrt{x(x+5)}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x},$

hay $\left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=0.$

Do $\sqrt{x+5}\ge\sqrt{5}>1$ nên từ đây, ta có $\sqrt{x}=1$, hay $x=1$ (thỏa mãn). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

2) Phương trình thứ hai của hệ có thể được viết lại thành $(x+y)(x+2y)+(x+y)=0,$

Hay $(x+y)(x+2y+1)=0.$

Từ đây, ta có $x=-y$ hoặc $x=-(2y+1)$.

- Trường hợp 1: $x=-y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $3y^2+4y-7=0$, hay $(y-1)(3y+7)=0$. Từ đó, ta có $y=1$ (tương ứng, $x=-1$) hoặc $y=-\frac{7}{3}$ (tương ứng, $x=\frac{7}{3}$).
- Trường hợp 2: $x=-(2y+1)$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta được $8=0$ (vô lý).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (x,y) là $(-1,1)$ và $\left(\frac{7}{3},-\frac{7}{3}\right)$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $P=abc(a-1)(b+4)(c+6)$ với a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=2019$. Chứng minh rằng P chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để biểu thức $Q=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}$ là số nguyên.

Lời giải

1) Do $a+b+c=2019$ là số lẻ nên trong ba số a,b,c, hoặc cả ba số đều lẻ hoặc có hai số chẵn và một số lẻ. Nếu cả ba số đều lẻ thì ta có $a-1$ chia hết cho 2 nên P chia hết cho 2, còn nếu có hai số chẵn và một số lẻ thì tích abc chia hết cho 2 nên P chia hết cho 2. Trong cả hai trường hợp, ta đều có P chia hết cho 2.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh P chia hết cho 3. Thật vậy, giả sử P không chia hết cho 3. Khi đó:

- $a(a-1)$ không chia hết cho 3, suy ra a chia 3 dư 2.
- $b(b+4)$ không chia hết cho 3, suy ra b chia 3 dư 1.

Từ đây, ta suy ra $c=2019-(a+b)$ chia hết cho 3. Do đó P chia hết cho 3, mâu thuẫn. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ P phải chia hết cho 3.

Từ (1) và (2) với chú ý $(2,3)=1$, ta suy ra P chia hết cho 6.

2) Dễ thấy $Q>1$. Ta có $Q-\sqrt{n+2}=\sqrt{n+\sqrt{n+2}}$ nên $Q^2-2Q\sqrt{n+2}+n+2=n+\sqrt{n+2}$,

Hay $Q^2+2=(2Q+1)\sqrt{n+2}.\#(1)$

Do Q là số nguyên lớn hơn 1 nên từ đây ta suy ra $\sqrt{n+2}$ là số hữu tỉ. Đặt $\sqrt{n+2}=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $(a,b)=1$. Khi đó, ta có $n+2=\frac{a^2}{b^2}$. Do $n+2$ nguyên nên ta có a^2 chia hết cho b^2. Mà $(a,b)=1$ nên $b=1$, suy ra $\sqrt{n+2}=a$, tức $n+2$ là số nguyên dương. Kết hợp với (1), ta suy ra Q^2+2 chia hết cho $2Q+1$. Từ đó, ta có $4(Q^2+2)=(4Q^2-1)+9=(2Q-1)(2Q+1)+9$

chia hết cho $2Q+1$, tức 9 chia hết cho $2Q+1$. Mà $2Q+1>3$ nên ta có $2Q+1=9$, hay $Q=4$. Thay trở lại (1), ta được $\sqrt{n+2}=2$, suy ra $n=2$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu là $n=2$.

Câu III. (2,0 điểm) Cho biểu thức $K=ab+4ac-4bc$ với a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $a+b+2c=1$.

1) Chứng minh rằng $K\ge-\frac{1}{2}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

Lời giải

a) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $4bc\le2\left(\frac{b+2c}{2}\right)^2\le2\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $K=ab+4ac-4bc\ge-4bc\ge-\frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0,b=2c$ và $a+b+2c=1$, tức $a=0,b=\frac{1}{2}$ và $c=\frac{1}{4}$.

b) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a(b+2c)\le\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Từ đó suy ra $K=ab+4ac-4bc\le ab+4ac\le2ab+4ac=2a(b+2c)\le\frac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b+2c, a+b+2c=1, bc=0$ và $ab=0$, tức $a=\frac{1}{2}, b=0$ và $c=\frac{1}{4}$. Vậy $\max P=\frac{1}{2}$.

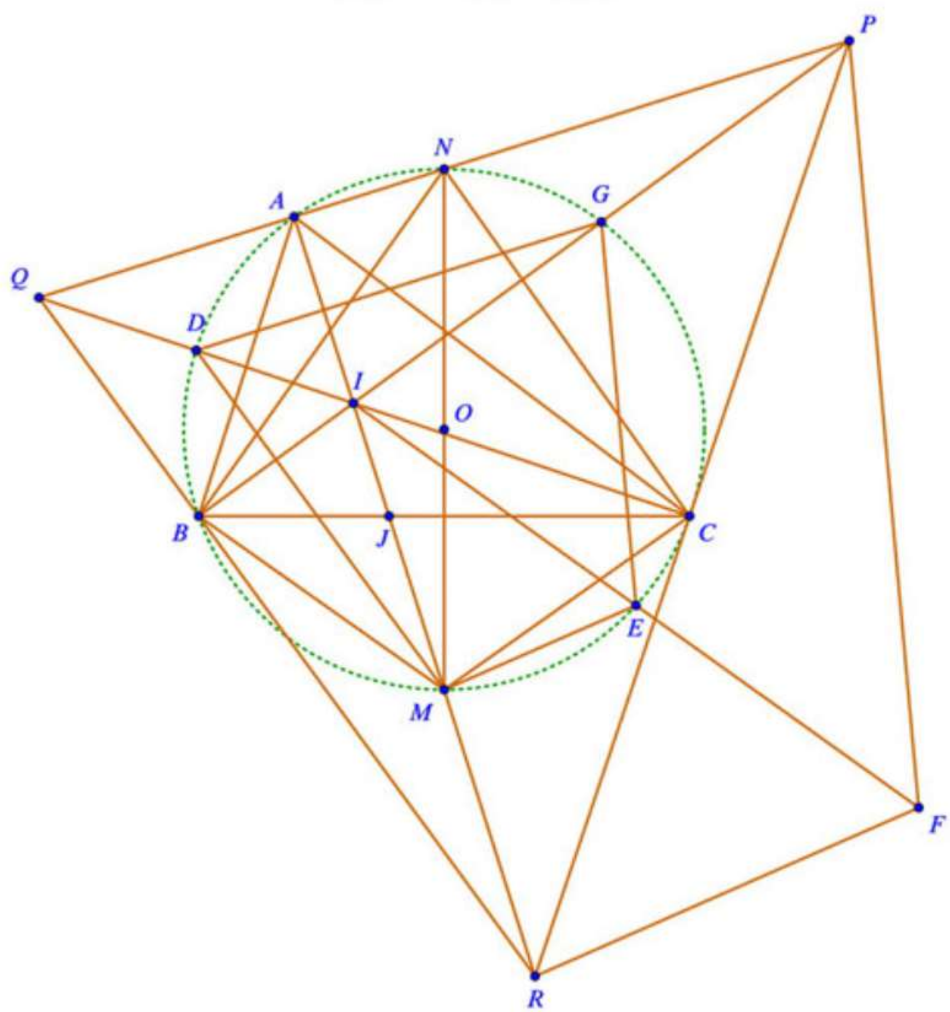
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đoạn thẳng BC tại điểm J, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A).

1) Chứng minh rằng $MI^2=MJ\cdot MA$.

2) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Đường thẳng AN cắt các tia phân giác trong của góc ABC và góc ACB lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng N là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

3) Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung nhỏ MC của đường tròn (O) (E khác M). Gọi F là điểm đối xứng với điểm I qua điểm E. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh rằng bốn điểm P,Q,R,F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



1) Do AM là phân giác của góc BAC nên M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, tức $MB = MC$. Từ đây, ta thấy hai tam giác MBJ và MAB có $\widehat{BMA}$ chung và $\widehat{MBC} = \widehat{BAM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau của đường tròn (O)) nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó, ta có $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MJ}{MB}$, hay $MB^2 = MJ \cdot MA$ (1)

Ta có $\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$ và $\widehat{MBI} = \widehat{IBC} + \widehat{MBC} = \widehat{IBC} + \widehat{MAC} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$ (2)

Do đó $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$, suy ra tam giác MBI cân tại M. Từ đây, ta có $MI = MB$.

Từ (1) và (2), ta suy ra $MI^2 = MJ \cdot MA$.

2) Do MN là đường kính của đường tròn (O) nên $MA \perp AN$. Mà AM là phân giác trong góc BAC của tam giác ABC nên AN là phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC. Lại có CQ là phân giác trong góc ACB của tam giác ABC nên Q là tâm đường tròn bàng tiếp góc ACB của tam giác ABC. Từ đó suy ra BQ là phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC. Mà BI. là phân giác trong góc ABC của tam giác ABC nên $BQ \perp BI$.

Tứ giác $AQBI$ có $\widehat{QAI} = \widehat{QBI} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp. Suy ra

$$\widehat{BQN} = \widehat{BQA} = 180^\circ - \widehat{AIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right).$$

Lại có $\widehat{BNQ} = \widehat{ANB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB của đường tròn (O)) nên

$$\widehat{QBN} = 180^\circ - \widehat{BQN} - \widehat{BNQ} = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) - \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = \widehat{BQN}.$$

Suy ra tam giác BNQ cân tại N, tức $NB = NQ$. Mặt khác, ta lại có $\widehat{BQN} + \widehat{NPB} = 90^\circ$ và $\widehat{QBN} + \widehat{NBP} = 90^\circ$ nên $\widehat{NPB} = \widehat{NBP}$. Suy ra tam giác BNP cũng cân tại N, tức ta có $NB = NP$. Vậy ta có $NP = NB = NQ$, suy ra N là trung điểm của đoạn PQ.

3) Do $NB = NC$ (N là điểm chính giữa của cung lớn BC của (O)) và $NB = NQ = NP$ nên $NC = NQ = NP$, suy ra tam giác PCQ vuông tại C. Từ đó, do CQ là phân giác trong góc ACB của tam giác ABC nên PC là phân giác ngoài tại đỉnh C của tam giác ABC. Ta có QB là phân giác ngoài tại đỉnh B, PC là phân giác ngoài tại đỉnh C và AM là phân giác trong góc BAC của tam giác ABC nên ba đường thẳng này đồng quy và điểm đồng quy là tâm đường tròn bàng tiếp góc BAC của tam giác ABC. Mà QB cắt PC tại R nên R thuộc AM và R là tâm đường tròn bàng tiếp góc BAC của tam giác ABC.

Theo chứng minh ở câu a), ta có tam giác MBI cân tại M. Mà $\widehat{MBI} + \widehat{MBR} = 90^\circ$ và $\widehat{MIB} + \widehat{MRB} = 90^\circ$ nên $\widehat{MBR} = \widehat{MRB}$. Suy ra tam giác MBR cân tại M. Từ đó, ta có $MR = MB = MI$, tức M là trung điểm của đoạn IR.

Tam giác IRF có M là trung điểm của đoạn IR, E là trung điểm của đoạn IF nên ME là đường trung bình ứng với cạnh RF của tam giác IRF. Suy ra $ME // RF$.

Bây giờ, gọi G là giao điểm thứ hai của BI và đường tròn (O), D là giao điểm thứ hai của CI và đường tròn (O). Chứng minh tương tự như trên, ta cũng có G là trung điểm của đoạn IP, D là trung điểm của đoạn IQ và $EG // FP, GD // PQ, DM // QR$.

Từ các chứng minh trên, ta có $\widehat{QRF} + \widehat{QPF} = \widehat{DME} + \widehat{DGE} = 180^\circ$.

Do đó $PQRF$ là tứ giác nội tiếp.

Câu V. (1,0 điểm) Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

1) Chứng minh rằng với mọi số thực dương d, trong mặt phẳng đó tồn tại hai điểm được tô bởi cùng một màu và có khoảng cách bằng d.

2) Gọi tam giác có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu là tam giác đơn sắc. Chứng minh rằng trong mặt phẳng đó tồn tại hai tam giác đơn sắc là tam giác vuông và đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \frac{1}{2019}$.

Lời giải

1) Xét tam giác đều ABC có cạnh d. Theo nguyên lý Dirichlet, trong ba điểm A, B, C có hai điểm cùng màu. Giả sử đó là A và B. Khi đó, A và B có cùng màu và khoảng cách giữa chúng là d.

2) Theo câu a), tồn tại hai điểm C và D có cùng màu và có khoảng cách là 2019. Không mất tính tổng quát, giả sử C và D cùng có màu đỏ. Dựng lục giác đều $CEFDGH$. Khi đó, nếu một trong các điểm E, F, G, H có một điểm được tô đỏ, giả sử là E thì CED là tam giác nửa đều có ba đỉnh được tô đỏ. Còn nếu E, F, G, H đều được tô xanh thì tam giác GFE là tam giác nửa đều có ba đỉnh được tô xanh. Như thế, trong mọi trường hợp đều tồn tại tam giác đơn sắc là tam giác nửa đều có độ dài cạnh huyền là 2019.

Chứng minh tương tự, ta cũng thấy tồn tại tam giác đơn sắc là tam giác nửa đều có độ dài cạnh huyền là 1 .

Từ hai kết quả trên, ta suy ra tồn tại hai tam giác đơn sắc là tam giác nửa đều (cũng tức là tam giác vuông) đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \frac{1}{2019}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 3/6/2019
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2-1=\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2+x-y=0,\\ x^2+x+1=y^2.\end{cases}$

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge -1$. Ta thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình. Xét trường hợp $x>-1$, khi đó phương trình đã cho có thể đương viết lại thành $\sqrt{x+1}\left(x-1\right)=1$.

Từ đây, ta suy ra $x>1$. Bình phương hai vế của phương trình, ta được $(x-1)^2\left(x+1\right)=1$, hay $x\left(x^2-x-1\right)=0$.

Giải phương trình này với chú ý $x>1$, ta được $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $\left(x-y\right)\left(2x-y\right)+\left(x-y\right)=0$,

Hay $\left(x-y\right)\left(2x-y+1\right)=0$.

Từ đó, ta có $x=y$ hoặc $y=2x+1$.

- Trường hợp 1: $x=y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $x+1=0$, hay $x=-1$ (tương ứng, $y=-1$).
- Trường hợp 2: $y=2x+1$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $3x^2+3x=0$, hay $3x\left(x+1\right)=0$. Từ đó, $x=0$ (tương ứng, $y=1$) hoặc $x=-1$ (tương ứng, $y=-1$).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $\left(x,y\right)$ là $\left(0,1\right)$ và $\left(-1,-1\right)$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $P=ab\left(a+b\right)+2$ với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì P chia hết cho 9 .

2) Tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị của biểu thức $P=x^3+3x^2+x+3$ là lũy thừa của một số nguyên tố.

Lời giải

a) Giả sử P chia hết cho 3 . Khi đó, dễ thấy a và b dều không chia hết cho 3 . Ngoài ra, a và $-b$ cũng không được có cùng số dư khi chia cho 3 . Từ đó suy ra, hai số a,b có cùng số dư khi chia cho 3 .

Tuy nhiên, nếu a và b cùng chia 3 dư 1 thì $ab(a+b)$ chia 3 dư 2, suy ra P không chia hết cho 3, mâu thuẫn. Vậy a và b cùng chia 3 dư 2. Từ đây, ta có

$$P = ab(a+b)+4$$
$$=(a-2)(b-2)(a+b)+2(a+b-2)(a+b)+2$$
$$=(a-2)(b-2)(a+b)+2(a+b-1)^2$$

chia hết cho 9. Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Thử trực tiếp với $x=0,1,2$, ta thấy cả ba trường hợp đều thỏa mãn. Xét trường hợp $x \ge 3$, đặt $x^3+3x^2+x+3=p^n$ với p là số nguyên tố và n là số nguyên dương, khi đó ta có

$$(x+3)(x^2+1)=p^n.$$

Suy ra $x^2+1=p^a$ và $x+3=p^b$ với $a,b \in \mathbb{N}$. Do $(x^2+1)-(x+3)=(x+1)(x-2)>0$ nên $p^a>p^b$, tức $a>b$. Từ đó suy ra p^a chia hết cho p^b, hay x^2+1 chia hết cho $x+3$. Mà $x^2+1=x^2-9+10=(x-3)(x+3)+10$ nên 10 chia hết cho $x+3$. Lại có $x+3 \ge 6$ (do $x \ge 3$) nên $x+3=10$, tức $x=7$. Thử lại, ta thấy không thỏa mãn.

