

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh An Giang năm học 2023 - 2024)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-1} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 9$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x > y > 0$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Gia Lai năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0$, $x \neq 4$. Tìm x để $P = \frac{1}{3}$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$?

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cần Thơ năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $Q = \left(\frac{10-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} + \frac{6}{x-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Đặt $P = Q \cdot (x - \sqrt{x} + 1)$. Chứng minh rằng $P > 1$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức $(x^3 + 4x^2 - 23x + 1)^{2024}$ với $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 - 2024)

Cho $P = \frac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0$, $a \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm học 2023 - 2024)

- 1) Cho hai số a, b thỏa mãn các điều kiện $ab = 1, a + b \neq 0$.

Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a^2+b^2+2)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^4}$.

- 2) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = \sqrt{15}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{y^2+1} - y)$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2023 - 2024)

- 1) Rút gọn biểu thức sau: $P = \left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16} - 1 \right) : \left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4} \right)$ với $x > 0, x \neq 9, x \neq 16$.

- 2) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 2023$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{2023a}{ab+2023a+2023} + \frac{b}{bc+b+2023} + \frac{c}{ca+c+1}.$$

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đà Nẵng năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x} \right)$ và biểu thức $Q = \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

với $x > 0, y > 0$ và $x \neq y$. Rút gọn các biểu thức P, Q và chứng minh rằng với các số x, y dương phân biệt tùy ý thì $4Q+1 > 2P$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 - 2024)

Cho a, b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c, c^2 - b^2 = b$ và $b^2 - a^2 = a$.

Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 - 2024)

Cho số thực x thỏa mãn $3 < x < 4$. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Tháp năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \geq 1$.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Giang năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức B .
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam (đề chung) năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam (đề chuyên) năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các số nguyên của x để $|2A-1|+1=2A$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hải Phòng năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A \leq 2$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hoà Bình năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $A = (\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hưng Yên năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $|P|-P=0$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $M = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}-1} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$ với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2023 - 2024)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

Tìm các giá trị x để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện $abc \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$.

Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2$ thì $\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Long An năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{a}} \right)^2$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức T .

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $T = -\sqrt{a} - 1$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (đề chung) năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}}$.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (đề chuyên Toán) năm học 2023 - 2024)

Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn: $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (khối xã hội) năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = 5$.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 - 2024)

Cho a, b là hai số thực nguyên dương phân biệt thỏa mãn $(1 - a)(1 - b) + 2\sqrt{ab} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ năm học 2023 - 2024)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x + y}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{5 + 4\sqrt{x}}{2x + 5\sqrt{x} - 12} - \frac{2}{2\sqrt{x} - 3} + \frac{3}{\sqrt{x} + 4} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{5 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \right)$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 - 2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c$.

Chứng minh $a = b = c$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Sơn La năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $Q = \frac{x\sqrt{y} + \sqrt{x} - y\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}$ với $x \geq 0; y \geq 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $x = 2024 + 2\sqrt{2023}; y = 2024 - 2\sqrt{2023}$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tây Ninh năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 - 2024)

a) Cho các số thực x, y khác 0, thỏa mãn: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$ và $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 10$.

Chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

b) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 8$;

$a + b + c = 26$; $abc = 144$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{bc} - \sqrt{a} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ca} - \sqrt{b} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ab} - \sqrt{c} + 9}$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hoá năm học 2023 - 2024)

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - 3xy = 10$ và $y^2 + xy = 6$. Tính $A = x + 3y$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz(x + y + z) = 1$.

Chứng minh $\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = (x + y)(y + z)(z + x)$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2023 - 2024)

a) Chứng minh giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1}\right) : \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}$ không phụ thuộc vào giá trị của a , với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2$ là một số chính phương.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024}$ tại $x = \sqrt{\frac{2}{x - \sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm học 2023 - 2024)

Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tuyên Quang năm học 2023 - 2024)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a - 3\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} - 2}$ với $a > 4$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 - 2024)

a) Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

b) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

Bài 41. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 1) năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2}$ với $x > 0$.

Bài 42. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 2) năm học 2023 - 2024)

a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh An Giang năm học 2023 - 2024)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14} \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{14}}{3-2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{7} - 6\sqrt{2} - 2\sqrt{14} + 8}{3-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{9-6\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3(3-2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}} = 3. \end{aligned}$$

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-1} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 9$.

