TUYỂN CHỌN MỘT SỐ CHỦ ĐỀ
TRỌNG TÂM ÔN VÀO 10 TOÁN

PHẦN A. MỘT SỐ CHỦ ĐỀ ÔN LUYỆN

CHỦ ĐỀ 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Điều kiện để căn thức có nghĩa

Biểu thức $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.

2. Các công thức biến đổi căn thức

Ta có các công thức biến đổi căn thức thường dùng sau đây:

- $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ với $A \geq 0, B \geq 0$;
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ với $A \geq 0, B > 0$;
- $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ với $B \geq 0$;
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$ với $AB \geq 0, B \neq 0$;
- $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} \text{ khi } A \geq 0, B \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} \text{ khi } A < 0, B \geq 0 \end{cases}$;
- $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ với $A \geq 0, A \neq B^2$.

3. Một số dạng toán thường gặp

Trong chủ đề rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan, ta thường gặp các dạng toán sau đây:

Dạng 1. Rút gọn biểu thức và tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị của biến khi biết biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước.

Dạng 3. Rút gọn biểu thức và so sánh biểu thức với một số hoặc biểu thức cho trước.

Dạng 4. Rút gọn biểu thức và tìm điều kiện của biến để biểu thức có giá trị nguyên.

Dạng 5. Rút gọn biểu thức và tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{2-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{2}{x-1}\right) \text{ với } x\ge 0, x\ne 1.$$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi:

i) $x=6-4\sqrt{2}$;

ii) $x=\frac{1}{4}\left(\sqrt{9+\sqrt{80}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}\right)$;

iii) $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$;

iv) $x=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$;

v) x là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-3x-5}=x-1$;

vi) x là nghiệm của phương trình $|2x-6|=3x+1$;

vii) x là giá trị làm cho biểu thức $M=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm x để:

i) $A=\frac{1}{6}$; ii) $|A|=A$; iii) $A^2+A\le 0$.

d) So sánh:

i) A với 1; ii) A với biểu thức $N=\frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$.

e) Tìm x nguyên dương để biểu thức $\frac{2}{A}$ nhận giá trị nguyên.

g) Tìm x thực để A nhận giá trị nguyên.

h) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

i) $P=A(x-\sqrt{x}-2)$;

ii) $Q=\frac{A}{-x+3\sqrt{x}-2}$ với $0\le x<4$;

iii) $R=\frac{\sqrt{x}}{A}$ với $x>1$.

i) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

i) $B=2-A$; ii) $C=\frac{A}{\sqrt{x}+7}$ với $x>1$.

k*) Tìm x thỏa mãn $A(\sqrt{x}+1)-(2\sqrt{6}-1)\sqrt{x}=2x-2\sqrt{x-5}+1$.

1B. Cho biểu thức:

$$B=\left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)+\frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ với } x>0 \text{ và } x\neq 1.$$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của biểu thức B khi:

i) $x=7-\sqrt{48}$;

ii) $x=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

iii) $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

iv) $x=\frac{1}{1+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{100}}$;

v) x là nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2-x+2}=x$;

vi) x là nghiệm phương trình $|x-1|=|2x-5|$;

vii) x là giá trị làm cho biểu thức $P=x-4\sqrt{x}+6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm x để:

i) $B=0$; ii) $B+\frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\leq 0$.

d) So sánh:

i) B với -2 ii) B với $C=\frac{\sqrt{x}-3x}{x}$.

e) Tìm x để B nhận giá trị nguyên.

g) Xét dấu biểu thức $T=B(\sqrt{x}-1)$.

h) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

i) B; ii) $D=B\sqrt{x}$; iii) $E=\frac{B}{\sqrt{x}}$.

i) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

i) $G=-3-B$; ii) $Q=1-B\sqrt{x}$.

k*) Tìm x thỏa mãn $B\sqrt{x}+(2\sqrt{3}+3)\sqrt{x}=3x-4\sqrt{x+1}+10$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

2. Cho biểu thức

$$C=\left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}+4}+\frac{2x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}}\right) \text{ với } x>0, x\neq 4 \text{ và } x\neq 9.$$

a) Rút gọn C.

b) Tính giá trị của C khi:

i) $x = 6 - 2\sqrt{8}$;

ii) $x = \sqrt{11 + 3\sqrt{8}} + \sqrt{11 - 3\sqrt{8}}$;

iii) $x = \sqrt[3]{14\sqrt{2} + 20} - \sqrt[3]{14\sqrt{2} - 20} - 1$;

iv) $x = \dfrac{1}{1 + \sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{77} + \sqrt{81}}$;

v) x là nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 - x} = x - 1$;

vi) x là nghiệm của phương trình: $|x - 3| = 3$;

vii) x là giá trị làm cho biểu thức $M = -x + 3\sqrt{x} + 5$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm x để:

i) $C^2 \le 0$; ii) $|C| = -C$;

d) So sánh C với biểu thức $D = \sqrt{x}$ khi $x > 9$.

e) Tìm x để biểu thức $E = \dfrac{2C}{\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên.

g) Tìm giá trị nhỏ nhất của:

i) Biểu thức C với $x > 9$;

ii) Biểu thức $I = -\dfrac{C}{x\sqrt{x}}$ với $0 < x < 9, x \ne 4$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = \dfrac{C}{\sqrt{x} - 1 + C}$.

i*) Tìm x thỏa mãn $(2\sqrt{2} + C)\sqrt{x} - 3C = 3x - 2\sqrt{x - 1} + 2$.

CHỦ ĐỀ 2. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Các bước *giải toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình* bao gồm:

Bước 1. Lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- Chọn ẩn số (ghi rõ đơn vị và đặt điều kiện cho ẩn số);
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn số (chú ý thống nhất đơn vị);
- Lập phương trình hoặc hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa ẩn số và các dữ liệu đã biết.

Bước 2. Giải phương trình hoặc hệ phương trình vừa tìm được.

Bước 3. Nhận định kết quả và trả lời yêu cầu bài toán.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bài toán về chuyển động

Phương pháp giải: Chú ý dựa vào công thức $S = vt$, trong đó S là quãng đường, v là vận tốc và t là thời gian. Ngoài ra, theo nguyên lí cộng vận tốc trong bài toán chuyển động tàu, thuyền trên mặt nước, ta có:

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc thực + vận tốc dòng nước.
- Vận tốc ngược dòng = vận tốc thực – vận tốc dòng nước.
- Vận tốc thực luôn lớn hơn vận tốc dòng nước.

1A. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường ngừi đó tăng vận tốc lên 10 km/giờ trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian thực tế lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

1B. Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 180km. Một ô tô đi từ A đến B, nghỉ 30 phút ở B rồi trở lại từ B về A. Thời gian từ lúc đi đến lúc trở về là 9 giờ. Biết vận tốc lúc về kém vận tốc lúc đi là $5\text{km}/\text{h}$. Tính vận tốc lúc đi của ô tô.

2A. Trên quãng đường AB dài 200km có hai ô tô chuyển động ngược chiều: xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ hai đi từ B đến A. Nếu cùng khởi hành thì sau 2 giờ chúng gặp nhau. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe kia $2{,}5$ giờ thì hai xe gặp nhau khi xe thứ hai đi được 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

2B. Cùng một lúc trên đoạn đường AB, một xe tải đi từ A đến B và một ô tô đi từ B về A, chúng gặp nhau tại một điểm C cách A là 120km. Nếu xe tải khởi hành sau ô tô $\frac{2}{3}$ giờ thì chúng gặp nhau tại D cách A 96 km. Tính vận tốc mỗi xe, biết đoạn đường AB dài 200 km.

3A. Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81km và ngược dòng 105 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42 km. Hãy tín vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

3B. Một ca nô đi xuôi dòng từ A đến B với vận tốc 30 km/giờ, sau đó lại đi ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược là như nhau.

DẠNG 2. Bài toán về năng suất lao động

Phương pháp giải: Sử dụng công thức $N = \frac{S}{t}$ với S là lượng công việc làm được, N là năng suất lao động (tức khối lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian) và t là thời gian để hoàn thành công việc.

4A. Một tổ sản xuất phải làm được 700 sản phẩm trong một thời gian quy định với năng suất quy định. Sau khi làm xong 400 sản phẩm tổ sản xuất phải tăng năng suất lao động, mỗi ngày làm thêm 10 sản phẩm so với quy định. Vì vậy tổ hoàn thành công việc sớm hơn quy định 36 tiếng. Hỏi theo quy định, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm?

4B. Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong thời gian nhất định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

Dạng 3. Bài toán về công việc làm chung và làm riêng

Phương pháp giải:

- Coi khối lượng công việc là 1 đơn vị

- NS 1 + NS 2 = tổng NS

- x giờ (ngày) làm xong CV thì mỗi giờ (ngày) làm được $\frac{1}{x}$ CV đó

- 1 giờ (ngày) làm được $\frac{1}{x}$ CV thì a giờ (ngày) làm được $a.\frac{1}{x}$ CV

5A. Để hoàn thành một công viêc, hai tổ làm chung và dự kiến hoàn thành sau 6 giờ. Trên thực tế, sau 2 giờ hai tổ làm chung, tổ II bị điều đi làm việc khác, tổ I hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

5B. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy bể. Nếu để vòi I chảy một mình trong 10 phút, khoá lại rồi mở tiếp vòi II chảy trong 12 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{2}{15}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

Dạng 4. Bài toán về tỉ lệ phần trăm

Phương pháp giải:

Chú ý rằng, nêu gọi số sản phẩm là x thì số sản phẩm khi vượt mức $a\%$ là $(100+a)\%.x$

6A. Trong tháng thứ nhất, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt múc 10% so với tháng thứ nhất, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

6B. Trong tháng đầu, hai tổ sản xuất được 400 sản phẩm. Tháng sau do cải tiến kĩ thuật nên tổ I sản xuất vượt mức 10%, tổ II sản xuất vượt mức $\frac{20}{3}\%$, do đó tổng sản phẩm tháng sau của hai tổ tăng thêm 35 sản phẩm so với tháng trước. Hỏi trong tháng đầu, mỗi tôt sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

7A. Hai lớp 9A và 9B gồm 105 học sinh. Tổng kết cuối năm, lớp 9A có 44 học sinh tiên tiến, lớp 9B có 45 học sinh tiên tiến. Biết tỉ lệ học sinh tiên tiến lớp 9A thấp hơn 9B là 10% . Tính tỉ lệ học sinh tiên tiến và số học sinh của mỗi lớp.

7B. Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào 10, đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A có tỉ lệ đỗ là 80%, riêng trường B có tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Dạng 5. Toán có nội dung hình học

Phương pháp giải:

-Với hình chữ nhật:

Diện tích = Chiều dài x Chiều rộng

Chu vi = (Chiều dài + Chiều rộng) x 2

-Với tam giác:

Diện tích = (Đường cao x Cạnh đáy): 2

Chu vi = Tổng độ dài ba cạnh.

8A. Một hình chữ nhật có chu vi $90m$. Nếu tăng chiều rộng lên gấp đôi và giảm chiều dài đi $15m$ thì ta được hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu. Tính các cạnh của hình chữ nhật đã cho.

8B. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng $3m$. Nếu tăng chiều dài thêm $2m$, giảm chiều rộng đi $1m$ thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất.

Dạng 6. Bài toán về quan hệ giữa các số

Phương pháp giải: Chú ý biểu diễn các số:

$$\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

trong đó các chữ số $a, b, c \in \mathbb{N}; 0 < a \le 9, 0 \le b \le 9, 0 \le c \le 9.$

9A. Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng $185.$

9B. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng là 2216 và nếu lấy số lớn hơn chia cho 9 thì được thương là số kia, số dư là $56.$

10A. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng $13.$ Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là $25.$ Tìm số đã cho.

10B. Tổng ba lần chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là $14.$ Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là 18 đơn vị. Tìm số có hai chữ số đó.

Dạng 7. Bài toán về sắp xếp, chia đều

Phương pháp giải: Sử dụng các tính chất chia hết và chia có dư. Lưu ý: Nếu chia số a cho số b có thương là q dư r thì $a = bq + r$

11A. Trong một buổi liên hoan văn nghệ, một lớp có 26 khách mời đến giao lưu. Vì lớp đã có 40 học sinh nên phải kê thêm một dãy ghế nữa và mỗi dãy ghế xếp thêm hai chỗ ngồi. Biết mỗi dãy ghế đều có số người ngồi như nhau và ngồi không quá 5 người. Hỏi lớp học lúc đầu có bao nhiêu dãy ghế?

11B. Người ta cần chở một số lượng hàng. Nếu xếp vào mỗi xe 15 tấn thì còn thừa lại 5 tấn, nếu xếp vào mỗi xe 17 tấn thì còn có thể chở thêm 9 tấn nữa. Hỏi có bao nhiêu xe tham gia chở hàng?

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

12. Một ô tô đi quãng đường AC dài 180 km gồm đoạn đường nhựa AB và đoạn đường đá BC. Biết thời gian ô tô đi trên đường nhựa là 2 giờ 15 phút, thời gian ô tô đi trên đường đá là 1 giờ 30 phút. Vận tốc ô tô đi trên đoạn đường nhựa lớn hơn khi đi trên đường đá là 30 km/h. Tính vận tốc ô tô trên mỗi đoạn đường.

13. Một người dự định đi từ A đến B trong thời gian đã định. Nếu người đó tăng vận tốc thêm 10 km/giờ thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu người đó giảm vận tốc đi 15 km/giờ thì đến B muộn hơn dự định 4 giờ. Tính vận tốc, thời gian dự định đi và độ dài quãng đường AB.

14. Quãng đường AB dài 100 km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A để đi đến B. Vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc xe thứ hai là 10 km/giờ nên xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 30 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

15. Hai địa điểm A và B cách nhau 30 km. Cùng một lúc xe máy khởi hành từ A và một xe đạp khởi hành từ B. Nếu hai xe chuyển động ngược chiều thì sau 40 phút chúng gặp nhau, còn nếu hai xe chuyển động ngược chiều theo hướng từ A đến B thì sau 2 giờ chúng gặp nhau. Hãy tính vận tốc mỗi xe.

16. Một xuồng máy xuôi dòng sông 30 km và ngược dòng sông 28 km hết một thời gian bằng nhau mà xuồng đi 59,5 km trên mặt hồ yên lặng. Tính vận tốc riêng của xuồng biết vận tốc của nước chảy trong song là 3 km/giờ.

17. Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc một chiếc cano xuôi dòng từ A đến B và một chiếc bè cũng trôi từ A đến B với vận tốc 3 km/giờ. Sau khi đi đến B, cano quay về A ngay và gặp chiếc bè ở một địa điểm cách B là 32 km. Tính vận tốc của canô.

18. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao làm 80 sản phẩm. Mặc dù người đó mỗi giờ đã làm thêm 1 sản phẩm so với dự kiến, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định là 12 phút. Tính số sản phẩm dự kiến làm trong một giờ của người đó, biết mỗi người đó không làm quá 20 sản phẩm.

19. Hai vòi nước chảy chảy chung vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút đầy bể. Biết rằng lượng nước của vòi I chảy một mình trong 1 giờ 20 phút bằng lượng nước của vòi II chảy một mình trong 30 phút thêm $\frac{1}{8}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể?

20. Một đội xe dùng một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải điều đi làm việc khác. Vì vậy, mỗi xe phải chở thêm 1 tấn hàng nữa mới hết số hàng đó. Tính số xe lúc đầu của đội biết rằng khối lượng hàng mỗi xe chở là bằng nhau.

21. Một phòng họp có 300 ghế ngồi nhưng phải xếp cho 357 người đến dự họp. Do đó ban tổ chức đã kê thêm một hàng ghế và mỗi hàng ghế phải xếp nhiều hơn quy định 2 ghế mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng ghế có bao nhiêu ghế?

22. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng $28m$. Đường chéo hình chữ nhật dài $10m$. Tính độ dài hai cạnh mảnh đất hình chữ nhật đó.

23. Một khu vườn chữ nhật có chu vi là $280m$. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng $3m$. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là $3996\ m^2$.

24. Cho một thửa ruộng chữ nhật. Nếu tăng chiều dài $2m$ và chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100\ m^2$. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68\ m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

25. Đem một số tự nhiên có hai chữ số nhân với tổng các chữ số của nó thì được 900. Nếu lấy số viết bởi hai chữ số ấy nhưng theo thứ tự ngược lại nhân với tổng các chữ số của nó thì được 684. Tìm số tự nhiên đó.

26. Hai phân xưởng của một nhà máy theo kế hoạch phải làm 540 chi tiết máy. Do cải tiến kĩ thuật, phân xưởng I vượt mức 25%, phân xưởng II vượt mức 10% kế hoạch của mình. Do đó đã tăng thêm 90 chi tiết máy. Tính số chi tiết máy mỗi phân xưởng phải làm theo kế hoạch.

27. Hai trường A và B của một thị trấn có 210 học sinh thi đỗ vào cấp 3, đạt tỉ lệ trúng tuyển 84%. Biết số học sinh không đỗ của trường A chiếm 20% và số học sinh không đỗ của trường B chiếm 10%. Tính xem mỗi trường có bao nhiêu học sinh lớp 9 dự thi.

28. Người ta trộn $4\ \text{kg}$ chất lỏng loại I với $3\ \text{kg}$ chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là $700\ \text{kg}/\text{m}^3$. Cho biết khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là $200\ \text{kg}/\text{m}^3$. Tính khối lượng riêng của mỗi chất.

CHỦ ĐỀ 3.PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Xét phương trình bậc hai ẩn x:

$$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$$

1. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Với *biệt thức* $\Delta = b^2 - 4ac,$ ta có:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình *vô nghiệm.*

Trường hợp 2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có *nghiệm kép:*

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có *hai nghiệm phân biệt:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai

Khi $b = 2b'$. Xét *biệt thức* $\Delta' = b'^2 - ac.$

Trường hợp 1. Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình *vô nghiệm.*

Trường hợp 2. Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có *nghiệm kép*

$$: x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có *hai nghiệm phân biệt:*

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

3. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

a. Hệ thức Vi-ét

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

b. Ứng dụng

Ứng dụng 1: Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1,$ nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{c}{a}.$

Ứng dụng 2: Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1,$ nghiệm kia là $x_2 = -\dfrac{c}{a}.$

Ứng dụng 3: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0.$

c) Dấu của các nghiệm

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0).$ Khi đó:

Trường hợp 1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0.$

Trường hợp 2. Phương trình có hai nghiệm có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}.$

Trường hợp 3. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}.$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + 2m - 4 = 0$ với x là ẩn, m là tham số.

a) Giải phương trình đã cho với $m = 1$

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị bất kì của tham số m

d) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để:

i) $x_1^2 + x_2^2 = 13$ ii) $2x_1 + 3x_2 = 3$

iii) $|x_1 - x_2| = 4$ iv) $|x_1| + |x_2| = 5$

v) Nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia

e) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

g) Tìm các giá trị của m để phương trình:

i) Có hai nghiệm trái dấu

ii) Có hai nghiệm cùng âm

iii) Có hai nghiệm cùng dương

iv) Có hai nghiệm trái dấu, nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương

v) Có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2$

h) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho.

Xét biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$. Hãy:

i) Tính các giá trị của biểu thức A theo m

ii) Tìm các giá trị của m để $A = 41$

iii) Tìm các giá trị của m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

k) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\frac{\sqrt{205}}{2}$

l) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Với $m \neq 2$, lập phương trình có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ có tham số m.