Vậy có ba số tự nhiên x thỏa mãn yêu cầu đề bài là $x=0, x=1$ và $x=2$.

Câu III. (2,0 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thay đổi và thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4}+\frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4}+\frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+4}.$$

Lời giải

1) Bằng cách sử dụng biến đổi tương đương, ta có

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}-1=-\frac{ab+bc+ca+abc-4}{(a+2)(b+2)(c+2)}=0.$$

2) Ta có $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2 \ge (a+b)^2$ nên $\sqrt{2(a^2+b^2)}+4 \ge (a+b)+4=(a+2)+(b+2)$.

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $\dfrac{1}{x+y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ với mọi $x,y>0$ (bất đẳng thức này tương đương với $(x-y)^2 \ge 0$), ta có $\dfrac{1}{(a+2)+(b+2)} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}\right)$.

Kết hợp hai đánh giá lại, ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4} \le \frac{1}{(a+2)+(b+2)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}\right)..$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\dfrac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}\right)$

Và $\dfrac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}+4} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c+2}+\dfrac{1}{a+2}\right)$.

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy max $P=\dfrac{1}{2}$.

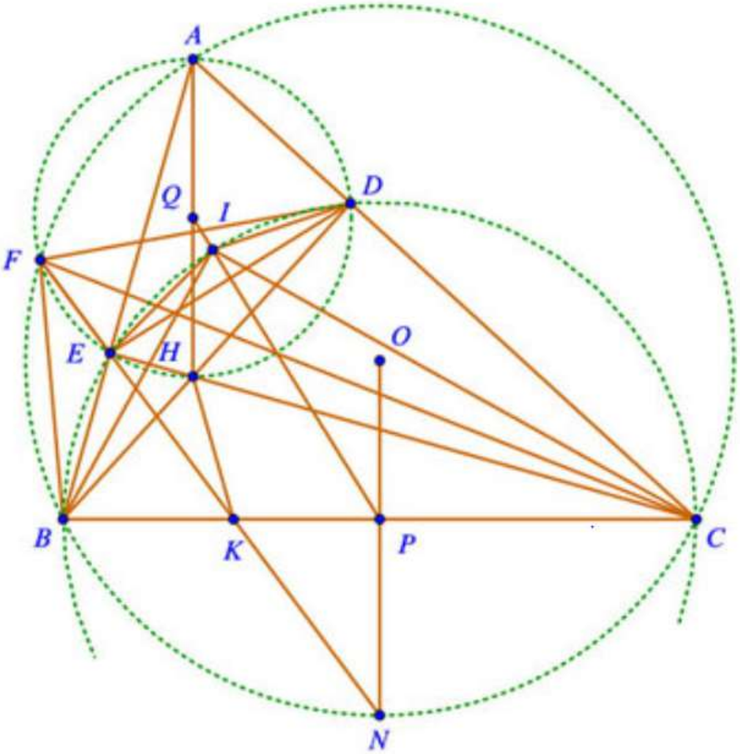
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường tròn (O) cắt đường tròn đường kính AH tại điểm thứ hai F (F khác A).

1) Chứng minh rằng tam giác BEF đồng dạng với tam giác CDF.

2) Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O). Đường thẳng FN cắt cạnh BC tại điểm K. Chứng minh rằng tia HK là tia phân giác của góc BHC.

3) Hai tia phân giác của góc ABH và góc ACH cắt nhau tại điểm I. Gọi P là giao điểm của đoạn thẳng ON và cạnh BC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AH. Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{AEF}=\widehat{ADF}$ (cùng chắn cung AF của đường tròn đường kính AH). Mà $\widehat{BEF}+\widehat{AEF}=180^\circ$ và $\widehat{CDF}+\widehat{ADF}=180^\circ$ nên $\widehat{BEF}=\widehat{CDF}$.

Mặt khác, ta lại có $\widehat{FBE}=\widehat{DCF}$ (cùng chắn cung AF của đường tròn (O)) nên tam giác BEF và tam giác CDF đồng dạng (g-g).

2) Do $\Delta BEF \backsim \Delta CDF$ nên $\frac{BF}{CF}=\frac{BE}{CD}$ (1)

Do N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O) nên FN là phân giác của góc BFC.

Từ đó, theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{KB}{KC}=\frac{BF}{CF}$ (2)

Hai tam giác BHE và CHD có $\widehat{BEH}=\widehat{CDH}=90^\circ$ và $\widehat{BHE}=\widehat{CHD}$ (đối đỉnh) nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra $\frac{BE}{CD}=\frac{BH}{CH}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $\frac{KB}{KC}=\frac{BH}{CH}$. Do đó, HK là phân giác của góc BHC.

3) Ta có $\widehat{EBH}=\widehat{HCD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$). Mà BI là phân giác của góc EBH và CI là phân giác của góc HCD nên $\widehat{EBI}=\widehat{IBD}=\widehat{ECI}=\widehat{ICD}=\frac{1}{2}\widehat{EBH}=\frac{1}{2}\widehat{HCD}.$

Do $\widehat{EBI}=\widehat{ECI}$ nên tứ giác $EBCI$ nội tiếp. Lại có $\widehat{IBD}=\widehat{ICD}$ nên tứ giác $EBCD$ nội tiếp. Như thế, ta có năm điểm E,B,C,D,I cùng nằm trên một đường tròn. Mà BI là phân giác của góc EBD nên I là điểm chính giữa của cung nhỏ DE của đường tròn $(EBCDI)$. Suy ra E thuộc trung trực của DE.

Ta có Q là trung điểm của AH và $\widehat{AEH}=\widehat{ADH}=90^\circ$ nên theo tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông, ta có $QE=QD=\frac{1}{2}AH$. Suy ra Q thuộc trung trực của DE.

Ta có N là trung điểm của cung nhỏ BC của đường tròn (O), và P là giao điểm của ON và BC nên P là trung điểm của BC. Mặt khác, ta lại có $\widehat{BEC}=\widehat{BDC}=90^\circ$ nên theo tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông, ta có $PD=PE=\frac{1}{2}BC$. Từ đó suy ra P thuộc trung trực của DE.

Từ (4), (5) và (6), ta suy ra ba điểm P,I,Q thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm) Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 22 viên kẹo, túi thứ hai có 29 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ chọn một túi kẹo và lấy ít nhất một viên kẹo trong túi kẹo đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

Lời giải

An chỉ việc bốc 7 viên kẹo từ túi thứ hai. Lúc này, hai túi đều có 22 viên kẹo. Sau đó thì cứ hễ Bình bốc bao nhiêu viên kẹo từ một túi, An sẽ bốc đúng bấy nhiêu viên kẹo từ túi còn lại. Như thế, sau mỗi lần An bốc, số viên kẹo ở hai túi sẽ như nhau. Do đó, nếu Bình còn bốc được thì An sẽ còn bốc được, suy ra An không thể thua. Mà trò chơi chắc chắn phải kết thúc, suy ra Bình phải thua. Vậy với chiến thuật chơi đối xứng như vậy, An sẽ thắng.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+3x+5=(x+3)\sqrt{x^2+5}$.

2. Cho hai số thực a,b,c thỏa mãn $a+b-2c=0$ và $2ab-bc-ca=0$. Chứng minh rằng $a=b=c$.

Lời giải

1. Phương trình đã cho luôn xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt{x^2+5}$ $(a>0)$, khi đó phương trình có thể viết lại thành $a^2+3x=(x+3)a$, hay $(a-x)(a-3)=0$.

Do $a=\sqrt{x^2+5}>\sqrt{x^2}=|x|\ge x$ nên từ đây, ta có $a=3$ hay $\sqrt{x^2+5}=3$.

Từ đó, ta có $x=2$ (thỏa mãn) hoặc $x=-2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ và $x=-2$.

2. Từ giả thiết thứ nhất và thứ hai, ta có: $2ab=c(a+b)=2c^2$. Do đó $ab=c^2$.

Suy ra: $(a-c)(b-c)=ab-c(a+b)+c^2=c^2-2c^2+c^2=0(1)$.

Mà: $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(2c)^2-4c^2=0(2)$.

Từ (1) và (2), suy ra: $a=b=c$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $A=11^n+7^n-2^n-1$ chia hết cho 15.

2. Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn $\sqrt{11}-\frac{m}{n}>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{11}-\frac{m}{n}\ge\frac{3\left(\sqrt{11}-3\right)}{mn}.$$

Lời giải

1. Với mọi số nguyên a,b và số tự nhiên k ta có: $\left(a^k-b^k\right)\vdots(a-b)$.

Suy ra: $a^k-b^k=(a-b)M$ với M là số nguyên.

Ta có: $A=\left(11^n-2^n\right)+\left(7^n-1^n\right)=9C+6D=3(3C+2D)\vdots 3$ với C,D là số nguyên.

Lại có: $A=\left(11^n-1^n\right)+\left(7^n-2^n\right)=10C+5D=5(2P+Q)\vdots 5$ với P,Q là số nguyên.

Suy ra $A\vdots 15$.

2. Với mọi số nguyên a thì a^2 chia 11 dư $0,1,3,4,5,9$.

Ta có: $\sqrt{11}-\frac{m}{n}>0\Leftrightarrow 11n^2-m^2>0$. Nếu $11n^2-m^2=1$ thì $m^2\equiv 10(\mathrm{mod}\ 11)$, mâu thuẫn.

Suy ra: $11n^2 \geq m^2 + 2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương: $\sqrt{11}n \geq m + \dfrac{3\left(\sqrt{11}-3\right)}{m}\left(1\right)$

$$\Leftrightarrow 11n^2 \geq m^2 + 6\left(\sqrt{11}-3\right) + \frac{9(\sqrt{11}-3)^2}{m^2}\left(2\right).$$

+ Nếu $m \geq 3$ thì $VP_{(2)} \leq m^2 + 6\left(\sqrt{11}-3\right) + (\sqrt{11}-3)^2 = m^2 + 2 \leq 11n^2$. Bất đẳng thức $\left(2\right)$ đúng.

+ Nếu $m = 1$ thì $\left(1\right) \Leftrightarrow \sqrt{11}n \geq 3\sqrt{11} - 8 \Leftrightarrow \sqrt{11}n + 8 \geq 3\sqrt{11}$. Do $11n^2 \geq m^2 + 2 \Rightarrow n \geq \sqrt{\dfrac{3}{11}}$ nên (1) đúng.

+ Nếu $m = 2$ thì $\left(1\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{11}n \geq 3\sqrt{11} - 5$. Do $11n^2 \geq m^2 + 2 \Rightarrow n \geq \sqrt{\dfrac{6}{11}}$ nên (1) đúng.

Tóm lại trong mọi trường hợp ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 3, n = 1$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $P\left(x\right)$ với hệ số thực thỏa mãn $P\left(1\right) = 3$ và $P\left(3\right) = 7$. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P\left(x\right)$ cho đa thức $x^2 - 4x + 3$.

2. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + abc = 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = ab + bc + ca.$$

Lời giải

1. Do $x^2 - 4x + 3$ có bậc là 2 nên số dư phép chia $P\left(x\right)$ cho $x^2 - 4x + 3$ có dư là $ax + b$.

Đặt $P\left(x\right) = \left(x^2 - 4x + 3\right)Q\left(x\right) + ax + b$.

Ta có: $\begin{cases} P\left(1\right) = 3 \\ P\left(3\right) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy đa thức dư cần tìm là $2x + 1$.

2. Ta chứng minh $ab + bc + ca \leq a + b + c + abc$. Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$1 - \left(a + b + c\right)\cdot 1^2 + \left(ab + bc + ca\right)\cdot 1 - abc \leq 1 \Leftrightarrow \left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right) \leq 1.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta có: $4 = a + b + c + abc \geq 3c + c^3 \Rightarrow c \leq 1$. Ngoài ra $4 = a + b + c + abc \leq 3a + a^3 \Rightarrow a \geq 1$.

Khi đó $\left(1-a\right)\left(1-c\right) \leq 0$.

- Nếu $b \leq 1 \Rightarrow 1 - b \geq 0$. Khi đó $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right) \leq 0 < 1$. Ta có điều phải chứng minh.
- Nếu $b > 1$, kết hợp với $c \geq 0$ và áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có:

$$\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right) = \left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(1-c\right) \leq \left(a-1\right)\left(b-1\right) \leq \left(\frac{a+b-2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a+b+c+abc-2}{2}\right)^2 = 1$$

Từ đó suy ra: $ab + bc + ca \leq a + b + c + abc = 4$. Do đó $P \leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2, c=0$ và các hoán vị.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 đạt được khi $a=b=2, c=0$ và các hoán vị.

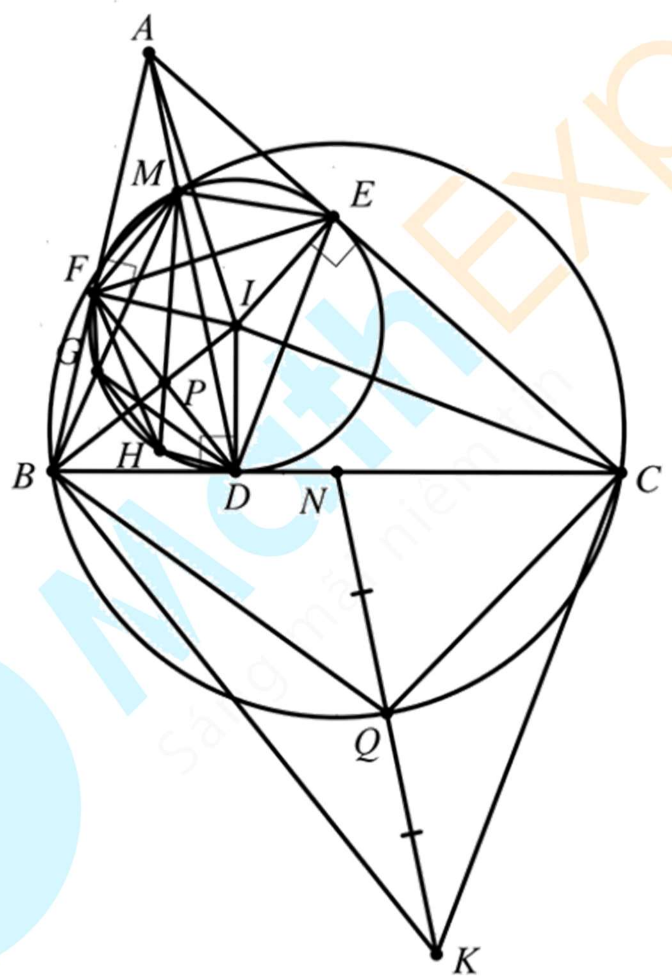
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm I đến các đường thẳng BC, CA, AB. Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt D và M. Đường thẳng qua K song song với đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng tam giác MFD đồng dạng với tam giác BNK.

b) Gọi P là giao điểm của BI và FD. Chứng minh góc BMF bằng góc DMP.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC đi qua trung điểm của đoạn thẳng KN.

Lời giải



a) Dễ thấy D,E,F là các điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB do đó $BD = BF$, kết hợp với $ID = IF$ suy ra BI là trung trực của DF. Do đó $BI \perp DF$.

Mà BI, BK theo thứ tự là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{ABC}$ nên $BI \perp BK$, từ đó $BK // DF$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $CK // DE \perp CI$.

Từ $BK // DF$ và $KN // DM$, ta suy ra: $\widehat{FDM} = \widehat{NKB}(1)$.

Mặt khác $ID \perp BC, IE \perp CA$ và $IF \perp AB$, suy ra: $\widehat{IDC} = \widehat{IEC} = \widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90^\circ$.
Do đó $IDCE$ và $IEAF$ là các tứ giác nội tiếp.
Lại có IA, IB, IC là ba đường phân giác trong của ΔABC, ta có:

$$\widehat{FED} = \widehat{FEI} + \widehat{IED} = \widehat{FAI} + \widehat{ICD} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

Vì $BK \perp BI$ và tứ giác $DEMF$ nội tiếp nên: $\widehat{FMD} = \widehat{FED} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{KBI} - \widehat{CBI} = \widehat{NBK}(2)$.

