TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 – 2024)

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$.

a) Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=xyz$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức: $x^3+x^2y-2xy+2x-2y^2+2y+1=0$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả giá trị nguyên của n để n^2+2026 là một số chính phương.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 – 2024)

Tìm các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023.$$

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 – 2024)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Thuận năm học 2023 – 2024)

a) Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a)=S(b)=S(a+b)$. Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cần Thơ năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình $x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 – 2024)

Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2=2023^z+35$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Tháp năm học 2023 – 2024)

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là

2023000 đồng.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Bài 11. (Đề thi vào 10 chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

b) Tìm tất cả các số nguyên x và y thoả mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

a) Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

b) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023 – 2024)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Phòng năm học 2023 – 2024)

Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2023 – 2024)

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $2024(x^2+y^2)-2023(2xy+1)=5$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 – 2024)

Chứng minh p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $4^x+(1+3^y)(1+7^y)=2^x(3^y+7^y+2)$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lai Châu năm học 2023 – 2024)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2023 – 2024)

a) Số nguyên dương m được gọi là *số tốt* nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng $6m+8$. Chứng minh rằng nếu có hai số p, q nguyên tố và pq là số tốt thì $pq+2$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^{2025}-y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$

Bài 21. (Để thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định năm học 2023 – 2024)

a) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b; b^3 \vdots a$. Chứng minh $(a^4+b^4) \vdots ab$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x(x^2-y)+(y-3)(x^2+1)=0$.

Bài 22. (Để thi vào 10 trường chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

a) Tìm $x\in\mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Bài 23. (Để thi vào 10 trường chuyên Đại học Vinh tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-y^2+2(3y+y)=23$.

b) Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\le 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c.

Bài 24. (Để thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 – 2024)

Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $(x^2+1)\vdots p$ thì $(p-1)\vdots 4$.

b) Chứng minh $2023p+23^p-24$ không là số chính phương.

Bài 25. (Để thi vào 10 hệ chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n+6^n+2023^n$ cho 11.

Bài 26. (Để thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

a) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0$. Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2-2)$ chia hết cho $P(x)$.

Bài 27. (Để thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2023 – 2024)

a) Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn x^2-y và x^2+y đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3-2(a+b)^2=b^3+19$.

Bài 28. (Để thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 – 2024)

a) Chứng minh n^2+3n+1 là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $4a^2+b+4; 4b^2+a+4$ đều là số chính phương.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tây Ninh năm học 2023 – 2024)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2+2y^2(x+1)+(y+2)^2-9=0$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 – 2024)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hoá năm học 2023 – 2024)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5+2024x=y^5+1$.

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2+1=y^2$. Chứng minh $2y+2$ là số chính phương.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các số thực a sao cho $a+\sqrt{2023}$ và $\dfrac{999}{a}+\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 – 2024)

Cho hai số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2+q^2=2(3pq-4)$. $\quad(*)$

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $(*)$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm học 2023 – 2024)

Xét các số nguyên $a<b<c$ thỏa mãn $n=a^3+b^3+c^3-3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a<0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a, b, c $(a<b<c)$ sao cho n là một ước của 2023.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+x+6 là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2=-2(x^6-x^3y-32)$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 trường Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 2) năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Bài 37. (Đề thi vào 10 trường Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 1) năm học 2023 – 2024)

Có hay không các số nguyên a, b sao cho $\left(a+b\sqrt{2023}\right)^2=2024+2023\sqrt{2023}$?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 – 2024)

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$.

a) Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=xyz$.

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có $(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)=17(x+y+z)$.

Tích của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6 nên $x^3-x=(x-1)x(x+1)\vdots 6$.

Tương tự $y^3-y\vdots 6$, $z^3-z\vdots 6 \Rightarrow 17(x+y+z)\vdots 6$.

Mà 17 và 6 nguyên tố cùng nhau nên $x+y+z\vdots 6$.

b) Đặt $x+y+z=6m \Rightarrow x^3+y^3+z^3=108m$, với $m\in\mathbb{N}^*$.

Vì $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$ nên $\dfrac{108m}{3}\ge\left(\dfrac{6m}{3}\right)^3 \Leftrightarrow m^2\le\dfrac{9}{2}\Rightarrow m\le 2\Rightarrow x+y+z\le 12$.

Khi đó: $F=xyz\le\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3\le\left(\dfrac{12}{3}\right)^3=64.\qquad(1)$

Từ $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$\Rightarrow 108m-3F=6m\left[36m^2-3(xy+yz+zx)\right]\Leftrightarrow F=36m-6m\left[12m^2-(xy+yz+zx)\right]$.

Do đó $F\vdots 6.\qquad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $F\le 60.\qquad(3)$

Đẳng thức ở (3) xảy ra, chẳng hạn khi $\begin{cases}x+y+z=12\\ xy+yz+zx=47\\ xyz=60\end{cases}\Leftrightarrow (x;y;z)$ là hoán vị của $(3;4;5)$.

Vậy giá trị lớn nhất của F là $60,$ đạt được chẳng hạn khi $(x;y;z)$ là hoán vị của $(3;4;5)$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức: $x^3+x^2y-2xy+2x-2y^2+2y+1=0$.

Lời giải

a) Ta có: $x^3+x^2y-2xy+2x-2y^2+2y+1=0\Leftrightarrow(x+y)(x^2-2y+2)=-1$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-2y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2-2y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+2x+3=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy có duy nhất cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(x;y)=(-1;2)$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả giá trị nguyên của n để n^2+2026 là một số chính phương.

Lời giải

Đặt $n^2+2026=m^2$ $\left(m\in\mathbb{N}^*,\ m\ge 46\right) \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=2026=2.1013.$ $\quad (*)$

Vì $m-n,\ m+n$ cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow$ không có cặp số m,n thỏa phương trình $(*)$

Vậy không có giá trị nguyên của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 – 2024)

Tìm các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023.$$

Lời giải

Ta có $x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+3x^2y+2x^2z+3xy^2+2y^2z+z^2x+z^2y+4xyz=2023$

$\Leftrightarrow \left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)+\left(2x^2z+2y^2z+4xyz\right)+\left(z^2x+z^2y\right)=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+2z(x+y)^2+z^2(x+y)=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2+2z(x+y)+z^2\right]=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z)^2=7.17^2.$

Vì $x,\ y,\ z$ nguyên dương nên $\begin{cases} x+y=7 \\ x+y+z=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ z=10 \end{cases}$.