1B. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x=-2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình:

i) Có hai nghiệm phân biệt. Tìm các nghiệm đó;

ii) Có nghiệm kép. Tìm nghiệm với m vừa tìm được;

iii) Vô nghiệm.

d) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,$ tìm các giá trị của m để:

i) $x_1^2+x_2^2=8;$ ii) $2x_1-3x_2=8;$

iii) $|x_1-x_2|=4;$ iv) $|x_1|+|x_2|=3.$

e) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

i) $x_1,\ x_2$ trái dấu; ii) $x_1,\ x_2$ cùng dương;

iii) x_1, x_2 cùng âm; iv) $\left(x_1^2+x_2^2\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

g) Trong trường hợp phương trình có các nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$, hãy:

i) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x_1,\ x_2$ độc lập với m.

ii) Tìm các giá trị của m để $(2x_1-3)(2x_2-3)>1.$

iii) Với $m\neq 0$ và $m\neq 3$, lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $y_1=x_1+\dfrac{1}{x_2}$ và $y_2=x_2+\dfrac{1}{x_1}$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

2. Cho phương trình $x^2+(m+2)x+2m=0$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Tìm giá trị của m biết phương trình có một nghiệm là $x=3$. Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình:

i) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=2;$

ii) Có hai nghiệm x_1, x_2 đối nhau;

iii) Có hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu. Khi đó hai nghiệm cùng âm hay cùng dương?

iv) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $-3 < x_1 < x_2 \le 3$.

c) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

i) Có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

ii) Có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{13}$.

d) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2:

i) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$. theo tham số m.

ii) Với $m \ne 0$, lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ và $x_1 + x_2$.

BÀI 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Là hệ phương trình có dạng $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ trong đó a, b, c, a', b', c' là các số thực cho trước, x và y là ẩn số cho trước, $a^2 + b^2 \ne 0$, $a'^2 + b'^2 \ne 0$, x, y là ẩn số.

2. Các khái niệm có liên quan.

- Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ cùng thỏa mãn các phương trình của hệ thì nó được gọi là *nghiệm* của hệ phương trình. Nếu không tồn tại bất cứ cặp số nào thỏa mãn đồng thời các phương trình của hệ thì ta nói hệ phương trình *vô nghiệm*.

- *Giải hệ phương trình* là tìm tất cả các nghiệm của nó.

- Hai hệ phương trình được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.

3. Liên hệ vị trí tương đối của hai đường thẳng với số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ được biểu diễn bởi *tập các điểm chung* của hai đường thẳng $d: ax+by=c$ và $d': a'x+b'y=c'$.

Trường hợp 1. d và d' cắt nhau tại $I(x_0;y_0) \Leftrightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$.

Trường hợp 2. d và d' song song với nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 3. d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình có vô số nghiệm.

4. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

- Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$;

- Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$;

- Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

5. Các phương pháp giải.

- *Phương pháp thế:* Rút x hoặc y từ một trong hai phương trình của hệ phương trình đã cho và thế vào phương trình còn lại.

- *Phương pháp cộng đại số:* Nhân hai vế của mỗi phương trình trong hệ phương trình đã cho với một số thích hợp (nếu cần) để được một hệ mới mà các hệ số của nào đó (x hoặc y) trong hai phương trình bằng hoặc đối nhau sau đó cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình.

III. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

1A. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1 \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m=1.$

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;-1).$

c) Chứng minh hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi $m.$

d) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ, tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào $m.$

e) Gọi $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm m để:

i) $\sqrt{2x+1}=y;$

ii) $|x-y|=4-m;$

iii) $|x|=2|y|;$

iv) Biểu thức $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

v) Đồng thời m và biểu thức $Q=\dfrac{x}{y}$ cùng nhận giá trị nguyên.

g) Trong hệ trục tọa độ $Oxy,$ xét điểm $M(x;y)$ trong đó $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình, hãy:

i) Chứng minh M luôn thuộc một đường thẳng cố định;

ii) Tìm m để M nằm trên đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1;

iii) Tìm m để M thuộc góc phần tư thứ nhất;

iv) Tìm m để ba điểm M, $A(1;3)$ và $B(0;1)$ thẳng hàng;

v*) Tìm m để chu vi hình chữ nhật $OHMK$ có giá trị nhỏ nhất trong đó H,K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox, Oy.

h) Cho các đường thẳng:

$$d_1:(m+1)x+my=2m-1,\ \ d_2:mx-y=m^2-2,\ \ d_3:3x+y-1=0.$$

Tìm m để 3 đường thẳng đồng quy.

1B. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+2my=m+1 \\ x+(m+1)y=2 \end{cases}$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m=-3.$

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;-1)$.

c) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

d) Với x,y là nghiệm duy nhất của hệ, tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

e) Gọi $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm m để:

i) $x^2+y^2=2$;

ii) $\sqrt{2mx+1}=\frac{1}{y}$;

iii) $|x-2y|=5$;

iv) $y\le 2x-1$;

v) Biểu thức $P=x^2+y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

vi) Đồng thời m và $(x;y)$ cùng nhận giá trị nguyên.

g) Trong hệ trục tọa độ Oxy, xét điểm $M(x;y)$ trong đó $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy:

i) Chứng minh điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định;

ii) Tìm m để điểm $M(x;y)$ thuộc góc phần tư thứ ba;

iii) Tìm m để ba điểm $M(x;y)$, $A(1;2)$, $C(-1;-4)$ thẳng hàng;

iv) Tìm m để $AB=1$ trong đó A,B lần lượt là hình chiếu của $M(x;y)$ lên các trục tọa độ Ox và Oy.

h*) Cho các đường thẳng:

$$d_1: mx+2my=m+1,\ \ d_2: x+(m+1)y=2,\ \ d_3: 2x-y=1.$$

Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+4y=m+2 \\ x+my=m \end{cases}$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m=-3$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm là $(2;0)$.

c) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

d) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ, tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

e) Gọi $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm m để:

i) $x-y>0$; ii) $x+y=\dfrac{2m}{m-4}$;

iii) $|1-x|+y=3$; iv) $x^2+y^2=2$;

v) Biểu thức $P=x-2y^2$ đạt giá trị lớn nhất;

vi) Nghiệm $(x;y)$ nhận giá trị nguyên.

g) Trong hệ trục tọa độ Oxy, xét điểm $M(x;y)$ trong đó $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy:

i) Chứng minh điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định;

ii) Tìm m để điểm $M(x;y)$ thuộc góc phần tư thứ tư;

iii) Tìm m để ba điểm $M(x;y)$, $A(-1;4)$, $B(0;2)$ thẳng hàng;

iv) Tìm m để diện tích hình chữ nhật $OAMB$ bằng 1trong đó A,B lần lượt là hình chiếu của $M(x;y)$ lên các trục tọa độ Ox và Oy.

h*) Cho các đường thẳng:

$$d_1: mx+4y=m+2,\ d_2: x+my=m,\ d_3: 2x-y-3=0.$$

Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

BÀI 3: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Hàm số bậc nhất

a) Khái niệm

Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y=ax+b$ với $a\neq 0$.

b) Tính chất

- Hàm số bậc nhất $y=ax+b$ với $a\neq 0$.

+ *Đồng biến* trên R khi $a > 0$;

+ *Nghịch biến* trên R khi $a < 0$.

- Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng:

+ Với $b = 0$, đường thẳng đó đi qua các điểm $(0;0)$ và $(1;a)$;

+ Với $b \neq 0$, đường thẳng đó cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm $\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và $(0;b)$.

- Ta có a là *hệ số góc* của đường thẳng $d: y = ax + b$

+ Nếu $a > 0$, góc tạo bởi tia Ox và d là góc nhọn α và $a = \tan\alpha$;

+ Nếu $a < 0$, góc tạo bởi tia Ox và d là góc tù α và $a = -\tan(180° - \alpha)$.

- Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$

+ d trùng $d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$;

+ d song song $d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$;

+ d cắt $d' \Leftrightarrow a \neq a'$;

+ d vuông góc $d' \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Độ dài đoạn thẳng AB với $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

2. Hàm số bậc hai

- Hàm số bậc hai $y = ax^2$ với $a \neq 0$ có đồ thị là một *parabol* với *đỉnh* là gốc tọa độ O.

+ Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành.

+ Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành.

- Hàm số bậc hai $y = ax^2\ (a \neq 0)$:

+ Nếu $a > 0$ thì *đồng biến* khi $x > 0$ và *nghịch biến* khi $x < 0$;

+ Nếu $a < 0$ thì *đồng biến* khi $x < 0$ và *nghịch biến* khi $x > 0$.

- Cho đường thẳng $d: y = mx + n$ và parabol $(P): y = ax^2$ với $a \neq 0$.

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có dạng

$ax^2 - mx - n = 0 (*)$ với $\Delta = m^2 + 4an$

STT	Vị trí tương đối của d và (P)	Biệt thức Δ	Ghi chú
1	d tiếp xúc với (P)	$\Delta = 0$	Hoành độ tiếp điểm $x = \frac{m}{2a}$
2	d không cắt (P)	$\Delta < 0$	
3	d cắt (P) tại hai điểm phân biệt	$\Delta > 0$	Hoành độ các giao điểm là nghiệm của (*)

III. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho đường thẳng $d: y = (m-2)x + m + 3$ và parabol $(P): y = mx^2$ và với x là ẩn và $m \neq 0$ là tham số.

a) Khi $m = -1$, hãy:

i) Vẽ (P) và d trên cùng hệ tọa độ Oxy.

ii) Tính diện tích tam giác OMN với M, N là các giao điểm của d và (P).

b) Tìm giá trị của m để:

i) d đi qua $K(-2;2)$;

ii) Ba đường thẳng $d_1: y = 2x + 3$, $d_2: y = -x + 1$, và d đồng quy;

iii) d tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc $135°$.

iv) d song song với đường thẳng Δ, biết Δ đi qua $I(1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x - y + 3 = 0$.

v) (P) đi qua điểm cố định của d;

vi) d cắt các trục tọa độ Ox, Oy tạo thành các tam giác có diện tích bằng $2|m-2|$;

vii*) Khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d lớn nhất.

c) Viết phương trình đường thẳng d_3 song song với $d_1: y = 2x+3$ và đi qua điểm cố định của d.

d) Chứng minh với mọi $m \neq 0, d$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

e) Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ các giao điểm của d và (P). Hãy tìm:

i) Hệ thức độc lập giữa x_1 và x_2;

ii) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2$.

g) Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là các giao điểm của d và (P). Hãy tìm m để:

i) A và B nằm về hai phía của trục tung;

ii) A và B nằm về cùng phía của đường thẳng $x=1$;

iii) x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1 = 2x_2$;

iv) AB song song với đường thẳng $d_4: y = 7x+2017$. Tính diện tích tam giác OAB với m vừa tìm được.

1B. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-3)x + m$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Khi $m=-2$, hãy:

i) Vẽ (P) và d trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

ii) Tính diện tích tam giác OMN với M, N là các giao điểm của d và (P).

b) Tìm giá trị của m để:

i) d đi qua $M(-1;2)$ và $d \parallel d_1: y = 2x+3$.

ii) d tạo với Ox một góc $60°$.

iii) d cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

iv*) Tìm m để khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d lớn nhất.

c) Viết phương trình đường thẳng d_3 vuông góc với $d_2: y = -2x+1$ và đi qua điểm cố định của d.

d) Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

e) Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ các giao điểm của d và (P). Hãy tìm:

i) Tìm các hệ thức độc lập giữa x_1 và x_2;

ii) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$;

iii) Tìm m để A,B có hoành độ âm;

iv) Tìm m để $\left(2x_1^2+mx_1\right)\left(2x_2^2+mx_2\right)=\frac{3}{2}$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

2. Cho parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y=3x+2m-5$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Khi $m=\frac{1}{2}$, hãy:

i) Vẽ (P) và d trên cùng hệ trục tọa độ Oxy;

ii) Tìm diện tích tam giác OMN với M,N là các giao điểm của d và (P).

b) Tìm các giá trị của m để:

i) (P) và d tiếp xúc với nhau;

ii) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

iii) Giao điểm của $d_1: y=\frac{2}{3}x-1$; $d_2: y=x+2$ thuộc d;

iv) Khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d nhỏ nhất.

c) Tìm giá trị *tan* của góc tạo bởi d với tia Ox.

d) Viết phương trình đường thẳng d_3 vuông góc với mọi đường thẳng d và đi qua điểm cố định của đường thẳng $d_4: y=(m-2)x+m$.

e) Trong trường hợp d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ là tọa độ hai giao điểm, tìm m để:

i) $y_1+y_2=0$;

ii) Biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2 + \left(x_1 x_2\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất;

iii*) Biểu thức $E = \dfrac{m}{x_1^2 + 6x_2 - 4m} + \dfrac{x_2^2 + 6x_1 - 4m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất (với $m \neq 0$).

CHỦ ĐỀ 4. SỬ DỤNG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ NHIỀU Ý HỎI ĐỂ ÔN TẬP CHO HỌC SINH ÔN THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

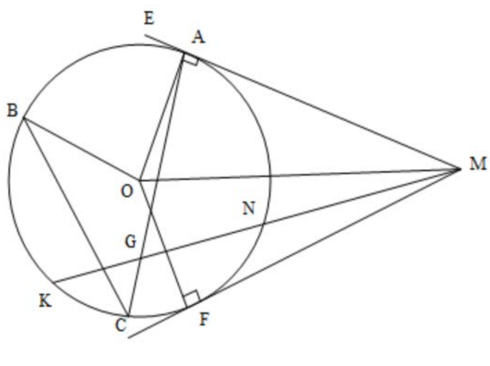
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc và đường tròn

- $\widehat{AOB}$: Góc ở tâm chắn $\overset{\frown}{AB}$; $\widehat{AOB} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.

- $\widehat{ACB}$: Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$; $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.

- $\widehat{EAB}$: Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{AB}$; $\widehat{EAB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.



- $\widehat{AGN}$: Góc có đỉnh bên trong đường tròn.

$$\widehat{AGN} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{KC}\right).$$

- $\widehat{AMK}$: Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

$$\widehat{AMK} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{KBA} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AN}\right).$$

2. Các công thức khác

- Độ dài đường tròn: $C = 2\pi R$;

- Độ dài cung tròn: $l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$;

- Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$;

- Diện tích hình quạt tròn: $S = \dfrac{\pi R n^\circ}{360^\circ}$.

III. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến $MNP(MN < MP)$ đến (O). Gọi K là trung điểm của NP.

1) Chứng minh rằng các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh tia KM là phân giác của góc $\widehat{AKB}$.

3) Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh rằng $AQ \parallel NP$.

4) Gọi H là giao điểm của AB và MO.

Chứng minh rằng: $MA^2 = MH.MO = MN.MP$.

5) Chứng minh rằng 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.

6) Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng: $AB^2 = 4.HE.HF$ (F là giao điểm của AB và NP).

7) Chứng minh rằng $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng $OK.OE$ không đổi. Từ đó suy ra EN, EP là các tiếp tuyến của (O).

8) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

9) Chứng minh rằng KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của của góc $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra: $AE.BF = AF.BE$.

10) Tìm vị trí của cát tuyến MNP để diện tích tam giác MQP đạt giá trị nhỏ nhất.

11) Chứng minh khi cát tuyến MNP quay quanh M thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định và khi cát tuyến MNP cố định, điểm M di chuyển trên tia đối của NP, chứng minh đường AB đi qua một điểm cố định.

12) Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

1B. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn tại M, N, P. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $BFEC$ và $AEDB$ nội tiếp.

2) $AE.AC = AF.AB.$

3) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $EFD.$

4) Khi $\widehat{BAC} = 30°.$ Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi 2 bán kính OB, OC và cung nhỏ $BC.$

5) BC là phân giác $\widehat{HBM}$, từ đó suy ra H, M đối xứng nhau qua $BC.$

6) $PN \parallel EF$; $AO \perp EF.$

7) Gọi I trung điểm BC, K đối xứng H qua I. Chứng minh K thuộc (O).

8) Chứng minh $BMKC$ là hình thang cân.

9) Chứng minh $PN < 2AH.$

10) AI cắt OH tại G. Chứng minh G là trọng tâm $\Delta ABC.$

11) Tìm điều kiện của góc B và C để $OH \parallel BC.$

12) Khi A di chuyển trên cung lớn BC. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp AFE không đổi. Chứng minh H luôn thuộc một đường cố định.

13) Khi A di chuyển trên $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh EF có độ dài không đổi, suy ra vị trí điểm A để diện tích ΔAEF lớn nhất.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

2. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và CD vuông góc với nhau. M di động trên cung nhỏ BC. AM cắt CD, CB lần lượt tại N và E. Kẻ CH vuông AM tại H. Tia CM cắt AB tại S, MD cắt AB tại F, CF cắt (O) tại K (K khác C). Chứng minh:

1) Tứ giác $OHCA$, $DOMS$, $MEFB$ nội tiếp.

2) $SM.SC = SA.SB$ và $BE.BC = BF.BA.$

3) $AN.AM$ và $CM.CS$ không đổi.

4) $OH // DM$ và tia OH là phân giác góc $\widehat{COM}$.

5) $EB = \sqrt{2}EF.$

6) Xác định vị trí của M để H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $OMC.$

7) $AM.AE + BE.BC$ không đổi.

8) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác CFM luôn thuộc đường thẳng cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ BC.

9) BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMS.

10) D, K, S thẳng hàng.

11) Kẻ $MQ \perp AB$ tại Q, xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC để $QN \perp AM$.

12) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $AO'B$.

13) S_{ANFD} không đổi, từ đó suy ra vị trí điểm M để diện tích ΔMNF lớn nhất.

14) Xác định vị trí của M để S_{OQM} đạt giá trị lớn nhất.

CHỦ ĐỀ 5. BẤT ĐẲNG THỨC.
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

§1. BẤT ĐẲNG THỨC.
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức Cô-si

- *Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm:*Với hai số a, b không âm, ta luôn có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Lưu ý: Với hai số *a, b* bất kỳ, ta luôn có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab\,.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm: Với ba số a, b và c không âm, ta luôn có:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Lưu ý: Đây là bất đẳng thức nằm ngoài chương trình SGK hiện hành nên muốn áp dụng học sinh cần chứng minh trước khi hoặc sau khi sử dụng như một bổ đề!

2. Một số bổ đề thường dùng khác

Bổ đề 1. Với mọi số thực *a, b* ta luôn có:

$$*(a+b)^2 \geq 4ab\ ; \qquad *a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Bổ đề 2. Với mọi số thực *a, b, c,* ta luôn có:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bổ đề 3. Với hai số thực dương *a* và *b* ta luôn có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Bổ đề 4. Với hai số thực không âm *a* và *b* ta có:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Bổ đề 5. Với ba số thực không âm *a, b* và *c* ta có:

$$\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Lưu ý: Với mỗi bất đẳng thức trên, ta cần nhớ và vận dụng linh hoạt cả chiều xuôi và chiều

ngược của nó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Do khuôn khổ cuốn sách có hạn nên chúng tôi chỉ trình bày 3 kĩ thuật quan trọng để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức đại số.

Dạng 1. Kĩ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cô-si

Phương pháp giải: Dự đoán dấu bằng (tức điểm rơi) của bài toán, từ đó điều chỉnh hệ số để đảm bảo việc dấu bằng luôn xảy ra.

1A. Cho $x \geq 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P = x + \frac{1}{x}$.

1B. Cho $x \geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức $Q = x + \frac{1}{x}$.

2A. Cho các số x, y>0 . Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$;

b) $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$;

c) $C = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{6xy}{(x+y)^2}$;

d*) $D = \frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} + \frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$.

2B. Cho các số x, y > 0 . Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$;

b) $N = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$;

c) $P = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{4xy}{(x+y)^2}$;

d) $Q = \frac{(x+y+2)^2}{xy+2(x+y)} + \frac{xy+2(x+y)}{(x+y+2)^2}$.

3A. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

b) $B = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$;

c) $C = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$;

d) $D = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$.