Lời giải

Với $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2x}{x-1} \right] : \frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-2x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{-1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot [-(\sqrt{x}-1)] = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \sqrt{x}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 9$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2. \end{aligned}$$

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x > y > 0$.

Lời giải

Với $x > y > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2} - x+y} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\
 &= \left[\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{\sqrt{(x+y)(x-y)} - \sqrt{(x-y)^2}} \right] \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\
 &= \sqrt{x-y} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\
 &= \sqrt{x-y} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{y} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\
 &= \frac{x^2+y^2}{y}.
 \end{aligned}$$

Vậy $Q = \frac{x^2+y^2}{y}$ với $x > y > 0$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Gia Lai năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$. Tìm x để $P = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x\sqrt{x}}{x-4} = \frac{2(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-2)^2}{x-4} : \frac{x\sqrt{x}}{x-4} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}+4-x+4\sqrt{x}-4}{x-4} \cdot \frac{x-4}{x\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}} = \frac{6-\sqrt{x}}{x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Để } P = \frac{1}{3} \text{ thì } \frac{6-\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x+3\sqrt{x}-18=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=-6 \end{cases} \Rightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy với $x=9$ thì $P = \frac{1}{3}$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$?

Lời giải

a) Với $x > 0; x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

b) Với $x > 0; x \neq 1$, ta có: $A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \Leftrightarrow \sqrt{2023x} + \sqrt{2023} \geq \sqrt{x} + \sqrt{2023x} \text{ (do } \sqrt{x} > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2023} \Leftrightarrow x \leq 2023.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được $1 < x \leq 2023$.

Vậy số số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(2023-2):1+1 = 2022$ (số).

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cần Thơ năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $Q = \left(\frac{10-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} + \frac{6}{x-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Đặt $P = Q \cdot (x - \sqrt{x} + 1)$. Chứng minh rằng $P > 1$.

Lời giải

a) Với $x > 0; x \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{10-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} + \frac{6}{x-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} \\
 &= \left[\frac{10-2\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-1)} + \frac{6}{x-1} \right] : \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{10 - 2\sqrt{x} + 6(\sqrt{x} - 1)}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} \\
 &= \frac{4(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Vậy $Q = \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

b) Với $x > 0; x \neq 1$, ta có $P = Q \cdot (x - \sqrt{x} + 1) = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.

$$\text{Xét } P - 1 = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}.$$

Vì $x > 0; x \neq 1$ nên $\begin{cases} (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow P - 1 > 0 \Leftrightarrow P > 1$ (điều phải chứng minh).

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức $(x^3 + 4x^2 - 23x + 1)^{2024}$ với $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Lời giải

Ta có: $x = 3\sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow x + 2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 27 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 23$.

Khi đó: $(x^3 + 4x^2 - 23x + 1)^{2024} = [x(x^2 + 4x) - 23x + 1]^{2024} = (23x - 23x + 1)^{2024} = 1$.

Vậy giá trị của biểu thức bằng 1 khi $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 - 2024)

Cho $P = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $a \geq 0, a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}} \\
 &= \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{a - 1}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{a - 4}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} \\
 &= \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}.
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

b) Ta có: $P = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$. Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{2}{\sqrt{a}-1} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \sqrt{a}-1 \in \{-2; -1; 1; 2\} \Rightarrow a \in \{0; 4; 9\}.$$

Vậy với $a \in \{0; 4; 9\}$ thì $P \in \mathbb{Z}$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm học 2023 - 2024)

1) Cho hai số a, b thỏa mãn các điều kiện $ab = 1, a + b \neq 0$.

Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a^2+b^2+2)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^4}$.

2) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = \sqrt{15}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{y^2+1} - y)$.

Lời giải

1) Ta có: $a^2 + b^2 + 2 = (a+b)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^4} \\ &= \frac{a^3+b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4} = \frac{(a^3+b^3)(a+b) + 3(a^2+b^2) + 6}{(a+b)^4} \\ &= \frac{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+3(a^2+b^2)+6}{(a^2+b^2+2)^2} = \frac{a^4+b^4+4(a^2+b^2)+6}{(a^2+b^2+2)^2} \\ &= \frac{(a^4+b^4+2a^2b^2)+4(a^2+b^2)+4}{(a^2+b^2+2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a^2+b^2+2)^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a^2+b^2+2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $Q = 1$.

