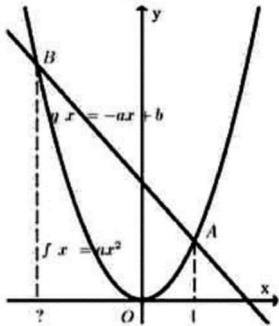


TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ TRONG CÁC KỲ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

Câu 1. (Toán chuyên An Giang năm 2023-2024)

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = -ax + b$ ($a; b$ là các số thực), điểm chung thứ nhất có hoành độ bằng 1. Tìm hoành độ điểm chung thứ hai của hai đồ thị.



Câu 2. (Toán chuyên Yên Bái năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 1 = 2x_2$.

Câu 3. (Toán chuyên Bắc Ninh năm 2023-2024)

Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .

Câu 4. (Toán chuyên Bến Tre năm 2023-2024)

Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$, đường thẳng $(d): y = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$ và điểm $I(0; 2)$

- Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK là tam giác vuông.
- Chứng minh rằng độ dài của đoạn thẳng AB lớn hơn 4

Câu 5. (Toán chuyên Cần Thơ năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2mx - 4m + 5$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O .

Câu 6. (Toán chuyên Cao Bằng năm 2023-2024)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 6$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Tính tổng độ dài OA và OB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 7. (Toán chuyên Đà Nẵng năm 2023-2024)

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và B . Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox .

a) Khi $k = -4$, tính diện tích hình thang $ABDC$

b) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính CD .

Câu 8. (Chung Hà Nam năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx - m^2 - m - 2$ (với m là tham số).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3 .

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) , xác định m để $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2m^3 + 6$.

Câu 9. (Toán chuyên Hòa Bình năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m + 2)x + 3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt hai trục $Ox; Oy$ lần lượt tại 2 điểm A và B sao cho tam giác AOB cân.

Câu 10. (Toán chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m + 2)x - m - 8$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung, có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2 = 0$.

Câu 11. (THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội đề chung năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Câu 12. (Toán chuyên Tiền Giang năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m - 1)x + 3$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 5$.

Câu 13. (Toán chuyên Quốc học Huế năm 2023-2024)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại A .

Câu 14. (Toán chuyên Tây Ninh năm 2023-2024)

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + 5$ và $(d_2): y = 3x + b - 2$. Tìm a, b biết (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2; -3)$.

Câu 15. (Toán chuyên Sơn La năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m - 3)x + 3m - 5$ (m là tham số)

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P) .

Câu 16. (Chuyên Nam Định ban xã hội năm 2023-2024)

Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Ox .

Câu 17. (Chuyên Nam Định toán chung năm 2023-2024)

Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Oy .

Câu 18. (Toán chuyên Lai Châu năm 2023-2024)

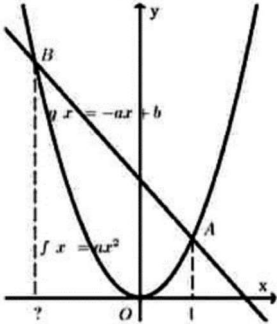
Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x + m + 1$ cắt $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$.



HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (Toán chuyên An Giang năm 2023-2024)

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = -ax + b$ ($a; b$ là các số thực), điểm chung thứ nhất có hoành độ bằng 1. Tìm hoành độ điểm chung thứ hai của hai đồ thị.



Lời giải

Hình vẽ cho biết $a > 0$.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$ax^2 = -ax + b \Leftrightarrow ax^2 + ax - b = 0 \quad (*)$$

Gọi nghiệm còn lại của (*) là x_0 . Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$1 + x_0 = -\frac{a}{a} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

Vậy hoành độ của điểm chung thứ hai là $x = -2$.

Câu 2. (Toán chuyên Yên Bái năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 1 = 2x_2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có

$$x^2 = 2x - m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m + 2) = -4m - 4$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow -4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -1$$

$$\text{Theo hệ thức Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài } x_1^2 + 1 = 2x_2 \Rightarrow x_1^2 + 1 - 2(2 - x_1) = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 3 = 0 \Rightarrow (x_1 + 3)(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{Khi đó } x_1 x_2 = m + 2 \Rightarrow 1.1 = m + 2 \Leftrightarrow 1 = m + 2 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 2 - (-3) = 5$$