Từ (1) và (2), suy ra tam giác MFD đồng dạng với tam giác BNK.
b) Theo câu a) BI là trung trực của DF nên BI vuông góc với DF tại trung điểm P của DF.
Gọi G là giao điểm thứ hai của BM và đường tròn (I). Dễ thấy hai tam giác BMF và BFG đồng dạng với nhau nên $\frac{BM}{BF} = \frac{BF}{BG} = \frac{MF}{FG}$. Suy ra: $\frac{BM}{BG} = \frac{BM}{BF} \cdot \frac{BF}{BG} = \frac{MF}{FG} \cdot \frac{MF}{FG} = \left(\frac{MF}{FG}\right)^2 (3)$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{BM}{BG} = \left(\frac{MD}{DG}\right)^2 (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{FM}{FG} = \frac{DM}{DG}$.

Kẻ dây cung GH của (I) và song sóng với DF thì tứ giác $FDHG$ là hình thang cân.

Suy ra: $FH = DG$ và $FG = DH$. Khi đó: $\frac{FM}{DH} = \frac{FM}{FG} = \frac{DM}{DG} = \frac{DM}{FH}$.

Do đó: $FM \cdot FH = DM \cdot DH (5)$.

Gọi x, y là các khoảng cách từ M đến HD, HF thì $\begin{cases} x = MD \cdot \sin\widehat{MDH} \\ y = MF \cdot \sin\left(180^\circ - \widehat{MFH}\right) = MF \cdot \sin\widehat{MDH} \end{cases}$.

Suy ra: $\frac{x}{MD} = \frac{y}{MF}(6)$.

Từ (5) và (6), suy ra: $\frac{S_{FMH}}{S_{DMH}} = \frac{x \cdot FH}{y \cdot HD} = \frac{MF \cdot FH}{MD \cdot DH} = 1$. Do đó MH đi qua trung điểm của FD.

Tức là $P \in MH$, do đó $\widehat{BMF} = \widehat{GMF} = \widehat{DMH} = \widehat{DMP}$.
c) Gọi Q là trung điểm của KN. Theo câu a) thì $\Delta MFD \backsim \Delta BNK$ mà MP, BQ lần lượt là trung tuyến của hai tam tác này nên $\Delta DMP \backsim \Delta KQB$.

Kết hợp với câu b), ta có: $\widehat{BMF} = \widehat{DMP} = \widehat{KBQ}$. Đặt $\alpha = \widehat{BMF}$, ta có: $\widehat{BQN} = \widehat{QKB} + \widehat{KBQ} = \widehat{QKB} + \alpha$.

Tương tự đặt $\beta = \widehat{CME}$ thì ta cũng có $\widehat{CQN} = \widehat{QKC} + \beta$.

Suy ra: $\widehat{BQC} = \widehat{BQN} + \widehat{CQN} = \widehat{QKB} + \alpha + \widehat{QKC} + \beta = \widehat{BKC} + \alpha + \beta$.
Do $BK // DF, CK // DE$ và tứ giác $DEMF$ nội tiếp nên:

$$\widehat{BKC}=\widehat{EDF}=180^\circ-\widehat{EMF}=180^\circ-\left(\widehat{BMF}+\widehat{BMC}+\widehat{CME}\right)=180^\circ-\left(\widehat{BMC}+\alpha+\beta\right).$$

Suy ra $\widehat{BQC}=\widehat{BKC}+\alpha+\beta=180^\circ-\widehat{BMC}$ hay $\widehat{BQC}+\widehat{BMC}=180^\circ$.

Do đó tứ giác $BMQC$ nội tiếp, tức là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM đi qua trung điểm Q của KN.

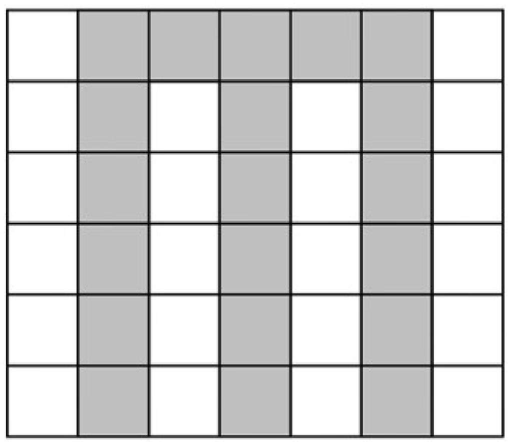
Câu V. (1,0 điểm) Cho một bảng ô vuông kích thước 6×7 (6 hàng, 7 cột) được tạo bởi các ô vuông kích thước 1×1. Mỗi ô vuông kích thước 1×1 được tô bởi một trong hai màu đen hoặc trắng sao cho trong mọi bảng ô vuông kích thước 2×3 hoặc 3×2, có ít nhất hai ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen có chung cạnh. Gọi m là số ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen trong bảng.

a) Chỉ ra một cách tô sao cho $m=20$.

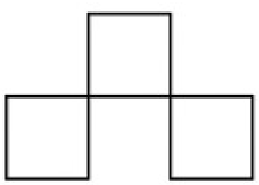
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của m.

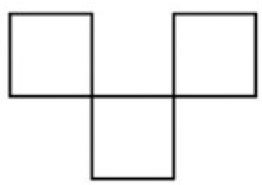
Lời giải

a) Cách tô màu thỏa mãn $m=20$.

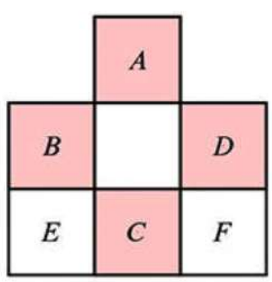


b) Theo cách tô của bảng, ta thấy rằng trong ba ô vuông nằm ở các vị trí trong hai dạng dưới đây có ít nhất một ô được tô đen.





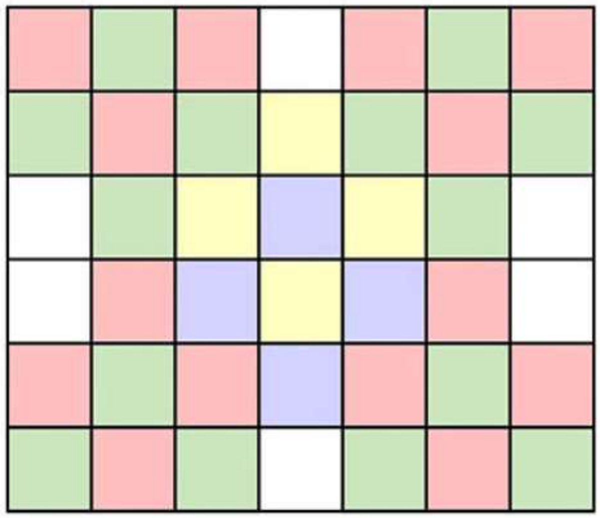
Tiếp theo, ta xét các ô nằm ở vị trí như hình dưới đây (phần có màu đỏ trong hình).



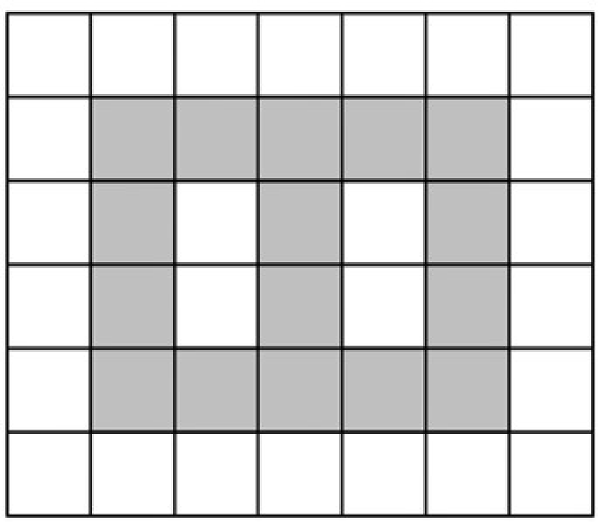
Ta sẽ chứng minh rằng trong các ô A,B,C,D có ít nhất hai ô được tô màu đen. Thật vậy, giả sử trong bốn ô này chỉ có tối đa một ô được tô màu đen. Khi đó, theo nhận xét trên, ta cũng thấy rằng trong các ô này có ít nhất một ô màu đen. Không mất tính tổng quát, giả sử ô A được tô màu đen và ô B,C,D được tô trắng.

Lúc này bảng con 2×3 chứ các ô B,E,C,F,D không có hai ô tô đen nào nằm cạnh nhau, mâu thuẫn. Vậy trong bốn ô A,B,C,D có ít nhất hai ô được tô đen. Từ đây, ta suy ra bất cứ bốn ô nào nằm ở vị trí giống với bốn ô A,B,C,D trong hình vẽ trên đều có ít nhất hai ô được tô đen.

Bây giờ, ta chia bảng ô vuông đã cho thành các vùng như hình vẽ bên dưới.



Từ các kết quả thu được, ta suy ra $m\ge 16$. Với $m=16$, ta thu được cách tô màu thỏa mãn sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 16.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x^2+1}=x^2+2x+1$. .

2. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{2021\sqrt{2020}+2020\sqrt{2021}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2021}}$.

Lời giải

1. Phương trình đã cho luôn xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt{x^2+1}(a>0)$, khi đó phương trình có thể viết lại thành $a^2+2x=(x+2)a$, hay $(a-x)(a-2)=0$.

Do $a=\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\ge x$ nên từ đây, ta có $a=2$ hay $\sqrt{x^2+1}=2$.

Từ đó, ta có $x=\sqrt{3}$ (thỏa mãn) hoặc $x=-\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\sqrt{3}$ và $x=-\sqrt{3}$.

2. Gọi A là vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Chú ý rằng với mọi n nguyên dương, ta có

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Sử dụng kết quả này, ta được

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2020}}-\frac{1}{\sqrt{2021}}=1-\frac{1}{\sqrt{2021}}.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $A=59^n-17^n-9^n+2^n$ chia hết cho 35.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2y-3y-4x-1=0$.

Lời giải

1. Chú ý rằng với mọi số nguyên a,b phân biệt và với mọi số tự nhiên k thì a^k-b^k chia hết cho $a-b$. Từ đây, ta có $A=(59^n-9^n)-(17^n-2^n)$ chia hết cho 5 vì 59^n-9^n chia hết cho $59-9=50$ là bội của 5 và 17^n-2^n chia hết cho $17-2=15$ cũng là bội của 5. (1) Ngoài ra, ta cũng có $A=(59^n-17^n)-(9^n-2^n)$ chia hết cho 7 vì 59^n-17^n chia hết cho $59-17=35$ là một bội của 7 và 9^n-2^n chia hết cho $9-2=7$.

Từ (1) và (2) với chú ý $(5,7)=1$, ta suy ra A chia hết cho $5\cdot 7=35$.

2. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $y(x^2-3)=4x+1$.

Rõ ràng $x^2-3\neq 0$ với mọi x nguyên. Do đó, từ phương trình trên, ta suy ra $4x+1$ chia hết cho x^2-3. Từ đó $(4x+1)(4x-1)-16(x^2-3)=47$ chia hết cho x^2-3. Vì 47 là số nguyên tố và $x^2-3\geq -3$ nên $x^2-3\in\{-1,1,47\}$. Đến đây, bằng cách xét từng trường hợp cụ thể, ta tìm được $x=2$ (tương ứng, $y=9$), hoặc $x=-2$ (tương ứng, $y=-7$).

Vậy có hai cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn yêu cầu là $(2,9)$ và $(-2,-7)$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số thực a,b,c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2+b^2+c^2=38$, $a+b=8$ và $b+c\geq 7$
2. Cho ba số thực không âm điều kiện a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{2abc}.$$

Lời giải

a) Từ giả thiết thứ nhất, ta có $b^2\leq 38<49$. Do đó $b<7$. Từ đây, kết hợp với các giả thiết thứ hai và thứ ba, ta có $a=8-b$ và $c\geq 7-b>0$. Do đó $38=a^2+b^2+c^2\geq(8-b)^2+b^2+(7-b)^2$, hay $3(b-5)^2\leq 0.$

Vì $3(b-5)^2\geq 0$ nên dấu đẳng thức trong các đánh giá phải xảy ra, tức ta có $b=5,a=3$ và $c=2$. Vậy có duy nhất một bộ số (a,b,c) thỏa mãn yêu cầu là $(3,5,2)$.

b) Bài toán này có hai cách giải như sau.

Cách 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Từ giả thiết, ta có $(a+b-c)^2=4ab$. Từ đó, với chú ý $a+b-c\geq 0$, ta có $a+b-c=2\sqrt{ab}.$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a+b+c=(a+b-c)+2c=2\sqrt{ab}+2c=\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+2c\geq 3\sqrt[3]{2abc}.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=\frac{a}{4}$ hoặc $c=a=\frac{b}{4}$ hoặc $a=b=\frac{c}{4}$.

Cách 2. Từ giả thiết, ta có $(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)$. Đặt $a+b+c=6x$ với $x\geq 0$ thì ta có $ab+bc+ca=9x^2$, suy ra $bc=9x^2-a(b+c)=9x^2-a(6x-a)=(3x-a)^2$.

Vì $(b+c)^2\geq 4bc$ nên $(6x-a)^2\geq 4(3x-a)^2$. Suy ra $3a(a-4x)\leq 0$. Từ đó $0\leq a\leq 4x$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $0\leq a,b,c\leq 4x$. Do đó $(a-4x)(b-4x)(c-4x)\leq 0.$

Từ đó suy ra

$$abc\leq 4x(ab+bc+ca)-16x^2(a+b+c)+64x^3=4x\cdot 9x^2-16x^2\cdot 6x+64x^3=4x^3.$$

Từ đây, ta có $3\sqrt[3]{2abc}\leq 3\sqrt[3]{8x^3}=6x=a+b+c$. Đây chính là kết quả cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=\frac{a}{4}$ hoặc $c=a=\frac{b}{4}$ hoặc $a=b=\frac{c}{4}$.

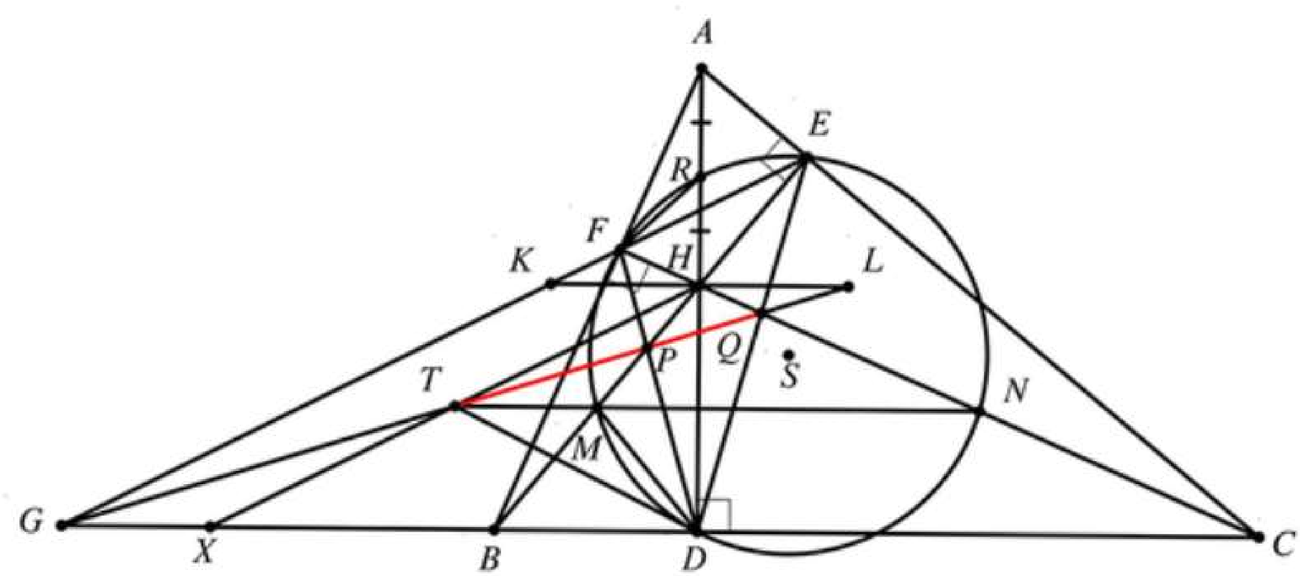
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và ba đường cao AD, BE, CF cùng đi qua điểm $H\left(D \in BC, E \in CA, F \in B\right)$. Gọi (S) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

1. Chứng minh rằng đường tròn (S) đi qua trung điểm của đoạn AH.

2. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường tròn (S) với các đoạn thẳng BH và CH. Tiếp tuyến tại điểm D của đường tròn (S) cắt đường thẳng MN tại điểm T. Chứng minh rằng đường thẳng HT song song với đường thẳng EF.

3. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng BH và DF, Q là giao điểm của hai đường thẳng CH và DE. Chứng minh rằng ba điểm T, P, Q thẳng hàng.

Lời giải



1. Gọi R là trung điểm của AH thì theo tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền, ta có $RA = RF = \dfrac{AH}{2}$. Từ $\widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90°$, ta suy ra tứ giác $CDHE$ nội tiếp. Tương tự, ta cũng có các tứ giác $AEHF$ và $BFHD$ nội tiếp. Từ đây, với chú ý $\widehat{DCH} = \widehat{HAF} = 90° - \widehat{BAC}$,

ta có $\widehat{DEF} = \widehat{DEH} + \widehat{HEF} = \widehat{DCH} + \widehat{HAF} = 2\widehat{RAF} = \widehat{DRF}$.

Suy ra tứ giác $DERF$ nội tiếp hay đường tròn (S) đi qua trung điểm của AH.

2. Chứng minh tương tự như câu a), ta cũng có đường tròn (S) đi qua trung điểm của HB và HC. Do đó M, N theo thứ tự là trung điểm của HB và HC. Áp dụng tính chất đường trung bình, ta có MN song song với BC và MN đi qua trung điểm của HD, mà $BC \perp HD$ nên $MN \perp HD$. Từ đó MN là trung trực của HD.

Vì T thuộc MN nên $TH = TD$. Suy ra hai tam giác THM và TDM bằng nhau theo trường hợp c-c-c.

Do đó $\widehat{THM} = \widehat{TDM}$.

Mặt khác, vì TD tiếp xúc với (S) nên $\widehat{TDM} = \widehat{DEM} = \widehat{DCH} = \widehat{HAF} = \widehat{HEF}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\widehat{THM} = \widehat{HEF}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $TH // EF$.

3. Gọi G,X theo thứ tự là giao điểm của EF,HT với BC. Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF và PQ theo thứ tự tại K và L.
Trước tiên, dễ thấy HD,HE,HF là các phân giác trong của tam giác DEF và DG vì vuông góc với HD nên là phân giác ngoài của tam giác DEF. Áp dụng tính chất phân giác, ta có

$$\frac{PD}{PF}\cdot\frac{GF}{GE}\cdot\frac{QE}{QD}=\frac{ED}{EF}\cdot\frac{DF}{DE}\cdot\frac{FE}{FD}=1$$

Do đó, theo định lý Menelaus, ta có ba điểm P,Q,G thẳng hàng.

Cũng theo tính chất phân giác, ta có $\frac{HE}{HP}=\frac{DE}{DP}=\frac{BE}{BP}$. Suy ra $\frac{EH}{EB}=\frac{PH}{PB}$ (3)

Áp dụng định lý Thales, ta có $\frac{KH}{BG}=\frac{EH}{EB}$ (4) và $\frac{HL}{BG}=\frac{PH}{PB}$ (5)

Từ (3), (4) và (5), ta suy ra $HK=HL$. Mặt khác, chú ý rằng $HKGX$ là hình bình hành vì có các cặp cạnh đối song song với nhau nên $HK=XG$. Suy ra $HL=XG$. Do đó, tứ giác $HLXG$ cũng là hình bình hành. Suy ra GL đi qua trung điểm của HX.
Bây giờ, từ tam giác HDX vuông tại D và vì điểm T nằm trên HX mà $TH=TD$ (chứng minh trên) nên T là trung điểm của HX. Suy ra PQ đi qua trung điểm T của HX. Ta có điều phải chứng minh.

Câu V. (1,0 điểm) Trên bàn có 6 hộp kẹo, mỗi hộp có 5 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, An sẽ chọn một hộp tùy ý và lấy ít nhất một viên kẹo ở hộp đó; còn Bình thì chọn một số hộp và trong các hộp đã chọn, mỗi hộp lấy đúng một viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để Bình là người thắng cuộc.

Lời giải

Bình sẽ thực hiện chiến thuật sau: Trong bốn lượt chơi đầu tiên, vào mỗi lượt chơi, Bình sẽ chọn tất cả các hộp có số lượng bi nhiều nhất rồi lấy từ mỗi hộp đó một viên bi.
Ta có nhận xét quan trọng sau.
Nhận xét. Sau $k\left(0\le k\le 4\right)$ lượt chơi của cả An lẫn Bình, hộp bi có nhiều bi nhất có $5-k$ viên bi. Hơn nữa, có î nhất $6-k$ hộp có $5-k$ viên bi.
Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo k. Trường hợp $k=0$ là hiển nhiên.
Giả sử mệnh đề đã đúng tới $k=t$ $(0\le t<4)$, ta chứng minh nó cũng đúng với $k=t+1$. Gọi s là số hộp có $5-t$ viên bi sau t lượt của cả hai $\left(s\ge 6-t\right)$. Ta thấy các hộp còn lại đã có không quá $4-t$ viên bi nên sau lượt thứ $t+1$ của Bình, các hộp này vẫn có không quá $4-t$ viên bi.
Trong s hộp có $5-t$ viên bi, An chỉ được chọn tối đa 1 hộp. Nếu hộp An chọn là một trong s hộp nói trên thì sau lượt của Bình, với chiến thuật như đã nêu, $s-1$ hộp còn lại sẽ có đúng $4-t$ viên bi. Còn nếu hộp An chọn không nằm trong s hộp nói trên thì sau lượt của Bình, với chiến thuật như đã nêu, cả s hộp sẽ có đúng $4-t$ viên bi. Từ đây suy ra, số bi lớn nhất trong các hộp là $4-t$, và có ít nhất $s-1\ge 5-t$ hộp có số viên bi như vậy.
Vậy mệnh đề cũng đúng với $k=t+1$. Áp dụng nguyên lý quy nạp, ta suy ra mệnh đề đúng với mọi k thỏa $0\le k\le 4$.

Trở lại bài toán, ta thấy sau lượt thứ 4 của cả hai, chỉ còn lại các hộp có 1 viên bi (ít nhất 2 hộp). Trong lượt tiếp theo, An chỉ được chọn 1 hộp. Bình chỉ cần chọn các hộp còn lại là có thể thắng trò chơi. Lời giải hoàn tất.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 14/6/2021
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+x+2-2\sqrt{x+1}=0$.
2. Cho ba số thực a,b và c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$$\frac{a-b}{1+c^2}+\frac{b-c}{1+a^2}+\frac{c-a}{1+b^2}=0$$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x\ge -1$.
Với $x\ge -1$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow x^2+\left[(x+1)-2\sqrt{x+1}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x+1}-1=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=0$ (TMĐK)

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

2. Ta có: Vế trái $=\dfrac{a-b}{ab+bc+ca+c^2}+\dfrac{b-c}{ab+bc+ca+a^2}+\dfrac{c-a}{ab+bc+ca+b^2}$

$$=\frac{a-b}{(a+c)(b+c)}+\frac{b-c}{(b+a)(c+a)}+\frac{c-a}{(a+b)(c+b)}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$=0=$ Vế phải

Bài toán được chứng minh.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2+5xy+6y^2+x+2y-2=0$.
2. Chứng minh với mỗi số nguyên n, số n^2+n+16 không chia hết cho 49.

Lời giải

1. Phương trình tương đương với:

$$(x+2y)(x+3y)+x+2y-2=0\Leftrightarrow (x+2y)(x+3y+1)=2$$

Vì x,y là các số nguyên, nên $x+2y$ và $x+3y+1$ là các ước của 2. Từ đây ta có bảng giá trị sau:

$x+2y$	$x+3y+1$	x	y
1	2	1	0
2	1	6	-2
-1	-2	3	-2
-2	-1	-2	0

Vậy, các cặp nghiệm (x,y) thỏa mãn là $(1,0);(-2;0);(6;-2);(3;-2)$.

2. Ta có $n^2+n+16=(n+4)(n-3)+28$.

Giả sử n^2+n+16 chia hết cho 49, suy ra n^2+n+16 chia hết cho 7.

Khi đó, vì 28 chia hết cho 7 nên $(n+4)(n-3)$ chia hết cho $7 \Rightarrow n+4$ hoặc $n-3$ chia hết cho 7.

Mà $(n+4)-(n-3)=7$ nên cả $n+4$ và $n-3$ đều chia hết cho 7.

Khi đó $(n+4)(n-3)$ chia hết cho 49, dẫn đến $(n+4)(n-3)+28$ không chia hết cho 49 (vô lý)

Vậy n^2+n+16 không chia hết cho 49.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x+\dfrac{2}{x}$ và x^3 dều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.

2. Cho các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+b+c=5$. Chứng minh $2a+2ab+abc\le 18$.

Lời giải

1. Từ giả thiết, ta có:

i) $x^2+2+\dfrac{4}{x^2}=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-2\in\mathbb{Q}$, và $x^2+2+\dfrac{4}{x^2}>0$.

ii) $\dfrac{8}{x^3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow x^3-\dfrac{8}{x^3}\in\mathbb{Q}$.

Mặt khác $x^3-\dfrac{8}{x^3}=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)\left(x^2+2+\dfrac{4}{x^2}\right)$, nên từ (i) và (ii) suy ra $x-\dfrac{2}{x}\in\mathbb{Q}$.

Kết hợp $x+\dfrac{2}{x}\in\mathbb{Q}$ suy ra $2x\in\mathbb{Q}$, hay $x\in\mathbb{Q}$ (đpcm).

3. Áp dụng BĐT AM-GM, ta có:

$$2ab+abc=ab(2+c)\le a\cdot\frac{(b+2+c)^2}{4}=\frac{a(7-a)^2}{4}$$

Do đó, $2a+2ab+abc\le 2a+\dfrac{a(7-a)^2}{4}$.

Ta cần chứng minh: $2a+\dfrac{a(7-a)^2}{4}\le 18$.

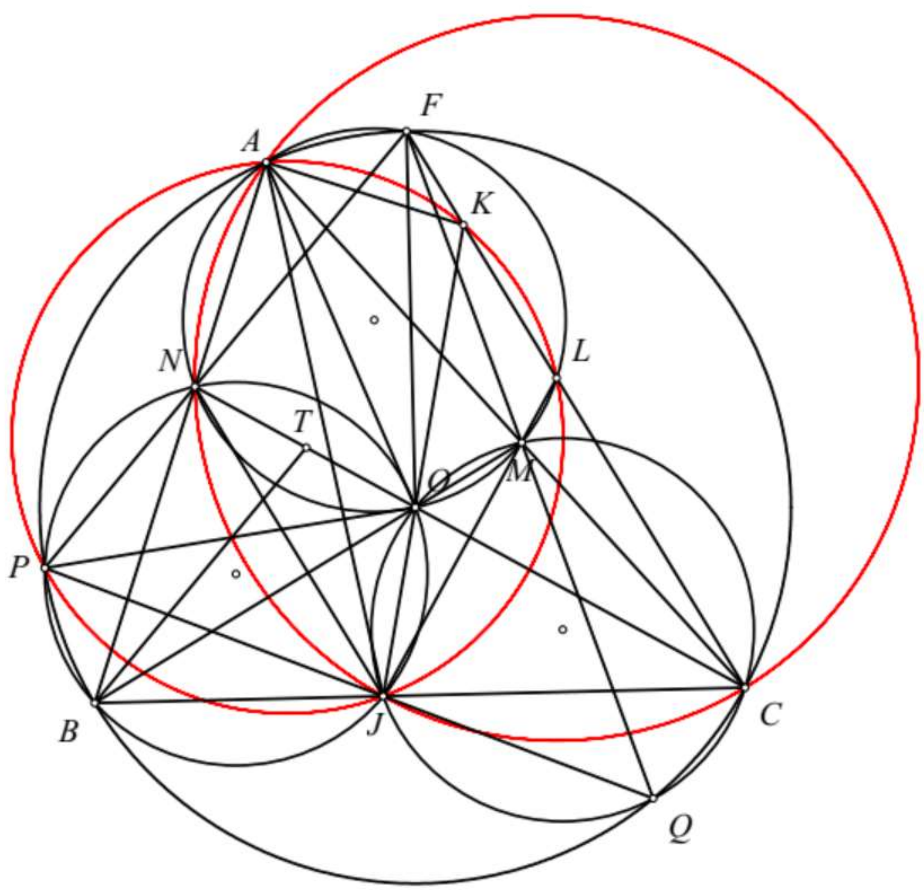
Biến đổi tương đương, BT này tương đương với $(a-3)^2(a-8)\le 0$ (luôn đúng, do $0\le a\le 5$).

Dấu bằng xảy ra khi $a=3,b=2,c=0$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), với góc $\widehat{BAC}=60°$ và $AB<AC$. Các đường thẳng BO,CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC,AB tại M,N. Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

1. Chứng minh năm điểm A,N,O,M và F cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi P,Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN,FM với đường tròn (O). Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ. Chứng minh tia AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
3. Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF. Chứng minh AB vuông góc với AK.

Lời giải



1. Do $\widehat{BAC}=60°$ nên $\widehat{BOC}=120°$. Suy ra $\widehat{NAM}+\widehat{NOM}=60°+120°=180°$, từ đó tứ giác $ANOM$ nội tiếp.

Mặt khác, trên ON lấy điểm T sao cho $BT=BN$.

Ta thu được $\widehat{BTO}=180°-\widehat{BTN}=180°-\widehat{BNT}=\widehat{CMO}.$

Suy ra $\widehat{TBO}=\widehat{MCO}$. Từ đó suy ra $\Delta TOB=\Delta MOC$ (g.c.g)

Ta thu được $BT=CM$, hay $BN=CM$.

Lại có $\widehat{NBF}=\widehat{MCF}$, $BF=CF$ nên $\Delta NBF=\Delta MCF(\text{c.g.c})$

Suy ra $\widehat{ANF}=\widehat{AMF}$ nên tứ giác $ANMF$ nội tiếp.

Vậy A,N,O,M và F cùng thuộc một đường tròn.

2. Từ câu a ta có $\widehat{ANF}=\widehat{AOF}=2\widehat{ABF}$. Suy ra $NF=NB$.

Từ đó $\widehat{NBF}=\widehat{NFB}$, ta thu được $sd\overset{\frown}{AF}=sd\overset{\frown}{BP}$.

Tương tự $sd\overset{\frown}{AF}=sd\overset{\frown}{CQ}$.

Suy ra $\widehat{PJB}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BP}+sd\overset{\frown}{CQ}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BP}+sd\overset{\frown}{AF}\right)=\widehat{PNB}$.

Suy ra B,P,N,J cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, $\widehat{POB}=sd\overset{\frown}{BP}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BP}+sd\overset{\frown}{CQ}\right)=\widehat{PJB}$ nên tứ giác $POJB$ nội tiếp.

Suy ra tứ giác $BNOJ$ nội tiếp.

Ta thu được $\widehat{BJN}=\widehat{BON}=60^\circ=\widehat{NAC}$, suy ra tứ giác $ANJC$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{JAN}=\widehat{JCN}=30^\circ=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Vậy AJ là phân giác của $\widehat{BAC}$.

3. Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AJC.

Ta có $\widehat{JAC}=30^\circ$ nên $\widehat{LCJ}=60^\circ=\widehat{FCJ}$, suy ra L nằm trên CE.

Lại có $\widehat{LAJ}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{ALJ}=90^\circ-\widehat{ACB}$.

Ta có: $\widehat{LKJ}=\widehat{JLC}-\widehat{KJL}=60^\circ-\widehat{OJM}$

$=60^\circ-\widehat{OCA}=60^\circ-\left(90^\circ-\widehat{ABC}\right)$

$=\widehat{ABC}-30^\circ=90^\circ-\widehat{ACB}.$

Do đó $\widehat{LAJ}=\widehat{LKJ}$. Suy ra tứ giác $AKLJ$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{KAJ}=\widehat{JLC}=60^\circ$.

Từ đó $\widehat{BAK}=\widehat{BAJ}+\widehat{JAK}=30^\circ+60^\circ=90^\circ$ hay AB vuông góc với AK.