2) Ta có: $P = (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{y^2+1} - y) = \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} + xy - (x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1})$
 $= \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} + xy - \sqrt{15}.$

$$\text{Đặt } M = \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1} + xy$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M^2 &= (x^2 + 1)(y^2 + 1) + x^2y^2 + 2xy\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1} \\ &= 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1} \\ &= x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) + 2x\sqrt{y^2 + 1}y\sqrt{x^2 + 1} + 1 \\ &= (x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = 4.$$

$$\text{Vậy } P = 4 - \sqrt{15}.$$

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2023 - 2024)

1) Rút gọn biểu thức sau: $P = \left(\frac{x - 108 + 23\sqrt{x}}{x - 16} - 1 \right) : \left(\frac{75 - x}{x + \sqrt{x} - 12} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 4} \right)$ với $x > 0, x \neq 9, x \neq 16$.

2) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 2023$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{2023a}{ab + 2023a + 2023} + \frac{b}{bc + b + 2023} + \frac{c}{ca + c + 1}.$$

Lời giải

1) Với $x > 0, x \neq 9, x \neq 16$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x - 108 + 23\sqrt{x}}{x - 16} - 1 \right) : \left(\frac{75 - x}{x + \sqrt{x} - 12} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 4} \right) \\ &= \frac{x - 16 + 23\sqrt{x} - 92 - x + 16}{x - 16} : \left[\frac{75 - x + (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3)} \right] \\ &= \frac{23\sqrt{x} - 92}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)} : \frac{75 - x + x - 9}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{23(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3)}{66} = \frac{23}{66}(\sqrt{x} - 3). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{23}{66}(\sqrt{x} - 3) \text{ với } x > 0, x \neq 9, x \neq 16.$$

2) Từ giả thiết $abc = 2023$, ta có $M = \frac{2023a}{ab + 2023a + 2023} + \frac{b}{bc + b + 2023} + \frac{c}{ca + c + 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc} + \frac{b}{bc+b+abc} + \frac{c}{ac+c+1} \\
 &= \frac{a^2bc}{ab(ac+c+1)} + \frac{b}{b(ac+c+1)} + \frac{c}{ca+c+1} \\
 &= \frac{ac}{ac+c+1} + \frac{1}{ac+c+1} + \frac{c}{ac+c+1} \\
 &= \frac{ac+c+1}{ac+c+1} = 1.
 \end{aligned}$$

Vậy $M = 1$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đà Nẵng năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x} \right)$ và biểu thức $Q = \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

với $x > 0$, $y > 0$ và $x \neq y$. Rút gọn các biểu thức P , Q và chứng minh rằng với các số x , y dương phân biệt tùy ý thì $4Q + 1 > 2P$.

Lời giải

Rút gọn: $P = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$

Rút gọn: $Q = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 4Q + 1 = 2(x+y) + 1$

Nhân hai vế của biểu thức $4Q + 1 - 2P$ cho 2, ta được:

$$2(4Q + 1 - 2P) = 4x + 4y + 2 - 4\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = (2\sqrt{x} - 1)^2 + (2\sqrt{y} - 1)^2$$

Vì $x \neq y$ nên $2(4Q + 1 - 2P) > 0 \Rightarrow 4Q + 1 > 2P$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 - 2024)

Cho a , b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c$, $c^2 - b^2 = b$ và $b^2 - a^2 = a$.

Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} a^2 - c^2 = c \\ c^2 - b^2 = b \\ b^2 - a^2 = a \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0$$

Lại có: $a^2 - c^2 = c \Leftrightarrow (a-c)(a+c) = c \Rightarrow (a-c)(-b) = c \Leftrightarrow b(c-a) = c$

Tương tự, ta chứng minh được: $c^2 - b^2 = b \Rightarrow a(b-c) = b$; $b^2 - a^2 = a \Rightarrow c(a-b) = a$.

Do đó $b(c-a)a(b-c)c(a-b) = abc \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 1$ (do $abc \neq 0$).

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 - 2024)

Cho số thực x thỏa mãn $3 < x < 4$. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $A = \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}-1)^2} = |\sqrt{x-3}+1| + |\sqrt{x-3}-1|$.

Vì $3 < x < 4$ nên $0 < \sqrt{x-3} < 1$, suy ra $\begin{cases} \sqrt{x-3} + 1 > 0 \\ \sqrt{x-3} - 1 < 0 \end{cases}$.

Vậy $A = \sqrt{x-3} + 1 - \sqrt{x-3} + 1 = 2$.