Ta có bảng:

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

Vậy các bộ số cần tìm là $(x;y;z)\in\left\{(1;6;10);(3;4;10);(4;3;10);(5;2;10);(6;1;10)\right\}$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 – 2024)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Lời giải

a) Ta có $x^2+xy+y^2=x^2y^2 \Leftrightarrow x^2-x^2y^2+xy+y^2=0 \Leftrightarrow (1-y^2)x^2+xy+y^2=0.\quad (1)$

Trường hợp 1: $1-y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm 1$.

- Với $y=1$ ta có $x^2+x+1=x^2 \Leftrightarrow x=-1$.
- Với $y=-1$ ta có $x^2-x+1=x^2 \Leftrightarrow x=1$.

Trường hợp 2: $1-y^2\neq 0 \Leftrightarrow y\neq \pm 1$.

Xét phương trình bậc hai $(1-y^2)x^2+xy+y^2=0$, có: $\Delta_x=y^2-4(1-y^2)y^2=y^2(4y^2-3)$.

- Nếu $y=0$ ta có $x=0$.
- Nếu $y\neq 0$, phương trình (1) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $4y^2-3$ là số chính phương.

Đặt $4y^2-3=k^2\ (k\in\mathbb{N})$.

Ta có: $4y^2-3=k^2 \Leftrightarrow (2y-k)(2y+k)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y-k=1\\2y+k=3\end{cases}\\ \begin{cases}2y-k=-3\\2y+k=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1\\k=1\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1\\k=1\end{cases}\end{array}\right.$ (loại vì $y\neq\pm1$).

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $(x;y)\in\{(0;0);(1;-1);(-1;1)\}$.

b) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, ta có $p=2k+1\ (k\in\mathbb{N}, k>1)$.

Do đó ta có $(p-1)(p+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)\ \vdots\ 8$

- Nếu $p=3k \Rightarrow p=3$ (loại vì p là số nguyên tố lớn hơn 3).
- Nếu $p=3k+1$, ta có $(p-1)(p+1)=3k(3k+2)\ \vdots\ 3$.
- Nếu $p=3k+2$, ta có $(p-1)(p+1)=3(3k+1)(k+1)\ \vdots\ 3$.

Vì $(3;8)=1$ nên $(p-1)(p+1)\ \vdots\ 24$ với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Thuận năm học 2023 – 2024)

a) Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a)=S(b)=S(a+b)$. Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$.

Lời giải

a) Áp dụng tính chất $a - S(a) \vdots 9$ với mọi số nguyên dương a, ta có: $a + b - S(a+b) \vdots 9$.

Mà $S(a) = S(b) = S(a+b)$ nên $\begin{cases} a+b-S(a) \vdots 9 \\ a+b-S(b) \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \vdots 9 \\ a \vdots 9 \end{cases}$ (điều phải chứng minh).

b) Ta có: $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = (y^2 + y + 1)^2$. $\quad (*)$

Suy ra $x^2 + x + 1$ là số chính phương hay $4x^2 + 4x + 4 = (2x+1)^2 + 3$ là số chính phương.

Đặt $(2x+1)^2 + 3 = t^2$ $(t \in \mathbb{N}) \Rightarrow (2x+1)^2 - t^2 = -3 \Leftrightarrow (2x+1-t)(2x+1+t) = -3$.

Vì $t \in \mathbb{N}$ nên $2x+1-t < 2x+1+t$, do đó ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2x+1-t = -3 \\ 2x+1+t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ t = 2 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2x+1-t = -1 \\ 2x+1+t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = 2 \end{cases}$.

Với $x = 0$, thay vào $(*)$, ta được: $(y^2 + y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 1$ (do $y^2 + y + 1 > 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$.

Với $x = -1$, thay vào $(*)$, ta được: $(y^2 + y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 1$ (do $y^2 + y + 1 > 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $(x;y) \in \{(0;0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1)\}$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cần Thơ năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + 3x + xy - 2y^2 + 3y - x + 2y - 3 = 2$

$\Leftrightarrow x(x - 2y + 3) + y(x - 2y + 3) - (x - 2y + 3) = 2$

$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x - 2y + 3) = 2$.

Do đó ta xét 4 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=2 \\ x-2y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (loại).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y-1=1 \\ x-2y+3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (thoả mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases} x+y-1=-1 \\ x-2y+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (loại).

Trường hợp 4: $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ x-2y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy các cặp số $(x;y)$ cần tìm là $(x;y)\in\{(1;1);(-2;1)\}$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 – 2024)

Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2=2023^z+35$.

Lời giải

Do vai trò của x, y đối xứng nhau nên giả sử $x\le y$.

Với $z=0$ thì $x^2+y^2=36$.

Vì $x\le y$ nên $x^2\le 18\Rightarrow 0\le x\le 4$.

Thử trực tiếp, ta được $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$ thỏa mãn.

Với $z\ge 1$:

Do $2023\,\vdots\,7$ và $35\,\vdots\,7$ nên $x^2+y^2\,\vdots\,7$.

Đặt $x=7a+r,\ y=7b+t$ với a, b, r, t là các số tự nhiên thỏa mãn $0\le r\le 6,\ 0\le t\le 6$.

Khi đó: $x^2+y^2=49a^2+14ar+49b^2+14bt+r^2+t^2$.

Suy ra để $x^2+y^2\,\vdots\,7$ thì $r^2+t^2\,\vdots\,7$.

Với $0\le r\le 6,\ 0\le t\le 6$ chỉ có $r=0,\ t=0$ thỏa mãn.

Do đó $x=7a,\ y=7b$.

Thay vào phương trình ban đầu, ta được: $49a^2+49b^2=2023^z+35\Leftrightarrow 7(a^2+b^2)=289^z.7^{z-1}+5$.

Nếu $z>1$ ta có vế trái chia hết cho 7 và vế phải không chia hết cho 7 (vô lý).

Với $z=1$ ta có: $7\left(a^2+b^2\right)=289+5 \Leftrightarrow a^2+b^2=42$.

Dễ dàng kiểm tra được phương trình $a^2+b^2=42$ không có nghiệm tự nhiên.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y;z)\in\{(0;6;0);(6;0;0)\}$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Tháp năm học 2023 – 2024)

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x+4000y=2023000 \Leftrightarrow 3x+4y=2023.$

Suy ra $y=\dfrac{2023-3x}{4}\ge 1 \Rightarrow 1\le x\le \dfrac{2019}{3}=673.$

Mặt khác, ta có $y=\dfrac{2023-3x}{4}=\dfrac{2024-4x-1+x}{4}=506-x+\dfrac{x-1}{4}.$

Để y nguyên thì $x-1$ chia hết cho 4, suy ra $x=1+4k\ (k\in\mathbb{Z})$.

Suy ra $y=505-3k$.