3B. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 2$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = x + y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$;

b) $B = \left(x + \frac{2}{x}\right)\left(y + \frac{2}{y}\right)$;

c) $C = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2}$; d) $D = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{y}\right)^2$.

4A. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3}$; b) $\sqrt{x + 2y} + \sqrt{y + 2z} + \sqrt{z + 2x} \le 3$;

c) $\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \le \sqrt[3]{3}$; d) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \le \sqrt[3]{9}$;

e) $\sqrt[3]{x + y} + \sqrt[3]{y + z} + \sqrt[3]{z + x} \le \sqrt[3]{18}$.

4B. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le 3$; b) $\sqrt{x + 2y} + \sqrt{y + 2z} + \sqrt{z + 2x} \le 3\sqrt{3}$;

c) $\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \le 3$; d) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \le 3$;

e) $\sqrt[3]{x(x + y)} + \sqrt[3]{y(y + z)} + \sqrt[3]{z(z + x)} \le 3\sqrt[3]{2}$.

Dạng 2. Kĩ thuật "khai thác giả thiết"

Trong nhiều bài toán bất đẳng thức, hoặc tìm GTLN, GTNN, đôi khi chúng ta cần cố gắng khai thác giả thiết để thu được những dữ kiện mới "có giá trị hơn".

Phương pháp giải: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (ẩn phụ, tách ghép, chia, ...), hoặc sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

5A. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x + 2} - y^3 = \sqrt{y + 2} - x^3$.

a) Tìm GTNN của các biểu thức:

i) $A = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10$;

ii) $B = \frac{x^2 + 7}{y + 3} + \frac{y^2 + 7}{x + 3}$.

b) Tìm GTLN của biểu thức $C = \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{y}{y^2 + 4}$.

5B. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x + 1} - y^3 = \sqrt{y + 1} - x^3$.

a) Tìm GTNN của biểu thức:

i) $A = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2018$;

ii) $B = \frac{x^2+5}{y+2} + \frac{y^2+5}{x+2}$.

b) Tìm GTLN của biểu thức $C = \frac{x}{x^2+9} + \frac{y}{y^2+9}$.

6A. Cho các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z + xy + yz + zx = 6xyz$.

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 3$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2013 – 2014)

6B. Cho các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn:

$$2(x + y + z) + xy + yz + zx = 9xyz.$$

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 3$.

7A. Cho các số thực $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 9$. Tìm GTNN và GTLN

của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm hcoj 2017 – 2018)

7B. Cho các số thực $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm GTNN và GTLN

của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

8A. Cho các số thực *x, y* thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$. Tìm GTLN và GTNN của

biểu thức: $P = x + y$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2016 – 2017)

8B. Cho các số thực *x, y* thỏa mãn $x - \sqrt{x+1} = \sqrt{y+1} - y$. Tìm GTLN và GTNN của

biểu thức: $P = x + y + 2017$.

9A. Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $xy + 4 \leq 2y$.

a) Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2+2y^2}{xy}$.

b) Tìm GTLN của các biểu thức:

i) $B = \dfrac{xy}{x^2 + 2y^2}$; ii) $C = \dfrac{xy}{(x+y)^2}$.

9B. Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $xy + 9 \le 3x$.

a) Tìm GTNN của biểu thức $A = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

b) Tìm GTLN của các biểu thức:

i) $B = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; ii) $C = \dfrac{xy}{(x+4y)^2}$.

Dạng 3. Kĩ thuật "Cô-si ngược dấu"

Có một số bài toán mà khi đọc đề, ta có thể nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức Cô-si. Tuy nhiên nếu làm như vậy đôi khi sẽ gặp tình huống bị ngược dấu. Và kĩ thuật "Cô-si ngược dấu" được sinh ra để giải quyết vấn đề này.

Phương pháp giải: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (như thêm bớt hoặc tách ghép...) để đưa bài toán từ "trạng thái ngược dấu" về "trạng thái xuôi dấu".

10A. Cho các số $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge \dfrac{3}{2}$;

b) $\dfrac{a^3}{1+b^2} + \dfrac{b^3}{1+c^2} + \dfrac{c^3}{1+a^2} \ge \dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1} + \dfrac{1}{c^2+1} \ge \dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{a+1}{b^2+1} + \dfrac{b+1}{c^2+1} + \dfrac{c+1}{a^2+1} \ge 3$;

e) $\dfrac{a}{b^3+ab} + \dfrac{b}{c^3+bc} + \dfrac{c}{a^3+ca} \ge \dfrac{3}{2}$.

10B. Cho các số $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge \dfrac{1}{2}$;

b) $\dfrac{a}{1+9b^2} + \dfrac{b}{1+9c^2} + \dfrac{c}{1+9a^2} \ge \dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{1}{9a^2+1} + \dfrac{1}{9b^2+1} + \dfrac{1}{9c^2+1} \ge \dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{a+1}{9b^2+1} + \dfrac{b+1}{9c^2+1} + \dfrac{c+1}{9a^2+1} \ge 2$.

11A. Cho các số dương *a, b, c* có tích bằng 1. Chứng minh:

$$a + b + c \ge \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1}.$$

11B. Cho các số dương *a, b, c* có tích bằng 1. Chứng minh:

$$a+b+c \ge \frac{a+2}{b+2}+\frac{b+2}{c+2}+\frac{c+2}{a+2}.$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

12. Cho $x \ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P = x + \dfrac{2}{x}$.

13. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$;

b) $B = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{3xy}{x^2+xy+y^2}$;

c) $C = \dfrac{(x-y)^2}{4xy}+\dfrac{xy}{(x+y)^2}$;

d) $D = \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\right)^2}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\right)^2}$.

14. Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \le 3\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x+2y+3z}+\sqrt{y+2z+3x}+\sqrt{z+2x+3y} \le 3\sqrt{6}$;

c) $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx} \le 3$;

d) $\sqrt[3]{x(y+z)}+\sqrt[3]{y(z+x)}+\sqrt[3]{z(x+y)} \le 3\sqrt[3]{2}$;

e) $\sqrt[3]{3x+5y}+\sqrt[3]{3y+5z}+\sqrt[3]{3z+5x} \le 6$.

15. Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $x+\dfrac{4}{y} \le 2$.

a) Tìm GTNN của biểu thức: $A = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$;

b) Tìm GTLN của các biểu thức:

i) $B = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

ii) $C = \dfrac{xy}{x^2+2y^2+3xy}$.

16. Cho *x, y* là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \ge 2y$. Tìm GTNN của biểu thức

$$M = \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2012 – 2013)

17. Cho các số $x, y, z, t > 0$ và $x+y+z+t=4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{t^2+1} \ge 2.$$

18. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ca} + \sqrt{2c+ab}.$$

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2014 – 2015)

19. Cho các số không âm *a, b* thỏa mãn $a^2+b^2=4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M = \frac{ab}{a+b+2}.$$

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2015 – 2016)

20. Cho $a \ge 2017$ và $b \ge 2018$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a-2017}}{a+1} + \frac{\sqrt{b-2018}}{b+2}.$$

§2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bài toán về giải phương trình, nhất là phương trình chứa căn thức trong đề thi vào 10 THPT thường rất đa dạng và có nhiều cách giải khác nhau. Trong bài này, chúng tôi chỉ giới thiệu một số dạng toán thường gặp về giải phương trình chứa căn thức, đó là:

- Giải phương trình bằng cách sử dụng các phép biến đổi đại số;
- Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ;
- Giải phương trình bằng phương pháp đánh giá.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải phương trình bằng cách sử dụng các phép biến đổi đại số.

Phương pháp giải: Các phép biến đổi đại số thường sử dụng để khử căn thức là:

- Thêm bớt hạng tử;
- Nâng lên lũy thừa cả hai vế;
- Phép nhân liên hợp;
- …

Từ đó đưa phương trình đã cho về phương trình đơn giản, đã biết cách giải.

1A. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}-\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3}\left(3x^3-x^2+6x-2\right).$$

1B. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\left(2x^3+x^2+2x+1\right).$$

2A. Giải phương trình:

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$

b) $3\sqrt{5x+2}=x^2+2$.

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3\sqrt{2x-5}+2}=2\sqrt{2}.$

2B. Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$.

b) $\sqrt{x^2-2x+1}-5|x-1|=4.$

Dạng 2. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Phương pháp giải: Đặt một, hai hoặc ba biểu thức phức tạp bằng ẩn mới (gọi là ẩn phụ) và giải phương trình thu được, sau đó tìm được nghiệm. Ta thường gặp các loại sau:

Loại 1. Sử dụng một ẩn phụ

3A. Giải phương trình $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=3\sqrt{3}x$.

3B. Giải phương trình $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$

Loại 2. Sử dụng hai ẩn phụ

4A. Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3.$

b) $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{10-x^2}=5.$

4B. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}.$

b) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$

*Loại 3.*Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về hệ phương trình đối xứng.

5A. Giải phương trình: $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

5B. Giải phương trình: $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}=2$.

Loại 4. Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về phương trình bậc hai đối với một ẩn.

6A. Giải phương trình: $2x^2+3x+7=\left(x+5\right)\sqrt{2x^2+1}$.

6B. Giải phương trình:

a) $x^2+3x+5=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+5}$.

b) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$.

Dạng 3. Giải phương trình bằng phương pháp đánh giá.

Phương pháp giải: Ta sử dụng kiến thức sau: Phương trình $f(x)=g(x)$ nếu luôn có

$f(x)\geq m$ và $g(x)\leq m$ thì tương đương với $\begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

7A. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$$

7B. Giải phương trình

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}.$

b) $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16.$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Giải các phương trình sau

8. $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$.

9. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$.

10. $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$.

11. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

12. $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$.

13. $4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x+4x^2-2x^3-x^4$.

14. $x+1=(2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$.

15. a) $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{10-x^2}=5$.

b) $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{2x-\sqrt{x+1}+1}=2\sqrt{x+1}+1$.

16. a) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$.

b) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

17. a) $\sqrt[3]{x^3+5x^2}-1=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}$.

b) $(2x^2-x-5)\sqrt{x^2+x+2}+(2x^2+x+1)\sqrt{x+3}=0$.

18. $3(x^2+2x+2)=10\sqrt{x^3+2x^2+2x+1}$.

19. a) $x=10+\sqrt{10+\sqrt{x}}$.

b) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1$.

20. a) $(x^2+3x-4)^2+3(x^2+3x-4)=x+4$

b) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$.

21. a) $x^2+3x+5=(x+3)\sqrt{x^2+5}$.

b) $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$.

c) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$.

22. a) $2x^2+3x+7=\left(x+5\right)\sqrt{2x^2+1}$.

b) $x^2+4x+7=\left(x+4\right)\sqrt{x^2+7}$.

c) $x^2+6x+1=\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}$.

23. a) $x^2+x-1=\left(x+2\right)\sqrt{x^2-2x+2}$.

b) $\left(4x-1\right)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$.

24. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=x^2-12x+38$.

25. $\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$.

26. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$.

PHẦN D. GỢI Ý – ĐÁP ÁN

CHỦ ĐỀ 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1A. a) Rút gọn $A = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) i) Tìm được $\sqrt{x} = 2-\sqrt{2}$ $(TM\ \ x \geq 0, x \neq 1)$.

Thay vào A tính được $A = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{7}$.

ii) Ta có $x = \dfrac{1}{4}\left(\left|2+\sqrt{5}\right|-\left|2-\sqrt{5}\right|\right) = 1$ $(KTM\ \ x \geq 0, x \neq 1)$.

Từ đó không tìm được giá trị của A.

iii) Ta có $x = \left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right) = 2$. Tính được $A = 3-2\sqrt{2}$.

iv) Thực hiện trục các căn thức ở mẫu ta được:

$$x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}+\ldots+\frac{-\sqrt{79}+\sqrt{81}}{2}$$

Từ đó rút gọn được $x = 4$ (TMĐK $x \neq 1$), tính được $A = \dfrac{1}{3}$.

v) Sử dụng công thức $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ ta có:

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2-3x-5 = (x-1)^2 \end{cases}.$$

Giải PT sau ta được $x = -2$ (KTM) hoặc $x = 3$ (TM).

Với $x = 3$, tính được $A = 2-\sqrt{3}$.

vi) *Cách 1:* Xét hai trường hợp:

- Với $x \geq 3$, ta có: $2x-6 = 3x+1 \Leftrightarrow x = -7$ (KTM).
- Với $x < 3$, ta có $-(2x-6) = 3x+1 \Leftrightarrow x = 1$ (KTM $x \geq 0; x \neq 1$).

Cách 2: Ta có $PT \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x-6 = \pm(3x+1) \end{cases}$. Từ đó tìm được $x = 1$.

Với $x = 1$ $(KTM\ \ x \geq 0, x \neq 1)$, từ đó không tìm được A.

vii) Biến đổi được: $M = -\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4}$.

Từ đó $M_{max} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$. Với $x = \dfrac{1}{4}$ tính được $A = -\dfrac{1}{3}$.

c) i) Từ $A=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{6}$.

Giải PT trên tìm được $x=\frac{49}{25}$ (TMĐK $x\geq 0, x\neq 1$).

ii) Ta có: $|A|=A\Leftrightarrow A\geq 0$ hay $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\geq 0$.

Giải BPT trên thu được $x\geq 1$.

Kết hợp ĐK $x\geq 0, x\neq 1$, ta được kết quả $x>1$.

iii) Biến đổi được $A^2+A\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1$. Kết hợp ĐK ta được $0\leq x\leq 1$.

d) i) Xét hiệu $A-1=-\frac{2}{\sqrt{x}+1}<0$ với mọi $x\geq 0, x\neq 1$.

Kết luận $A<1$.

ii) Xét hiệu $A-N=\frac{x+3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}>0$ với mọi $x\geq 0, x\neq 1$.

Kết luận $A>N$.

e) Biến đổi $\frac{2}{A}=2+\frac{4}{\sqrt{x}-1}$.

Để $\frac{2}{A}\in Z$, thì $\left(\sqrt{x}-1\right)\in$ Ư(4). Từ đó tìm được $x\in\{0;4;9;25\}$.

g) *Cách 1.* Tìm được $-1\leq A<1$.

Mà A nguyên nên $A\in\{-1;0\}$. Từ đó tìm được $x=0; x=1$.

Kết hợp điều kiện $x\geq 0, x\neq 1$ thu được $x=0$.

Cách 2. Đặt $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=n$ với n là số nguyên.

Ta biến đổi $\sqrt{x}=\frac{n+1}{-n+1}\geq 0$. Giải BPT được $-1\leq n<1$.

Mà n nguyên nên $n\in\{-1;0\}$. Từ đó tìm được $x=0$.

h) i) Rút gọn $P=\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$. Vậy $P_{\min}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$. (TMĐK)

ii) Rút gọn $Q=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}$ với $0\leq x<4$.

Áp dụng $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $\left(a\geq 0; b\geq 0\right)$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$ với

$a=\sqrt{x}+1; b=2-\sqrt{x}$ thu được $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2-\sqrt{x}\right)\le\frac{9}{4}$. Từ đó suy ra $Q\ge\frac{4}{9}$.

Vậy $Q_{\min}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ (TMĐK $0\le x<4$).

iii) Biến đổi $R=\sqrt{x}-1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}+3$ với $x>1$.

Áp dụng BĐT $a+b\ge 2\sqrt{ab}\,(a,b>0)$ với $a=\sqrt{x}-1, b=\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ thu được

$R\ge 2\sqrt{2}+3$. Vậy $R_{\min}=2\sqrt{2}+3\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}$.

i) i) Biến đổi $B=1+\frac{2}{\sqrt{x}+1}\le 3$. Vậy $B_{max}=3\Leftrightarrow x=0$.

ii) Biến đổi $C=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1+\frac{16}{\sqrt{x}-1}+10}$ với $x>1$.

Vì $\sqrt{x}-1+\frac{16}{\sqrt{x}-1}\ge 8$ nên $C\le\frac{1}{18}$. Vậy $C_{max}=\frac{1}{18}\Leftrightarrow x=25$.

k*) (ĐK $x\ge 5$) Biến đổi ĐK đã cho về dạng:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2=0.$$

Từ đó ta tìm được $x=6$ (TM $x\ge 5$).

1B. Tương tự **1A.**

a) Rút gọn $B=\frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\ne 1$.

b) i) Tìm được $\sqrt{x}=2-\sqrt{3}$, tính được $B=3+\sqrt{3}$.

ii) Rút gọn $x=6$, tính được $B=\frac{-9+4\sqrt{6}}{3}$.

iii) Rút gọn $x=2$, tính được $B=-3+2\sqrt{2}$.

iv) Rút gọn $x=3$, tính được $B=\frac{-9+5\sqrt{3}}{3}$.

v) Giải PT tìm được $x=2$, tính được $B=2\sqrt{2}-3$.

vi) Áp dụng công thức $|A|=|B|\Leftrightarrow A=\pm B$.

Tìm được $x=2; x=4$ (TMĐK).

Từ đó tính được các giá trị tương ứng của B là $2\sqrt{2}-3$ và 0.

vii) Tìm được $P_{\min}=2$ khi $x=4$, tính được $B=0$.

c) i) Giải PT tìm được $x=1$ (KTMĐK) và $x=4$ (TMĐK).

ii) Biến đổi BPT trở thành $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}\le 0$. Tìm được $x\le 2$.

Kết hợp điều kiện thu được $0<x\le 2, x\ne 1$.

d) i) Xét hiệu $B-(-2)=\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}>0$ suy ra $B>-2$.

ii) Xét hiệu $B-C=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}>0\left(x>0, x\ne 1\right)$ suy ra $B>C$.

e) Biến đổi $B=\sqrt{x}-3+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Vì B nguyên tìm được $x\in\{1;4\}$ kết hợp ĐK $x>0, x\ne 1$ thu được $x=4$.

g) Biến đổi $T=\left(\sqrt{x}-1\right)^2.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\ne 1$.

Từ đó suy ra $T\ge 0$ khi $x\ge 4$; $T<0$ khi $0<x<4, x\ne 1$.

h) i) Tìm được $B_{\min}=2\sqrt{2}-3\Leftrightarrow x=2$.

ii) Tìm được $D_{\min}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$.

iii) Biến đổi được $E=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$.

Từ đó tìm được $E_{\min}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{9}$.

i) i) Tìm được $G_{\max}=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2$.

ii) Tìm $Q_{\max}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$.

k*) Biến đổi về $\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0$. Từ đó tìm được $x=3$.

2. a) Rút gọn được $C=\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$ với $x>0, x\ne 4$ và $x\ne 9$.

b) i) Từ $x=6-2\sqrt{8}\Rightarrow\sqrt{x}=2-\sqrt{2}$, tính được $C=14-10\sqrt{2}$.

ii) Rút gọn được $x=6$. Tìm được $C=-6-2\sqrt{6}$.

iii) Rút gọn được $x=3$. Tìm được $C=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

iv) Rút gọn $x=4$, khi đó không tồn tại C.

v) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2-x=(x-1)^2 \end{cases}$. Từ đó tìm được $x=1$.

Thay $x=1$ vào C tính được $C=-\dfrac{1}{2}$.

vi) Giải PT tìm được $x=0$ (KTMĐK) và $x=6$ (TMĐK).

Từ đó tính được $C=-6-2\sqrt{6}$.

vii) Ta có $M_{\max}=\dfrac{29}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$. Từ đó tính được $C=-\dfrac{3}{2}$.

c) i) BPT $C^2\leq 0\Leftrightarrow C=0$. Từ đó tìm được $x=0$ (KTM).

Vậy không tồn tại x để $C^2\leq 0$.

ii) Ta có $|C|=-C\Leftrightarrow C\leq 0$ hay $\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}\leq 0$.

Giải BPT trên và kết hợp ĐK thu được: $0<x<9$ và $x\neq 4$.

d) Ta có $C-D=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}>0$ với $x>9$. Kết luận $C>D$.

e) Biến đổi $E=2+\dfrac{6}{\sqrt{x}-3}$.