Câu V. (1,0 điểm) Cho A là một tập con có 100 phần tử của tập hợp $\{1,2,3,\cdots,178\}$.

1. Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.

2. Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2,3,4,\cdots,22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n.

Lời giải

1. Phân hoạch tập $S=\{1,2,3,\cdots,178\}$ thành 89 tập con: $\{1,2\},\{3,4\},\cdots,\{177,178\}$.

Vì A là tập con có 100 phần tử của tập S, theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại 2 phần tử của A nằm cùng 1 tập con trong cách phân hoạch ở trên.

Từ đây suy ra A phải chứa hai số tự nhiên liên tiếp.

2. Tương tự ý tưởng ở câu 1), ta tìm cách phân hoạch tập S thành các tập con có 2 phần tử có hiệu bằng n.

Với $2n$ số nguyên dương liên tiếp đầu tiên, ta có thể chia thành n tập con thỏa mãn như sau:

$$\{1,n+1\},\{2,n+2\},\cdots,\{n;2n\}.$$

Tương tự, với các bộ $2n$ số nguyên dương kế tiếp, ta cũng chia thành n tập con có 2 phần tử và có hiệu 2 phần tử bằng n.

Kí hiệu $\left[a\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá 1 số thực a bất kì, và $\left\{a\right\}=a-\left[a\right]$.

Khi đó, tập S ban đầu có ít nhất $\left[\dfrac{178}{2n}\right]$ bộ $2n$ số nguyên dương liên tiếp, từ đó tạo ra $n.\left[\dfrac{178}{2n}\right]$ tập con từ $2n.\left[\dfrac{178}{2n}\right]$ số nguyên dương đầu tiên.

Tập S lúc này còn lại $178-2n\left[\dfrac{178}{2n}\right]$ số cuối cùng.

Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $178-2n.\left[\dfrac{178}{2n}\right]\le n\Rightarrow 178-2n\left(\dfrac{178}{2n}-\left\{\dfrac{178}{2n}\right\}\right)\le n\Rightarrow 2n\left\{\dfrac{178}{2n}\right\}\le n$

Suy ra $\left\{\dfrac{89}{n}\right\}\le\dfrac{1}{2}$. Dễ thấy dấu bằng không xảy ra, nên $\left\{\dfrac{89}{n}\right\}<\dfrac{1}{2}$.

Bây giờ, giả sử A không chứa 2 phần tử nào có hiệu bằng n. Khi đó mỗi tập con trong $n\cdot\left[\dfrac{178}{2n}\right]$ ở trên có tối đa 1 phần tử thuộc A. Do đó, số phần tử của A tối đa là:

$$n.\frac{178}{2n}+178-2n\cdot\left[\frac{178}{2n}\right]=178-n\cdot\frac{89}{n}=178-n\left(\frac{89}{n}-\left\{\frac{89}{n}\right\}\right)$$

$$=89+n\cdot\left\{\frac{89}{n}\right\}<89+22\cdot\frac{1}{2}=100\text{ (vô lí)}$$

Trường hợp 2: Nếu $178-2n.\left[\dfrac{178}{2n}\right]>n$ hay $178-2n.\left[\dfrac{178}{2n}\right]=n+k$, với $k>0$.

Khi đó, các số ở cuối ta chia được thành ít nhất k tập con có 2 phần tử có hiệu bằng n là: $\left\{178,178-n\right\},\left\{177,177-n\right\},\cdots,\left\{179-k,179-k-n\right\}$. Số các số còn lại nhiều nhất là $n+k-2k=n-k$.

Mặt khác, $178-2n\cdot\left[\dfrac{178}{2n}\right]>n$ dẫn đến $\left\{\dfrac{89}{n}\right\}>\dfrac{1}{2}$ (ngược lại TH1).

Tương tự TH1, ta giả sử A không chứa 2 phần tử nào có hiệu bằng n. Khi đó mỗi tập con trong $n.\left[\dfrac{178}{2n}\right]+k$ ở trên có tối đa 1 phần tử thuộc A. Do đó, số phần tử của A tối đa là:

$$n\cdot\left[\frac{178}{2n}\right]+k+\left(n-k\right)=n\left(\frac{89}{n}-\left\{\frac{89}{n}\right\}\right)+n=89+n-n\cdot\left\{\frac{89}{n}\right\}<89+n-\frac{n}{2}$$

$$=89+\frac{n}{2}\le 89+\frac{22}{2}=100\text{ (vô lí)}$$

Vậy, A phải chứa 2 phần tử có hiệu bằng n, với mọi $n\in\left\{2,3,4,\cdots,22\right\}$ (đpcm).

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 14/6/2021
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2=3y \\ y^3+2=3x \end{cases}$.

Lời giải

1. Điều kiện xác định $4+2x-x^2\ge 0$. Do $VT\ge 0 \Rightarrow VP\ge 0\Rightarrow x\ge 2$. Bình phương hai vế, phương trình tương đương với

$$4+2x-x^2=(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow 4+2x-x^2=x^2-4x+4$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-6x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ (loại) hoặc } x=3 \text{ (thoả mãn)}$$

2. Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới thu được

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=3(y-x)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(x^2+xy+y^2\right)+3\right]=0.$$

Dễ thấy biểu thức trong ngoặc vuông vô nghiệm. Do đó $x=y$. Thay vào phương trình (2), ta có:

$$y^3+2=3y\Leftrightarrow (y+2)(y-1)^2=0.$$

Từ đó $x=y=1$ hoặc $x=y=-2$. Kết luận $(x,y)=(1,1);(-2;-2)$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh với mỗi số nguyên n, số $n^2+3n+16$ không chia hết cho 25.

2. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2-xy-2y^2+x+y-5=0$.

Lời giải

1. Đặt $A=n^2+3n+16=\left(n^2+3n-4\right)+20=(n+4)(n-1)+20$

Giả sử A chia hết cho $25\Rightarrow A$ chia hết cho 5, mà 20 chia hết cho 5 $\Rightarrow (n+4)(n-1)\vdots 5\Rightarrow n+4\vdots 5$ hoặc $n-1\vdots 5$ (do 5 là số nguyên tố)

Mà $(n+4)-(n-1)=5\vdots 5$

$\Rightarrow n+4\vdots 5$ và $n-1\vdots 5\Rightarrow (n+4)(n-1)\vdots 25$. Mà $A\vdots 25$

$\Rightarrow 20 \,\vdots\, 25$ (vô lý)

Vậy A không chia hết cho 25.

2. Ta có :

$$x^2-xy-2y^2+x+y-5=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)+(x+y)=5$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y+1)=5$$

Mà $x+y, x-2y+1\in\mathbb{Z}$ suy ra các trường hợp.

+ Trường hợp 1: $x+y=5; x-2y+1=1 \Leftrightarrow x+y=5; x-2y=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}; y=\dfrac{5}{3}$ (loại)

+ Trường hợp 2: $x+y=1; x-2y+1=5 \Leftrightarrow x+y=1; x-2y=4 \Leftrightarrow x=2; y=-1$ (thoả mãn)

+ Trường hợp 3: $x+y=-1; x-2y+1=-5 \Leftrightarrow x+y=-1; x-2y=-6 \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{3}; y=\dfrac{5}{3}$ (loại)

+ Trường hợp 4: $x+y=-5; x-2y+1=-1 \Leftrightarrow x+y=-5; x-2y=-2 \Leftrightarrow x=-4; y=-1$ (thoả mãn)

Vậy $(x;y)\in\{(2;-1),(-4;-1)\}$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho a,b và c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh
$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}=-1.$$

2. Cho biểu thức $P=\dfrac{a}{\sqrt{1+2bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+2ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+2ab}}$ với a,b và c là các số thực không âm thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá tự lớn nhất của biểu thức P.

Lời giải

1. Ta ký hiệu $\sum_{cyc} f(a,b,c)=f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)$. Gọi biểu thức bên vế trái là P. Ta có

$$P=\frac{\sum_{cyc}(c-a)(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{A}{B}$$

Ta có $A=\sum_{cyc}(c-a)(a+b)(b+c)=\sum_{cyc}\left[ac^2+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c-ab^2\right]$

$$\begin{aligned}
&=a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2\\
&=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\
&=ab(a-b)-bc(a-b)+ca(c-a)-bc(c-a)\\
&=(a-b)b(a-c)-c(a-c)(a-b)\\
&=(a-b)(b-c)(a-c).
\end{aligned}$$

Từ đó $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$.

2. Để ý: $1+2bc=a^2+b^2+c^2+2bc=a^2+(b+c)^2\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{2}$.

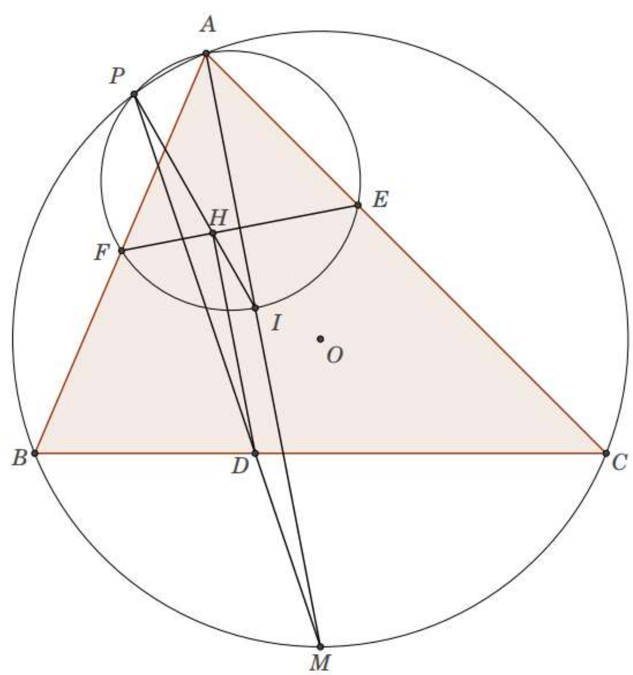
Do đó $VT = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}} \le \sum_{cyc}\dfrac{\sqrt{2}a}{a+b+c} = \sqrt{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, c=0$ và các hoán vị.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai $M(M$ khác $A)$. Gọi D,E và F lần lượt là các hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC,CA và AB.

1. Chứng minh tam giác MBI là tam giác cân.
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A). Chứng minh P,M và D là ba điểm thằng hàng.
3. Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF. Chứng minh HD song song với AM.

Lời giải



1. Ta có:

$\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

$\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{IBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

Do đó, ta có $\widehat{MIB} = \widehat{MBI} \Leftrightarrow \Delta MIB$ cân tại M.

2. Có: $\widehat{PFA} = \widehat{PEA}$ (cùng chắn cung PA của (AEF)) $\Rightarrow \widehat{PFB} = \widehat{PEC}$.

Xét tam giác PBF và tam giác PCE có:

$\widehat{PBF} = \widehat{PCE}$ (cùng chắn cung PA của đường tròn (O)

$\widehat{PFB} = \widehat{PEC}$ (cmt)

Vậy $\Delta PBF \backsim \Delta PCE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PF}{PE} = \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BF}{CE}$ (1) và $\widehat{FPB} = \widehat{EPC}$

$\Rightarrow \widehat{FPB} + \widehat{FPC} = \widehat{EPC} + \widehat{FPC} \Rightarrow \widehat{BPC} = \widehat{FPE}$

Xét tam giác PFE và tam giác PBC :

$\widehat{FPE} = \widehat{BPC}$; $\dfrac{PF}{PE} = \dfrac{PB}{PC}$

Vậy $\Delta PFE \backsim \Delta PBC$ (c.g.c).

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D, E, F là hình chiếu của I lên BC, CA, AB nên $BD = BF; AF = AE; CE = CD$.

Do đó, ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{PB}{PC}$ (do (1))

Theo định lí về đường phân giác đảo $\Rightarrow PD$ là phân giác góc BPC (2).

Do AM là phân giác góc BAC nên M là trung điểm cung BC nhỏ.

$\Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC} \Rightarrow PM$ là phân giác góc BPC (3).

Từ (2) và $(3) \Rightarrow P, M, D$ là 3 điểm thẳng hàng.

3. Vì E, F là hình chiếu của I lên CA, AB nên $\widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90^\circ \Rightarrow A, F, E, I$ cùng thuộc đường tròn đường kính AI, do đó I thuộc (AEF).

Vì $IE = IF$ nên I là trung điểm cung EF của $(AEF) \Rightarrow PI$ là phân giác góc FPE.

Xét tam giác PFH và tam giác PBD: $\begin{cases} \widehat{HPF} = \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{FPE} = \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{BPC} = \widehat{DPB} \\ \widehat{PFH} = \widehat{PBD} \end{cases}$

Vậy $\Delta PFH \backsim \Delta PBD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PH}{PD} = \dfrac{PF}{PB} (*)$.

Xét tam giác PFI và tam giác PBM :

$\widehat{PIF} = \widehat{PEF} = \widehat{PCB} = \widehat{PMB}$

$\widehat{PFI} = \widehat{PFE} + \widehat{IFE} = \widehat{PBC} + \dfrac{1}{2}.\widehat{FPE} = \widehat{PBC} + \dfrac{1}{2}.\widehat{BPC} = \widehat{PBC} + \widehat{MBC} = \widehat{PBM}$

Vậy $\Delta PFI \backsim \Delta PBM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PI}{PM} = \dfrac{PF}{PB}$ (**).

Từ $(*)$ và $(**) \Rightarrow \dfrac{PI}{PM} = \dfrac{PH}{PD} \Rightarrow DH // IM$ (theo định lí Thales đảo).

Vậy $DH // AM$.

Câu V. (1,0 điểm) Trên bàn có n viên kẹo. Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Hai bạn luân phiên lấy kẹo trên bàn, mỗi lần chỉ được lấy $1, 2, 3, 4$ hoặc 5 viên kẹo và phải lấy số viên kẹo khác với số viên kẹo của bạn còn lại vừa lấy ngay trước đó. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước,

1. Với $n = 7$, hãy chi ra chiến thuật chơi của Bình khiến An là người thua cuộc.
2. Với $n = 22$, hãy chi ra chiến thuật chơi của An khiến Bình là người thua cuộc.

Lời giải

1. Gọi số kẹo An bốc lần đầu là $x \in \{1;2;3;4;5\}$

- Trường hợp 1: Nếu $2 \le x \le 5$.

Dễ thấy $x \ne 7 - x; 2 \le 7 - x \le 5$ nên Bình chỉ cần bốc $7 - x$ viên kẹo, thì sẽ hết số kẹo trên bàn, dẫn đến An thua ở lượt tiếp theo.

- Trường hợp 2: $x = 1$

Khi này Bình sẽ bốc 3 viên kẹo, số kẹo trên bàn còn 3 viên.

Khi đó, An không thể bốc được 3 viên, chỉ bốc được 1 (hoặc 2) viên kẹo; Bình lượt tiếp theo sẽ bốc ngược lại của An: 2 (hoặc 1) viên kẹo để trên bàn không còn viên nào nữa. Và An sẽ thua ở lượt tiếp theo.

2. Lượt đầu tiên, An bốc 3 viên, số kẹo còn lại trên bàn là 19 viên. Đến lượt Bình, gọi số kẹo Bình bốc là $y \in \{1;2;4;5\}$ (y khác 3 vì An đã bốc 3 viên lần trước rồi). An sẽ bốc số viên kẹo là $6 - y \in \{1;2;4;5\}(6 - y \ne y)$, để đảm bảo số kẹo trên bàn còn 13 viên. Lượt tiếp theo của Bình, gọi số kẹo bình bốc là $z \in \{1;2;3;4;5\}$

- Trường hợp 1: $z \in \{1;2;4;5\}$

An sẽ bốc $6 - z \in \{1;2;4;5\}(6 - z \ne z)$, để trên bàn còn 7 viên kẹo. Ta đưa về bài toán tương tự phần a, dễ chỉ ra được cách để An thắng, Bình thua.

- Trường hợp 2: $z = 3$.

An sẽ bốc 5 viên kẹo, để trên bàn còn đúng 5 viên.