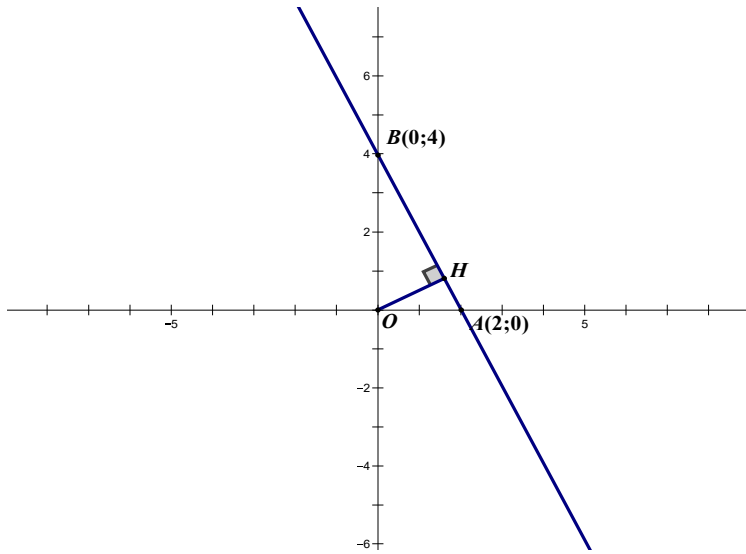
Khi đó $x_1 x_2 = m + 2 \Rightarrow (-3) \cdot 5 = m + 2 \Leftrightarrow -15 = m + 2 \Leftrightarrow m = -17$ (thỏa mãn)

Vậy $m = -17$ thỏa mãn đề bài

Câu 3. (Toán chuyên Bắc Ninh năm 2023-2024)

Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .

Lời giải



Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$

Đường thẳng d cắt trục Ox tại $A(2;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;4)$

Tính được $OA = 2$; $OB = 4$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB . Ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \Rightarrow OH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là $OH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 4. (Toán chuyên Bến Tre năm 2023-2024)

Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$, đường thẳng $(d): y = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$ và điểm $I(0;2)$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK là tam giác vuông.

c) Chứng minh rằng độ dài của đoạn thẳng AB lớn hơn 4

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{2}{m}x + 2 \neq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{m}x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{m}x - 4 = 0$$

Do $\Delta'_x = \frac{4}{m^2} + 4 > 0, \forall m \neq 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

Mặt khác, số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (P) và (d).

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm A, B phân biệt.

b) Ta đặt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ hay $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2\right), B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2\right)$. Khi đó $H(x_1; 0), K(x_2; 0)$.

Áp dụng Viet cho phương trình (1) với 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{m} \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

Ta tính được

$$\begin{cases} HK^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{16}{m^2} + 16 \\ IH^2 = (x_1 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = x_1^2 + 4 \\ IK^2 = (x_2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = x_2^2 + 4 \\ IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 8 = \frac{16}{m^2} + 16 \end{cases}$$

Suy ra $HK^2 = IH^2 + IK^2$, hay tam giác IHK vuông tại I.

c) Ta đi chứng minh $AB^2 > 16$ với mọi $m \neq 0$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2(x_2 - x_1)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right] \\ &= \left(\frac{16}{m^2} + 16\right) \left(1 + \frac{4}{m^2}\right) \\ &= \frac{64}{m^4} + \frac{80}{m^2} + 16 > 16, \forall m \neq 0 \\ &\Rightarrow AB > 4 \forall m \neq 0 \end{aligned}$$

Bình luận – Mấu chốt của bài toán là áp dụng định lý Vi-ét và công thức tính độ dài của đoạn thẳng từ hai điểm có tọa độ cho trước. Ta chú ý tính toán và biến đổi thật kỹ lưỡng để đảm bảo độ chính xác

Câu 5. (Toán chuyên Cần Thơ năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d): $y = 2mx - 4m + 5$ (m là tham số) và parabol (P): $y = x^2$. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 2mx - 4m + 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 16m + 20 > 0 (\forall m)$$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_A = \frac{2m + \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m + \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_A = (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})^2 \\ x_B = \frac{2m - \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_B = (m - \sqrt{m^2 - 4m + 5})^2 \end{cases}$$

ΔAOB vuông tại O

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \text{ (Định lý Pythagoras)}$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = x_A^2 - 2x_A x_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_A y_B + y_B^2$$

$$\Leftrightarrow x_A x_B + y_A y_B = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) + (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})^2 (m - \sqrt{m^2 - 4m + 5})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) = 0 \\ (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) = 0 \\ (m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) = -1 \end{cases}$$

Giải (1):

$$(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (m^2 - 4m + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5}{4} \text{ (loại vì khi } m = \frac{5}{4} \text{ thì sẽ nhận được } x_B = 0 \text{ và } y_B = 0, \text{ điểm B trùng với điểm O không tạo}$$

được tam giác)

Giải (2):

$$(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5})(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}) = -1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (m^2 - 4m + 5) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4m - 5 = -1$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

vậy $m = 1$

Câu 6. (Toán chuyên Cao Bằng năm 2023-2024)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + 6$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Tính tổng độ dài OA và OB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm A, B của (P) và (d) là $A(-3; 9), B(2; 4)$.