Từ điều kiện E nguyên tìm được $x\in\{1;16;25;36;81\}$.

g) i) Biến đổi $C=\left(\sqrt{x}-3\right)+\dfrac{9}{\sqrt{x}-3}+6$ với $x>9$.

Từ đó suy ra $C\geq 12$. Vậy $C_{\min}=12\Leftrightarrow x=36$.

ii) Biến đổi $I=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$ với $0<x<9, x\neq 4$.

Áp dụng BĐT Coossi thu được $\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)\leq\dfrac{9}{4}$ nên $I\geq\dfrac{4}{9}$.

Vậy $I_{\min}=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$.

h) Biến đổi $N=\dfrac{1}{2-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}}$ với $x>0, x\neq 4$ và $x\neq 9$.

Vì $2-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}=3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\geq\dfrac{2}{3}$ nên $N\leq\dfrac{3}{2}$.

Vậy $M_{\max} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$.

i*) Từ giả thiết biến đổi $2\sqrt{2x} + C\left(\sqrt{x} - 3\right) = 3x - 2\sqrt{x-1} + 2$.

Sau đó đưa về dạng $\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 = 0$.

Từ đó ta tìm được $x > 0 \Rightarrow x \geq 1$.

CHỦ ĐỀ 2. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1A. Gọi vận tốc dự định đi là $x(km/h; x>0)$.

Theo đề bài, ta có PT: $\frac{40}{x}+\frac{80}{x+10}=\frac{120}{x}-\frac{24}{60}$.

Biến đổi thành $x^2+10x-2000=0$.

Từ đó tìm được $x=40$ (TMĐK) hoặc $x=-50$ (loại).

Vậy vận tốc dự định của người đó là $40km/h$.

Thời gian thực tế xe lăn bánh là 2 giờ 36 phút.

1B. Gọi vận tốc lúc đi của ôtô là $x(km/h; x>5)$.

Theo đề bài, ta có PT: $\frac{180}{x}+\frac{1}{2}+\frac{180}{x-5}=9$.

Từ đó giải được $x=45$ (TMĐK) hoặc $x=\frac{40}{17}$ (loại).

Kết luận.

2A. Gọi vận tốc của xe ô tô đi từ A, xe ô tô đi từ B lần lượt là $x,y(km/h; x>0, y>0)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases}2x+2y=200\\3,5x+y=200\end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=40; y=60$.

Vậy vận tốc của xe ô tô đi từ A, xe ô tô đi từ B lần lượt là $40km/h$ và $60km/h$.

2B. Gọi vận tốc của xe ô tô đi từ A, xe ô tô đi từ B lần lượt là $x,y(km/h; x>0, y>0)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases}\frac{120}{x}=\frac{80}{y}\\\frac{96}{x}=\frac{104}{y}-\frac{2}{3}\end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=90; y=60$ (TMĐK).

Kết luận.

3A. Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là $x,y(km/h; x>0, 0<y<x)$.

Ta có HPT: $\begin{cases} \dfrac{81}{x+y}+\dfrac{105}{x-y}=8 \\ \dfrac{54}{x+y}+\dfrac{42}{x-y}=4 \end{cases}$.

Đặt $a=\dfrac{1}{x+y}, b=\dfrac{1}{x-y}$ ta được $\begin{cases} 81a+105b=8 \\ 54x+42b=4 \end{cases}$.

Giải ra ta được $a=\dfrac{1}{27}, b=\dfrac{1}{21}$.

Từ đó tìm được $x=24, y=3$ (TMĐK). Kết luận.

3B. Gọi khoảng cách giữa hai bến A và B là $x(km, x>0)$.

Theo bài ra, ta có PT: $\dfrac{x}{30}=\dfrac{x}{20}-\dfrac{4}{3}$.

Giải PT ta được $x=80$ (TMĐK). Kết luận.

4A. Gọi số sản phẩm mỗi ngày tổ sản xuất được theo quy định là $x\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$ (sản phẩm).

Theo quy định tổ sản xuất đó làm 700 sản phẩm trong $\dfrac{700}{x}$ (ngày).

Theo đề bài, ta có PT: $\dfrac{400}{x}+\dfrac{300}{x+10}=\dfrac{700}{x}-\dfrac{3}{2}$.

Biến đổi PT thành $x^2+10x-2000=0 \Leftrightarrow x=40$ (TMĐK) hoặc $x=-50$ (loại).

Kết luận.

4B. Gọi năng suất dự kiến của công nhân là x (sản phẩm/giờ; $x\notin\mathbb{N}^*, x<\dfrac{150}{x}$).

Theo đề bài, ta có: $\dfrac{150-2x}{x+2}=\dfrac{150-2x}{x}-\dfrac{1}{2}$.

Giải PT ta được $x=20$ (TMĐK) hoặc $x=-30$ (loại). Kết luận.

5A. Gọi thời gian tổ I, II làm một mình hoàn thành công việc lần lượt là x và y (giờ; $x, y>6$)

Trong 1 giờ tổ I, II làm độc lập lần lượt được $\dfrac{1}{x}$ và $\dfrac{1}{y}$ phần công việc.

Ta có HPT: $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=1 \\ \dfrac{12}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$.

Giải ra ta được $x=15$ và $y=10$ (TMĐK). Kết luận.

5B. Gọi thời gian vòi I, II chảy một mình đầy bể là lần lượt là x và y (giờ; $x, y > \dfrac{4}{3}$).

Theo đề bài, ra có HPT $\begin{cases} \dfrac{4}{3x}+\dfrac{4}{3y}=1 \\ \dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15} \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=2; y=4$ (TMĐK). Kết luận.

6A. Gọi số chi tiết máy trong tháng thứ nhất tổ I, II sản xuất được lần lượt là x, y (chi tiết, $x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 900$).

Số chi tiết máy mà tổ I, II sản xuất được trong tháng thứ hai lần lượt là $\dfrac{23}{20}x$ và $\dfrac{11}{10}y$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} x+y=900 \\ \dfrac{23}{20}x+\dfrac{11}{20}y=1010 \end{cases}$.

Giải HPT ta thu được $x=400; y=500$ (TMĐK). Kết luận.

6B. Gọi số sản phẩm sản xuất được trong tháng đầu của tổ I, II lần lượt là x, y (sản phẩm, $x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 400$).

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} x+y=400 \\ \dfrac{1}{10}x+\dfrac{1}{15}y=35 \end{cases}$.

Giải HPT ta thu được $x=250; y=150$ (TMĐK). Kết luận.

7A. Gọi số học sinh lớp 9A, 9B lần lượt là x, y (học sinh, $x, y \in \mathbb{N}^*, x, y < 105, x \geq 44, y \geq 45$).

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} x+y=105 \\ \dfrac{45}{y}-\dfrac{44}{x}=\dfrac{1}{10} \end{cases}$.

Giải HPT bằng phương pháp thế ta được $x=55, y=50$ (TMĐK). Kết luận.

7B. Gọi số học sinh của trường A, trường B lần lượt là x, y (học sinh, $x, y \in \mathbb{N}, x, y < 500$).

Ta có HPT: $\begin{cases} x+y=500 \\ \dfrac{8}{10}x+\dfrac{9}{10}y=420 \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=300, y=200$ (TMĐK). Kết luận.

8A. Gọi chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là $x, y\left(m; 0<x, y<45, y>15\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} 2x+2y=90 \\ 2x\left(y-15\right)=xy \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=15; y=30$ (TMĐK). Kết luận.

8B. Gọi chiều rộng và chiều dài của mảnh đất lần lượt là $x, y\left(m; y>3; 1<x<y\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} y-x=3 \\ \left(x-1\right)\left(y+2\right)=xy \end{cases}$.

Giải hệ ta được $x=5; y=8$ (TMĐK). Kết luận.

9A. Gọi số thứ nhất, số thứ hai lần lượt là $x, y\left(x, y \in \mathbb{N}^*; x, y<19\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} x+y=19 \\ x^2+y^2=185 \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=11; y=8$ hoặc $x=8; y=11$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 11 và 8.

9B. Gọi số tự nhiên bé hơn là $x\left(x \in \mathbb{N}, x<2216\right)$;

Số tự nhiên lớn là $y\left(y \in \mathbb{N}^*, 56<y<2216, y>x\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} x+y=2216 \\ y=9x+56 \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=216; y=2000$ (TMĐK). Kết luận.

10A. Gọi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đó lần lượt là $x, y\left(x, y \in \mathbb{N}, 0<x \leq 9, 0 \leq y \leq 9\right)$

Theo đề bài ra ta có HPT: $\begin{cases} x+y=13 \\ xy=10x+y-25 \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=6, y=7$ (TMĐK). Vậy số cần tìm là 67.

10B. Gọi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đó lần lượt là $x, y\left(x, y \in \mathbb{N}, 0<x \leq 9, 0 \leq y \leq 9\right)$

Theo đề bài ra, ta có HPT: $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 10y+x=10x+y-18 \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=4, y=2$ (TMĐK). Kết luận.

11A. Gọi số dãy ghế trong lớp và số người ngồi ở mỗi dãy là $x, y\left(x, y \in \mathbb{N}^{*}, x \geq 8, y \leq 5\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} xy=40 \\ (x+1)(y+2)=66 \end{cases}$.

Giải HPT, ta được $x=10; y=4$ (TMĐK). Kết luận.

11B. Gọi số hàng cần vận chuyển là x (tấn, $x>5$);

Số xe tham gia chở hàng là y (xe, $y \in \mathbb{N}^{*}$).

Theo bài ra, ta có HPT: $\begin{cases} 15y=x-5 \\ 17y=x+9 \end{cases}$.

Giải HPT được $x=110; y=7$ (TMĐK). Kết luận.

12. Gọi vận tốc ô tô đi trên đoạn đường nhựa là $x\left(x>30, km/h\right)$.

Suy ra vận tốc của xe đi trên đoạn đường đá là $x-30\left(km/h\right)$.

Theo đề bài, ta có: $\frac{9}{4}x+\frac{3}{2}(x-30)=180$.

Giải PT ta được $x = 60$ (TMĐK).

Kết luận.

13. Gọi vận tốc và thời gian dự định đi từ A đến B của người đó lần lượt là $x\left(km/h, x > 15\right)$ và y (giờ, $y > 1$). Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases}(x+10)(y-1) = xy \\ (x-15)(y+4) = xy\end{cases}$.

Giải HPT ta được $x = 30, y = 4$. Kết luận.

14. Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là $x, y\left(km/h, x > 10, x > y > 0\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases}x - y = 10 \\ \dfrac{100}{y} - \dfrac{100}{x} = \dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Giải HPT ta được $x = 50, y = 40$ (TMĐK). Kết luận.

15. Gọi vận tốc người đi từ A, xe đi từ B lần lượt là $x, y\left(km/h, x > y > 0\right)$.

Theo bài ta, ta có HPT: $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y = 30 \\ 2x - 2y = 30\end{cases}$.

Giải hệ ta được $x = 30; y = 15$ (TMĐK). Kết luận.

16. Gọi vận tốc riêng của xuồng máy là $x\left(km/h, x > 3\right)$.

Theo đề bài, ta có PT: $\dfrac{30}{x+3} + \dfrac{28}{x-3} = \dfrac{59,5}{x}$.

Giải PT ta được $x = 17$ (TMĐK). Kết luận.

17. Gọi vận tốc của ca nô là $x\left(km/h, x > 3\right)$.

Thiết lập được PT: $\dfrac{40}{x+3} + \dfrac{32}{x-3} = \dfrac{8}{3}$.

Giải PT ta được $x = 27$ (TMĐK). Kết luận.

18. Gọi số sản phẩm dự kiến làm trong một giờ của người công nhân là $x\left(x \in \mathbb{N}^*, x \le 20\right)$.

Theo đề bài, ta có PT: $\dfrac{72}{x} = \dfrac{80}{x+1} - \dfrac{1}{5}$.

Giải PT ta được $x=15$ (TMĐK). Kết luận.

19. Gọi thời gian vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ, $x, y > \frac{24}{5}$).

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} \\ \frac{4}{3x}=\frac{1}{2y}+\frac{1}{8} \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=8, y=12$ (TMĐK).

Kết luận.

20. Gọi số xe ban đầu là $x\left(x\in\mathbb{N}, x>3\right)$.

Theo đề bài, ta có PT: $\frac{60}{x-3}=\frac{60}{x}+1$.

Giải PT ta được $x=15$ (TMĐK).

Kết luận.

21. Gọi số ghế dài và số học sinh trong lớp học lần lượt là $x, y\left(x, y\in\mathbb{N}, y>6, x>1\right)$ (ghế, học sinh).

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} 3x=y-6 \\ 4\left(x-1\right)=y \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=10; y=36$ (TMĐK).

Kết luận.

22. Gọi chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là $x, y\left(m, 0<x<y<14\right)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} 2x+2y=28 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$.

Giải HPT ta được $x=6, y=8$ (TMĐK).

Kết luận.

23. Gọi chiều rộng, chiều dài của khu vườn hình chữ nhật lần lượt là $x, y\left(m, x>6, y>6\right)$.

Ta có HPT: $\begin{cases} 2x+2y=280 \\ (x-6)(y-6)=3996 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $x=60; y=80$ (TMĐK).

Kết luận.

24. Gọi chiều rộng, chiều dài của thửa ruộng lần lượt là $x, y(m; x>2, y>2)$.

Ta có HPT: $\begin{cases} (x+3)(y+2)=xy+100 \\ (x-2)(y-2)=xy-68 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $x=14; y=22$.

Kết luận.

25. Gọi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đó lần lượt là

$a, b(a, b \in \mathbb{N}, 0<a\leq 9, 0\leq b\leq 9)$

.

Theo đề bài ta có HPT: $\begin{cases} (10a+b)(a+b)=900 \\ (10b+a)(a+b)=684 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $a=7; b=5$ (TMĐK).

Kết luận.

26. Tương tự 6A. Các phân xưởng I, II phải làm theo kế hoạch lần lượt là 240 và 300 chi tiết máy.

27. Gọi số học sinh dự thi vào lớp 10 THPT của trường A và trường B lần lượt là x và y $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.

Theo đề bài, ta có HPT: $\begin{cases} 0,84(x+y)=210 \\ 0,8x+0,9y=210 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $x=150; y=100$.

Kết luận.

28. Gọi khối lượng riêng của chất lỏng loại I, loại II lần lượt là $x, y\left(kg/m^3, x>y>0\right)$.

Sử dụng công thức tính khối lượng riêng $D = \frac{m}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng, m là khối lượng, V là thể tích.

$1kg$ chất lỏng loại I, loại II lần lượt có thể tích $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\left(m^3\right)$.

Sau khi trộn thì thể tích của hỗn hợp là $\frac{7}{700}\left(m^3\right)$.

Ta có HPT: $\begin{cases} x - y = 200 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{7}{700} \end{cases}$. Giải ra ta được $x = 800; y = 600$.

Kết luận.

CHỦ ĐỀ 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1A. a) Với $m = 1$, PT đã cho trở thành $x^2 - 3x - 2 = 0$.

Giải PT được các nghiệm $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

b) Thay $x = 2$ vào PT đã cho ta tìm được $m = -1$.

Với $m = -1$, ta tìm được nghiệm còn lại là $x = -3$.

c) Biến đổi $\Delta = (2m-1)^2 + 16 > 0\ \forall m \Rightarrow$ ĐPCM.

d) Áp dụng hệ thức Vi – ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1x_2 = 2m-4 \end{cases}$.

i) Tính được $x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 + 9$.

Từ đó tìm được $m = \pm 1$.

ii) Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6m \\ x_2 = 1 - 4m \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 = 6m(1-4m) = 2m - 4$.

Giải ra ta được $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{1}{3}$.

iii) Ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

Từ đó tìm được $m=\frac{1}{2}$.

iv) Ta có: $|x_1|+|x_2|=5 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=25(*)$.

Thay $x_1^2+x_2^2=4m^2+9$ và $x_1x_2=2m-4$ vào $(*)$ ta được: $|m-2|=4-m^2$.

Giải ra ta được $m=-1$ hoặc $m=2$.

v) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_1=3x_2$.

Kết hợp với $x_1+x_2=2m+1$ tìm được $\begin{cases} x_1=\dfrac{3(2m+1)}{4} \\ x_2=\dfrac{2m+1}{4} \end{cases}$.

Thay vào $x_1x_2=2m-4$ và giải ra ta được $m\in\varnothing$.

e) Với mọi m, PT luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Từ hệ thức Vi – ét, khử m ta tìm được hệ thức $x_1+x_2-x_1x_2=5$ không phụ thuộc m.

g) i) PT có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0$.

Từ đó tìm được $m<2$.

ii) PT có hai nghiệm cùng dấu âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ge 0 \\ x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$.

Giải ra ta được $m\in\varnothing$.

iii) PT có hai nghiệm trái dấu, nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} ac<0 \\ x_1+x_2<0 \end{cases}$.

Giải ra ta được $m<-\frac{1}{2}$.

v*) PT có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)<0 \end{cases}$.

Giải ra ta được $m\in\mathbb{R}$.

h) i) Tính được $A=4m^2-8m+29$.

ii) Tìm được $m=-1$ hoặc $m=3$.

iii) Ta có $A=4(m-1)^2+25$.

Từ đó tìm được $A_{\min}=25 \Leftrightarrow m=1$.

k) Ta có: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{205}{4} \end{cases}$.

Giải ra ta được $m=-\dfrac{13}{2}$ (KTM) và $m=\dfrac{13}{2}$ (TM).

l) Với $m \neq 2$, ta tính được: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2m+1}{2m-4}$ và $\dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{1}{2m-4}$.

Từ đó lập được PT bậc hai có hai nghiệm $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2}$ là: $(2m-4)^2-(2m+1)x+1=0$.

1B. a) Tìm được $x=1\pm\sqrt{3}$.

b) Tìm được $m\in\{-1;0\}$.

- Với $m=0$, tìm được nghiệm còn lại là $x=0$.

- Với $m=-1$, PT có nghiệm kép $x=-2$.

c) $\Delta'=(m-1)^2-(m^2-3m)=m+1$.

i) $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>-1$. Giải ra ta tìm được $x_1=m-1\pm\sqrt{m+1}$.

ii) Ta có $\Delta'=0 \Leftrightarrow m=-1$. Giải ra tìm được $x=-2$.

iii) Ta có $\Delta'<0 \Leftrightarrow m<-1$.

d) Xét với $m>-1$:

i) Tìm được m = 2.

ii) Tìm được m = 3 hoặc m = 8.

iii) Tìm được m = 3.

iv) Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Với $x_1x_2 \geq 0$, tìm được $m=-\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2. Với $x_1x_2 < 0$, tìm được $m = \frac{5}{4}$.

e) i) Tìm được 0 < m < 3.

ii) Tìm được m > 3.

iii) Tìm được -1 < m < 0.

iv) Biến đổi được $x_1^2 + x_2^2 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$.

Tìm được $(x_1^2 + x_2^2)_{\min} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

g) i) Tương tự 1A. e). Tìm được $(x_1 - x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 8 = 0$.

ii) Từ $4x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 9 > 1$ tìm được m < 1 hoặc m > 5.