Tới lúc này, Bình không thể bốc được 5 viên nữa, chỉ có thể bốc $1, 2, 3$ hoặc 4 viên;

Dễ thấy, tổng số kẹo ban nãy là 5 (là số lẻ), nên số viên Bình bốc và số viên còn lại sau đó luôn khác nhau. Nên An sẽ bốc hết số viên còn lại trên bàn và Bình sẽ trở thành người thua cuộc vào lượt tiếp theo.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 12/6/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2-4x+2\sqrt{2x-1}+1=0$.
2. Cho các số thực a,b và c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}-\frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x\ge\frac{1}{2}$

Phương trình đề cho tương đương:

$$x^2-2x+1=(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=(\sqrt{2x-1}-1)^2$$

TH1: $x-1=\sqrt{2x-1}-1\Leftrightarrow x=\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2x-1\\x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

TH2: $x-1=1-\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2-x=\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)^2=2x-1\\2-x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+5=0\\x\le2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

2. Từ giả thiết, ta biến đổi: $\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{ab+bc+ca+a^2}=\frac{ab+ac}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+b^2}=\frac{bc+ba}{(a+b)(b+c)(c+a)};\frac{c}{1+c^2}=\frac{ca+cb}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

$\Rightarrow P=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}-\frac{2}{a+b+c-abc}$

Mà $ab+bc+ca=1$

$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a+b+c-abc$

$\Rightarrow P=0$

Vậy $P=0$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1}-7$ chia hết cho 20.
2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $y(x^2+x+1)=(x+1)(y^2-1)$.

Lời giải

1. Vì n là số tự nhiên lẻ, đặt $n = 2k + 1\left(k \in \mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow S = 3^{2n+1} - 7 = 3^{4k+3} - 7 = 81^k \cdot 27 - 7$

Nhận thấy, $81 \equiv 1\left(\text{mod } 20\right) \Rightarrow S \equiv 1^k.27 - 7 = 27 - 7 \equiv 0\left(\text{mod } 20\right)$

Hay S chia hết cho 20 (điều phải chứng minh).

2. **Cách 1**

Phương trình tương đương với:

$yx^2 + yx + y = xy^2 + y^2 - x - 1 \Leftrightarrow xy\left(x - y\right) + y\left(x - y\right) = -\left(x + y + 1\right)$

$\Leftrightarrow y\left(x + 1\right)\left(x + 1 - y - 1\right) = -\left(x + 1 + y\right)$

Đặt $a = x + 1, a \ge 2$. phương trình tương đương với $ay\left(y + 1 - a\right) = a + y$.

Vì $ay > 0$ và $a + y > 0$ nên $y + 1 - a > 0$. Suy ra $y + 1 - a \ge 1$. Ta lại có $\left(a - 1\right)\left(y - 1\right) \ge 1$ hay

$ay \ge a + y - 1 > \frac{a + y}{2}$ (do $a + y \ge 3$). Do đó, nếu $y + 1 - a \ge 2$ thì $ay\left(y + 1 - a\right) > a + y$, vô lý.

Do đó, $y + 1 - a = 1$ hay $y = a$. Khi đó, từ phương trình trên, ta cũng tìm ra được là $a^2 = 2a$ hay $a = 2$.

Như vậy, $\left(x, y\right) = \left(1, 2\right)$.

Cách 2: Ta biến đổi phương trình được:

$x^2y = \left(x + 1\right)\left(y^2 - y - 1\right)\left(1\right)$

Do $x, y > 0 y^2 - y - 1 > 0$

Gọi $d = \left(x^2, x + 1\right) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d \mid x + 1, x^2 \Rightarrow d \mid x^2 - 1 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$

Gọi $e = \left(y, y^2 - y - 1\right) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 1 \mid e \Rightarrow e = 1$

Từ $\left(1\right) \Rightarrow x^2y : x + 1$, mà $\left(x + 1, x^2\right) = 1 \Rightarrow y : x + 1\left(2\right)$

Lai từ $\left(1\right) \Rightarrow \left(y^2 - y - 1\right)\left(x + 1\right) \vdots y$, mà $\left(y, y^2 - y - 1\right) = 1 \Rightarrow x + 1 \vdots y\left(3\right)$

Do $x, y > 0$, kết hợp (2),(3) $\Rightarrow x + 1 = y$

Thay vào (1), ta có: $x^2 = y^2 - y - 1 = (x + 1)^2 - \left(x + 1\right) - 1$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$

Vậy $\left(x; y\right) = \left(1; 2\right)$

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m^3}{m + n}$ và $\frac{n^3}{m + n}$ đều là các số nguyên tố.

2. Với a, b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$.

Lời giải

1. Đặt $\frac{m^3}{m + n} = p, \frac{n^3}{m + n} = q$. Khi đó, ta có $p + q = \frac{m^3 + n^3}{m + n} = m^2 - mn + n^2$.

Vì $m^3 = p(m+n)$ nên $p \mid m^3$ hay $p \mid m$. Do đó, ta suy ra $p^3 \mid p(m+n)$ hay $p^2 \mid m+n$ hay $p \mid n$. Do đó, ta suy ra $p \mid m^2 - mn + n^2 \Rightarrow p \mid p+q \Rightarrow p \mid q \Rightarrow p = q$

Vì $p = q$ nên ta suy ra $m = n$. Khi đó, ta có $p = q = \dfrac{m^2}{2}$. Khi đó, ta dễ dàng chỉ ra p,q chỉ là số nguyên tố khi $m = 2$. Vậy $m = n = 2$.

2. Ta có $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc \le 2b(a+c) + 3ca(1-b)$.

- Nếu $b \ge 1$ thì $P \le 2b(a+c) \le \dfrac{(a+b+c)^2}{2} = \dfrac{9}{2}$
- Nếu $0 \le b \le 1$ thì ta có $P \le 2b(a+c) + \dfrac{3(a+c)^2(1-b)}{4} = 2b(3-b) + \dfrac{3(3-b)^2(1-b)}{4}$

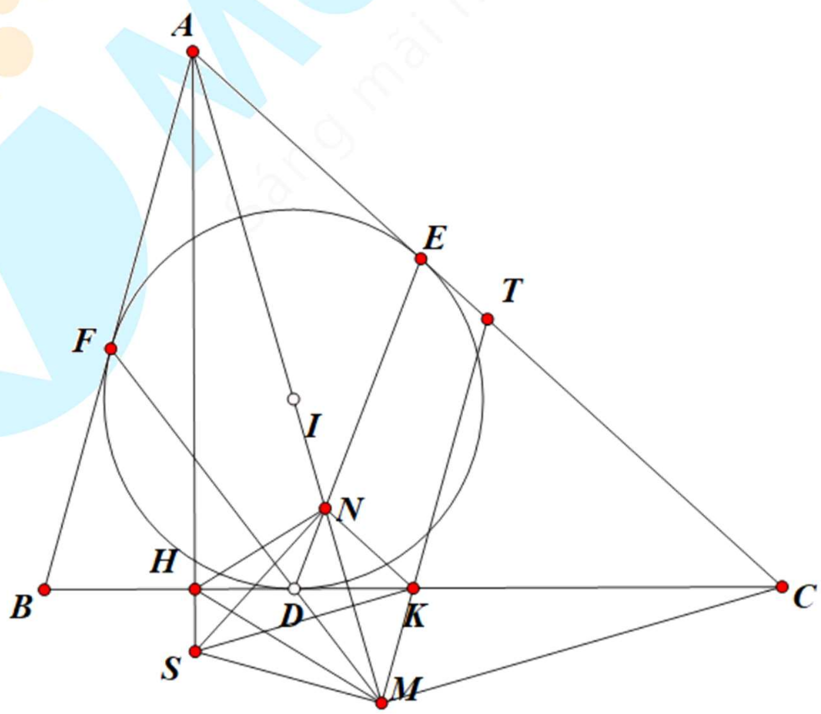
$$= \frac{-1}{4}b\left(21 - 13b + 3b^2\right) + \frac{27}{4} \le \frac{27}{4}.$$

Do đó, ta suy ra $P \le \dfrac{27}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $(a,b,c) = \left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2}\right)$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC, CA và AB lần lượt tại ba điểm D, E và F.

1. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và DF. Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI.
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân.
3. Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K;KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID.

Lời giải



1. Ta có: $\widehat{MDC}=\widehat{FDB}=90^\circ-\dfrac{\widehat{B}}{2}=\widehat{MIC}$.

Do đó: $IDMC$ là tứ giác nội tiếp suy ra: $\widehat{IMC}=\widehat{IDC}=90^\circ$ hay $CM\perp AI$.

2. Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Gọi T là trung điểm AC. Ta có:

$\widehat{MTA}=180^\circ-2\widehat{IAC}=180^\circ-\widehat{A}=\widehat{KTA}$ suy ra: M,K,T thẳng hàng. Suy ra: $KM//AB$. Vậy

$\widehat{KMD}=\widehat{DFB}=\widehat{FDB}=\widehat{KDM}$ dẫn đến: $KD=KM$. Chứng minh tương tự thì: $KN=KD$. Do đó: $KM=KN=KD$.

3. Ta có: $\widehat{DMN}=\dfrac{\widehat{C}}{2}$ (do $IDMC$ nội tiếp), để ý rằng: $AHMC$ nội tiếp dẫn đến: $\widehat{HMA}=\widehat{HCA}$ do đó: MD là phân giác góc HMN.

Tương tự: ND là phân giác góc HNM dẫn đến: D là tâm nội tiếp tam giác HMN. Tương tự ý a) ta có $\widehat{BNA}=90^\circ$ dẫn đến: $ABHN$ nội tiếp suy ra: $\widehat{NHK}=\dfrac{\widehat{A}}{2}=\widehat{NMK}$ dẫn đến $NHMK$ nội tiếp. Ta có $SNKM$ là tứ giác nội tiếp. Do đó: S,H,N,K,M cùng thuộc 1 đường tròn. Vậy ta có: $\widehat{SHK}=90^\circ$ do đó: S,H,A thẳng hàng dẫn đến: $AS//ID$.

Câu V. (1,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x+y$ với $x\in A$ và $y\in A$ (x,y không nhất thiết phân biệt).

1. Chứng minh $68\in B$.
2. Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp.

Lời giải

1. Vì có 70 số nằm trong đoạn $[1,90]$ nên có ít nhất 40 số không nằm trong tập hợp $\{34;68;69;\ldots;90\}$. Xét 40 số này, theo nguyên lí dirichlet, tồn tại hai số x,y nằm trong cùng một bộ thuộc một trong các bộ sau $(1,67);(2,66);\ldots;(33,35)$

Khi đó, ta có $x+y=68$ hay $68\in B$.

2. Thực hiện tương tự cách a, ta chứng minh được $\{43;\ldots;133\}\subset B$. Thật vậy, ta chứng minh các số thuộc tập này thuộc B.

- Với số $43\le t\le 90$. Khi đó, ta có $\left[\dfrac{t}{2}\right]$ bộ (x,y) mà $1\le x,y\le 90$ sao cho $x+y=t$. Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet, với $t-21$ số nằm trong tập từ 1 đến $t-1$ thì luôn tồn tại hai số nằm trong cùng một bộ. Điều này đúng vì $t-21\ge\left[\dfrac{t}{2}\right]+1$

(ta lấy $t-21$ số từ 1 đến $t-1$ vì không xét đến $91-t$ số từ t đến 90)

- Với số $91\le t\le 133$ thì khi đó ta có $\left[\dfrac{t}{2}\right]-(t-91)$ bộ (x,y) mà $1\le x,y\le 90$ sao cho $x+y=t$. Khi đó, trong $161-t$ số từ $t-90$ đến 90 thì theo nguyên lí dirichlet, tồn tại 2 số cùng thuộc một bộ. Điều này đúng vì $161-t\ge\left[\dfrac{t}{2}\right]-(t-91)+1\Leftrightarrow 69\ge\left[\dfrac{t}{2}\right]$

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 20/6/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2-2x+2=\sqrt{(x^2+4)(x+1)}$.

2. Với a,b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc=3$, tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2(b+c)+3}+\frac{1}{b^2(c+a)+3}+\frac{1}{c^2(a+b)+3}.$$

Lời giải

1. Điều kiện: $x\ge -1$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(x^2+4)-2(x+1)=\sqrt{(x^2+4)(x+1)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+4}-2\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+1}\right)=0.$$

Từ đó, ta có $\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{x+1}$. Giải phương trình này với chú ý $x\ge -1$, ta được $x=0$ hoặc $x=4$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=4$.

2. Do $abc=3$ nên $\dfrac{1}{a^2(b+c)+3}=\dfrac{1}{a^2(b+c)+abc}=\dfrac{1}{a(ab+bc+ca)}=\dfrac{bc}{3(ab+bc+ca)}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b^2(c+a)+3}=\frac{ca}{3(ab+bc+ca)},\ \frac{1}{c^2(a+b)+3}=\frac{ab}{3(ab+bc+ca)}.$$

Do đó $P=\dfrac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)}=\dfrac{1}{3}$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Lời giải

1. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ và p không chia hết cho 3.

Do p lẻ nên hiển nhiên 5^p+p^2 là số chẵn.

Do p không chia hết cho 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc 2, suy ra p^2 chia 3 dư 1. Mặt khác, do p lẻ nên 5^p chia 3 dư 2. Từ đây, ta suy ra 5^p+p^2 chia hết cho 3.

Từ (1) và (2), với chú ý $(2,3)=1$, ta có 5^p+p^2 chia hết cho $2\cdot 3=6$.

2. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^3-5x^2+2x+1=y(x^2-2)$. (1)

Do $x^2-2\ne 0$ nên từ đây, ta suy ra x^3-5x^2+2x+1 chia hết cho x^2-2. Từ đó

$$x^3-5x^2+2x+1-(x^2-2)(x-5)=4x-9$$

chia hết cho x^2-2. Và như thế, ta có $16(x^2-2)-(4x+9)(4x-9)=49$ chia hết cho x^2-2.

Vì $x^2-2\geq -2$ nên từ kết quả trên, ta suy ra $x^2-2\in\{-1,1,7,49\}$, hay $x^2\in\{1,3,9,51\}$. Do đó $x\in\{-1,1,-3,3\}$. Lần lượt thay các giá trị này vào phương trình (1), ta tìm được các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(-1,7),(1,1)$ và $(-3,-11)$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Với a,b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc=2$, chứng minh

$$a^2+b^2+c^2-3(a+b-c)\geq -\frac{9}{4}.$$

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a,b và c sao cho các phương trình $x^2-2ax+b=0$, $x^2-2bx+c=0$ và $x^2-2cx+a=0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương.

Lời giải

1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2+4\geq 4a,\ b^2+4\geq 4b,\ c^2+\frac{1}{4}\geq c.$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta suy ra $a^2\geq 4a-4, b^2\geq 4b-4$ và $c^2\geq c-\frac{1}{4}$. Do đó

$$a^2+b^2+c^2-3(a+b-c)\geq a+b+4c-\frac{33}{4}\geq 3\sqrt[3]{4abc}-\frac{33}{4}=-\frac{9}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2$ và $c=\frac{1}{2}$.

2. Gọi m là nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2-2ax+b=0$. Khi đó, ta có $m^2-2am+b=0$, hay $(m-a)^2=a^2-b$. Suy ra a^2-b là số chính phương.

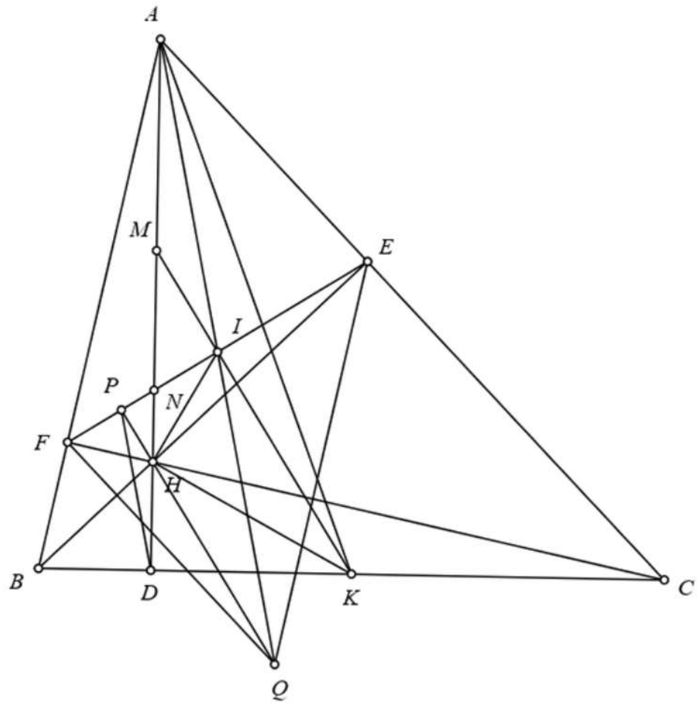
Chứng minh tương tự, ta cũng có b^2-c và c^2-a đều là số chính phương. Không mất tính tổng quát, giả sử a là số lớn nhất trong các số a,b,c.