Do đó $1\le 1+4k\le 673 \Leftrightarrow 0\le k\le 168$.

Vậy có 169 cặp $(x;y)$ thoả mãn hay có 169 cách mua có đủ cả hai loại thẻ.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$2^{2024}+2^{2027}+2^n=k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2024}+2^n=k^2 \Leftrightarrow \left(k+3.2^{1012}\right)\left(k-3.2^{1012}\right)=2^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+3.2^{1012}=2^a \\ k-3.2^{1012}=2^b \end{cases} (a,\, b\in\mathbb{N};\, a+b=n) \Rightarrow 2^a-2^b=3.2^{1013}$$

$$\Leftrightarrow 2^b\left(2^{a-b}-1\right)=3.2^{1013} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b}-1=3 \\ 2^b=2^{1013} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ b=1013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1015 \\ b=1013 \end{cases} \Rightarrow n=2028.$$

Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Bài 11. (Đề thi vào 10 chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

b) Tìm tất cả các số nguyên x và y thoả mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Lời giải

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ suy ra p^2+2 là số lẻ

$\Rightarrow 2^{p^2+2}\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^{p^2+2}-8 \vdots 3.$ $\quad(1)$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p^2\equiv 1 \pmod 3$

$p^2+2 \vdots 3 \Rightarrow 2^{p^2+2}\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{p^2+2}-8 \vdots 7.$ $\quad(2)$

Từ (1), (2) và $(3,7)=1$, suy ra $2^{p^2+2}-8 \vdots 21$ (điều phải chứng minh).

b) $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Đặt $x-y=a$, $xy=b$ $\left(a^2\geq -4b\right)$.

Vì $2(x-y)^2+17>0 \Rightarrow x^3-y^3>0 \Leftrightarrow x-y>0 \Rightarrow a>0$.

Ta có: $x^3-y^3=2(x-y)^2+17 \Rightarrow a^3+3ab=2a^2+17 \Leftrightarrow a\left(a^2-2a+3b\right)=17$

$\Rightarrow 17 \vdots a \Rightarrow a\in\{1;17\}$ (do $a>0$).

Trường hợp 1: $a=1 \Rightarrow b=6 \Rightarrow (x;y)\in\{(3;2);(-2;-3)\}$ (thử lại thấy thoả mãn).

Trường hợp 2: $a=17 \Rightarrow b=\dfrac{-254}{3}$ (loại).

Vậy $(x;y)\in\{(3;2);(-2;-3)\}$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

a) Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

b) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Lời giải

a) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 thì a^2, b^2, c^2 chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 \vdots 3 \\ abc \not\vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-2abc \not\vdots 3$ (vô lý).

Nếu trong ba số a, b, c có một hoặc hai số không chia hết cho 3 và các số còn lại chia hết cho 3

thì $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \not\vdots 3 \\ abc \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-2abc \not\vdots 3$ (vô lý).

Vậy cả ba số a, b, c đều chia hết cho 3, suy ra $abc \vdots 27$. $\quad(1)$

Nếu cả ba số a, b, c đều lẻ thì $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 2 \\ 2abc \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-2abc \not\vdots\, 2$ (vô lý).

Vậy trong ba số a, b, c có ít nhất một số chẵn, suy ra $abc \vdots 2$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $abc \vdots 54$ vì $(2,27)=1$.

b) Ta có: $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0 \Leftrightarrow xy\left(x^2-x+1\right)=\left(2x-y\right)^2$. $\quad (1)$

Gọi $d=(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x=da \\ y=db \end{cases}$ với $(a,b)=1$ và a, b, d nguyên dương.

Khi đó (1) trở thành $d^2ab\left(d^2a^2-da+1\right)=d^2\left(2a-b\right)^2 \Leftrightarrow ab\left(d^2a^2-da+1\right)=\left(2a-b\right)^2$.

Suy ra $(2a-b)^2 \vdots a$ và $(2a-b)^2 \vdots b$.

Từ $(2a-b)^2 \vdots a$ và $(a,b)=1 \Rightarrow (2a-b,a)=1 \Rightarrow \left((2a-b)^2,a\right)=1$ do đó $a=1$.

Từ $(2a-b)^2 \vdots b \Rightarrow 4a^2 \vdots b$ mà $(a;b)=1$ nên $4 \vdots b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \\ b=4 \end{array}\right.$ (do $b>0$).

Trường hợp 1: $a=b=1 \Rightarrow x=y=d$.

Thay vào giả thiết ta được $d^4-d^3=0 \Rightarrow d=1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $a=1; b=2$ không thỏa mãn.

Trường hợp 3: $a=1; b=4$ suy ra $x=d; y=4d$.

Thay vào giả thiết ta được $d^4-d^3=0 \Rightarrow d=1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy cặp số $(x;y) \in \left\{(1;1);(1;4)\right\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023 – 2024)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1=\left(n^{2024}-n^2\right)+\left(n^{2023}-n\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

$$=n^2\left(n^{2022}-1\right)+n\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)=\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right).$$

Xét $\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)=\left(n^2+n\right)\left[\left(n^3\right)^{674}-1\right]=\left(n^2+n\right)\left(n^3-1\right).B=\left(n^2+n\right)\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right).B$ chia hết cho n^2+n+1.

Lại có $n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ chia hết cho n^2+n+1.

Vậy $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ chia hết cho n^2+n+1 với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 nên A không phải là số nguyên tố.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$.

Lời giải

a) Đặt $A=2p^4-p^2+16$.

Với $p=3$ thì $A=169=13^2$ là số chính phương. Vậy $p=3$ thoả mãn.

Với $p>3$ thì $p^2\equiv 1\ (\text{mod }3)$. Suy ra $p^4=\left(p^2\right)^2\equiv 1\ (\text{mod }3)$.

Suy ra $A=2p^4-p^2+16\equiv 2.1-1+16\equiv 2\ (\text{mod }3)$.

Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.

Vậy với $p=3$ thì $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

b) Ta có $6x^2+7xy+2y^2+x+y-1=1\Leftrightarrow 6x^2+\left(7y+1\right)x+2y^2+y-1=1$

$$\Leftrightarrow\left(2x+y+1\right)\left(3x+2y-1\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y+1=1\\3x+2y-1=1\end{cases}\\\begin{cases}2x+y+1=-1\\3x+2y-1=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $\left(x;y\right)\in\left\{\left(-2;4\right);\left(-4;6\right)\right\}$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Phòng năm học 2023 – 2024)

Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Lời giải

Ta có $\left(a-b\right)^2=4.5^m-20ab\,\vdots\,5\Rightarrow\left(a-b\right)\vdots\,5\Rightarrow\left(a-b\right)^2\vdots\,25$.