Vậy -1 < m < 1 hoặc m > 5.

iii) Với m > -1, $m \neq 0$ và $m \neq 3$, tính được: $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2(m-1) + \dfrac{2(m-1)}{m^2 - 3m} \\ y_1y_2 = m^2 - 3m + 2 + \dfrac{1}{m^2 - 3m} \end{cases}$

Từ đó ta có PT:

$$y^2 - \frac{2(m-1)(m^2 - 3m + 1)}{m^2 - 3m} + m^2 - 3m + 2 + \frac{1}{m^2 - 3m} = 0.$$

2. PT $x^2 + (m+2)x + 2m = 0 \Leftrightarrow (x+m)(x+2) = 0$.

Từ đó PT luôn có các nghiệm $x_1 = -m$ và $x_2 = -2$.

a) Tìm được $m = -3, x = -2$.

b) i) Tìm được $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{m}{2} + \frac{2}{m} = 2 \Leftrightarrow m = 2$ (TMĐK).

ii) Ta có $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2$ (TMĐK).

iii) Ta có $x_2 = -2 < 0 \Rightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó hai nghiệm cùng dấu âm.

iv) *Trường hợp 1.* Ta có $-3 < -m < -2 \leq 3 \Leftrightarrow 2 < m < 3$.

Trường hợp 2. Ta có $-3 < -2 < -m \leq 3 \Leftrightarrow -3 < m < 2$.

Từ đó $-3 \le m < 2$ hoặc $m > 2$.

c) i) Ta có $\begin{cases} x_1x_2 < 0 \\ 2 > |-m| \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

ii) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = m^2 + 4 = 13 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

d) i) Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4 = (m-4)^2 - 8 \ge -8$.

Từ đó $A_{\min} = -8 \Leftrightarrow m = 4$.

ii) Với $m \ne 0$, tính được $\begin{cases} y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) + \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right) = -(m+2)\dfrac{2m+1}{2m} \\ y_1y_2 = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + 2 = \dfrac{(m+2)^2}{2m} \end{cases}$

Từ đó ta có PT: $2my^2 + (m+2)(2m+1)y + (m+2)^2 = 0$.

BÀI 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1A. a) Khi $m = 1$, ta có HPT $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

Cách 1. *Phương pháp thế*: Rút *y* từ PT đầu của hệ ta thu được $y = 1 - 2x$. Thay vào PT sau của hệ ta tìm được $x = 0$.

Thay $x = 0$ vào $y = 1 - 2x$ ta được $y = 1$.

Vậy nghiệm của HPT khi $m = 1$ là $(0;1)$.

Cách 2. *Phương pháp cộng đại số*: Cộng vế với vế của hai PT của hệ ta được $x = 0$. Thay vào một trong hai PT của hệ ta tìm được $y = 1$.

Kết luận.

b) Thay $x = 2$, $y = -1$ vào HPT ta được $\begin{cases} m = 3 \\ m^2 - 2m + 3 = 0 \end{cases}$.

Giải ra ta được $m = 3$.

c) Rút *y* từ PT sau của hệ ta được $y = mx - m^2 + 2$ (1).

Thay (1) vào PT đầu ta được $(m^2 + m + 1)x = m^3 - 1$ (2).

Vì $m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$ với mọi m nên (2) luôn có nghiệm $x=\frac{m^3-1}{m^2+m+1}$ hay $x=m-1$.

Thay $x=m-1$ vào (1) tìm được $y=2-m$.

Vậy với mọi m, HPT đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(m-1;2-m)$ (ĐPCM).

d) Từ $x=m-1,\ y=2-m$, khử tham số m ta được $x+y=1$. Đây là hệ thức giữa x, y không phụ thuộc m.

e) i) Thay $x=m-1,\ y=2-m$ vào $\sqrt{2x+1}=y$ ta được $\sqrt{2m-1}=2-m$.

Sử dụng công thức $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\A=B^2\end{cases}$ ta tìm được: $m=1$ (TM) hoặc $m=5$ (KTM).

ii) Thay $x=m-1,\ y=2-m$ vào $|x-y|=4-m$ ta được $|2m-3|=4-m$.

Cách 1. Sử dụng *phương pháp chia khoảng*

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $m\geq\frac{3}{2}$ ta có $2m-3=4-m$.

Giải ra ta được $m=\frac{7}{3}$ (TM).

Trường hợp 2. Nếu $m<\frac{3}{2}$ ta có $3-2m=4-m$.

Giải ra ta được $m=-1$ (TM).

Cách 2. Sử dụng *phương pháp biến đổi tương đương*

Sử dụng công thức $|A|=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\A=\pm B\end{cases}$ ta có $\begin{cases}4-m\geq 0\\2m-3=\pm(4-m)\end{cases}$.

Giải ra ta được $m=\frac{7}{3}$ hoặc $m=-1$.

iii) Chú ý $|x|=2|y|\Leftrightarrow x=\pm 2y$. Từ đó tìm được $m=\frac{5}{3}$ hoặc $m=3$.

iv) Ta có $P=-m^2+3m-2=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

Từ đó tìm được $P_{\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

v) Biến đổi được $Q = -1 + \frac{1}{2-m}$. Từ $Q \in \mathbb{Z}$ tìm được $m = 1$ hoặc $m = 3$.

g) i) Từ $x = m-1,\ y = 2-m$ ta có $y = 1-x$.

Vậy $M(x;y)$ luôn nằm trên đường thẳng cố định có phương trình $y = 1-x$.

ii) Thay $x = m-1,\ y = 2-m$ và $OM = 1 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$.

Giải ra ta được $m = 1$ hoặc $m = 2$.

iii) Điểm $M(x;y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được $1 < m < 2$.

iv) Gọi PT đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$.

Thay tọa độ A, B vào $y = ax + b$ tìm được $a = 2,\ b = 1$

$\Rightarrow AB: y = 2x + 1$.

Để M, A, B thẳng hàng thì $M \in AB$. Từ đó tìm được $m = 1$.

v) Ta có $H(m-1;0),\ K(0;-m+2) \Rightarrow OH = |m-1|,\ OK = |-m+2|$.

Chu vi của hình chữ nhật $OHMK$ là $C = 2\left(|m-1| + |-m+2|\right)$.

Chú ý: Sử dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \ge |a+b|$, trong đó dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$ ta được $C_{\min} = 2 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

h) Gọi $M = d_1 \cap d_2 \Rightarrow$ Tọa độ của M là nghiệm của HPT:

$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m-1 \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}.$$

Theo câu c, HPT luôn có nghiệm $M(m-1;-m+2)$.

Để d_1, d_2, d_3 đồng quy thì $M \in d_3$. Từ đó tìm được $m = 1$.

Thử lại thấy với $m = 1$ thì ba đường thẳng phân biệt và đồng quy.

1B. a) Với $m = -3$, giải hệ ta được $(x;y) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

b) Đáp số $m \in \varnothing$.

c) – Với $m \neq 0$, $m \neq 1$ thì HPT có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{m-1}{m}; \frac{1}{m}\right)$.

– Với $m = 0$ thì HPT vô nghiệm.

– Với $m = 1$ thì HPT vô số nghiệm.

d) Có $x + y = 1$ là hệ thức liên hệ độc lập giữa x và y.

e) ĐK: $m \neq 0$, $m \neq 1$.

i) Tìm được $m \in \left\{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\right\}$.

ii) Đáp số: $m = 1$ (TMĐK).

iii) Giải PT $\left|\frac{m-1}{m} - \frac{2}{m}\right| = 5$, ta được: $m \in \left\{-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right\}$.

iv) Giải BPT ta được $\left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

v) $MinP = \frac{3}{4}$ khi $m = 2$.

vi) Đáp số: $m = -1$.

g) i) M luôn thuộc đường thẳng cố định $(d): y = 1 - x$.

ii) $m \in \varnothing$.

iii) Tương tự 1A, tìm được $m = 2$.

iv) Sử dụng định lí Pitago: $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 1$ từ đó tìm được $m = 1$ (KTM).

Vậy $m \in \varnothing$.

h) Tương tự 1A. Đáp số $m = 3$.

2. a) Thay $m = -3$, ta có hệ $\begin{cases} -3x + 4y = -1 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$, giải hệ ta được $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

b) Thay $x = 2, y = 0$ vào HPT ta được $m = 2$.

c) Biến đổi hệ phương trình thành $\begin{cases} x = m - my \\ (m^2 - 4)y = m^2 - m - 2 \qquad (*) \end{cases}$.

- Với $m \neq \pm 2$, PT (*) có nghiệm duy nhất.

Giải hệ ta được nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{m}{m+2} \\ y = \dfrac{m+1}{m+2} \end{cases}$.

- Với $m = -2$, PT vô nghiệm nên HPT vô nghiệm.

- Với $m = 2$, PT vô số nghiệm nên PT có nghiệm $\begin{cases} x = m - my \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

d) Từ $x = \dfrac{m}{m+2}, y = \dfrac{m+1}{m+2}$, khử tham số m ta được $x - 2y = -1$.

Đây là hệ thức giữa *x* và *y* không phụ thuộc vào *m*.

e) Với $m \neq \pm 2$, PT (*) có nghiệm duy nhất. $\begin{cases} x = \dfrac{m}{m+2} \\ y = \dfrac{m+1}{m+2} \end{cases}$.

i) Ta có $x - y = \dfrac{-1}{m+2} > 0 \Leftrightarrow m < -2$.

ii) Có $x + y = \dfrac{2m+1}{m+2}$.

Giải phương trình $\dfrac{2m+1}{m+2} = \dfrac{2m}{m-4} \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{11}$.

iii) Biến đổi PT thành $\left|\dfrac{2}{m+2}\right| + \dfrac{m+1}{m+2} = 3 \quad (1)$.

Giải (1) ta được $m = -\dfrac{3}{2}$ hoặc $m = -\dfrac{7}{2}$.

iv) PT $\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{(m+2)^2} + \dfrac{(m+1)^2}{(m+2)^2} = 2$. Từ đó tìm được $m = -\dfrac{7}{6}$.

v) Thế $x = 2y - 1$ vào biểu thức P và biến đổi ta được:

$$P \Leftrightarrow 2y - 1 - 2y^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MaxP = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 0.$$

vi) Ta có $x = 1 - \dfrac{2}{m+2}, y = 1 - \dfrac{1}{m+2}$.

Để *x, y* đồng thời nguyên $\Rightarrow m + 2 = \pm 1$, hay $m \in \{-1; -3\}$.

g) i) Từ câu d) ta có $x-2y=-1 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

Vậy $M(x,y)$ luôn thuộc đường thẳng $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ khi m thay đổi.

ii) Để $M(x,y)$ thuộc góc phần tư thứ tư:

$\Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $m \in \varnothing$.

iii) Gọi PT đường thẳng AB có dạng $y=ax+b$.

Thay tọa độ A, B vào $y=ax+b$ ta tìm được $a=-2, b=2$.

$\Rightarrow AB: y=-2x+2$.

Để M, A, B thẳng hàng thì $M \in AB$. Từ đó tìm được $m=3$.

iv) Ta có $A\left(\frac{m}{m+2};0\right); B\left(0;\frac{m+1}{m+2}\right)$.

Diện tích hình chữ nhật $OAMB$ là : $S_{OAMB}=OA.OB=1$.

Suy ra $\frac{|m(m+1)|}{(m+2)^2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+m=m^2+4m+4 \\ m^2+m=-(m^2+4m+4) \end{array}\right.$.

Từ đó tìm được $m=-\frac{4}{3}$ (TM).

h*) Gọi M = d₁∩d₂ ⇒ Tọa độ của M là nghiệm của HPT: $\begin{cases} mx+4y=m+2 \\ x+my=m \end{cases}$

Ta có HPT có nghiệm $M\left(\frac{m}{m+2};\frac{m+1}{m+2}\right)$

Khi m ≠ ± 2.

Để d_1, d_2, d_3 đồng quy thì $M \in d_3$. Từ đó tìm được $m=\frac{-7}{2}$ (tm)

Thử lại thấy với $m=\frac{-7}{2}$ thì ba đường thẳng phân biệt và đồng quy.

BÀI 3. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1A. a) với $m=-1$, ta có d: $y=-3x+2$ và (P): $y=-x^2$.

i) HS tự vẽ hình.

ii) Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của PT: $x^2-3x+2=0$.

Giải PT tìm được $x_1=1,\ x_2=2$

$\Rightarrow$ tọa độ hai giao điểm $M(1;-1)$ và $N(2;-4)$.

Ta có $H(1;0),\ K(2;0)$ lần lượt là hình chiếu của M và N lên trục Ox.

Dựa vào hình vẽ ta có

$S_{\Delta MON}=S_{\Delta NOK}-S_{MNKH}-S_{\Delta MOH}$

Từ đó ta tính được $S_{\Delta MON}=1$(đvdt).

b) i) Do d đi qua K nên thay $x=-2;\ y=2$ vào PT của d

$y=(m-2)x+m+3$. Từ đó giải PT tìm được m = 5.

ii)Tìm được $T\left(\frac{-2}{5};\frac{5}{3}\right)$ là tọa độ giao điểm của d1, d2.

Vì ba đường thẳng đồng quy nên đường thẳng d đi qua T.

Từ đó thay tọa độ của T vào Pt của d, ta tìm được $m=-8$

Với $m=-8$ thì d: $y=-10x-5$ phân biệt với d1, d2.

iii) Nhận thấy đường thẳng $y=2$ song song Ox nên từ giả thiết suy ra d tạo với tia Ox một góc 135o.

Vì $\alpha=135^o>90^o$ nên ta sử dụng công thức $\alpha=-tan(180^o-a)$

Từ đó thu được $m-2=-\ tan\ 45^o$. Thực hiện tra bảng hoặc bấm máy tính ta được

$tan\ 45^o=1$ suy ra $m\ =\ 1$.

iv)Vì $\Delta\perp\Delta'\Rightarrow$ hệ số góc của Δ là $\alpha=\frac{-1}{2}$.

Vì Δ đi qua $I(1;2)$ nên ta tìm được PT vủa Δ : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Ta có d// $\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}m-2=-0,5\\ m+3\neq 2,5\end{cases}$. Từ đó tìm được $m=\frac{3}{2}$. .

v) Tìm được $I\left(-1;5\right)$ là điểm có định của d.

Thay tọa độ của I vào (P) tìm được $m=5$.

vi) Với $m\neq 2$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với Ox, Oy.

Ta có công thức tính $S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{1}{2}.\frac{(m+3)^2}{\left|m-2\right|}$.

Từ giả thiết $S_{\Delta OMN}=2\left|m-2\right|$.

Giải PT ẩn m tìm được $m=7;\ m=\frac{1}{3}$ (đều TMĐK $m\neq 2$).

vii) Cách 1: Xét 2 trường hợp.

TH1: $m=2\ \Rightarrow d:\ y=5.$ Ta có khoảng cách từ O đến d bằng 5.

TH2: $m\neq 2\ \Rightarrow$ d cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại M, N.

Gọi H là hình chiếu của O lên d. Công thức tính khoảng cách

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}\Rightarrow OH^2=\frac{1}{2}\frac{(m+3)^2}{(m-2)^2+1}.$$

Nhận xét $OH^2-6\leq 0\Rightarrow OH\leq\sqrt{26}.$

Kết hợp 2 TH suy ra $OH_{max}=\sqrt{26}$ khi $m=\frac{11}{5}$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O lên d.

Ta có $OH\leq OI=\sqrt{26}$ ($I\left(-1;5\right)$ là điểm có định của d).

Suy ra $OH_{max}=\sqrt{26}$ khi d $\perp$ OM.

Sau khi viết PT đường thẳng OM ta tìm được $m=\frac{11}{5}$.

c) Từ giả thiết $d_3 // d_1$ nên hệ số góc của d_3 là $a=2$.

Vì d_3 đi qua $I\left(-1;5\right)$ là điểm có định của d nên ta tìm được PT

của d_3: $y=2x+7$ phân biệt với d_1.

d) PT hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$mx^2-(m-2)x-(m+3)=0$ với $(m\neq 0)$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta>0$ với mọi $m\neq 0$ nên đường thẳng d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

e) i) Từ PT hoành độ giao điểm của d và (P)

Ta có $x_1+x_2=1-\dfrac{2}{m}$ và $x_1x_2=-1-\dfrac{3}{m}$.

Suy ra hệ thức độc lập $3(x_1+x_2)-2x_1x_2=5$.

ii) Biến đổi $Q=(x_1+x_2)-2x_1x_2=\left(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\geq\dfrac{11}{4}$.

Vậy $Q_{\min}=\dfrac{11}{4}\Leftrightarrow m=-4$.

g) i) Để A, B nằm về hai phía đường thẳng Oy thì $x_1x_2<0$.

Giải BPT $-\dfrac{m+3}{m}<0$ tìm được $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-3 \end{array}\right.$

ii) Hai điểm A, B nằm về hai phía đường thẳng x = 1 khi

$x_1<1<x_2\Leftrightarrow(1-x_1)(1-x_2)<0$

Giải BPT $\dfrac{m+1}{m}>0$ tìm được m > 0 hoặc m < -1.

iii) Từ giả thiết $x_1=2x_2$ kết hợp $x_1+x_2=\dfrac{m-2}{m}$.

Giải được $x_1=\dfrac{2(m-2)}{3m}, x_2=\dfrac{m-2}{3m}$ thay vào $x_1x_2=-1-\dfrac{3}{m}$. Giải

PT $\dfrac{2(m-2)^2}{(3m)^2}=-\dfrac{m+3}{m}$ thu được m = -1 hoặc $m=\dfrac{-8}{11}$.

iv) Từ giả thiết AB // d_4 hay d // d_4 tìm được m = 5.

Khi đó tìm được tọa độ hai giao điểm $A\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{64}{5}\right)$ và $B(-1;5)$.

Gọi H,K là hình chiếu của A,B trên Ox $\Rightarrow H\left(\dfrac{8}{5};0\right),K(-1;0)$.

Ta có công thức tính diện tích $S_{\Delta AOB}=S_{ABHK}-S_{\Delta AOK}-S_{\Delta BOH}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AOB} = \dfrac{52}{5}$

1B. Tương tự 1A.

a) i) HS tự vẽ hình

ii) Ta có $S_{\Delta MON} = S_{MOH} - S_{NOK} - S_{MNKH}$, với H, K là hình chiếu vuông góc của M, N trên Ox. Từ đó tính được $S = \dfrac{3}{2}$.

b) i) $m \in \varnothing$.

ii) Tìm được $m = 3 + \sqrt{3}$.

iii) ĐK $m \neq 3$. Ta có d cắt Ox, Oy tại $E(0; m), F\left(\dfrac{-m}{m-3}; 0\right)$.

Xây dựng công thức tính $S_{OEF} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m^2}{|m-3|} = 2$

Từ đó giải được $m = -6$ hoặc $m = 2$ (đều TMĐK).

iv) Tìm được điểm cố định mà d đi qua là $I(-1; 3)$

Từ đó suy ra khoảng cách lớn nhất bằng $\sqrt{10}$ khi $m = \dfrac{10}{3}$.

c) Tìm được đường thẳng $d_3 : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

d) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$2x^2 - (m-3)x - m = 0$, có $\Delta = (m+1)^2 + 8 > 0$

$\Rightarrow d$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

e) i) Tìm được hệ thức: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = \dfrac{-3}{2}$.

ii) Ta có $Q = \left(\dfrac{3}{m} - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{9} \Rightarrow Q_{\min} = \dfrac{8}{9}$ khi $m = 9$.

iii) Giả thiết $\Leftrightarrow x_1 < 0$ và $x_2 < 0$ hay $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1x_2 < 0 \end{cases}$

Từ đó tìm được : $m < 0$.

iv) Biến đổi về phương trình

$$4(x_1x_2)^2 + 2m(x_1x_2)(x_1 + x_2) + m^2(x_1 + x_2) = \frac{3}{2}.$$

Từ đó giải được $m = 1, m = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$.

2. a) i) HS tự vẽ hình.

ii) Ta có $S_{\vartriangle MON} = S_{ONK} - S_{MOH} - S_{KHMN}$, với H, K là hình chiếu vuông góc của M, N trên Ox. Từ đó tính được $S = 4$.

b) i) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

Để (P) và d tiếp xúc thì $\Delta' = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$.

ii) Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{4}$.

iii) Tìm được $M(-9;-7)$ là giao điểm của d_1, d_2.