Cách 2: Ta có: $A^2 = x - 2 + 2\sqrt{x-3} + x - 2 - 2\sqrt{x-3} + 2\sqrt{(x-2)^2 - 4(x-3)}$
 $= 2x - 4 + 2\sqrt{(x-4)^2} = 2x - 4 + 2|x-4|$.

Vì $3 < x < 4$ nên $A^2 = 2x - 4 - 2(x-4) = 4$.

Do $A > 0$ nên $A = 2$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Tháp năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \geq 1$.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{2} = \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2(x-4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$b) \text{ Để } P \geq 1 \text{ thì } \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \neq 0 \\ 2-\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 4.$$

Do $x > 0, x \neq 4$ nên $0 < x < 4$.

Vậy với $0 < x < 4$ thì $P \geq 1$.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Giang năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x} = \frac{2x}{x-1}.$$

$$b) \text{ Ta có: } B = \frac{2x}{x-1} = \frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}.$$

Để $B \in \mathbb{Z}$ thì $2:(x-1) \Leftrightarrow (x-1) \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{3; -1; 2; 0\}$.

Đối chiếu điều kiện suy ra $x \in \{3; 0; 2\}$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam (đề chung) năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có: $P = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Biểu thức P nhận giá trị nguyên khi $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là ước nguyên của 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=1 \\ \sqrt{x}+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=-2 \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ (tm)}$$

Vậy với $x=0$ thì biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam (đề chuyên) năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các số nguyên của x để $|2A-1|+1=2A$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x})^3-1}{1+\sqrt{x}+x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right] \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}+x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right] \\ &= (\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) = (\sqrt{x}-1) \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

b) Ta có: $|2A - 1| + 1 = 2A \Leftrightarrow |2A - 1| = 2A - 1 \Leftrightarrow 2A - 1 \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$; $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hải Phòng năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A \leq 2$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$.

Xét: $A - 2 = \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - 2 = \frac{-2(\sqrt{x}-1)^2}{x-\sqrt{x}+1} \leq 0$ với mọi $x > 0$.

Vậy $A \leq 2$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hoà Bình năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $A = (\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Lời giải

Ta có: $A = (\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = (\sqrt{5}-1)|\sqrt{5}+1| = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hưng Yên năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ với $x \neq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $|P| - P = 0$.

Lời giải

a) Với $x \neq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2} = \frac{x(\sqrt{x}-2) + 2(\sqrt{x}-1) + 2x-x\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ với $x \neq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$.

b) Ta có: $|P| - P = 0 \Leftrightarrow |P| = P \Leftrightarrow P \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được: $x > 1$; $x \neq 4$.

Vậy $x > 1$, $x \neq 4$ thì $|P| - P = 0$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $M = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$ với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Lời giải

Với $x > 1$, ta có:

$$M = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}} = (\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) + \frac{4x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = 2\sqrt{x-1} + 4x.$$

$$\text{Với } x > 1, \text{ ta có: } \begin{cases} 2\sqrt{x-1} > 0 \\ 4x > 4 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x-1} + 4x > 4.$$

Do đó với $x > 1$ thì M không có giá trị nhỏ nhất.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2023 - 2024)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} \right)$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$.

Tìm các giá trị x để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$.

Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2$ thì $\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} \right) \\ &= \left[\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)} \right] \\ &= \left[\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right] : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -2.$$

Lại có $\frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 1$.

Suy ra $-2 \leq 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 1$ hay $-2 \leq P < 1$.

Mà P nguyên nên $P \in \{-2; -1; 0\}$.

Trường hợp 1: $P = -2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $P = -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $P = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (Không thỏa mãn).

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

b) Từ $abc \neq 0 \Rightarrow a; b; c \neq 0$.

Ta có: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} + 1 + \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{c+a}{b} + 1 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} = 1$

$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ (do $a+b+c \neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-c(a+b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ c+ab+ac+bc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ (c+a)(c+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \neq 0 \\ c=-a \neq 0 \\ c=-b \neq 0 \end{cases}$

Trường hợp 1: $a = -b \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{-a^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} - a^{2023} + c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp $c = -a \neq 0$ và $c = -b \neq 0$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Long An năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{a}} \right)^2$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức T .

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $T = -\sqrt{a} - 1$.