Do đó, tổng độ dài của hai đoạn thẳng OA và OB là

$$T = OA + OB = \sqrt{(0+3)^2 + (0-9)^2} + \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{90} + \sqrt{20} \approx 13,96$$

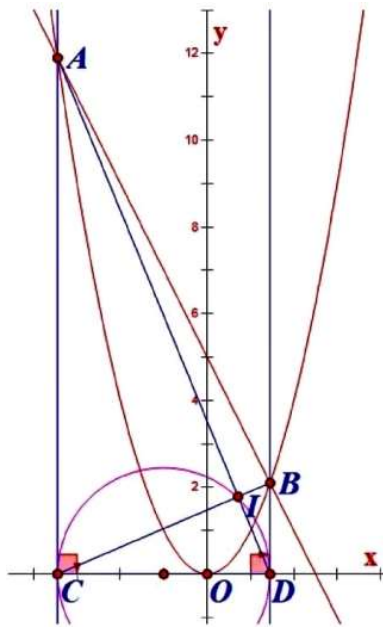
Câu 7. (Toán chuyên Đà Nẵng năm 2023-2024)

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = kx + 5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và B. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox.

a) Khi $k = -4$, tính diện tích hình thang ABDC

b) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính CD.

Lời giải



a) Với $k = -4 \Rightarrow (d): y = -4x + 5$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 = -4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\text{Ta thấy } a + b + c = 1 + 4 - 5 = 0$$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = -5$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = x^2 = 1$$

$$\text{Với } x = -5 \Rightarrow y = x^2 = 25$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $A(-5;25)$ và $B(1;1)$

Diện tích hình thang $ABDC$ là $\frac{(AC+BD).CD}{2} = \frac{(25+1).6}{2} = 78$ (đvdt)

b) + Gọi I là giao điểm của AD và BC .

Vì I thuộc đường tròn đường kính CD nên:

$\widehat{CID} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AD \perp BC$

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = kx + 5 \Leftrightarrow x^2 - kx - 5 = 0$$

Vì $c.a = -5 < 0$

Do đó hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Tọa độ hai giao điểm là $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$.

+ Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

+ Phương trình đường thẳng AD có dạng: $y = ax + b$. Ta có:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_D = ax_D + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 5 = ax_1 + b \\ 0 = ax_2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow kx_1 + 5 = a(x_1 - x_2) \text{ (trừ theo vế)}$$

+ Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = a'x + b'$. Tương tự như trên ta có:

$$kx_2 + 5 = a'(x_2 - x_1)$$

Nhân theo vế hai ý vừa có được:

$$(kx_1 + 5)(kx_2 + 5) = -a.a'.(x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 x_1 x_2 + 5k(x_1 + x_2) + 25 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \Leftrightarrow -5k^2 + 5k^2 + 25 = k^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$$

Vậy $k = \pm\sqrt{5}$

Câu 8. (Chung Hà Nam năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx - m^2 - m - 2$ (với m là tham số).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3 .

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) , xác định m để $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2m^3 + 6$.

Lời giải

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3 .

Vì M thuộc (P) nên $y_M = x_M^2 \Rightarrow y_M = (-3)^2 = 9$

Vậy $M(-3;9)$.

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) , xác định m để

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2m^3 + 6.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = 2mx - m^2 - m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = (-m)^2 - (m^2 + m + 2) = -m - 2$$

Để (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \quad (*)$$

Theo hệ thức Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 + m + 2 \end{cases}$$

Ta có $x_1 y_2 + x_2 y_1 = x_1 \cdot x_2^2 + x_2 \cdot x_1^2 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 2m(m^2 + m + 2) = 2m^3 + 2m^2 + 4m$

$$\Rightarrow 2m^3 + 2m^2 + 4m = 2m^3 + 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Đối chiếu $(*)$ vậy $m = -3$.

Câu 9. (Toán chuyên Hòa Bình năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt hai trục Ox; Oy lần lượt tại 2 điểm A và B sao cho tam giác AOB cân.

Lời giải

Vì A và B là giao điểm của (d) với Ox; Oy

$$\Rightarrow A\left(-\frac{3}{m+2}; 0\right); B(0; 3) \Rightarrow OA = \left|-\frac{3}{m+2}\right|; OB = |3| = 3$$

Ta có tam giác AOB cân tại O nên $OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{3}{m+2}\right| = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m+2} = 3 \\ \frac{3}{m+2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (TM)} \\ m = -3 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Câu 10. (Toán chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m - 8$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung, có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có $x^2 = (m+2)x - m - 8$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + m + 8 = 0$$

Vì phương trình có hai nghiệm nằm bên phải trục tung nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 28 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{7} \\ m > -2 \\ m > -8 \end{cases} \Rightarrow m > 2\sqrt{7}$$

Áp dụng Vi-et và kết hợp giả thiết ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 - x_2 = 0 \quad (1) \\ x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = m + 8 \end{cases} \Rightarrow (I) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{m+8} \\ x_2 = (\sqrt[4]{m+8})^3 \end{cases}. \text{Thay vào (1) ta có:}$$

$\sqrt[4]{m+8} + (\sqrt[4]{m+8})^3 = m + 2$. Đặt $\sqrt[4]{m+8} = a \left(a > \sqrt[4]{2\sqrt{7}+8} \right)$. Phương trình trở thành:

$$a + a^3 = a^4 - 6 \Leftrightarrow a^4 - a^3 - a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^3 + a^2 + 2a + 3) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$a = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{m+8} = 2 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $m = 8$.