Từ M thuộc d tìm được $m = \frac{25}{2}$.

iv) Khoảng cách nhỏ nhất $\Leftrightarrow (0;0) \in d$. Tìm được khi $m = \frac{5}{2}$.

c) Do $a = 3 > 0$, sử dụng công thức $\tan\alpha = a = 3$.

d) Tìm được $I(-1;2)$ là điểm cố định của d_4.

Vì các đường thẳng d là song song với nhau nên: $d_3 \perp d \Leftrightarrow 3a_3 = -1$.

Từ đó tìm được PT đường thẳng $d_3 : y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

e) Câu b ý ii) có $m > \frac{1}{4}$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Từ đó ta có $x_1 + x_2 = 6$ và $x_1x_2 = 10 - 4m$.

i) Ta có $y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) + 4m - 10 = 0 \Rightarrow m = -2$.

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{1}{4}$ suy ra $m \in \varnothing$.

ii) Biến đổi $Q = 16m^2 - 72m + 116 = (4m - 9)^2 + 35$.

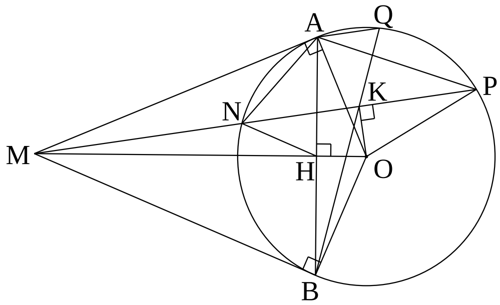
$\Rightarrow Q_{min} = 35$ khi $m = \frac{9}{4}$ (TMĐK $m > \frac{1}{4}$).

iii) Thay $x_2 = 6 - x_1$ vào E, biến đổi ta được : $E = \frac{m^2}{26} + \frac{26}{m^2}$.

Sử dụng BĐT Côsi $\Rightarrow E \ge 2$. Vậy $E_{min} = 2 \Leftrightarrow m = \sqrt{26}$ (TM).

CHỦ ĐỀ 4: SỬ DỤNG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ NHIỀU Ý HỎI ĐỂ ÔN TẬP CHO HỌC SINH ÔN THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

1A. 1. Chứng minh $\widehat{OKM} = \widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^0$.



2. Dùng kết quả câu 1, tứ giác MAKB nội tiếp, chú ý $MA = MA \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{BKM}$.

3. Chứng mình được

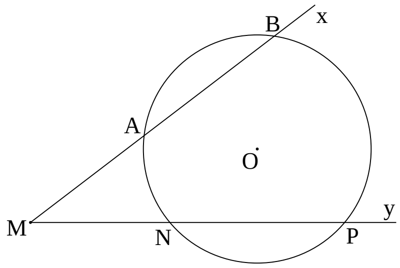
$$\widehat{AQB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKB}$$

$\Rightarrow$ DPCM

4. Chứng minh được $OM \perp AB$, dùng hệ thức lượng cho tam giác vuông

$$MAO \Rightarrow MH.MO = MA^2.$$

Chú ý $\Delta MAN \sim \Delta MPA\,(g.g) \Rightarrow MN.MP = MA^2$.



5. Từ kết quả câu 4 $\Rightarrow \Delta MNH \sim \Delta MOP\,(c.g.c)$.

$\Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{MOP} \Rightarrow$ ĐPCM.

Tổng quát: Trên tia Mx lấy hai điểm A,B sao cho $MN < MP$.. Khi đó ABPN là tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow MA.MB = MN.MP$.

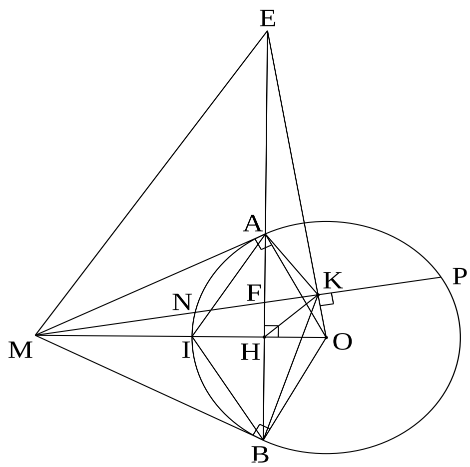
6. Vì $AB = 2AH$ nên $AB^2 = 4.HE.HF \Leftrightarrow AH^2 = HE.HF$.

Dùng hệ thức lượng co tam giác $MAO \Rightarrow AH^2 = HM.HO$.

Chứng minh được $\Delta HMF \sim \Delta HEO\,(g.g)$.

$\Rightarrow HE.HF = HM.HO \Rightarrow$ ĐPCM.

7.Chứng minh được *MEKH* là tứ giác nội tiếp, dùng kết quả tổng quát ở câu 5 ta có:
$OK.OE = OH.OM = OA^2 = R^2$ không đổi.



Từ $OK.OE = R^2 = ON^2 = OP^2$

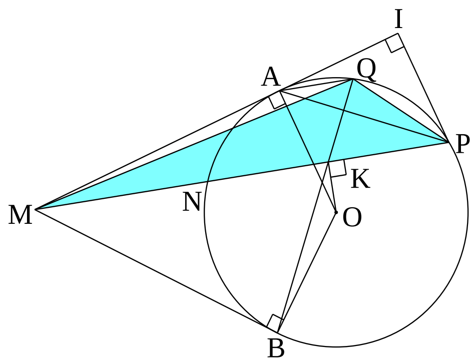
$\Rightarrow \widehat{ENO} = 90^0 \Rightarrow$ ĐPCM

8.Vì MO là trung trực của AB nên $IA = IB$

$\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI$ là phân giác góc $\widehat{MAB}$, chú ý MI là phân giác $\widehat{AMB} \Rightarrow$ ĐPCM

9. Từ câu 2 $\Rightarrow KF$ là phân giác góc $\widehat{AKB}$, chú ý $KE \perp KF$ nên KE là phân giác góc ngoài tại đỉnh K. Dùng tính chất đường phân giác với $AKB \Rightarrow AE.BF = AF.BE$.

10. Nhận xét: P, Q thay đổi nên ΔMQP có độ dài cả ba cạnh đều thay đổi gay khó khăn do đó cần đưa về tam giác có nhiều yếu tố cố định hơn.



Từ kết quả câu 3 $\Rightarrow AQ // MP \Rightarrow S_{QMP} = S_{AMP}$.

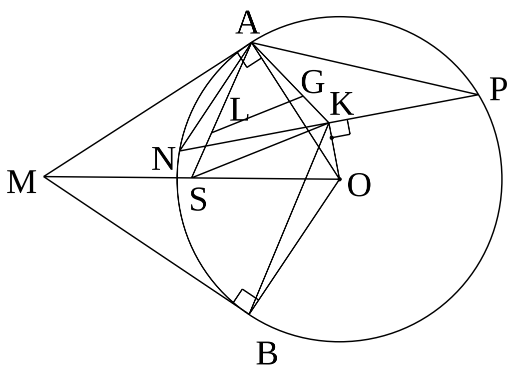
Kẻ $PJ \perp MA$ ta có: $S_{AMP} = \frac{1}{2} AM.PJ$

Do AM không đổi $\Rightarrow S_{AMP\max} \Leftrightarrow PJ_{\max}$

Vì $PJ \le PA \le P'A \Leftrightarrow P \equiv P'$ (P' đối xứng với A qua O).

Vậy $S_{MQP\max} \Leftrightarrow P \equiv P'$.

11. Gọi S là trung điểm OM , từ G kẻ $GL // KS$.



Vì AS cố định và $\frac{AL}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow L$ cố định.

Lại có $LG = \frac{2}{3} SK = \frac{1}{3} OM$ không đổi.

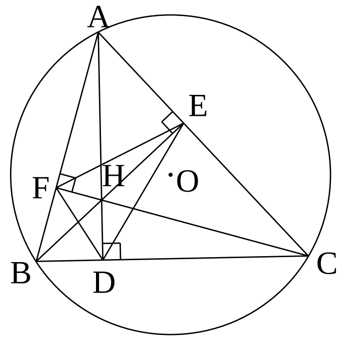
Bởi vậy G luôn chạy trên đường tròn $\left(L; \frac{1}{3} OM \right)$ cố định.

Do $OK.OE$ không đổi $\Rightarrow E$ thuộc đường OK cố định trên đó E cách O cố định một đoạn $OE = \frac{R^2}{OK}$ không đổi. Vậy E là điểm cố định mà AB luôn đi qua.

12. Từ $MO = 2R$ tính được $\widehat{MOA} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$

Diện tích hình quạt cần tính là $S = \frac{\pi R^2}{3}$.

1B.



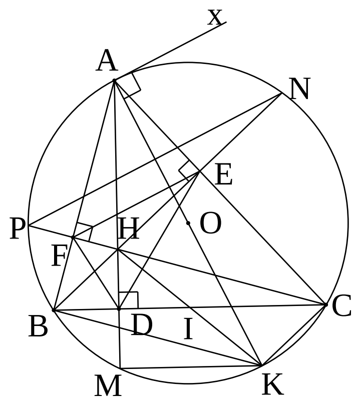
1. Chứng minh được $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$; $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^0 \Rightarrow$ ĐPCM

2. $\Delta ABE \sim \Delta ACF\,(g-g) \Rightarrow$ ĐPCM

3. Chứng minh được:

$\widehat{BED} = \widehat{BAD} = \widehat{BCF} = \widehat{BEF} \Rightarrow EH$ là tia phân giác của $\widehat{DEF}$.

Chứng minh tương tự FH là tia phân giác của $\widehat{DFE} \Rightarrow$ ĐPCM



4. Chứng minh được $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 60^0$, vì vậy diện tích hình quạt cần tính là: $S = \dfrac{\pi R^2}{6}$

5. Chứng minh được: $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{HBC} \Rightarrow BC$ là phân giác $\widehat{HBM}$

Chú ý tam giác BHM cân nên BC là trung trực của $HM \Rightarrow$ĐPCM

6. Chứng minh được EF là đường trung bình của tam giác $HPN \Rightarrow PN\,//\,EF$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AP} \Rightarrow AN = AP \Rightarrow OA$ là trung trực của NP

$\Rightarrow OA \perp NP \Rightarrow OA \perp EF$

Cách khác: Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O).

Ta có: $\widehat{xAC} = \widehat{ACK} = 90^0 \Rightarrow K \in (O)$.

8. Chứng minh được $\widehat{AMK} = 90^0 \Rightarrow MK\,//\,BC$, chú ý rằng $CM = CH = BK \Rightarrow$ ĐPCM

9. Bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH, EF là dây

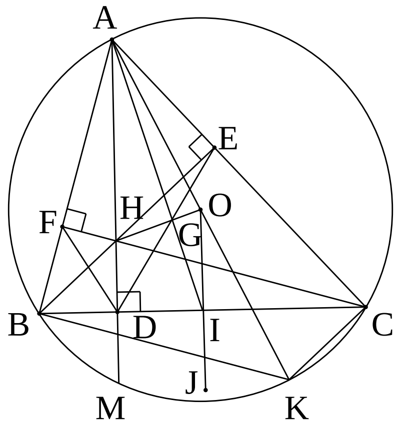
$\Rightarrow EF < AH \Rightarrow PN = 2EF < 2AH$.

10. Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác AHK

$\Rightarrow AH = 2OI \Rightarrow \dfrac{AG}{GI} = \dfrac{AH}{OI} = 2$

Chú ý AI là đường trung tuyến của tam giác $ABC \Rightarrow G$ là trong tâm tam giác ABC.

11. Ta có



$OH//BC \Leftrightarrow OI = HD \Leftrightarrow HD = \dfrac{AH}{2} \Leftrightarrow HD = \dfrac{AD}{3}$

$\Leftrightarrow DB.DC = \dfrac{DA^2}{3}$ (Do $\Delta HDC \sim \Delta BDA(g-g)$)

$\Rightarrow DB.DC = DH.DA \Leftrightarrow \dfrac{DA}{DB}.\dfrac{DA}{DC} = 3$

$\Leftrightarrow \tan B.\tan C = 3$

12. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔAEF là $\dfrac{AH}{2} = OI$ không đổi

Có $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}$ không đổi $\Rightarrow \widehat{BHC} = 180^0 - \widehat{BAC}$ không đổi

$\Rightarrow H \in \overset{\frown}{BC}$ chứa góc $180^0 - \widehat{BAC}$, cung này thuộc đường tròn tâm J bán kính $JB = JC = OA$

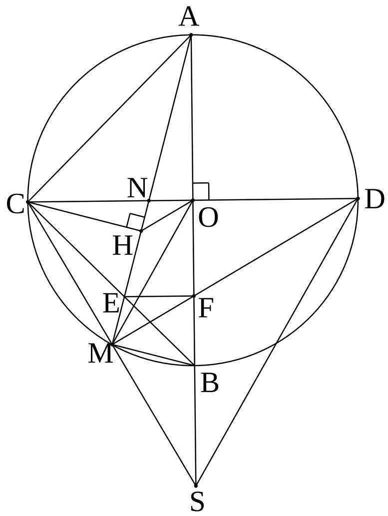
Tâm J thuộc trung trực của BC và cách O một khoảng là $OJ = AH$.

13. Do $\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{FE}{BC} = \dfrac{AE}{AB} = \cos\widehat{BAC}$

$\Rightarrow EF = BC.\cos\widehat{BAC}$ không đổi, khi đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{FE}{BC}\right)^2 \to S_{AEF} = S_{ABC}.\left(\dfrac{FE}{BC}\right)^2$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow S_{ABC\max} \Leftrightarrow AD_{\max} \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$.

2.



1. Chứng minh được

$\widehat{AOC} = \widehat{AHC} = 90^0$; $\widehat{DOS} = \widehat{DMS} = 90^0$; $\widehat{EMF} = \widehat{EBF} = 45^0 \Rightarrow$ ĐPCM

2. Chứng minh $\widehat{EFB} = 90^0$, từ đó $ACEF$ là tứ giác nội tiếp, dùng kết quả tổng quát ở câu 5 bài 1A có

$SM.SC = SA.SB;\ BE.BC = BF.BA$

3. Dùng kết quả tổng quát ở câu 5 bài 1A thu được:

$AN.AM = AO.AB = 2R^2$; $CM.CS = CO.CD = 2R^2$ không đổi khi M di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

4. Chứng minh được $\widehat{HOC} = \widehat{HAC} = \widehat{MDC} \Rightarrow OH // DM$

Chú ý $\widehat{HOC} = \widehat{MDC} = \dfrac{\widehat{MOC}}{2} \Rightarrow OH$ là phân giác góc $\widehat{COM}$.

5. Chú ý ΔBFE vuông cân tại F $\Rightarrow EB = \sqrt{2}.\text{EF}$

6. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMC

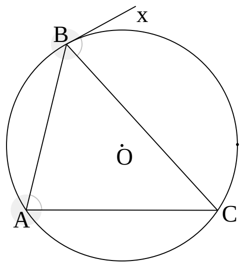
$\Leftrightarrow HO = HC = HM \Leftrightarrow \widehat{CAH} = \widehat{OAH}$

$\Leftrightarrow AM$ là phân giác $\widehat{CAB}$ $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

7.Dùng kết quả tổng quát ở câu 5 bài 1A ta có: $AM.AE = AF.AB$; $BE.BC = BF.AB$.

Bởi vậy $AM.AE + BE.BC = AB^2 = 4R^2$ không đổi khi M di chuyển trê cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

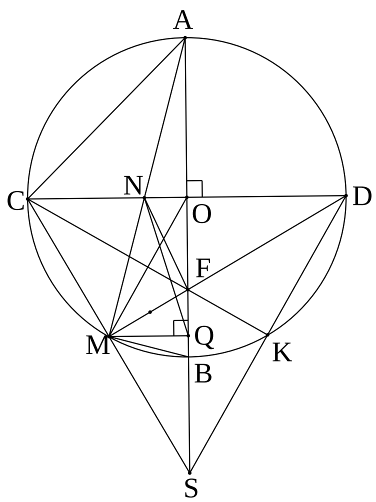
8.Chứng minh được $\widehat{ECF} = \widehat{EAF} = \widehat{ECM} \Rightarrow CE$ là phân giác góc $\widehat{MCF}$, chú ý ME là phân giác góc $\widehat{CMF}$ nên E là tâm đường tròn nội tiếp ΔCFM luôn thuộc đường thẳng BC cố định.



9. <u>*Định lí*</u>: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), tia Bx nằm trong góc $\widehat{BAC}$ và thỏa mãn $\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$. Khi đó Bx là tiếp tuyến của (O).

Chứng minh được: $\widehat{BSM} = \widehat{ODM} = \widehat{CBM}$,

theo định lí BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBMS



10.Chứng minh được F là trực tâm $\Delta CSD \Rightarrow CF \perp DS$.

Chú ý $CF \perp DK \Rightarrow$ 3 điểm D, K, S thẳng hàng

11. Chứng minh được $QN \perp AM \Leftrightarrow AQ^2 = AN.AM$. Theo kết quả câu 2 có $AN.AM = 2R^2 \Rightarrow AQ = R\sqrt{2}$

Lấy Q' thuộc AB sao cho $AQ' = R\sqrt{2}$, M' thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ sao cho

$M'Q' \perp AB$. Khi đó $QN \perp AM \Leftrightarrow M \equiv M'$

12.Chú ý $O' \in DM$, chứng minh được

$\widehat{DBO'} = 45^0 + \frac{\widehat{MBA}}{2}$; $\widehat{DO'B} = 45^0 + \frac{\widehat{MBA}}{2}$ do đó $\Delta DO'B$ cân ở D $\Rightarrow DA = DB = DO'$

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta AO'B$ là $R\sqrt{2}$.

13. Chú ý $\Delta AND \sim \Delta FDA$ $(g-g) \Rightarrow AF.ND = AD^2 = 2R^2$

Vì $FA \perp ND \Rightarrow S_{ANFD} = \frac{1}{2}AF.ND = R^2$ không đổi khi M di chuyển trên cung $\overset\frown{BC}$.

$S_{MNF} + S_{ANFD} = S_{AMD}$ mà S_{ANFD} không đổi

$\rightarrow$ cần tìm để S_{AMD} lớn nhất, do AD không đổi

$\rightarrow$ S_{AMFD} nhớn nhất $\Leftrightarrow S_{MNF}$ lớn nhất khi M ở chính giữa $\overset\frown{BC}$ nhỏ.

14. Chú ý $S_{OQM} = \frac{1}{2}QM.QO \leq \frac{QM^2 + QO^2}{4} = \frac{R^2}{4}$

$\Rightarrow S_{OQM\max} = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow QM = QO \Leftrightarrow \widehat{MOQ} = 45^0$

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset\frown{BC}$.

CHỦ ĐỀ 5. BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN
BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1A *Sai lầm thường gặp:* Vì $x \geq 2 > 0$ nên theo BĐT Cô-Si, ta có:

$$P = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow P_{\min} = 2$$

Sai lầm vì dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1 \ (KTM \ x \geq 2)$.

Gợi ý hướng giải: Dự đoán $P_{\min}$ đạt được tại $x = 2$.

Ta có $P = mx + \frac{1}{x} + x - mx$. Dấu "=" khi $\begin{cases} mx = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Từ đó dẫn đến biến đổi $P = \frac{3x}{4} + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)$ trong đó $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{x}} = 1$ (BĐT Cô-si)

và dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2$. Từ đó tìm được $P_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$

1B Tương tự 1A. Biến đổi $P = \frac{8x}{9} + \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right)$. Từ đó tìm được: $Q_{\min} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = 3$

2A. ***a)*** Ta có: $A = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2} = t + \frac{1}{t}$ với $t = \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$.