Lời giải

a) Với $a > 0, a \neq 1$, ta có:

$$T = \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] \left(\frac{\sqrt{a}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{a}} \right)^2 = \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] \left(\frac{a-1}{4\sqrt{a}} \right)^2 = \frac{4\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{(4\sqrt{a})^2} = \frac{a-1}{4\sqrt{a}}.$$

b) Với $a > 0, a \neq 1$, ta có: $T = -\sqrt{a} - 1 \Rightarrow \frac{a-1}{4\sqrt{a}} = -\sqrt{a} - 1 \Leftrightarrow 5a + 4\sqrt{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = -1 \\ \sqrt{a} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{25}.$

Vậy với $a = \frac{1}{25}$ thì $T = -\sqrt{a} - 1$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (đề chung) năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2023} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2024} + 1)^2} \\ &= \sqrt{2023} + 1 - (\sqrt{2024} + 1) = \sqrt{2023} - \sqrt{2024}. \end{aligned}$$

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (đề chuyên Toán) năm học 2023 - 2024)

Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn: $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0 \Rightarrow yz + 2zx + 3xy = 0. \quad (1)$

Lại có: $\left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} + 2\left(\frac{xy}{2} + \frac{yz}{6} + \frac{zx}{3}\right) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} + \frac{3xy + yz + 2xz}{3} = 1. \quad (2)$

Kết hợp (1) và (2), ta được: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (khối xã hội) năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = 5$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$; $x \neq 9$, ta có: $P = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}+2} + \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+2 + \sqrt{x}+3 = 2\sqrt{x}+5.$

b) $P = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 0$ thì $P = 5.$

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 - 2024)

Cho a, b là hai số thực nguyên dương phân biệt thỏa mãn $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1.$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$

Lời giải

Ta có: $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow 1-b-a+ab+2\sqrt{ab} = 1$

$$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b=ab \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{ab} & (\text{khi } a > b) \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} = -\sqrt{ab} & (\text{khi } a < b) \end{cases}$$

Lại có: $P = \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

$$= \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a-b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Do đó: $P = 1$ với $a > b$ và $P = -1$ với $a < b.$

Vậy $P = 1$ với $a > b$ và $P = -1$ với $a < b.$

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ năm học 2023 - 2024)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y}.$ Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}.$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $2x+y \neq 0.$

Từ $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y} \Rightarrow \frac{x-2y}{xy} = \frac{3}{2x+y} \Rightarrow (x-2y)(2x+y) = 3xy$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + xy - 4xy - 2y^2 = 3xy \Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) = 6xy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3xy.$$

Suy ra $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^4 + y^4}{x^2 y^2} = \frac{(x^2 - y^2)^2 + 2x^2 y^2}{x^2 y^2} = \frac{(3xy)^2 + 2x^2 y^2}{x^2 y^2} = \frac{11x^2 y^2}{x^2 y^2} = 11.$

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{5+4\sqrt{x}}{2x+5\sqrt{x}-12} - \frac{2}{2\sqrt{x}-3} + \frac{3}{\sqrt{x}+4} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} \right)$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}.$

a) Rút gọn biểu thức $P.$

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$, ta có

$$P = \left[\frac{5 + 4\sqrt{x} - 2(\sqrt{x} + 4) + 3(2\sqrt{x} - 3)}{(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4)} \right] : \left(\frac{x + 4\sqrt{x} + 5 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \right)$$

$$P = \frac{8\sqrt{x} - 12}{(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4)} : \frac{x - 2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 4}$$

$$P = \frac{4}{\sqrt{x} + 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{x - 2\sqrt{x} + 5} = \frac{4}{x - 2\sqrt{x} + 5}.$$

b) Ta có $x - 2\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 4 \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 5 \geq 4$ với $\forall x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

Khi đó $P \leq 1$ với $\forall x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 khi $x = 1$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 - 2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c$.

Chứng minh $a = b = c$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c \Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = abc(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow 2(ab)^2 + 2(bc)^2 + 2(ca)^2 = 2ab.bc + 2bc.ca + 2ca.ab$$

$$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Sơn La năm học 2023 - 2024)

Cho biểu thức $Q = \frac{x\sqrt{y} + \sqrt{x} - y\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}$ với $x \geq 0; y \geq 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $x = 2024 + 2\sqrt{2023}; y = 2024 - 2\sqrt{2023}$.