Vì a, b là các số nguyên tố nên $a, b\ge 2$

$\Rightarrow a^2+b^2+18ab=4.5^m\ge 80\Rightarrow m\ge 2$

$\Rightarrow 20ab=\left(a-b\right)^2-4.5^m\,\vdots\,25\Rightarrow 20ab\,\vdots\,25\Rightarrow ab\,\vdots\,5$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\,\vdots\,5 \\ b\,\vdots\,5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a\,\vdots\,5 \\ b\,\vdots\,5 \end{cases} \Rightarrow a=b=5;\ m=3.$

Vậy $a=b=5;\ m=3$ thì $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2023 – 2024)

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $2024\left(x^2+y^2\right)-2023\left(2xy+1\right)=5$.

Lời giải

$2024\left(x^2+y^2\right)-2023\left(2xy+1\right)=5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2023\left(x^2+y^2\right)-2023.2xy-2023=5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2023\left(x^2+y^2-2xy\right)=5+2023$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2023\left(x-y\right)^2=2028. \qquad (*)$

Vì $x,\ y\in\mathbb{Z}$ nên $\left|x-y\right|$ là số tự nhiên.

Nhận xét: Nếu $\left|x-y\right|\ge 2$ thì $\left(x-y\right)^2\ge 4\Rightarrow 2023\left(x-y\right)^2\ge 8092$.

Do đó $x^2+y^2+2023\left(x-y\right)^2>2028$.

Suy ra $\left|x-y\right|\le 1\Rightarrow \left|x-y\right|\in\{0;1\}$.

Trường hợp 1: $\left|x-y\right|=0\Leftrightarrow x=y$.

Khi đó, ta có: $(*)\Leftrightarrow 2x^2=2028\Leftrightarrow x\in\varnothing$ (do $x\in\mathbb{Z}$).

Trường hợp 2: $\left|x-y\right|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$.

- Với $y=x-1$ thì $(*)\Leftrightarrow x^2+\left(x-1\right)^2+2023=2028\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=-2 \\ x=2\Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.
- Với $y=x+1$ thì $(*)\Leftrightarrow x^2+\left(x+1\right)^2+2023=2028\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=2 \\ x=-2\Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(x;y)\in\left\{(-1;-2);(2;1);(1;2);(-2;-1)\right\}$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 – 2024)

Chứng minh p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p không chia hết cho 2, 3 và 5. $\qquad (1)$

Từ (1), suy ra p^2 chia 8 dư 1.

Đặt $p^2 = 8k+1\ (k \in \mathbb{N})$.

Ta có: $p^4 - 1 = (8k+1)^2 - 1 = 64k^2 + 16k \vdots 16 \Rightarrow p^4 - 1 \vdots 16.$ $\quad (2)$

Từ (1), suy ra p^2 chia 3 dư 1.

Đặt $p^2 = 3m+1\ (m \in \mathbb{N})$.

Ta có: $p^4 - 1 = (3m+1)^2 - 1 = 9m^2 + 6m \vdots 3 \Rightarrow p^4 - 1 \vdots 3.$ $\quad (3)$

Từ (1), suy ra p^2 chia 5 dư 1 hoặc 4.

Trường hợp 1: p^2 chia 5 dư 1. Đặt $p^2 = 5n+1\ (n \in \mathbb{N})$.

Ta có: $p^4 - 1 = (5n+1)^2 - 1 = 25n^2 + 10n \vdots 5 \Rightarrow p^4 - 1 \vdots 5.$

Trường hợp 2: p^2 chia 5 dư 4. Đặt $p^2 = 5h+4\ (h \in \mathbb{N})$.

Ta có: $p^4 - 1 = (5h+4)^2 - 1 = 25h^2 + 40h + 15 \vdots 5 \Rightarrow p^4 - 1 \vdots 5.$

Do đó $p^4 - 1 \vdots 5.$ $\quad (4)$

Từ $(2), (3), (4)$, suy ra: $p^4 - 1$ chia hết cho $16; 3; 5$.

Do đó $p^4 - 1$ chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p > 5$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $4^x + (1+3^y)(1+7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$.

Lời giải

Ta có: $4^x + (1+3^y)(1+7^y) = 2^x(3^y+7^y+2) \Leftrightarrow 2^{2x} + 1 + 3^y + 7^y + 21^y = 2^x(3^y + 7^y + 2)$

$\Leftrightarrow 21^y = 2^x(3^y+7^y+2) - (3^y+7^y+2) - (2^{2x}-1)$

$\Leftrightarrow 21^y = (3^y+7^y+2)(2^x-1) - (2^x-1)(2^x+1)$

$\Leftrightarrow 21^y = (2^x-1)(3^y+7^y+1-2^x).$ $\quad (1)$

Ta chứng minh ƯCLN$(2^x-1, 3^y+7^y+1-2^x) = 1$.

Thật vậy, nếu ƯCLN$(2^x-1, 3^y+7^y+1-2^x) > 1$ thì gọi p là ước nguyên tố chung của $2^x - 1$ và $3^y + 7^y + 1 - 2^x$. Suy ra $p \mid 3^y + 7^y$.

Nhận thấy 3^y+7^y đều không chia hết cho $3, 7$ với mọi số nguyên dương y nên $p\neq 3, p\neq 7$.

Lại có $p|21^y$ nên $p\in\{3;7\}$ mâu thuẫn.

Vậy ƯCLN$(2^x-1, 3^x+7^y+1-2^x)=1$. Do đó ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Nếu x là số chẵn thì 2^x-1 chia hết cho 3 và $3^x+7^y+1-2^x$ chia 3 dư 1.

Khi đó, từ (1), ta có $\begin{cases} 2^x-1=3^y \\ 3^y+7^y+1-2^x=7^y \end{cases}$.

Suy ra $2^x=3^y+1$.

Với $y\geq 1$ thì $3^y\equiv 1$ hoặc $3 \pmod 8$ nên 3^y+1 không chia hết cho 8.

Từ đó tìm được $x=2;\ y=1$.

Nếu x là số lẻ thì 2^x-1 chia 3 dư 1 và $3^y+7^y+1-2^x$ chia hết cho 3.

Khi đó, từ (1), ta có $\begin{cases} 2^x-1=7^y \\ 3^y+7^y+1-2^x=3^y \end{cases}$.

Suy ra $2^x=7^y+1$. Vế phải chia 7 dư 1 nên về trái chia 7 dư 1.

Từ đó $x=3k\ (k\in\mathbb{N}^*)$ và thay vào phương trình được $(2^k-1)(2^{2k}+2^k+1)=7^y$.