Từ kết quả câu 1A, ta có $A_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$.

b) Ta có : $B = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + xy + y^2 - 1} = t + \frac{1}{t} - 1$ với $t = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy} \geq 3$

Từ kết quả của 1B, ta có : $B_{\min} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = y$.

c) Ta có $C = \frac{(x+y)^2}{xy} + \frac{6xy}{(x+y)^2} - 4 = t + \frac{6}{t} - 4$ với $t = \frac{(x+y)^2}{xy}$

Biến đổi $C = \frac{5t}{8} + \left(\frac{3t}{8} + \frac{6}{t}\right) - 4 \ge \frac{3}{2}$

Tìm được $C_{\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow x = y$

d*) Đặt $t = \frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}$

Sử dụng BĐT $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ suy ra $t \ge 3$

Từ kết quả của 1B, ta có : $D_{\min} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$

2B ***a)*** Ta có : $A = \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{2xy}{x^2+y^2} = t + \frac{2}{t}$ với $t = \frac{x^2+y^2}{xy} \ge 2$

Từ $M = \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right) \ge 3$, tìm được $M_{\min} = 3 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$

b) Biến đổi ta được $N = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} + 1 = t + \frac{1}{t} + 1$ với $t = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \ge 1$

Từ đó tìm được $N_{\min} = 3 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y$

c) Biến đổi được $P = \frac{(x+y)^2}{xy} + \frac{4xy}{(x+y)^2} - 4 = t + \frac{4}{t} - 4$ với $t = \frac{(x+y)^2}{xy} \ge 4$

Ta có : $P = \frac{3t}{4} + \left(\frac{t}{4} + \frac{4}{t}\right) \ge 5$ từ đó $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow x = y$

d) Ta có : $Q = t + \frac{1}{t}$ với $t = \frac{(x+y+2)^2}{xy + 2(x+y)} \ge 3$

Từ đó tìm được $Q_{\min} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = y = 2$

3A. ***a)*** Biến đổi được : $A = \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \left(4y + \frac{1}{y}\right) - 3(x+y) \ge 5$

Từ đó: $A_{\min} = 5 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

b) Ta có: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4}$

Biến đổi được: $B = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(16xy + \frac{1}{xy}\right) - 15xy \ge \frac{25}{4}$

Từ đó ta biến đổi được: $B_{\min} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

c) Ta có $C \ge 2\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = 2\left[\left(16xy + \frac{1}{xy}\right) - 15xy\right]$

Mà $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4}$, từ đó ta suy ra được $C \ge \frac{17}{2}$

Vậy $C_{\min} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

d) *Cách 1*. Sử dụng BĐT: $a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$, ta có:

$$D \ge \frac{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2}{2} = \frac{A^2}{2} \ge \frac{25}{2} \Rightarrow D_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Cách 2. Sử dụng BĐT Cô-Si, ta có :

$$D \ge 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2B \ge \frac{25}{2} \Rightarrow D_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Cách 3. Biến đổi ta được :

$$D = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 4 = C + 4 \ge \frac{25}{2} \Rightarrow D_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

3B. ***a)*** Biến đổi được : $A = \left(2x + \frac{2}{x}\right) + \left(2y + \frac{2}{y}\right) - (x+y) \ge 6$

Từ đó $A_{\min} = 6 \Leftrightarrow x = y = 1$

b) Biến đổi được $B = 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4\left(xy + \frac{1}{xy}\right) - 3xy \ge 9$

Trong đó $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = 1$. Vậy $B_{\min} = 9 \Leftrightarrow x = y = 1$

c) Tương tự 3A.

d) Tương tự 3A, ta có:

Cách 1. $D \ge \frac{A^2}{2} \ge 18 \Rightarrow D_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = y = 1.$

Cách 2. $D \ge 2B \ge 18 \Rightarrow D_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = y = 1.$

Cách 3. $D = C + 8 \ge 18 \Rightarrow D_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = y = 1$

4A. *a)* Ta có : $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x+1)$

Tương tự ta được : $\sqrt{y} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3y+1)$; $\sqrt{z} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3z+1)$

Do đó : $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

b) Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $\sqrt{x+2y} \le \frac{x+2y+1}{2}$

Đánh giá tương tự với các biểu thức : $\sqrt{y+2z}$; $\sqrt{z+2x}$.

Từ đó ta được : $\sqrt{x+2y} + \sqrt{y+2z} + \sqrt{z+2x} \le \frac{3(x+y+z)+3}{2} = 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

c) Ta có : $\sqrt[3]{xy} = \frac{\sqrt[3]{3x.3y.1}}{\sqrt[3]{9}} \le \frac{3x+3y+1}{3\sqrt[3]{9}}$

Đánh giá tương tự với các biểu thức : $\sqrt[3]{yz}$; $\sqrt[3]{zx}$

Từ đó suy ra : $\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \le \sqrt[3]{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

d) Ta có : $\sqrt[3]{x} = \frac{\sqrt[3]{3x.1.1}}{\sqrt[3]{3}} \le \frac{3x+1+1}{3\sqrt[3]{3}}$.

Đánh giá tương tự với các biểu thức : $\sqrt[3]{y}$; $\sqrt[3]{z}$

Từ đó suy ra : $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \le \frac{3(x+y+z)+6}{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{9}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

e) Ta có : $\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x}\le\dfrac{6(x+y+z)+12}{3\sqrt[3]{12}}=\sqrt[3]{18}$.

4B. Tương tự **4A.**

a) Ta có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\dfrac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

b) Gợi ý : $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x}\le\dfrac{3(x+y+z)+9}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

c) Gợi ý : $\sqrt[3]{xy}\le\dfrac{x+y+1}{3}$

Ta có : $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx}\le\dfrac{2(x+y+z)+3}{3}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

d) Ta có : $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\le\dfrac{x+y+z+6}{3}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

e) Gợi ý : $\sqrt[3]{x(x+y)}\le\dfrac{2x+x+y+2}{3\sqrt[3]{4}}$

Ta có : $\sqrt[3]{x(x+y)}+\sqrt[3]{y(y+z)}+\sqrt[3]{z(z+x)}\le3\sqrt[3]{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

5A. Điều kiện $x\ge-2;\ y\ge-2$

Biến đổi giả thiết ta có : $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+x^3-y^3=0$

Cách 1 : TH1 : $x>y\ge-2$ ta có : $\sqrt{x+2}>\sqrt{y+2}$ và $x^3>y^3$

Suy ra: $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+x^3-y^3>0$ (mâu thuẫn)

TH2: $-2\le x<y$ suy ra $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+x^3-y^3<0$

Vậy ta được: $x=y$

Cách 2: Trục căn thức ta có: $\dfrac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\left(x^2+xy+y^2\right)\right]=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ chứng minh được

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\left(x^2+xy+y^2\right)>0,\ \forall x,y\geq -2$$

a) *i)* Ta có: $A=x^2+2x+10=(x+1)^2+9\geq 9,\quad \forall x\geq -2$

Vậy $A_{\min}=9 \Leftrightarrow x=-1=y$

ii) Biến đổi thành:

$B=\dfrac{2\left(x^2+7\right)}{x+3}=2\left[x+3+\dfrac{16}{x+3}-6\right]\geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $(x+3)^2=16$

$x+3\geq 0 \Rightarrow x=1$. Mà $x+3>0$ nên $B\geq 4$. Vậy $B_{\min}=4 \Leftrightarrow x=1=y$

b) Ta có: $C=\dfrac{2x}{x^2+4}$. Xét $\dfrac{1}{C}=\dfrac{x^2+4}{2x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$

+ Nếu $x>0 \Rightarrow \dfrac{1}{C}\geq 2 \Leftrightarrow 0<C\leq \dfrac{1}{2}$

+ Nếu $-2<x<0 \Rightarrow \dfrac{1}{C}\leq 2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq C<0$

Vậy $C_{\max}=\dfrac{1}{2}$ khi $x=y=2$; $C_{\min}=-\dfrac{1}{2}$ khi $x=y=-2$

5B. Tương tự 5A, ta có: $x=y$

a) *i)* $A_{\min}=2017 \Leftrightarrow x=-1$ *ii)* $B_{\min}=4 \Leftrightarrow x=1$

b) $C_{\max}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=3$

6A. Biến đổi giả thiết về dạng : $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6$

Đặt $a=\dfrac{1}{x};\ b=\dfrac{1}{y};\ c=\dfrac{1}{z}$. Bài toán thành :

Chứng minh $a^2+b^2+c^2\geq 3$ với $a,\ b,\ c>0$ thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$

Thật vậy, sử dụng BĐT Cô-si, ta có:

$a^2+b^2+c^2=a^2+1+b^2+1+c^2+1-3\ge 2(a+b+c)-3$

$2(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2\ge 2(ab+bc+ca)$

Cộng theo vế của hai BĐT trên ta được :

$3(a^2+b^2+c^2)\ge 2(a+b+c+ab+bc+ca)-3=9$

Do đó $a^2+b^2+c^2\ge 3$ hay $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\ge 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

6B. Tương tự như ***6A*.**

Bài toán trở thành: Chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 3$ với $a,\ b,\ c>0$ thỏa mãn

$a+b+c+2ab+2bc+2ca=9$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge 2(a+b+c)-3$

$4(a^2+b^2+c^2)\ge 4(ab+bc+ca)$

Từ đó ta được: $5(a^2+b^2+c^2)\ge 15$

Do đó: $a^2+b^2+c^2\ge 3$ hay $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\ge 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

7A. Sử dụng BĐT Cọ-si, ta có:

$P=\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{y^2+z^2}{2}+\dfrac{z^2+x^2}{2}\ge xy+yz+zx=9$

Suy ra : $P_{\min}=9\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$

Ta lại có : $(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)\ge 0$

$\Rightarrow 2(x+y+z)\le xy+yz+zx+3\Rightarrow x+y+z\le 6$

Bởi vậy $P=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\le 18$

Từ đó : $P_{\max}=18$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1,\ z=4$

7B. Sử dụng BĐT : $x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$, ta được : $P\ge\dfrac{16}{3}$

Vậy $P_{\min}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{4}{3}$

Tương tự 7A, ta có $xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)-3=5$, nên :

$P=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\leq 6$

Khi $x=y=1,\ z=2\Rightarrow P=6$, từ đó $P_{\max}=6$

8A. Điều kiện $x\geq -6,\ y\geq -6$, biến đổi giả thiết ta có :

$x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}$

Bởi vậy $P=x+y\geq 0$, mặt khác $P^2=P+12+2\sqrt{(x+6)(y+6)}$

Suy ra $P^2\geq P+12\Rightarrow (P-4)(P+3)\geq 0\Rightarrow P\geq 4$ (Vì $P\geq 0$)

Vậy $P_{\min}=4$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-6,\ \ y=10$

Sử dụng BĐT Cô-si, ta có :

$2\sqrt{(x+6)(y+6)}\leq x+y+12=P=12$

Suy ra $P^2\leq 2P+24\Rightarrow (P-6)(P+4)\leq 0\Rightarrow P\leq 6$ (do $P>0$)

Vậy $P_{\max}=6$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

8B. Tương tự **8A**.

Cần tìm GTLN, GTNL của biểu thức $(x+y)$

Từ đó tìm được : $P_{\min}=2019\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

$P_{\max}=2018+\sqrt{5}$ khi $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9A. Sử dụng BĐT Cô-si ta có:

$2y\geq xy+4\geq 4\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{y}{x}\geq 4$

a) Biến đổi được $A=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{16x}\right)+\frac{31}{16}.\frac{y}{x}\geq\frac{33}{4}$

Từ đó tìm được : $A_{\min} = \frac{33}{4} \Leftrightarrow x = 1,\ \ y = 4$

b) *i)* Ta có : $A, B > 0 \Rightarrow B = \frac{1}{A} \le \frac{4}{33}$

Vậy $B_{\max} = \frac{4}{33}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = 4$

ii) Xét biểu thức $\frac{1}{C} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{16x}\right) + \frac{15}{16}.\frac{y}{x} \ge \frac{25}{4}$

Do $C > 0$ nên $C \le \frac{4}{25}$

Vậy $C_{\max} = \frac{4}{25}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = 4$

9B. Tương tự **9A**, ta có $\frac{x}{y} \ge 4$. Từ đó tìm được

a) $A_{\min} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow x = 6,\ y = \frac{3}{2}$

b) *i)* $B_{\max} = \frac{4}{17} \Leftrightarrow x = 6,\ \ y = \frac{3}{2}$ *ii)* $C_{\max} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = 6,\ y = \frac{3}{2}$

10A. ***a)*** Ta có : $\frac{a^3}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \ge a - \frac{b}{2}$

Tương tự : $\frac{b^3}{b^2 + c^2} \ge b - \frac{c}{2};\quad \frac{c^3}{c^2 + a^2} \ge c - \frac{a}{2}$

Do đó $\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \ge \frac{a + b + c}{2} = \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

b) Gợi ý biến đổi : $\frac{a}{1 + b^2} = a - \frac{ab^2}{1 + b^2} \ge a - \frac{ab}{2}$

Biến đổi và đánh giá tương tự với các biểu thức : $\frac{b}{1 + c^2};\quad \frac{c}{1 + a^2}$

Từ đó ta được $VT \ge a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2} \ge \frac{3}{2}$

Do $ab + bc + ca \le \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

c) Chú ý $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a}{2}$

Tương tự $\frac{1}{b^2+1}\ge 1-\frac{b}{2}$; $\frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2}$

Do đó chứng minh được $VT\ge 3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

d) Chú ý biến đổi $\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\ge a+1-\frac{(a+1)b}{2}$

Biến đổi và đánh giá tương tự với các biểu thức $\frac{b+1}{c^2+1}$; $\frac{c+1}{a^2+1}$

Từ đó ta được: $VT\ge 3+\frac{a+b+c}{2}-\frac{ab+bc+ca}{2}$

Do $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=a+b+c\Rightarrow VT\ge 3$

đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

e) Chú ý rằng $\frac{a}{b^3+ab}=\frac{1}{b}-\frac{b}{a+b^2}\ge\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Biến đổi và đánh giá tương tự với các biểu thức $\frac{b}{c^3+bc}$; $\frac{c}{a^3+ca}$

Ta được $VT\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{a}}-\frac{1}{2\sqrt{b}}-\frac{1}{2\sqrt{c}}$

Sử dụng BĐT Cô-si ta có: $\frac{1}{2\sqrt{a}}\le\frac{1}{4a}+\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{a}\ge 2-a$, từ đó

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\ge\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}=\frac{3a}{4}-\frac{1}{4}\ge\frac{3}{4}(2-a)-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-\frac{3a}{4}.$$

Suy ra được $VT\ge\frac{15}{4}-\frac{3}{4}(a+b+c)=\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

10B. a) Chú ý $\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{b}{2}$.

b) Chú ý $\frac{a}{1+9b^2}=a-\frac{9ab^2}{1+9b^2}\ge a-\frac{3ab}{2}$ và $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$.

c) Chú ý $\frac{1}{9a^2+1} = 1 - \frac{9a^2}{9a^2+1} \ge 1 - \frac{3a}{2}$.

d) Chú ý $\frac{a+1}{9b^2+1} = a+1 - \frac{9(a+1)b^2}{9b^2+1} \ge a+1 - \frac{3(a+1)b}{2}$ và $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}$.

11A. Gợi ý: Biến đổi $a+1-\frac{a+1}{b+1} = \frac{(a+1)b}{b+1}$.

Đưa bài tóab về chứng minh $\frac{(a+1)b}{b+1} + \frac{(b+1)c}{c+1} + \frac{(c+1)a}{a+1} \ge 3$.

Sử dụng BĐT Cô-si cho ba số hạng ở VT, chú ý abc = 1.

Từ đó suy ra ĐPCM. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

11B. Gợi ý: Biến đổi $a+2-\frac{a+2}{b+2} = \frac{a+2}{2} + \frac{(a+2)b}{2(b+2)}$.

Đưa bài toán về chứng minh BĐT:

$$\frac{a+b+c}{2} + \frac{(a+2)b}{2(b+2)} + \frac{(b+2)c}{2(c+2)} + \frac{(c+2)a}{2(a+2)} \ge 3.$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, chú ý abc = 1, ta có

$$a+b+c \ge 3; \ \frac{(a+2)b}{(b+2)} + \frac{(b+2)c}{(c+2)} + \frac{(c+2)a}{(a+2)} \ge 3.$$

Từ đó suy ra ĐPCM. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

12. Đáp số: $P_{min} = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

13. a) Đặt $t = \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow t \ge 2$, ta có $A = t + \frac{4}{t}$.

$\Rightarrow A_{min} = 4 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$.

b) Đặt $t = \frac{x^2+xy+y^2}{xy} \Rightarrow t \ge 3$, ta có $B = t + \frac{3}{t} - 1$.

$\Rightarrow B_{min} = 3 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = y$.

c) Đặt $t = \frac{(x+y)^2}{xy} \Rightarrow t \ge 4$, ta có $C = \frac{t}{4} + \frac{1}{t} - 1$.

$\Rightarrow C_{min} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow x = y$.

d) Đặt $t = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)^2}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Rightarrow t \ge 3$, ta có $D = t + \frac{1}{t}$.

$\Rightarrow D_{min} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$.

14. a) Chú ý $\sqrt{x+y} = \frac{\sqrt{2\cdot(x+y)}}{\sqrt{2}} \le \frac{x+y+2}{2\sqrt{2}}$.

b) Chú ý $\sqrt{x+2y+3z}=\frac{\sqrt{6\cdot(x+2y+3z)}}{\sqrt{6}}\le\frac{x+2y+3z+6}{2\sqrt{6}}$.

c) Chú ý $\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{x\cdot y\cdot 1}\le\frac{x+y+1}{3}$.

d) Chú ý $\sqrt[3]{x(y+z)}=\frac{\sqrt[3]{2\cdot 2x\cdot(y+z)}}{\sqrt[3]{4}}\le\frac{2x+y+z+2}{3\sqrt[3]{4}}$.

e) Chú ý $\sqrt[3]{3x+5y}=\frac{\sqrt[3]{8\cdot 8\cdot(3x+5y)}}{4}\le\frac{3x+5y+16}{12}$.

15. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có $2\ge x+\frac{4}{y}\ge 4\sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow\frac{y}{x}\ge 4$.

Đặt $t=\frac{y}{x}\Rightarrow t\ge 4$. Ta có:

a) $A=t+\frac{1}{t}\Rightarrow A_{min}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow x=1,\ y=4$.

b) i) $B=\frac{1}{A}\Rightarrow B_{max}=\frac{4}{17}\Leftrightarrow x=1,\ y=4$.

ii) $\frac{1}{C}=2t+\frac{1}{t}+3\Rightarrow C_{max}=\frac{4}{45}\Leftrightarrow x=1,\ y=4$.

16. Đặt $t=\frac{x}{y}\ge 2$, ta có $M=t+\frac{1}{t}\Rightarrow M_{min}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=2y$.

17. Chú ý $\frac{1}{x^2+1}=1-\frac{x^2}{x^2+1}\ge 1-\frac{x}{2}$.

18. Biến đổi được:

$\sqrt{2a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{2a+b+c}{2}$.

Biến đổi tương tự với các biểu thức $\sqrt{2b+ca}$; $\sqrt{2c+ab}$.

Từ đó suy ra $Q\le 2(a+b+c)=4$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$, từ đó $Q_{max}=4$.

19. Ta có $ab=\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}=\frac{(a+b)^2-4}{2}$.

Từ đó biến đổi $M=\frac{a+b-2}{2}$.

Sử dụng BĐT: $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a+b\le 2\sqrt{2}$ nên $M\le\sqrt{2}-1$.

Vậy $M_{max}=\sqrt{2}-1$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\sqrt{2}$.