Lời giải

$$\text{a) Với } x \geq 0; y \geq 0, \text{ ta có: } Q = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{xy} + 1)}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

b) Ta có:
$$\begin{cases} x = 2024 + 2\sqrt{2023} = 2023 + 2\sqrt{2023} + 1 = (\sqrt{2023} + 1)^2 \\ y = 2024 - 2\sqrt{2023} = 2023 - 2\sqrt{2023} + 1 = (\sqrt{2023} - 1)^2 \end{cases}$$

Khi x, y nhận các giá trị trên, ta có:

$$Q = \sqrt{(\sqrt{2023} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2023} - 1)^2} = \sqrt{2023} + 1 - \sqrt{2023} + 1 = 2.$$

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tây Ninh năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có:
$$\begin{aligned} T &= \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{12 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} - \sqrt{12 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2} = |2\sqrt{3} + 1| - |2\sqrt{3} - 1| = 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} + 1 = 2. \end{aligned}$$

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 - 2024)

a) Cho các số thực x, y khác 0, thỏa mãn: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$ và $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 10$.

Chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

b) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 8$;

$a + b + c = 26$; $abc = 144$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{bc} - \sqrt{a} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ca} - \sqrt{b} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ab} - \sqrt{c} + 9}$.

Lời giải

a) Xét
$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2} + 2 + \frac{x^2}{y^2}\right) - 2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) = 10 \Rightarrow 10\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 10 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

b) Đặt $(\sqrt{a}; \sqrt{b}; \sqrt{c}) = (x; y; z)$ (điều kiện: $x, y, z \geq 0$)

$$\Rightarrow x + y + z = 8; x^2 + y^2 + z^2 = 26; x^2 y^2 z^2 = 144$$

$$\Rightarrow x + y + z = 8; xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = 19; xyz = 12 \text{ (do } x, y, z \geq 0).$$

$$\text{Ta có: } yz - x + 9 = yz - x + x + y + z + 1 = (z + 1)(y + 1)$$

$$\text{Tương tự: } xz - y + 9 = (x + 1)(z + 1); xy - z + 9 = (x + 1)(y + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \frac{1}{yz - x + 9} + \frac{1}{xz - y + 9} + \frac{1}{xy - z + 9} = \frac{x + 1 + y + 1 + z + 1}{(x + 1)(y + 1)(z + 1)} \\ &= \frac{x + y + z + 3}{xyz + x + y + z + xy + yz + xz + 1} = \frac{11}{12 + 19 + 8 + 1} = \frac{11}{40}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{11}{40}.$$

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hoá năm học 2023 - 2024)

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - 3xy = 10$ và $y^2 + xy = 6$. Tính $A = x + 3y$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz(x + y + z) = 1$.

$$\text{Chứng minh } \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (x^2 - 3xy) + 9(y^2 + xy) = 10 + 9 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6xy + 9y^2 = 64 \Leftrightarrow (x + 3y)^2 = 64 \Rightarrow x + 3y = 8 \text{ (do } x, y > 0).$$

$$\text{Vậy } A = 8.$$

$$\text{b) Ta có: } x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2 y^2 + 1}{y^2} = \frac{x^2 y^2 + xyz(x + y + z)}{y^2} = \frac{xy(xy + xz + yz + z^2)}{y^2} = \frac{x(x + z)(y + z)}{y}$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(x + z)(y + x)}{z}; \quad z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(y + z)(y + x)}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} &= \sqrt{\frac{x(x + z)(y + z)}{y} \cdot \frac{y(x + z)(y + x)}{z} \cdot \frac{z(y + z)(y + x)}{x}} \\ &= (x + y)(y + z)(z + x). \end{aligned}$$

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2023 - 2024)

a) Chứng minh giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}$ không phụ thuộc vào giá trị của a , với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2$ là một số chính phương.

Lời giải

a) Với $a > 0; a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{2 + \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \right] : \frac{\sqrt{a}}{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)^2} \right] \cdot \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)^2} \right] \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}} = 2.$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của a .

b) Ta có $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow ab = 2ac + 4bc \Leftrightarrow ab - 2ac - 4bc = 0$.