Vì 2^x-1 chia 3 dư 1 nên ƯCLN$(2^k-1;2^{2k}+2^k+1)=1$.

Vì $2^{2k}+2^k+1>1$ nên $2^k-1=1$ suy ra $k=1$ và $7^y=7\Rightarrow y=1$ và $x=3k=3$.

Vậy tất cả các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(x;y)\in\{(2;1);(3;1)\}$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lai Châu năm học 2023 – 2024)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$.

Lời giải

Ta có: $(2x+y)(x-y)+x+8y=22\Leftrightarrow(2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$

$\Leftrightarrow(2x+y)(x-y+3)-5(x-y+3)=7\Leftrightarrow(x-y+3)(2x+y-5)=7$.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (thoả mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \end{cases}$ (không thoả mãn).

Trường hợp 4: $\begin{cases} x-y+3=1 \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases}$ (không thoả mãn).

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)\in\{(-2;8);(-2;2)\}$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2023 – 2024)

a) Số nguyên dương m được gọi là số tốt nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng $6m+8$. Chứng minh rằng nếu có hai số p, q nguyên tố và pq là số tốt thì $pq+2$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^{2025}-y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$

Lời giải

a) Do p, q là các số nguyên tố nên pq có các ước dương là $1, p, q, pq$.

Vì p, q là số tốt nên $p^2+q^2=6pq+8$

$\Leftrightarrow pq+2=p^2+q^2-5pq-6=p^2+q^2-2pq-3pq-6=(p-q)^2-3(pq+2)$

$\Leftrightarrow 4(qp+2)=(p-q)^2 \Rightarrow pq+2=\left(\dfrac{p-q}{2}\right)^2.$

Từ $(p-q)^2=4pq+8 \Rightarrow (p-q)^2 \vdots 2 \Rightarrow p-q \vdots 2 \Rightarrow \dfrac{p-q}{2}\in\mathbb{Z}.$

Do đó $pq+2$ là số chính phương (điều phải chứng minh).

b) $x^{2025}-y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2.$

Đặt $x^{675}=m;\ y^{675}=n \Rightarrow y^{2025}=n^3;\ y^{1350}=n^2.$

Phương trình đã cho trở thành $m^3=n^3-n^2-n+2.$

Xét $(n-1)^3-m^3=-2n^2+4n-3=-2(n^2-2n+1)-1=2(n-1)^2-1<0$

$\Rightarrow (n-1)^3<m^3. \qquad (1)$

Xét $(n+3)^3-m^3=10n^2+28n+25=10\left(n^2+\dfrac{14}{5}n+\dfrac{49}{25}\right)+\dfrac{27}{5}=10\left(n+\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{27}{5}>0$

$\Rightarrow (n+3)^3>m^3. \qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $(n-1)^3<m^3<(n+3)^3.$

Do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m^3 = n^3 \Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = -2 \end{array}\right.$.

- Với $n = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^{675} = 1 \\ y^{675} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (thoả mãn).
- Với $n = -2 \Rightarrow y^{675} = -2$ (vô nghiệm nguyên nên loại).

Trường hợp 2: $m^3 = (n+1)^3 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n - 1 = 0$ (vô nghiệm nguyên).

Trường hợp 3: $m^3 = (n+2)^3 \Leftrightarrow 7n^2 + 13n + 6 = 0 \Leftrightarrow (n+1)(7n+6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = \dfrac{-6}{7} \end{array}\right.$.

Vì n nguyên nên ta chọn $n = -1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^{675} = 1 \\ y^{675} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên là $(x;y) \in \{(1;1);(1;-1)\}$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định năm học 2023 – 2024)

a) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b$; $b^3 \vdots a$. Chứng minh $(a^4 + b^4) \vdots ab$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x(x^2 - y) + (y-3)(x^2+1) = 0$.

Lời giải

a) Vì $a^3 \vdots b$ nên $a^3.a \vdots b.a$ hay $a^4 \vdots ab$.

Tương tự, vì $b^3 \vdots a$ nên $b^3.b \vdots a.b$ hay $b^4 \vdots ab$.

Từ đó suy ra $(a^4 + b^4) \vdots ab$.

b) $x(x^2 - y) + (y-3)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-x^3 + 3x^2 + 3}{x^2 - x + 1} = -x + 2 + \dfrac{3x+1}{x^2 - x + 1}$ (vì $x^2 - x + 1 > 0, \forall x$).

Khi x nguyên, để y là nguyên thì $(3x+1) \vdots (x^2 - x + 1)$.

Do đó: $(3x+1)^2 = (9x^2 + 6x + 1) = 9(x^2 - x + 1) + (15x - 8) \vdots (x^2 - x + 1)$ hay $(15x - 8) \vdots (x^2 - x + 1)$

Suy ra $5(3x+1) - (15x - 8) \vdots (x^2 - x + 1) \Rightarrow 13 \vdots (x^2 - x + 1) \Rightarrow x^2 - x + 1 \in \{1;13\}$.

Trường hợp 1: $x^2 - x + 1 = 13 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

- Với $x = -3$ thì $y = \dfrac{57}{13}$ (không thoả mãn).
- Với $x = 4$ thì $y = -1$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $x^2-x+1=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

- Với $x=0$ thì $y=3$ (thoả mãn).
- Với $x=1$ thì $y=5$ (thoả mãn).

Vậy các cặp số $(x;y)$ cần tìm là $(x;y)\in\{(0;3);(1;5);(4;-1)\}$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 trường chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

a) Tìm $x\in\mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $x+\sqrt{2024}=a$, $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}=b$ với $a, b\in\mathbb{Z}$.

Khi đó, ta có: $\left(a-\sqrt{2024}\right)\left(b+\sqrt{2024}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2024}(a-b)=2025-ab$.

Vì $\sqrt{2024}$ là số vô tỷ và $a-b$, $2025-ab$ nguyên nên $a=b$ và $2025=ab$ suy ra $a=b=\pm 45$

Suy ra: $x+\sqrt{2024}=a=\pm 45 \Leftrightarrow x\in\left\{45-\sqrt{2024};-45-\sqrt{2024}\right\}$.

Vậy tất cả giá trị x thỏa mãn là $x\in\left\{45-\sqrt{2024};-45-\sqrt{2024}\right\}$.

b) Đặt $2a=b^3$ và $5a=c^2$ với b, c là các số nguyên dương.

Từ $2a=b^3 \Rightarrow b^3 \,\vdots\, 2 \Rightarrow b \,\vdots\, 2$.