Nếu $a>1$, thì ta có $a^2-b<a^2$ và $a^2-b\geq a^2-a=(a-1)^2+a-1>(a-1)^2$ nên a^2-b không thể là số chính phương, mâu thuẫn. Do đó, ta phải có $a=1$. Mà a,b,c là các số nguyên dương và a là số lớn nhất trong ba số này nên $a=b=c=1$. Thử lại, ta thấy với $a=b=c=1$ thì cả ba phương trình đều có nghiệm nguyên dương $x=1$. Vậy, có duy nhất một bộ số (a,b,c) thỏa mãn yêu cầu là $(1,1,1)$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC với $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD,BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC.

1. Chứng minh $\frac{AI}{AK}=\frac{HI}{HK}$.
2. Chứng minh đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK.
3. Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng EF. Chứng minh đường thẳng DP song song với đường thẳng AI.

Lời giải



1. Do AD, BE, CF là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$, dẫn đến tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$, từ đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g-g). Lại có I, K tương ứng là trung điểm của EF và BC nên $\Delta AEI \backsim \Delta ABK(c-g-c)$. Từ đó $\frac{AI}{AK} = \frac{EI}{BK} = \frac{EF}{BC}$.

Ta cũng có $\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$ nên $\Delta HEF \backsim \Delta HCB$ (g-g). Mà I, K tương ứng là trung điểm EF và BC nên $\Delta HFI \backsim \Delta HBK$ (c-g-c). Từ đó $\frac{HI}{HK} = \frac{FI}{BK} = \frac{EF}{BC}$

Như vậy, ta có $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$.

2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AD và EF. Do $KE = KF = KB = KC$ nên $KI \perp EF$. Mà $\widehat{NDK} = 90°$ nên tứ giác $DNIK$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ANI} = \widehat{DKI}$. Lại có $\Delta HFI \backsim \Delta HBK$ nên $\widehat{HIN} = \widehat{HKD}$. Từ đó $\widehat{ANI} - \widehat{HIN} = \widehat{DKI} - \widehat{HKD}$, hay $\widehat{HKI} = \widehat{NHI}$. Do đó AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK.

3. Gọi Q là điểm đối xứng với điểm A qua điểm I. Do I là trung điểm AQ và EF nên tứ giác $AEQF$ là hình bình hành. Suy ra $QE // AF$ và $QF // AE$, từ đó $QE \perp HF$ và $QF \perp HE$, hay ta có Q là trực tâm của tam giác HEF.

Ta có $\Delta HEF \backsim \Delta HCB(g-g)$, mà Q, A lần lượt là trực tâm của hai tam giác nên ta suy ra $\Delta HEP \backsim \Delta HCD(g-g)$ và $\Delta HEQ \backsim \Delta HCA(g-g)$. Từ đó $\frac{HP}{HQ} = \frac{HD}{HA}$, dẫn đến $DP // AI$.

Câu V. (1,0 điểm)

Trên bảng có hai số tự nhiên m và n. An và Bình chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn chọn một trong hai số trên bảng để xóa và viết lên bảng một số mới là hiệu không âm của số vừa xóa với một ước số tự nhiên bất kỳ của số vừa xóa. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người cơn lại là người thắng cuộc. Biết rằng An là người thực hiện lượt chơi đầu tiên:

1. Với $m=2022$ và $n=2023$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.
2. Với $m=2022$ và $n=1981$, hãy chi ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Lời giải

Ở cả hai ý, An sẽ đều chọn số 2022 để xóa đi và viết lên bảng số $2022-1=2021$ ở lượt đầu tiên của mình. Khi đó, sau lượt chơi đầu tiên của An, trên bảng còn lại hai số lẻ. Lúc này, đến lượt của Bình thì dù Bình chơi thế nào đi chăng nữa, sau lượt của Bình, trên bảng luôn xuất hiện một số chẵn và một số lẻ (Bình chắc chắn sẽ không thực hiện cách chơi để số chẵn trở về bằng 0, vì lúc đó An sẽ có thể đưa hai số trên bảng trở về bằng 0, Bình sẽ không thể thực hiện lượt chơi tiếp theo và thua cuộc). Lúc bấy giờ, An có thể chọn số chẵn xóa đi và viết lên bảng hiệu của số đó với 1. Trên bảng lại xuất hiện hai số lẻ và đến lượt của Bình.

An cứ tiếp tục thực hiện chiến thuật như vậy. Rõ ràng An luôn có thể thực hiện lượt chơi. Vì trò chơi phải kết thúc nên đến một lúc nào đó, Bình không thể thực hiện lượt chơi, Bình thua cuộc.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 12/6/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8$.

2. Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2-c^2=c, c^2-b^2=b$ và $b^2-a^2=a$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1$

Lời giải

1. Điều kiện xác định $x\ge\frac{7}{2}$.

Sử dụng nhân liên hợp, ta có phương trình ban đầu tương đương với

$$\frac{x-3-2x+7}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}=2x-8$$

Chuyển vế, rút nhân tử chung ta được $(x-4)\left(2+\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}\right)=0.$

Ta có $\sqrt{x-3}\ge 0,\sqrt{2x-7}\ge 0$ nên $2+\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}>0$ với mọi $x\ge\frac{7}{2}$, kéo theo $x=4$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

2. Theo đề bài ta có $a^2-c^2+c^2-b^2=c+b$ và $a,b,c\ne 0$ nên $a^2-b^2=c+b$. Nếu $a+b=0$ thì $a=-b$. Tuy nhiên khi đó $a=b^2-a^2=0$ là trái giả thiết. Do đó, ta phải có $a+b\ne 0$ dẫn tới $a-b=\frac{c+b}{a+b}$.

Hoàn toàn tương tự ta có $b-c=\frac{c+a}{b+c}$ và $c-a=\frac{a+b}{c+a}$.

Từ đây ta suy ra $(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{c+b}{a+b}\cdot\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}=1.$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Lời giải

1. Nếu cả ba số a,b,c đều lẻ thì $a^2+b^2+c^2-2abc$ sẽ lẻ và do đó $a^2+b^2+c^2-2abc$ không chia hết cho 6, trái giả thiết.

Do đó, trong ba số a,b,c phải có ít nhất một số chẵn, nghĩa là abc chia hết cho 2.

Nếu abc không chia hết cho 3 tức là trong 3 số a,b,c không có số nào chia hết cho 3, dẫn tới $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Vì $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 3 nên $-2abc$ cũng chia hết cho 3, vô lí vì a,b,c đều không chia hết cho 3. Do đó, ta phải có abc chia hết cho 3. Từ đây ta có ngay $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 3. Vì số chính phương khi chia 3 thì dư chỉ có thể là 0,1 cả 3 số a^2,b^2,c^2 phải chia hết cho 3 kéo theo a,b,c đều chia hết cho 3. Khi đó abc chia hết cho 27.

Vì $(27,2)=1$ nên abc chia hết cho $27\cdot 2=54$. Phép chứng minh hoàn tất.

2. Phương trình đã cho được viết lại thành $y^2-(x^3-x^2+5x)y+4x^2=0$.

Coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y, tính biệt thức

$$\Delta=(x^3-x^2+5x)^2-16x^2=x^2(x^2-x+1)(x^2-x+9).$$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm y nguyên là Δ là số chính phương.

Suy ra $(x^2-x+ 1)\ (x^2-x+9)$ là số chính phương (do x nguyên dương nên $x^2>0$).

Vì $x^2-x+1=x(x-1)+1$ là số lẻ và nếu gọi $d=\gcd(x^2-x+1,x^2-x+9)$ thì d lẻ và $d \mid (x^2-x+9)-(x^2-x+1)=8$ nên ta phải có $d=1$.

Suy ra x^2-x+1, x^2-x+9 đều là các số chính phương.

Mà $(x-1)^2<x^2-x+1<(x+1)^2$ nên $x^2-x+1=x^2$ và tìm được $x=1$.

Thay $x=1$ tìm được $y=1, y=4$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương (x,y) là $(1,1)$ và $(1,4)$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) sao cho xy là số chính phương và x^2+xy+y^2 là số nguyên tố.
2. Với các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tim giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+6b+6c)(a+b+c)$.

1. Cho đa thức $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2022x+2023$. Chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.
2. Với các số thực a,b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Lời giải

1. Đặt $xy=z^2$ với $z\in\mathbb{N}$ thì $x^2+xy+y^2=x^2+y^2+z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$. Chú ý là $xy=z^2\ge 0$ nên x,y ở cùng phía với 0. Và nếu cặp (x,y) thoả mãn thì cặp $(-x,-y)$ cũng thoả mãn, do đó ta chỉ cần xét $x,y\ge 0$. Khi đó $x+y+z\ge x+y-z$ và do $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên ta phải có $x+y-z=1, x^2+y^2+z^2=x+y+z$. Do $x,y,z\in\mathbb{N}$ nên $x^2\ge x, y^2\ge y, z^2\ge z$ nên để có đẳng thức $x^2+y^2+z^2=x+y+z$ thì $x^2=x, y^2=y, z^2=z$. Suy ra $x,y\in\{0,1\}$. Thử trực tiếp thì chỉ có $x=y=1$ là thoả mãn bài toán.

Vậy, có hai cặp (x,y) là $(1,1),(-1,-1)$.

2. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{3}{2}P \ge \left(\frac{1}{2}a+3b+3c\right)(3a+3b+3c) \ge \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a+3b+3c\right)^2 \ge (a+2b+3c)^2 = 1.$$

Suy ra $P \ge \frac{2}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0, c=\frac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Lại có, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$4P = (a+6b+6c)(4a+4b+4c) \le \frac{(a+6b+6c+4a+4b+4c)^2}{4} \le \frac{25(a+2b+3c)^2}{4} = \frac{25}{4},$$

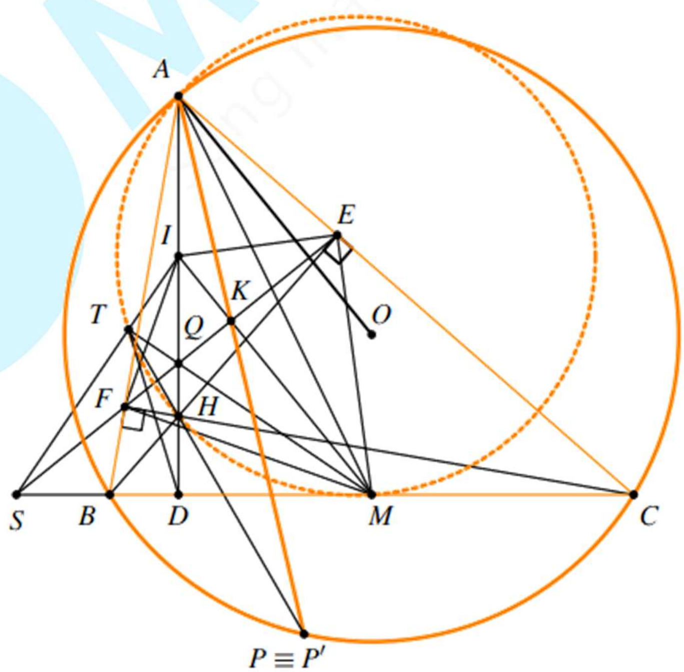
kéo theo $P \le \frac{25}{16}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a+6b+6c = 4(a+b+c), c=0, a+2b+3c=1$. Giải ta tìm được $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{8}, c=0$. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{25}{16}$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH. Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K.

1. Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM.
2. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.
3. Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh ba điểm A, K và P là ba điểm thẳng hàng.

Lời giải



1. Xét các tam giác BFC và BEC lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FM và EM, khi đó ta được $FM = EM = \frac{1}{2}BC$. Tương tự, xét các tam giác AFH và AEH lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FI và EI, khi đó ta cũng được $FI = EI = \frac{1}{2}AH$. Như vậy, MI là đường trung trực của EF, vì thế K là trung điểm của EF.

Mặt khác, lại chú ý rằng $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g) nên ta được $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, kéo theo $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

Từ đó ta thu được $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EK}{2BM} = \frac{EK}{BM}$. Do đó, $\Delta AEK \backsim \Delta ABM$ (c.g.c).

2. Xét $\triangle ISM$ với $ID \perp SM$ và $SK \perp IM$ (vì MI là trung trực của EF), vì thế Q là trực tâm của $\triangle ISM$. Như vậy, $MQ \equiv MT \perp SI$ và từ đó ta được $\widehat{ITM} = 90° = \widehat{IEM} = \widehat{IFM}$.

Do đó, năm điểm I, T, E, F, M cùng thuộc một đường tròn và dẫn đến $QT \cdot QM = QE \cdot QF$. Mặt khác, lại chú ý rằng tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp, ta cũng có $QE \cdot QF = QA \cdot QH$. Như vậy, $QT \cdot QM = QA \cdot QH$, vì vậy bốn điểm A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn.

3. Trên tia TH lấy một điểm P' sao cho $HT \cdot HP' = HA \cdot HD$. Khi đó, ta cũng được $HT \cdot HP' = HB \cdot HE = HC \cdot HF$ và do đó các tứ giác $TBP'E$ và $TCP'F$ là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có $\widehat{BP'T} = \widehat{BET} = \widehat{HET}$ và $\widehat{CP'T} = \widehat{CFT} = \widehat{HFT}$. Từ đó, chú ý rằng tứ giác $TIEF$ nội tiếp nên $\widehat{ETF} = \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$, ta thu được

$$\widehat{BP'C} = \widehat{BP'T} + \widehat{CP'T} = \widehat{HET} + \widehat{HFT} = 360° - \widehat{EHF} - \widehat{ETF}$$
$$= 360° - \left(180° - \widehat{BAC}\right) - 2\widehat{BAC} = 180° - \widehat{BAC}$$

Do đó $P' \in (O)$ và kéo theo $P' \equiv P$. Như vậy, $HA \cdot HD = HT \cdot HP$ nên tứ giác $ATDP$ nội tiếp và $\widehat{DAP} = \widehat{DTH}$. Mặt khác, ta có các kết quả quen thuộc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$ và $AO \perp EF$, kết hợp với $\Delta AEK \backsim \Delta ABM$, ta thu được $\widehat{OAM} = \widehat{BAO} - \widehat{BAM} = \widehat{CAH} - \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$ và $IM // AO(\perp EF)$. Lại chú ý rằng các tứ giác $ATHM$ và $ITDM$ là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\widehat{DTH} = \widehat{AHT} - \widehat{IDT} = \widehat{AMT} - \widehat{IMT} = \widehat{AMI} = \widehat{OAM} = \widehat{DAK}$$

Do đó, $\widehat{DAP} = \widehat{DAK}$, từ đó suy ra A, P, K thẳng hàng.

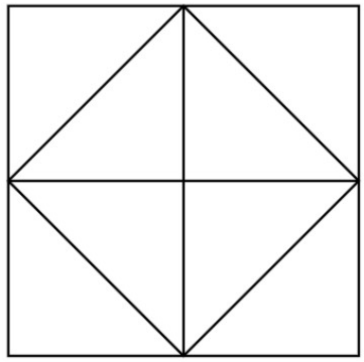
Câu V. (1,0 điểm) Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

1. Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.

2. Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

Lời giải

1) Chia hình vuông thành 8 phần như sau

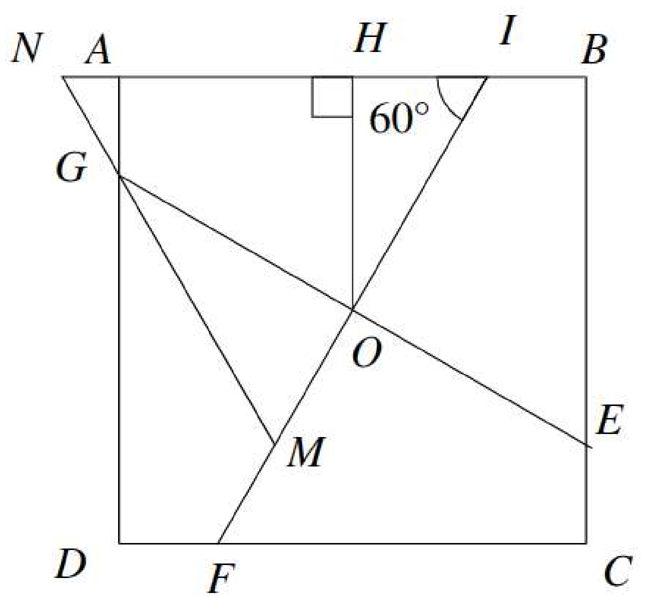


Mỗi một phần đều là tam giác vuông cân với độ dài cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$.

Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 8 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần có chứa ít nhất $\frac{2023}{8}+1=253$ điểm

Nói cách khác, tồn tại một tam giác vuông cân có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ chứa ít nhất 253 điểm. Mà tam giác vuông cân có cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$ thì sẽ chứa trong một tam giác đều có cạnh bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có điều phải chứng minh.

2. Gọi hình vuông được cho là $ABCD$ với tâm O. Ta sử dụng hai đường vuông góc IF, EG đi qua O và tạo với các cạnh một góc 60° để chia hình vuông thành 4 tứ giác $AIOG, BIOE, CEOF$, $DFOG$ như hình vẽ.



Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 4 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần phủ ít nhất $\frac{2023}{4}+1=506$ điểm

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ giác $AIOG$ phủ ít nhất 506 điểm. Ta dựng tam giác đều IMN sao cho $A \in IN, O \in IM$ và $G \in MN$ như hình vẽ. Kẻ $OH \perp AB$. Ta có $OI = \dfrac{OH}{\sin 60^\circ} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tương tự $OG = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ta lại có $OM = \dfrac{OG}{\tan 60^\circ} = \dfrac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $IM = OI + OM = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3} < \dfrac{11}{12}$

Như vậy tam giác đều IMN có cạnh nhỏ hơn $\dfrac{11}{12}$, suy ra tồn tại tam giác đều phủ toàn bộ tam giác đều IMN. Tam giác đều ấy do đó phủ toàn bộ tứ giác $AIOG$, suy ra nó cũng phủ ít nhất 506 điểm được cho.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **TOÁN (Chuyên Tin)**
Ngày thi: 12/6/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$.

Lời giải

1. Điều kiện xác định $x\ge\frac{2}{3}$. Phương trình ban đầu tương đương với

$$3x-2-x+5-(5-x)\sqrt{3x-2}-1=0.$$

Đặt $\sqrt{3x-2}=a, 5-x=b$. Phương trình trở thành

$$a^2+b-ab-1=0\Leftrightarrow (a-1)(a+1-b)=0.$$

Từ đó ta có $a=1$ hoặc $a=b-1$.

- Với $a=1$ thì $x=1$.
- Với $a=b-1$ thì $\sqrt{3x-2}=4-x$.

Bình phương hai vế với điều kiện $x\le 4$ ta có

$$3x-2=x^2-8x+16\Leftrightarrow x^2-11x+18=0.$$

Giải phương trình trên ta được $x=2$ và $x=9$. Kết hợp điều kiện ta còn $x=2$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=2$.

2. Đặt $x+y=a, xy=b$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a+3b=9 \\ a^3-3ab=9 \end{cases}$

Từ phương trình $a+3b=9$ ta có $3b=9-a$, thay vào phương trình còn lại, ta được:

$$a^3-a(9-a)=9\Leftrightarrow (a+1)(a-3)(a+3)=0.$$

Giải phương trình trên ta có $a=3, a=-1$ và $a=-3$.

- Với $a=3$ thì $b=2$, ta có $x=1, y=2$ và $x=2, y=1$.
- Với $a=-1$ thì $b=\frac{10}{3}$, ta không có x,y thỏa mãn.
- Với $a=-3$ thì $b=4$, ta không có x,y thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;2),(2;1)$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Lời giải

1. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3 .

Do đó $p^2+2=2k+1, k\in\mathbb{N}$, kéo theo $2^{p^2+2}=2.4^k\equiv 2\equiv 8\left(\bmod 3\right)$. Suy ra $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 3 .

Do p không chia hết cho 3 nên $p^2+2\equiv 1+2\equiv 0\left(\bmod 3\right)$. Đặt $p^2+2=3h$ với $h\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó, ta có

$$A=2^{p^2+2}-8=2^{3h}-8=8^h-8\equiv 1-1=0\left(\bmod 7\right).$$

Từ đây ta suy ra A chia hết cho 3 và 7 mà $\left(3,7\right)=1$ nên A chia hết cho $3\cdot 7=21$.

Phép chứng minh hoàn tất.

2. Đặt $d=x-y$ thì $x=y+d$. Chú ý là vế phải lớn hơn 0 nên $x>y$ kéo theo d là số nguyên dương.

Thay vào phương trình, ta được $(y+d)^3-y^3=2d^2+17$

Khai triển và chuyển vế thì $\left(3y^2+3dy+d^2-2d\right)d=17$

Từ phương trình trên suy ra $d\mid 17$ vì d nguyên dương suy ra $d\in\left\{1,17\right\}$.

- Nếu $d=1$ thì $y\left(y+1\right)=6$ và tìm được $y=2, x=3$ và $y=-3, x=-2$.
- Nếu $d=17$ thì $3y^2+51y=-254$ không có nghiệm nguyên do vế trái chia hết cho 3 , trong khi đó vế phải thì không.

Vậy, có duy nhất một cặp $\left(x,y\right)$ thoả mãn là $\left(3,2\right),\left(-2,-3\right)$.

Nhận xét. Thực tế thì có thể chuyển $2(x-y)^2$ rồi rút thừa số chung $x-y$.

Câu III. (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $f\left(x\right)=x^4+2x^3+3x^2+2022x+2023$. Chứng minh đa thức $f\left(x\right)$ không có nghiệm hữu tỉ.

2. Với các số thực a,b và c thỏa mãn $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left|a\right|+\left|b\right|+\left|c\right|$.

Lời giải

1. Giả sử $f\left(x\right)$ có nghiệm α hữu tỷ. Viết $\alpha=\dfrac{p}{q}$ với $p,q\in\mathbb{Z}, q>0$ và $\left(p,q\right)=1$.

Khi đó, ta có $f\left(\alpha\right)=0 \Leftrightarrow \alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2+2022\alpha+2023=0$

$$\Leftrightarrow p^4+2p^3q+3p^2q^2+2022pq^3+2023q^4=0.$$

Từ đây do $q\mid 0$ ta được $q\mid p^4$ vì $\left(p^4,q\right)=\left(p,q\right)=1$ nên $q=1$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}0&=p^4+2p^3+3p^2+2022p+2023\\&=p^2\left(p^2+1\right)+2p^3+2p^2+2022p+2023.\end{aligned}$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế trái là số lẻ trong khi vế phải là số chẵn. Do đó đa thức $f\left(x\right)$ không có nghiệm hữu tỉ. Phép chứng minh hoàn tất.

2. Từ giả thiết ta suy ra $ab+bc+ac=-1$, có $A=\left|a\right|+\left|b\right|+\left|c\right|\geq 0$, xét

$$A^2=a^2+b^2+c^2+2\left|ab\right|+2\left|bc\right|+2\left|ac\right|.$$

Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, ta có

$$A^2=(a+b+c)^2+2(|ab|+|bc|+|ac|)+2\geq 0+2|ab+bc+ac|+2=4.$$

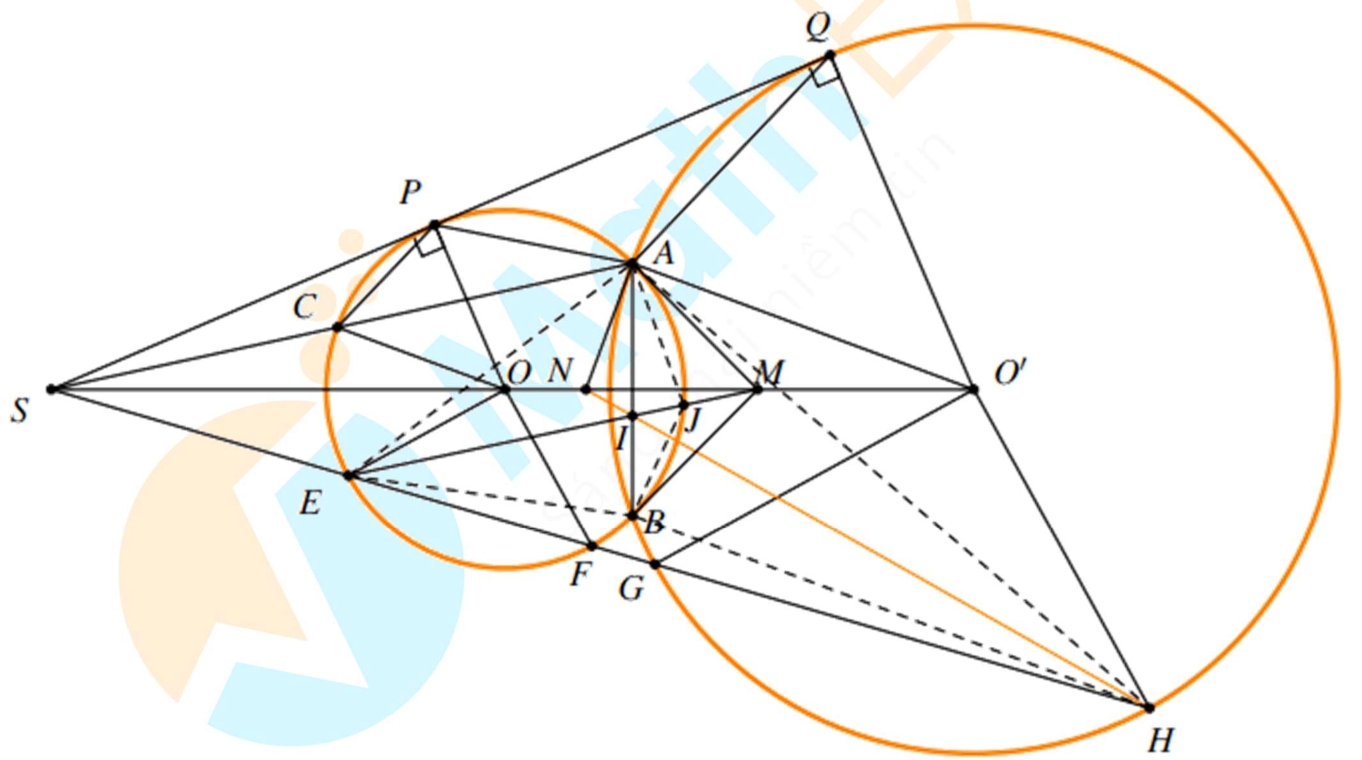
Từ đây kết hợp $A\geq 0$ suy ra $A\geq 2$, dấu bằng xảy ra chẳng hạn $a=0,b=-1,c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A=2$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B $(R<R'<OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P\in(O)$ và $Q\in(O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S. Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E,F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G,H sao cho $SE<SF<SG<SH$.

1. Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.
2. Chứng minh $SA^2=SP.SQ$.
3. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N. Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I. Chứng minh $\dfrac{EA^2}{EB^2}=\dfrac{IA}{IB}$ và ba điểm N,I,H là ba điểm thẳng hàng.

Lời giải



1. Trên đường thẳng $\overline{S,E,F}$ lấy các điểm G',H' sao cho $O'G'//OE$ và $O'H'//OF$.

Theo định lý Thales, ta được $\dfrac{SE}{SG'}=\dfrac{OE}{O'G'}=\dfrac{SO}{SO'}=\dfrac{SF}{SH'}=\dfrac{OF}{O'H'}$. Mặt khác, ta cũng có $\dfrac{SO}{SO'}=\dfrac{OP}{O'Q}=\dfrac{R}{R'}$.

Như vậy $\dfrac{OE}{O'G'}=\dfrac{OF}{O'H'}=\dfrac{R}{R'}$

Kết hợp với $OE = OF = R$ (vì $E,F \in (O)$), ta thu được $O'G' = O'H' = R'$ và vì thế $G',H' \in (O')$ hay $\overline{S,E,F} \cap (O') = \{G',H'\}$. Mặt khác, từ $\frac{SE}{SG'} = \frac{SF}{SH'}$ và $SE < SF$ ta suy ra $SG' < SH'$. Do đó, ta được $G' \equiv G, H' \equiv H$ và vì thế $OEO'G, OFO'H$.

2. Trên đường thẳng SA lấy điểm C sao cho $OC // O'A$. Khi đó, ta có $\frac{OC}{O'A} = \frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'}$. Kết hợp với $O'A = R'$ (vì $A \in (O')$) nên $OC = R$ và vì thế $C \in (O)$. Hơn nữa, ta cũng có $\frac{SC}{SA} = \frac{SO}{SO'} = \frac{SP}{SQ}$, vì thế $CP // AQ$. Do đó, $\widehat{SQA} = \widehat{SPC} = \widehat{SAP}$. Từ đó $\Delta SAP \backsim \Delta SQA$ (g.g). Do đó, $\frac{SP}{SA} = \frac{SA}{SQ}$. và $SA^2 = SP \cdot SQ$

3. Gọi $ME \cap (O) = \{J,E\}$. Từ tính đối xứng nên ta cũng có MB là một tiếp tuyến của (O). Khi đó, ta có $\Delta MJA \backsim \Delta MAE$ (g.g) và $\Delta MJB \backsim \Delta MBE$ (g.g) nên ta được $\frac{JA}{EA} = \frac{MJ}{MA} = \frac{MJ}{MB} = \frac{JB}{EB}$

Từ đó ta thu được $\frac{EB}{EA} = \frac{JB}{JA}$. Từ đó để ý rằng $\Delta IAE \backsim \Delta IJB$ và $\Delta IBE \backsim \Delta IJA$ nên ta được

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IA}{IE} \cdot \frac{IE}{IB} = \frac{JA}{EB} \cdot \frac{EA}{JB} = \frac{EA}{EB} \cdot \frac{JA}{JB} = \frac{EA^2}{EB^2}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Thật vậy, ta có $SP^2 = SE \cdot SF$ và $SQ^2 = SG \cdot SH$.

Do đó, $SB^4 = SA^4 = SP^2 \cdot SQ^2 = SE \cdot SF \cdot SG \cdot SH$. Mặt khác, từ câu a ta có $\frac{SE}{SF} = \frac{SG}{SH}$ hay $SE \cdot SH = SG \cdot SF$

Như vậy, ta được $SA^4 = SB^4 = (SE \cdot SH)^2$ hay $SA^2 = SB^2 = SE \cdot SH$. Từ đó ta thu được $\Delta SEA \backsim \Delta SAH$ (c.g.c) và ΔSEB và ΔSBH (c.g.c).

Do vậy, $\frac{EA}{HA} = \frac{SE}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{EB}{HB}$

Nói cách khác, ta thu được $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Đến đây, đặt $HN \cap AB = I'$. Chứng minh tương tự như ý trên ta cũng thu được $\frac{I'A}{I'B} = \frac{HA^2}{HB^2}$. Từ đó suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{I'A}{I'B}$ và dẫn đến $I \equiv I'$. Như vậy, N,I,H thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Lời giải

Đầu tiên An sẽ bốc 1 viên từ túi thứ hai, hai túi lúc này lần lượt có 18 và 20 viên kẹo. Tại lượt tiếp theo, chiến thuật của An sẽ là nếu Bình bốc như thế nào thì An sẽ bốc y hệt như vậy. Khi đó ta thấy Bình sẽ phải bắt đầu bốc với hai túi đều có số chẵn viên kẹo, mà Bình thì dù bốc thế nào cũng sẽ khiến cho túi mà Bình bốc còn lại một số lẻ các viên kẹo, hay nói riêng, là còn kẹo. Như vậy khi đến lượt An thì An hoàn toàn có thể sao chép cách bốc của Bình, do cứ túi nào mà Bình bốc thì phải còn kẹo. Hơn nữa sau khi An bốc thì bất cứ túi nào có số lẻ viên kẹo sẽ quay về còn lại số chẵn viên kẹo. Khi đó đến lượt Bình thì Bình lại phải bốc với hai túi còn số chẵn viên kẹo, và An vẫn có thể lặp lại chiến thuật như trên. Trong quá trình bốc này, ta thấy An luôn có thể bốc kẹo, cho nên An không thể là người thua cuộc, nói cách khác, An sẽ là người thắng cuộc với chiến thuật này.

-------------------------------- HẾT --------------------------------