20. Ta có: $\sqrt{a-2017}=\frac{\sqrt{2018\cdot(a-2017)}}{\sqrt{2018}}\le\frac{a+1}{2\sqrt{2018}}$.

$$\sqrt{b-2018}=\frac{\sqrt{2020\cdot(b-2018)}}{\sqrt{2020}}\le\frac{b+2}{2\sqrt{2020}}.$$

Do đó $P\le\frac{1}{2\sqrt{2018}}+\frac{1}{2\sqrt{2020}}\Rightarrow P_{max}=\frac{1}{2\sqrt{2018}}+\frac{1}{2\sqrt{2020}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=4035,\ b=4038$.

BÀI 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

1A. $VP=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)\Rightarrow$ ĐK: $x\ge\frac{1}{3}$.

Ta có $VT=\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$.

PT $\Leftrightarrow x-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)$. Tìm được $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

1B. Tương tự 1A. ĐK $x\ge-\frac{1}{2}$. PT tương đương

$$\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(2x+1)(x^2+1)\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x+1)(x^2+1)$$

$\Leftrightarrow(2x+1)x^2=0$. Tìm được $S=\left\{-\frac{1}{2};0\right\}$.

2A. a) ĐK: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$.

PT $\Leftrightarrow(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right]=0$$

Với $-\frac{1}{3}\le x\le 6$ thì $\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right]>0$

Vậy $S=\{5\}$.

b) PT $\Leftrightarrow 5x+2+3\sqrt{5x+2}+\frac{9}{4}=x^2+2+5x+2+\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x+2}+\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ với $x\ge\frac{5}{2}$ có

Trường hợp 1. $\sqrt{5x+2}=x+1$ tìm được $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$;

Trường hợp 2. $\sqrt{5x+2}=-(x+4)$ (vô nghiệm).

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3\sqrt{2x-5}+2}=2\sqrt{2}$.

Nhân hai vế với $\sqrt{2}$ đưa về $\left|\sqrt{2x-5}+1\right|+\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=4$ với $x\ge\frac{5}{2}$.

- Với $\sqrt{2x-5}\ge 3$ thì $\sqrt{2x-5}+1>0$ nên có $\sqrt{2x-5}+1+\sqrt{2x-5}-3=4$.

Tìm được x = 7.

- Với $0\le\sqrt{2x-5}<3$ thì $\sqrt{2x-5}+1-\sqrt{2x-5}=4$ đúng với mọi x thuộc tập xác định.

Vậy $\frac{5}{2}\le x\le 7$.

2B. a) ĐK: $x\ge\sqrt[3]{2}$. PT $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta có: $1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3}<2$

$\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2$ nên $x-3=0\Leftrightarrow x=3$. Vậy $S=\{3\}$.

b) PT $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+16}-5|x-1|=4$;

Sử dụng BĐT $\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$ nên

$$\sqrt{(x-1)^2+16}-5|x-1|\le|x-1|+4-5|x-1|=4-4|x-1|$$

Từ đó $4\le 4-4|x-1|\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

3A. Từ phương trình ta thấy x > 0. Chia cả 2 vế cho x ta được

$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\sqrt{3}$. Đặt: $t=x+\frac{1}{x}$, $t\ge 2$

PT trở thành: $\sqrt{t^2-1}=\sqrt{3}(3-t)\Leftrightarrow\begin{cases} t\le 3 \\ t^2-9t+14=0\end{cases}\Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=1$. Vậy $S=\{1\}$.

3B. PT $\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2})=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0\ (*)\end{array}\right.$$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$. ĐK: $t\ge 0$. Ta có $x^2=1-t^2$.

PT trở thành: $1-4t+8t(1-t^2)=0$

$\Leftrightarrow 8t^3 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Tìm được $x = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Thử lại loại nghiệm $x = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Vậy $S = \left\{0; -\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$.

4A. Đặt $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5x+1} = a \\ 2\sqrt{x^2-x+1} = b \end{cases}$. ĐK : $a, b > 0$.

PT trở thành: $a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+5x+1 = 4x^2-4x+4 \\ \sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1} = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ \sqrt{4x^2+5x+1} = 1 - 2\sqrt{x^2-x+1}\ (*) \end{array}\right.$

Ta có (*) vô nghiệm. Vậy $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

4B. ĐK: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Bình phương 2 vế ta có:

$\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)} = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+2x)(2x-1)} = (x^2+2x) - (2x-1)$

Đặt: $\begin{cases} x^2 + 2x = a \\ 2x - 1 = b \end{cases}$. Khi đó: $ab = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}b \\ a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b \end{array}\right.$

Do $a, b \ge 0$ nên $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b \Leftrightarrow x^2 + 2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(2x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(1-\sqrt{5})x + (\sqrt{5}+1) = 0;\ \Delta' < 0$ (vô nghiệm)

Vậy $S \in \varnothing$.

5A. a) PT $\Leftrightarrow x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$

Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$, ta được $x^3 + 2x = t^3 + 2t$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2) + 2(x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2+2) = 0$

Vì $x^2 + xt + t^2 + 2 = \left(x + \dfrac{t}{2}\right)^2 + \dfrac{3t^2}{4} + 2 > 0$ nên $x = t$.

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$.

Tìm được $S=\left\{1;\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5B. Đặt: $\sqrt[3]{3x+2}=t$. PT trở thành $x^3=3t+2$. Lại có: $t^3=3x+2$

Ta có hệ: $\begin{cases} x^3=3t+2 \\ t^3=3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=3t+2 \\ x^3-t^3=3(t-x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=3t+2 \\ (x-t)(x^2+tx+t^2+3)=0\ (*) \end{cases}$. Vì $x^2+tx+x^2+3>0,\ \forall x,t$

$\Rightarrow x-t=0 \Leftrightarrow x=t \Rightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$

Tìm được $S=\{-1;\ 2\}$.

6A. PT $\Leftrightarrow 2x^2+1-(x+5)\sqrt{2x^2+1}+3x+6=0$.

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}\ (t\geq 1)$. PT trở thành: $t^2-(x+5)t+3x+6=0$

$\Delta=\left[-(x+5)\right]^2-4(3x+6)=(x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=x+2 \end{array}\right.$.

$t=3$ tìm được $x=\pm 2$.

$t=x+2$ tìm được $x=2\pm\sqrt{7}$. Vậy $S=\left\{\pm 2;\ 2\pm\sqrt{7}\right\}$.

6B. a) PT $\Leftrightarrow (x^2+5-x\sqrt{x^2+5})+(-3\sqrt{x^2+5}+3x)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}-3)=0$

Vậy $S=\{\pm 2\}$.

b) ĐK: $x\geq -1$. Ta có $x=0$ không nghiệm của PT nên ta nhân hai vế phương trình với $\sqrt{1+x}-1\neq 0$ ta được:

$x(\sqrt{1+x}+2x-5)=x(\sqrt{1+x}-1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}+2x-5)=(\sqrt{1+x}-1) \Leftrightarrow x=2$. Vậy $S=\{2\}$.

Cách khác: Tương tự 1A. Phân tích $x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-1)$.

7A. PT $\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$

Ta có: $VT\geq 5,\ VP\leq 5$. Vì vậy VT = VP = 5.

Dấu "=" $\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Vậy $S=\left\{\dfrac{21+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

7B. a) ĐK: $x\geq 0$. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2 \leq \left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+x+1\right]\left[\frac{1}{x+1}+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$

b) ĐK: $-1 \le x \le 1$. Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$\sqrt{4(1-x^2)x^2} \le \dfrac{4(1-x^2)+x^2}{2} = \dfrac{4-3x^2}{2}$

$\Rightarrow 13\sqrt{x^2-x^4} \le \dfrac{52-39x^2}{4}$ (1)

$\sqrt{9x^2.4(1+x^2)} \le \dfrac{13x^2+4}{2} \Rightarrow 9\sqrt{x^2+x^4} \le \dfrac{39x^2+12}{4}$ (2)

Cộng 2 vế (1) và (2) ta có: $13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} \le 16$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1-x^2) = x^2 \\ 9x^2 = 4(1+x^2) \end{cases}$. Tìm được $S = \left\{ \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \right\}$.

8. ĐK: $x \ge \dfrac{3}{2}$. PT $\Leftrightarrow 4x^2 - 6x + \dfrac{9}{4} = (\sqrt{2x+3})^2 - \sqrt{2x+3} + \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(2x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Tìm được $S = \left\{ \dfrac{5-\sqrt{21}}{4}; \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \right\}$.

9. PT $\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}) = 5x$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{5x} = x \Rightarrow 4x^3 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Do phép thay $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$ là không tương đương nên cần thử lại các giá trị của x vừa tìm được.

Vậy $S = \left\{ 0; \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \right\}$.

10. PT $\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2x)(\sqrt{x+1} - 1) = 0$.

Tìm được: $x = 0$; $x = 1$. Vậy $S = \{0;1\}$.

11. Tương tự **2B**.

PT $\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{3x^2-5x-1} + \sqrt{3x^2-7x+3}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-3x+4}} \right) = 0$

Do $\dfrac{2}{\sqrt{3x^2-5x-1} + \sqrt{3x^2-7x+3}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-3x+4}} > 0$

Nên $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (TMĐK tồn tại căn thức). Vậy $S = \{2\}$.

12. Tương tự 3A.

Ta có $x = 0$ không phải là nghiệm, chia cả hai vế cho x ta được:

$\left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2$. Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$

Ta có $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$. Tìm được $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

13. Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}$, $t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. PT trở thành:

$4t=-t^4+7t^2-5 \Leftrightarrow t^4-6t^2+9-(t^2-4t+4)=0$

$\Leftrightarrow (t^2-3)^2-(t-2)^2=0 \Leftrightarrow (t^2-t-1)(t^2+t-5)=0$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-t-1=0 \\ t^2+t-5=0 \end{array}\right.$. Tìm được: $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

Tìm được $S=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}\right\}$.

14. ĐK: $x\ge-\frac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$ $(t>\sqrt{2})$,

Ta có hệ $\begin{cases} x+1+t=2(x+1)t \\ t^2-\sqrt{x+1}=2 \end{cases}$

$\Rightarrow x+1+t=(t^2-\sqrt{x+1})(x+1)t$

$\Leftrightarrow (t\sqrt{x+1}+1)(t+x+1-t^2\sqrt{x+1})=0$

$\Leftrightarrow (t\sqrt{x+1}+1)(t-2\sqrt{x+1})=0 \Leftrightarrow t=2\sqrt{x+1}$

$\sqrt{\sqrt{x+1}+2}=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.

Tìm được $S=\left\{\frac{-15+\sqrt{33}}{32}\right\}$.

15. a) Đk: $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}=a \\ \sqrt{10-x^2}=b \end{cases}$ (*). Điều kiện $a\ge\sqrt{3};\ 0\le b\le\sqrt{10}$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (a+b)^2-2ab=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

Tìm được $S=\{\pm\sqrt{6};\pm1\}$.

b) Đặt: $\begin{cases}\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}=a\\ \sqrt{2x-\sqrt{x+1}+1}=b\end{cases}$, $a;b\geq 0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases}a+b=2\sqrt{x+1}+1\\ a^2-b^2=2\sqrt{x+1}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{x+1}+1\\ b=\sqrt{x+1}\end{cases}.$$

Tìm được $x=3$.

16. a) Tương tự 2A.

Cách 1. ĐK: $x>0$. Nhân hai vế phương trình với:

$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\neq 0$

Ta được: $6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$ (*)

Cộng hai vế phương trình đã cho với (*) ta được:

$2\sqrt{2x^2+3x+5}=2+3x\Leftrightarrow x=4$. Vậy $S=\{4\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{2x^2+3x+5}=a$, $\sqrt{2x^2-3x+5}=b$.

Ta có: $3x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$.

b) ĐK: $x^3+x^2-1\geq 0\Rightarrow x^3+x^2+2>0$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x^3+x^2-1}\\ b=\sqrt{x^3+x^2+2}\end{cases}$ Với $b>a\geq 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=3\\ b^2-a^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ (b+a)(b-a)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ b-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^3+x^2-1}=1\\ \sqrt{x^3+x^2+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-1=1\\ x^3+x^2+2=4\end{cases}$$

Tìm được $S=\{1\}$.

17. a) ĐK: $5x^2-2\geq 0$.

Cách 1. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}$ $(t\geq 0)$. Ta có $5x^2=6t^2+2$.

PT trở thành $\sqrt[3]{x^3+6t^2+2}-1=t\Leftrightarrow x^3+6t^2+2=(t+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3=(t-1)^3\Leftrightarrow x=t-1\Leftrightarrow t=x+1$

$\Leftrightarrow x=-6+\sqrt{28}$. Vậy $S=\{-6+\sqrt{28}\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt[3]{x^3+5x^2-1}=a$, $\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}=b$.

Giải hệ $\begin{cases} a^3 - 6b^2 = x^3 + 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$

b) Tương tự 4A.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + x + 2} \\ b = \sqrt{x + 3} \end{cases}$. ĐK: $a \geq \frac{\sqrt{7}}{2}; b \geq 0$.

Ta có: $2x^2 - x - 5 = 2a^2 - 3b^2;\ 2x^2 + x + 1 = 2a^2 - b^2$.

Thay vào PT ta được:

$$(2a^2 - 3b^2)a + (2a^2 - b^2)b = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = 1 \text{ hoặc } \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4b}{a} + 2 = 0.$$

- Với: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4\frac{b}{a} + 2 = 0$: PT vô nghiệm do $\frac{b}{a} \geq 0$.

- Với: $\frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow b = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \{-1;1\}$.

18. Tương tự 4A.

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$ nên ĐK: $x \geq -1$.

Ta có $x^2 + 2x + 2 = (x+1) + (x^2 + x + 1)$.

Đặt $a = \sqrt{x+1},\ b = \sqrt{x^2 + x + 1}$. PT trở thành:

$$3(a^2 + b^2) = 10ab \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ a = \frac{b}{3} \end{array}\right.$$

$a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 9x^2 + 8x + 8 = 0$ (vô nghiệm).

$a = \frac{b}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{6}$

Vậy $S = \left\{4 \pm 2\sqrt{6}\right\}$.

19. a) Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $u = 10 + \sqrt{x},\ u \geq 10$

Ta có: $\begin{cases} x = 10 + \sqrt{u} \\ u = 10 + \sqrt{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow x - u - (\sqrt{x} - \sqrt{u}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{u})(\sqrt{x} + \sqrt{u} + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = u \\ \sqrt{u} + \sqrt{x} + 1 = 0\ (*) \end{array}\right.$. Ta có (*) vô nghiệm

$$x = u \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 10 \\ x^2 - 21x + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{21+\sqrt{41}}{2}$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{21+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

b) Tương tự 5B.

Đặt: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+7} = a \\ \sqrt{x} = b \end{cases}$. ĐK: $a \ge \sqrt[3]{7}; b \ge 0$.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^2 = 7 \end{cases}$. Tìm được $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 8 \\ b^{\,2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 7 = 8 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $S = \{1\}$.

20. a) Đặt $x^2 + 3x - 4 = t$. Ta có hệ $\begin{cases} t^2 + 3t = x + 4 \\ x^2 + 3x = t + 4 \end{cases}$

Trừ 2 vế PT ta được $(t - x)(t + x + 4) = 0$

Với $t = x \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$.

Với $t = -x - 4 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -4$.

b) Đặt $\sqrt[3]{35 - x^3} = a \to x^3 + a^3 = 35$. Ta có $\begin{cases} xa(x+a) = 30 \\ x^3 + a^3 = 35\ \ (2) \end{cases}$.

$(2) \Leftrightarrow (x+a)(x^2 - xa + a^2) = 35$

$\Leftrightarrow (x+a)[(x+a)^2 - 3xa] = 35 \Leftrightarrow (x+a)^3 = 125$

Ta có $\begin{cases} x + a = 5 \\ x.a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ a = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ a = 2 \end{cases}$.

Tìm được $x \in \{2;3\}$.

21. a) $\text{PT} \Leftrightarrow (x^2 + 5 - x\sqrt{x^2+5}) + (-3\sqrt{x^2+5} + 3x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+5} - x)(\sqrt{x^2+5} - 3) = 0$

Vậy $S = \{\pm 2\}$.

b) ĐK: $-1 \le x \le 1$.

Ta có: $2x = 2\left[(1+x) - 1\right] = 2(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x} - 1 = 0\ \ (*) \\ \sqrt{1-x} + 1 = 2(\sqrt{1+x} + 1)\ \ (**) \end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow x = 0$.

$(**) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} + 1 \Leftrightarrow 1 - x = 4 + 4x + 4\sqrt{1+x} + 1$.

Tìm được $x=-\frac{24}{25}$. Vậy $S=\left\{-\frac{24}{25};0\right\}$.

c) ĐK: $x\ge -1$. Ta có $x=0$ không phải nghiệm của phương trình nên ta nhân hai vế phương trình với $\sqrt{1+x}-1\ne 0$ ta được:

$x(\sqrt{1+x}+2x-5)=x(\sqrt{1+x}-1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}+2x-5)=(\sqrt{1+x}-1)\Leftrightarrow x=2$. Vậy $S=\{2\}$.

Cách khác: Tương tự 1A. Phân tích $x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-1)$.

22. a) PT $\Leftrightarrow 2x^2+1-(x+5)\sqrt{2x^2+1}+3x+6=0$.

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}$ $(t\ge 1)$.

PT đã cho trở thành: $t^2-(x+5)t+3x+6=0$.

$\Delta=\left[-(x+5)\right]^2-4(3x+6)=(x-1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=x+2\end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{\pm 2;2\pm\sqrt{7}\right\}$.

b) PT $\Leftrightarrow x^2+7-x\sqrt{x^2+7}-4\sqrt{x^2+7}+4x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7}(\sqrt{x^2+7}-x)-4(\sqrt{x^2+7}-x)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+7}-x)(\sqrt{x^2+7}-4)=0$

Tìm được $S=\{\pm 3\}$.

c) Tương tự 6A.

(1) $\Leftrightarrow x^2+2x+3-(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+4x-2=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2x+3}-2x+1)(\sqrt{x^2+2x+3}-2)=0$

Tìm được $S=\left\{\frac{3+\sqrt{15}}{3};-1\pm\sqrt{2}\right\}$.

23. a) Tương tự 2B.

Cách 1. PT $\Leftrightarrow x^2-2x-7+3(x+2)-(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-7+(x+2)(3-\sqrt{x^2-2x+2})=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x-7)\left(\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}\right)=0$.

Vậy $S=\left\{1\pm 2\sqrt{2}\right\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{x^2-2x+2}=t$. PT trở thành

$t^2-(x+2)t+3x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t_1=x-1 \\ t_2=3\end{array}\right.\Rightarrow x=1\pm 2\sqrt{2}$.

b) Tương tự 6A. Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1$. PT trở thành:

$t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2t^2 + (1-4x)t + 2x - 1 = 0 \Rightarrow t = 2x - 1$

Tìm được $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

24. Ta có: $VT^2 = (\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5})^2 \le (1+1)(7-x+x-5) = 4$

Do đó: $0 < VT \le 2$

Mặt khác: $VP = x^2 - 12x + 38 = 2 + (x-6)^2 \ge 2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 6$. Vậy $S = \{6\}$.

25. Điều kiện: $1 \le x \le 2$. PT $\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{2} - \sqrt{x+1}$

Ta có: $\sqrt{2} - \sqrt{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow x + 1 \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$

Kết hợp với ĐK tìm được $S = \{1\}$.

26. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} \le \dfrac{(x^2 + x - 1) + 1}{2} = \dfrac{x^2 + x}{2} \\ \sqrt{x - x^2 + 1} \le \dfrac{(x - x^2 + 1) + 1}{2} = \dfrac{x - x^2 + 2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \le x + 1$

Do đó: $x^2 - x + 2 \le x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $S = \{1\}$.