Đặt $b=2d\ \left(d\in\mathbb{N}^*\right)$, khi đó: $2a=8d^3 \Leftrightarrow a=4d^3$. $\quad (1)$

Từ $5a=c^2 \Rightarrow c^2 \,\vdots\, 5 \Rightarrow c \,\vdots\, 5$.

Đặt $c=5e\ \left(e\in\mathbb{N}^*\right)$, khi đó: $5a=25e^2 \Leftrightarrow a=5e^2$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $a=4d^3=5e^2$.

Do 4 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $d^3 \,\vdots\, 5 \Rightarrow d \,\vdots\, 5$.

Đặt $d=5k\ \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$, ta được $a=5e^2=500k^3$.

Suy ra $e^2=100k^3=10^2k^3$. Điều này xảy ra với số k nhỏ nhất là $k=1 \Rightarrow a=500$.

Vậy số nguyên dương a nhỏ nhất thỏa mãn là $a=500$.

Bài 23. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Vinh tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-y^2+2(3y+y)=23$.

b) Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\le 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c.

Lời giải

a) Ta có: $x^2-y^2+2(3x+y)=23 \Leftrightarrow (x^2+6x+9)-(y^2-2y+1)=31$

$\Leftrightarrow (x+3)^2-(y-1)^2=31 \Leftrightarrow (x-y+4)(x+y+2)=31$

Từ đây, ta xét bảng sau

$x-y+4$	31	1	-31	-1
$x+y+2$	1	31	-1	-31
x	13	13	-19	-19
y	-14	16	16	-14

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(13;-14);(13;16);(-19;16);(-19;-14)\}$.

b) Gọi hai nghiệm nguyên của đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ là u, v.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} u+v=-b \\ uv=c \end{cases}$.

Ta có: $|P(9)|=|81+9b+c|=|81-9u-9v+uv|=|(9-u)(9-v)|$.

Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9-u)(9-v)|$ là số nguyên tố dẫn đến $|9-u|=1$ hoặc $|9-v|=1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|9-u|=1 \Leftrightarrow u\in\{8;10\}$.

Trường hợp 1: $u=10$, vì $|c|\le 16$ nên $|v|\in\{0;1\} \Leftrightarrow v\in\{-1;0;1\}$.

Mặt khác $9-1=8$, $9-0=9$, $9+1=10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.

Trường hợp 2: $u=8$, vì $|c|\le 16$ nên $|v|\le 2$.

Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v\in\{-2;2\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b, c tương ứng là $-10, 16$ và $-6, -16$.

Vậy tất cả cặp $(b;c)$ thỏa mãn là $(b;c)\in\{(-10;16);(-6;-16)\}$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 – 2024)

Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $(x^2+1) \vdots p$ thì $(p-1) \vdots 4$.

b) Chứng minh $2023p+23^p-24$ không là số chính phương.

Lời giải

a) Vì p là số nguyên tố lẻ nên $p = 4k + 1$ hoặc $p = 4k + 3$.

Vì $\left(x^2 + 1\right) \vdots p$ nên $p = 4k + 1$, suy ra $p - 1 = 4k \vdots 4$.

b) Giả sử $2023p + 23^p - 24$ là số chính phương.

Khi đó tồn tại số tự nhiên x sao cho $2023p + 23^p - 24 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2023p + 23^p - 23$.

Theo định lý Fermat nhỏ, ta có $23^p - 23 \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow 2023p + 23^p - 23 \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow p = 4k + 1 \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

$\Rightarrow 2023p + 23^p - 24 \equiv -p + (-1)^p \equiv 2 \pmod 4$.

Mà $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ nên mâu thuẫn với giả sử.

Vậy $2023p + 23^p - 24$ không là số chính phương.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2 - x - 1\right)\left(y^2 + xy - 9\right) = 2x + 1$

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho $3^n + 7^n$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n + 6^n + 2023^n$ cho 11.

Lời giải

a) Vì $(x;y)$ nguyên dương nên từ điều kiện, suy ra $2x + 1 \vdots x^2 - x - 1$

$\Rightarrow 2x^2 + x \vdots x^2 - x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 2 + 3x + 2 \vdots x^2 - x - 1 \Rightarrow 3x + 2 \vdots x^2 - x - 1$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} 2x + 1 \vdots x^2 - x - 1 \\ 3x + 2 \vdots x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 3 \vdots x^2 - x - 1 \\ 6x + 3 \vdots x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots x^2 - x - 1$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 1 \\ x^2 - x - 1 = -1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \left(\text{do } x \in \mathbb{N}^*\right)$.

Từ $x = 2 \Rightarrow \left(y^2 + 2y - 9\right) = 5 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 15$ (loại).

Trường hợp 2: $x^2 - x - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \left(\text{do } x \in \mathbb{N}^*\right)$.

Từ $x = 1 \Rightarrow -\left(y^2 + y - 9\right) = 3 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y+3)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \left(\text{do } y \in \mathbb{N}^*\right)$.

Vậy cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn là $(x;y)=(1;2)$.

b) Vì n là số lẻ nên ta dễ dàng chứng minh được: $3^n+8^n+7^n+4^n \vdots 11$.

Mà $3^n+7^n \vdots 11$ nên $4^n+8^n \vdots 11 \Rightarrow 4^n(1+2^n) \vdots 11 \Rightarrow 2^n+1 \vdots 11$.

Suy ra: $n=10k+5$ $(k\in\mathbb{N})$.

Ta có $6^n=6^{10k+5}=(6^{10})^k.6^5\equiv -1 \pmod{11}$; $2023^n\equiv -1 \pmod{11}$.

Suy ra $2^n+6^n+2023^n\equiv -3\equiv 8 \pmod{11}$.

Vậy $2^n+6^n+2023^n$ chia 11 dư 8.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

a) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0$. Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2-2)$ chia hết cho $P(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3+d=9c^3-27d^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d) \vdots 3 \Rightarrow (a+b)^3+(c+d)^3 \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^3-3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 \vdots 3 \Rightarrow a+b+c+d \vdots 3 \Rightarrow (a+b+c+d)^2 \vdots 9$ (điều phải chứng minh).

b) Xét đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$, với $a\in\mathbb{R}$, đa thức $P(x)$ có bậc là 2024.

Ta có: $P(x^2-2)=a.(x^2-1)^{1012}(x^2-4)^{1012}=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$

$$=P(x)(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$$

$\Rightarrow P(x^2-2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$.

Vậy tồn tại đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$ với hệ số thực, có bậc 2024 thỏa mãn đã thức $P(x^2-2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2023 – 2024)

a) Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $x^2 - y$ và $x^2 + y$ đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 - 2(a+b)^2 = b^3 + 19$.