Khi đó $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2 = a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4(ab - 2ac - 4bc) = (a + 2b - 4c)^2$ là một số chính phương.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024}$ tại $x = \sqrt{\frac{2}{x - \sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x = \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} - (\sqrt{5} + 1) = \sqrt{3} - 1.$$

$$\text{Suy ra } (x + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 2.$$

$$\text{Do đó } P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024} = 2023^{2024}.$$

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm học 2023 - 2024)

Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải

Vì $b^2 = (a^2 + b^2) - a^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} - a)(\sqrt{a^2 + b^2} + a)$ nên từ giả thiết, ta có:

$$a^2 + b^2 = 4(\sqrt{a^2 + b^2} - a) + a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4\sqrt{a^2 + b^2} - a(\sqrt{a^2 + b^2} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} - 4)(\sqrt{a^2 + b^2} - a) = 0.$$

Vì $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{a^2} \geq a$ nên từ kết quả trên, ta suy ra $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$, tức $P = 16$.

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tuyên Quang năm học 2023 - 2024)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a > 4$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-7\sqrt{x}+6-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)(5\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\text{b) Ta có: } Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)+4}{\sqrt{a}-2} = \sqrt{a}-1 + \frac{4}{\sqrt{a}-2} = \left(\sqrt{a}-2 + \frac{4}{\sqrt{a}-2}\right) + 1.$$

Vì $a > 4$ nên $\sqrt{a}-2 > 0; \frac{4}{\sqrt{a}-2} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\sqrt{a}-2 + \frac{4}{\sqrt{a}-2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{a}-2) \cdot \frac{4}{\sqrt{a}-2}} = 4.$$

$$\text{Suy ra } Q = \left(\sqrt{a}-2 + \frac{4}{\sqrt{a}-2}\right) + 1 \geq 5.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a}-2 = \frac{4}{\sqrt{a}-2} \Rightarrow \sqrt{a}-2 = 2 \Leftrightarrow a = 16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 5 khi $a = 16$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 - 2024)

$$\text{a) Tính giá trị của biểu thức: } A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

$$\text{b) Cho biểu thức: } P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) \text{ với } x \geq 0; x \neq 1.$$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = 2\sqrt{5}$.

b) Với $x \geq 0$; $x \neq 1$, ta có:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right) = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} : \frac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

Bài 41. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 1) năm học 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16-4x}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$.

Lời giải

Với $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16-4x}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x^3}+8)}{x-2\sqrt{x}+4} + 2\sqrt{x} + 1 + 4(2-\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x} + 1 + 4(2-\sqrt{x}) = x+9 \end{aligned}$$

Vậy $A = x+9$ với $x > 0$.

Bài 42. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 2) năm học 2023 - 2024)

a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Lời giải

a) Bằng các phép biến đổi biểu thức kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c} &\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{a+b-c} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} = a+b+2\sqrt{c(a+b-c)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{c(a+b-c)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

Ta biến đổi tương đương đẳng thức này kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{a+b-c} \\ &\Leftrightarrow a+b+3\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) = a+b+3\left[\sqrt[3]{c^2(a+b-c)} + \sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right] \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) = \left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)} + \sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right). \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng với điều kiện (*) nên đẳng thức đầu đúng. Bài toán được chứng minh.

b) Đặt $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}} = m$ ($m \in \mathbb{Q}$).

Khi đó: $\sqrt{a} - m\sqrt{b} = m\sqrt{5} - \sqrt{3} \Rightarrow a + m^2b - 2m\sqrt{ab} = 5m^2 - 2m\sqrt{15} + 3$.

Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $m \in \mathbb{Q}$ nên $\sqrt{ab} - \sqrt{15} \in \mathbb{Q}$.

Đặt $\sqrt{ab} - \sqrt{15} = n \ (n \in \mathbb{Q})$

$$\Rightarrow ab = 15 + n^2 + 2n\sqrt{15} \Leftrightarrow 2n\sqrt{15} = ab - 15 - n^2.$$

Suy ra $2n\sqrt{15} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n = 0$.

Khi đó: $\sqrt{ab} = \sqrt{15} \Leftrightarrow ab = 15$. Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên ta có các trường hợp sau đây

- Trường hợp 1: $a = 1, b = 15 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{5} + \sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ là số vô tỉ nên không thoả mãn.
- Trường hợp 2: $a = 3, b = 5 \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ là số vô tỉ nên không thoả mãn.
- Trường hợp 3: $a = 5, b = 3 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = 1$ là số hữu tỉ nên thoả mãn.
- Trường hợp 4: $a = 15, b = 1 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{\sqrt{5} + 1} = \sqrt{3}$ là số vô tỉ nên không thoả mãn.

Vậy $(a; b) = (5; 3)$ là cặp số cần tìm.