Câu 11. (THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội đề chung năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao

cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Lời giải

Vì $(P): y = ax^2$ đi qua điểm $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ nên $a = \frac{1}{2}$

Gọi tọa độ của M là $(x_0, y_0) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \cdot x_0^2$

Theo giả thiết đề bài ta suy ra: $|x_0| = 2 \cdot |y_0| \Rightarrow |x_0| = x_0^2 \Rightarrow x_0 \in \{0; \pm 1\}$

Do đó tọa độ điểm M cần tìm là $(0; 0); \left(1; \frac{1}{2}\right); \left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Câu 12. (Toán chuyên Tiền Giang năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 3$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 5$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = 2(m-1)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$$

Do $1 \cdot (-3) = -3 < 0$ nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Do đó đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 x_2 = -3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } x_1 + 2x_2 = 5 \text{ trừ (1) vế theo vế ta được } \begin{cases} x_2 = 7 - 2m \\ x_1 = 2(m-1) - (7 - 2m) = 4m - 9 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào (2) ta được } (7 - 2m)(4m - 9) = -3 \Leftrightarrow -8m^2 + 46m - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 23m + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \left[2; \frac{15}{4} \right]$$

Câu 13. (Toán chuyên Quốc học Huế năm 2023-2024)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại A.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$2x^2 = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow 4x^2 - x - 2m = 0 \quad (1).$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B \Leftrightarrow (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 + 32m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{32}.$$

Vì tam giác OAB vuông tại A nên $OA \perp AB$, hay $OA \perp (d)$.

Mặt khác, đường thẳng OA đi qua O nên OA có phương trình là $y = -2x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của OA và (P): $2x^2 = -2x$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0; x_2 = -1$, suy ra $A(-1; 2)$.

Vì (d) đi qua A nên $2 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + m$, suy ra $m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 14. (Toán chuyên Tây Ninh năm 2023-2024)

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + 5$ và $(d_2): y = 3x + b - 2$. Tìm a, b biết (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2; -3)$.

Lời giải

Do (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2;-3)$ nên ta có: $\begin{cases} 2a + 5 = -3 \\ 6 + b - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \end{cases}$.

Vậy $a = -4; b = -7$

Câu 15. (Toán chuyên Sơn La năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m - 3)x + 3m - 5$ (m là tham số)

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P) .

Lời giải

a) Vì $(d): y = (2m - 3)x + 3m - 5$ đi qua $A(-2;3)$

$$\Leftrightarrow A \in (d) \Leftrightarrow (2m - 3) \cdot (-2) + 3m - 5 = 3 \Leftrightarrow -4m + 6 + 3m - 5 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = (2m - 3)x + 3m - 5 \Leftrightarrow x^2 - (2m - 3)x - 3m + 5 = 0 \quad (*)$$

Để (d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow [-(2m - 3)]^2 - 4(-3m + 5) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 + 12m - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 11 \Leftrightarrow m^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Câu 16. (Chuyên Nam Định ban xã hội năm 2023-2024)

Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Ox .

Lời giải

Vì M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Ox nên $M(x_M; 0)$

Thay $y = 0$ vào phương trình đường thẳng $y = x + 1$ ta có $0 = x_M + 1 \Rightarrow x_M = -1$

Vậy tọa độ giao điểm là $M(-1; 0)$.

Câu 17. (Chuyên Nam Định toán chung năm 2023-2024)

Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Oy .

Lời giải

Vì M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Oy nên $M(0; y_M)$

Thay $x = 0$ vào phương trình đường thẳng $y = x + 1$ ta có $y_M = 0 + 1 \Rightarrow y_M = 1$

Vậy tọa độ giao điểm là $M(0; 1)$.

Câu 18. (Toán chuyên Lai Châu năm 2023-2024)

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x + m + 1$ cắt $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $x^2 = -x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - m - 1 = 0 (*)$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $x_1; x_2$ thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$$

Theo hệ thức Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0(1)$

Vì x_1 là nghiệm của $(*)$ suy ra $x_1^2 = -x_1 + m + 1$ thay vào (1) ta được

$$-x_1 + m + 1 - x_2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) - 3m + 2 = 0$$

Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow m = 1$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 1$ thỏa mãn đề bài.