Lời giải

a) Đặt $x^2 - y = a^2; x^2 + y = b^2$ với a, b là các số tự nhiên $\Rightarrow 2y = b^2 - a^2$.

Ta có $b^2 - a^2$ là số chẵn suy ra a, b là hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ $\Rightarrow (b-a)(b+a) \vdots 4 \Rightarrow y \vdots 2$.

Vậy y là số chẵn.

b) Ta có: $a^3 - 2(a+b)^2 = b^3 + 19 \Leftrightarrow (a-b-2)(a^2+ab+b^2) = 2ab + 19$.

Vì $2ab + 19 > 0,\ a^2 + ab + b^2 > 0$ nên $a - b - 2 \geq 1 \Leftrightarrow a - b \geq 3$.

Từ $a - b - 2 \geq 1 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 \leq 2ab + 19 \Rightarrow (a-b)^2 < 19 \Rightarrow a - b \leq 4$.

Vì $2ab + 19$ lẻ nên $a - b - 2$ lẻ $\Rightarrow a - b$ lẻ $\Rightarrow a - b = 3$.

Từ $a - b = 3 \Rightarrow b^2 + 3b - 10 = 0 \Rightarrow b = -5$ (loại) hoặc $b = 2$.

Vậy $b = 2; a = 5$.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 – 2024)

a) Chứng minh $n^2 + 3n + 1$ là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $4a^2 + b + 4; 4b^2 + a + 4$ đều là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có $n^2 + 3n + 1 = n(n+1) + 2n + 1$.

Do $n(n+1)$ chẵn, $2n + 1$ lẻ nên $n^2 + 3n + 1$ là số lẻ.

b) Do vai trò a, b bình đẳng nên ta có thể giả sử $b \leq a$.

Khi đó $(2a)^2 < 4a^2 + b + 4 \leq 4a^2 + a + 4 \leq 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$

Suy ra $4a^2 + b + 4 = (2a+1)^2 \Rightarrow b = 4a - 3$.

Khi đó $(8a-6)^2 < 4b^2 + a + 4 = 64a^2 - 95a + 40 < (8a-4)^2$

Suy ra $64a^2 - 95a + 40 = (8a-5)^2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy $a = 1; b = 1$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tây Ninh năm học 2023 – 2024)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2+2y^2(x+1)+(y+2)^2-9=0$.

Lời giải

Ta có: $(x+y)^2+2y^2(x+1)+(y+2)^2-9=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+2xy^2+2y^2+y^2+4y+4-9=0$

$\Leftrightarrow x^2-4+2x(y^2+y)+4(y^2+y)=1$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)+2(y^2+y)(x+2)=1$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2+2y^2+2y)=1$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+2=1 \\ x-2+2y^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y^2+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} x+2=-1 \\ x-2+2y^2+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2y^2+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(-1;1);(-1;-2);(-3;1);(-3;-2)\}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 – 2024)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24.

Lời giải

Do p là số nguyên tố và $p>3 \Rightarrow p$ không chia hết cho 2 và 3

$\Rightarrow p^2\equiv 1 \pmod 3$ và $p^2\equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow p^2-1 \vdots 3$ và $p^2-1 \vdots 8$.

Suy ra $p^2-1 \vdots 24$ (vì $(3,8)=1$).

Do đó: $(7-p)(7+p)=49-p^2=48-(p^2-1) \vdots 24$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hoá năm học 2023 – 2024)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5+2024x=y^5+1$.

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2+1=y^2$. Chứng minh $2y+2$ là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có $x^5+2024x=y^5+1$.

$\Leftrightarrow x^5-x+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x^4-1)+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2-4+5)+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+5x(x^2-1)+2025x=y^5+1.$

Vì $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+5x(x^2-1)+2025x \vdots 5.$

Mà y^5+1 chia 5 dư 1 hoặc 2 nên phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Dễ thấy y là số lẻ nên đặt $y=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$.

Khi đó ta có $44x^2+1=4k^2+4k+1 \Leftrightarrow 11x^2=k(k+1)$

$\Rightarrow k(k+1)$ chia hết cho 11.

Do 11 là số nguyên tố nên k chia hết cho 11 hoặc $k+1$ chia hết cho 11.

Trường hợp 1: k chia hết cho 11. Đặt: $k=11m$ $(m\in\mathbb{N})$.

Khi đó: $x^2=m(11m+1)$.

Mà $(m,11m+1)=1$ nên m và $11m+1$ là các số chính phương.

Đặt: $\begin{cases} m=a^2 \\ 11m+1=b^2 \end{cases}$ $(a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow 2y+2=4k+4=44m+4=4b^2$ là số chính phương.

Trường hợp 2: $k+1$ chia hết cho 11. Đặt: $k+1=11n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Khi đó: $x^2=n(11n-1)$.

Mà $(n,11n-1)=1$ nên n và $11n-1$ là các số chính phương.

Đặt: $\begin{cases} n=c^2 \\ 11n-1=d^2 \end{cases}$ $(c, d\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow 11c^2-d^2=1 \Leftrightarrow 12c^2=c^2+d^2+1.$

Suy ra: $c^2+d^2+1 \vdots 4$ (vô lí vì c^2, d^2 chia 4 dư 0 hoặc 1).

Vậy nếu các số nguyên dương thỏa mãn $44x^2+1=y^2$ thì $2y+2$ là số chính phương.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các số thực a sao cho $a+\sqrt{2023}$ và $\frac{999}{a}+\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

Đặt: $\begin{cases} x=a+\sqrt{2023} \\ y=\frac{999}{a}+\sqrt{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x-\sqrt{2023} \\ y=\frac{999}{x-\sqrt{2023}}+\sqrt{2023} \end{cases}$.

Ta có $y=\frac{999}{x-\sqrt{2023}}+\sqrt{2023} \Leftrightarrow xy-y\sqrt{2023}=999+x\sqrt{2023}-2023$

$\Leftrightarrow xy+1024=(x+y)\sqrt{2023}$.

Vì x, y nguyên nên $x+y=0$, suy ra $y=-x$ và $xy+1024=0$.

Do đó $x=\pm 32$.

Vậy $a=\pm 32-\sqrt{2023}$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 – 2024)

Cho hai số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2+q^2=2(3pq-4)$. $\quad (*)$

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $(*)$.

Lời giải

a) Giả sử trong hai số p, q không có số nào chia hết cho 3.

Khi đó p^2, q^2 chia 3 dư 1. Suy ra: p^2+q^2 chia 3 dư 2.

Trong khi vế phải $2(3pq-4)=6pq-9+1$ chia 3 dư 1 (vô lý).

