# TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

**Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2022 – 2023)**

Cho $31$ điểm bất kì nằm bên trong hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $12$. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng $1$ nằm bên trong hình vuông $ABCD$ và không chứa điểm nào trong $31$ điểm đã cho.

**Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2022 – 2023)**

Trên mặt phẳng cho $4048$ điểm phân biệt, trong đó không có bất kì $3$ điểm nào thẳng hàng người ta tô $2024$ điểm màu đỏ và tô $2024$ điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi $2024$ đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung.

**Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đắk Lắk năm học 2022 – 2023)**

a) Cho $9$ hình vuông có độ dài các cạnh là $9$ số nguyên dương liên tiếp. Gọi $S$ là tổng diện tích của $9$ hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích là $S$.

b) Vẽ bất kì $17$ đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong $17$ đường tròn đó ta luôn chọn được năm đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho $5$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2022 – 2023)**

Cho $31$ điểm bất kì nằm bên trong hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $12$. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng $1$ nằm bên trong hình vuông $ABCD$ và không chứa điểm nào trong $31$ điểm đã cho.

**Lời giải**

Ta chia hình vuông $ABCD$ thành $36$ hình vuông có độ dài cạnh bằng $2$.

Khi đó có ít nhất một hình vuông không chứa điểm nào trong $31$ điểm đã cho.

Hình tròn nội tiếp hình vuông đã cho là hình tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2022 – 2023)**

Trên mặt phẳng cho $4048$ điểm phân biệt, trong đó không có bất kì $3$ điểm nào thẳng hàng người ta tô $2024$ điểm màu đỏ và tô $2024$ điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi $2024$ đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung.

**Lời giải**

Xét tất cả các cách nối $2024$ cặp điểm (đỏ với xanh) bằng $2024$ đoạn thẳng, các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại do chỉ có $2024$ cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn.

Do đó, tìm được một cách nối có tổng độ dài bằng các đoạn thẳng là ngắn nhất.

Ta chứng minh rằng đây là một cách nối phải tìm.

Thật vậy, giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng $AX$ và $BY$ mà cắt nhau tại điểm $O$ (giả sử $A$ và $B$ tô màu đỏ, còn $X$ và $Y$ tô màu xanh).

Khi đó nếu ta thay đoạn thẳng $AX$ và $BY$ bằng hai đoạn thẳng $AY$ và $BX,$ các đoạn thẳng khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$$AY + BX < \left(AO + OY\right) = \left(AO + OX\right) + \left(BO + OY\right) \Rightarrow AY + BX < AX + BY.$$

Như vậy, việc thay hai đoạn thẳng $AX$ và $BY$ bằng hai đoạn thẳng $AY$ và $BX,$ ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.

Điều vô lý chứng tỏ: cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

**Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đắk Lắk năm học 2022 – 2023)**

a) Cho $9$ hình vuông có độ dài các cạnh là $9$ số nguyên dương liên tiếp. Gọi $S$ là tổng diện tích của $9$ hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích là $S$.

b) Vẽ bất kì $17$ đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong $17$ đường tròn đó ta luôn chọn được năm đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho $5$.

**Lời giải**

1) Gọi $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ x+4,\ x+5,\ x+6,\ x+7,\ x+8\ \left(x\in\mathbb{N}^*\right)$ lần lượt là cạnh của các hình vuông đã cho.

Suy ra $S=x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x+2\right)^2+\left(x+3\right)^2+\left(x+4\right)^2+\left(x+5\right)^2+\left(x+6\right)^2+\left(x+7\right)^2+\left(x+8\right)^2$.

Rút gọn $S=9x^2+72x+204$.

Gọi hình vuông cần tìm có cạnh là $y$ với $y$ là số nguyên dương, ta có $9x^2+72x+204=y^2$.

Ta có: $9x^2+72x+204=9\left(x^2+8x+22\right)+6$ chia cho $9$ dư $6$.

Mà $y^2$ chia cho 9 có số dư là $r\in\left\{0;1;4;7\right\}$ suy ra phương trình $9x^2+72x+204=y^2$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại hình vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Gọi các số tự nhiên $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{17}$ lần lượt là độ dài đường kính của $17$ đường tròn đã vẽ và $r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{17}$ là số dư khi chia lần lượt $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{17}$ cho 5. Ta có: $r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{17}\in\left\{0;1;2;3;4\right\}$.

Nếu trong $17$ số $r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{17}$ tồn tại năm số bằng nhau, chẳng hạn: $r_1=r_2=r_3=r_4=r_5$ thì ta có $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ chia hết cho 5.

Nếu trong $17$ số $r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{17}$ không có năm số nào bằng nhau, tức là tối đa $4$ số bằng nhau, chẳng hạn có $4$ nhóm $4$ số bằng nhau, như vậy $17$ số dư được phân thành $4$ lớp mà mỗi lớp có $4$ phần tử và $1$ lớp có $1$ phần tử với các phần tử đại diện là $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$ Lúc đó lấy trong mỗi lớp 1 số sẽ được năm số có giá trị đôi một khác nhau. Chẳng hạn $r_1\neq r_2\neq r_3\neq r_4\neq r_5$ và $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=10$ nên $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ chia hết cho 5.