Do đó trong hai số p, q phải có ít nhất một số là bội của 3.

b) Do vai trò của p, q như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử q là bội của 3.

Do q là số nguyên tố nên $q=3$.

Khi đó: $p^2+9=2(2p-4) \Leftrightarrow p^2-18p+17=0 \Leftrightarrow p=1$ hoặc $p=17$.

Do p là số nguyên tố nên $p=17$.

Vậy các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn là $(p;q)\in\{(17;3);(3;17)\}$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm học 2023 – 2024)

Xét các số nguyên $a<b<c$ thỏa mãn $n=a^3+b^3+c^3-3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a<0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a, b, c $(a<b<c)$ sao cho n là một ước của 2023.

Lời giải

a) Giả sử $a \ge 0$, khi đó $b \ge 1$ và $c \ge 2$.

Ta có: $n=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ là số nguyên tố.

Mà $a+b+c>1$ nên $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1 \Leftrightarrow (b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2=2.$

Vì $c>b>a$ nên $(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2 \ge 1^2+1^2+2^2>2$.

Do đó điều giả sử sai. Suy ra $a<0$ (điều phải chứng minh).

b) Nếu $c \le 0$ thì ta có $a+b+c<0$, suy ra $n<0$, mâu thuẫn. Do đó $c \ge 1$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right] \ge \frac{1}{2}(c-a)^2 \ge \frac{1}{2}\left[1-(-1)\right]^2=2>1.$

Vì n là số nguyên tố và là ước của $2023=7.17^2$ nên $n \in \{7;17\}$.

Trường hợp 1: $n=17$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $\begin{cases} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=17 \\ a+b+c=1 \end{cases}$.

Suy ra: $3(a^2+b^2+c^2)=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2=35$.

Mâu thuẫn vì 35 không chia hết cho 3.

Trường hợp 2: $n=7$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $\begin{cases} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=7 \\ a+b+c=1 \end{cases}$.

Suy ra: $3(a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2=15 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=5 \\ ab+bc+ca=-2 \end{cases}$.

Do $5=a^2+b^2+c^2 \ge 1+c^2$ nên $c \le 2$. Mà $c \ge 1$ nên $c \in \{1;2\}$.

- Nếu $c=2$ thì ta có $a^2+b^2=1$. Suy ra $a^2 \le 1$, tức $a \ge -1$. Mà $a<0$ nên $a=-1$ và $b=0$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Nếu $c=1$ thì ta có $a^2+b^2=4$. Suy ra $a^2 \le 4$, tức $a \ge -2$. Mà $a<0$ nên $a \in \{-1,-2\}$. Thử trực tiếp, ta được $a=-2$ và $b=0$. Tuy nhiên, các số $a=-2,\ b=0$ và $c=1$ không thỏa mãn $a+b+c=1$.

Vậy có duy nhất một bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(a;b;c)=(-1;0;2)$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 – 2024)

a) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+x+6 là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2=-2\left(x^6-x^3y-32\right)$.

Lời giải

a) Đặt: $x^2+x+6=n^2\ \left(n\in\mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow 4x^2+4x+24=4n^2\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-4n^2=-23\Leftrightarrow\left(2x+1-2n\right)\left(2x+1+2n\right)=-23.$

Trường hợp 1: $\begin{cases}2x+1-2n=-23\\2x+1+2n=1\end{cases}\Rightarrow x=-6.$

Trường hợp 2: $\begin{cases}2x+1-2n=-1\\2x+1+2n=23\end{cases}\Rightarrow x=5.$

Vậy $x\in\left\{-6;5\right\}$.

b) Ta có $y^2=-2\left(x^6-x^3y-32\right)\Leftrightarrow x^6+\left(y-x^3\right)^2=64\Rightarrow x^6\le 64\Leftrightarrow x\le 2.$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{-1;-2;0;1;2\right\}$.

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $x=2\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=0\Rightarrow y=8.$

Trường hợp 2: $x=1\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=63\Rightarrow y\notin\mathbb{Z}$ (loại).

Trường hợp 3: $x=0\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=64\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=8\\y=-8\end{array}\right.$.

Trường hợp 4: $x=-1\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=63\Rightarrow y\notin\mathbb{Z}$ (loại).

Trường hợp 5: $x=-2\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=0\Rightarrow y=-8.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $\left(x;y\right)\in\left\{\left(0;8\right);\left(0;-8\right);\left(2;8\right);\left(-2;-8\right)\right\}$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 trường Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 2) năm học 2023 – 2024)

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Lời giải

Đặt $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\alpha$ với $\alpha\in\mathbb{Q}$.

Suy ra: $\sqrt{a}-\alpha\sqrt{b}=\alpha\sqrt{5}-\sqrt{3}\Leftrightarrow a+\alpha^2b-2\alpha\sqrt{ab}=5\alpha^2-2\alpha\sqrt{15}+3$

Do đó: $\sqrt{ab}-\sqrt{15}=\beta\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow ab = 15 + \beta^2 + 2\beta\sqrt{15} \Leftrightarrow 2\beta\sqrt{15} = ab - 15 - \beta^2.$

Suy ra $\beta = 0,$ tức là $ab = 15.$ Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Với $a = 1, b = 15$ thì $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ là số vô tỷ nên loại.

Trường hợp 2: Với $a = 3, b = 5$ thì $\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ là số vô tỷ nên loại.

Trường hợp 3: Với $a = 5, b = 3$ thì $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 1$ là số hữu tỷ nên thoả mãn.

Trường hợp 4: Với $a = 15, b = 1$ thì $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{3}$ là số vô tỷ nên loại.

Vậy $a = 5, b = 3$ là các số cần tìm.

Bài 37. (Đề thi vào 10 trường Đại học Sư Phạm Hà Nội (vòng 1) năm học 2023 – 2024)

Có hay không các số nguyên a, b sao cho $\left(a + b\sqrt{2023}\right)^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$?

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên a, b thoả mãn đề bài.

Ta có: $\left(a + b\sqrt{2023}\right)^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab.\sqrt{2023} + 2023b^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2023b^2 - 2024 = 2023\sqrt{2023} - 2ab.\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2023b^2 - 2024 = \sqrt{2023}\left(2023 - 2ab\right).$

Vì $a^2 + 2023b^2 - 2024$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2023}\left(2023 - 2ab\right)$ là số vô tỉ nên $2ab = 2023$

Điều này là vô lí vì 1 vế là chẵn 1 vế là lẻ. Suy ra giả sử trên sai.

Vậy không tồn tại các số nguyên a, b thoả mãn đề bài.