TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

Câu 1. (Đề thi chuyên tỉnh An Giang năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, BH là đường cao kẻ từ B $(H \in AC)$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC, F là điểm đối xứng của điểm H qua DE.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABFH$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.

c) Chứng minh rằng BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 2. (Đề thi chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023 – 2024)

1) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB. Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác D và cắt BC tại G. Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N.

a) Chứng minh tam giác OMN cân.

b) Gọi I là trung điểm của DE, OA cắt BC tại K. Chứng minh: $IE^2 = IA.IG$.

c) Tia BE cắt AC ở H. Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG.

2) Cho đường tròn (O) bán kính 1. Ba điểm phân biệt A, B, C thay đổi nằm trên đường tròn (O) sao cho điểm O nằm bên trong tam giác ABC. Các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB tại M, N, P khác O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = OM^2 + ON^2 + OP^2.$$

Câu 3. (Đề thi chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC < 2R$. Một điểm A di chuyển trên $(O;R)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác của $\widehat{CHE}$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh tam giác AMN cân tại A.

b) Gọi I, P, Q, J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB, BE, CF, AC. Chứng minh rằng bốn điểm I, P, Q, J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Dương năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A, B. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh rằng 4 điểm B, E, D, F là 4 đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO với đường tròn (O); M, N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính số đo $\widehat{BMN}$.

Câu 5. (Đề thi chuyên tỉnh Yên Bái năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, các đường cao AD, BE, CF. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt DF tại M, MC cắt (O) tại I khác C, IB cắt MD tại N.

a) Chứng minh rằng $MA // EF$.

b) Chứng minh rằng ΔMAF cân và tứ giác $AINF$ nội tiếp.

c) Chứng minh rằng $MA^2 = MN.MD$.

d) Gọi K là giao điểm của CF và đường tròn (O). Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng.

Câu 6. (Đề thi chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023 – 2024)

1) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$, có các đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.

a) Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS, từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS.

b) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2) Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy các điểm E, F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A, F); G, H thuộc cạnh BC (C nằm giữa B, H); I, J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C, J); K, M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D, M) sao cho E, F, G, H, I, J, K, M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, đồng thời hình đa giác $EFGHIJKM$ có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF = IJ$.

Câu 7. (Đề thi chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC không có góc tù $(AB < AC, BC < 2R)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ (B, C cố định, A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E ($D \neq E$, D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F và cắt AC tại I.

a) Chứng minh rằng $MBIC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $FI.FM = FD.FE$.

c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Câu 8. (Đề thi chuyên tỉnh Gia Lai năm 2023 – 2024)

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm), cát tuyến MCD không đi qua tâm $O, MD > MC$.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MC.MD$.

b) Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh rằng tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

c) Tìm vị trí của điểm D trên đường tròn (O) để tam giác MAD có diện tích lớn nhất.

Câu 9. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Định năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác CDE, BDF.

a) Chứng minh $\widehat{LDF} = \widehat{KDC}$.

b) Chứng minh hai tam giác LDF và KDC đồng dạng, hai tam giác LDK và FDC đồng dạng.

c) Chứng minh tứ giác $BLKC$ nội tiếp.

d) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKC, ALB. Chứng minh PQ song song với KL.

Câu 10. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023 – 2024)

Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $BC > AC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M \neq B$, $M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC $(H \in BC)$, đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Hai đường thẳng AK và CM cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp và $BE^2 = BA.BC$.

b) Từ C kẻ CN vuông góc với AB (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.

Câu 11. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023 – 2024)

Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B, H, C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a) Chứng minh $MP + MQ = AH$.

b) Gọi K là trung điểm của AM. Chứng minh rằng KH vuông góc với PQ.

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM. Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM, AB, AM. Vẽ DN vuông góc với EF tại N. Chứng minh $\widehat{BNE} = \widehat{MNF}$.

Câu 12. (Đề thi chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác đều ANI và BMK. Gọi điểm D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC, điểm E là trung điểm của đoạn thẳng IK.

a) Chứng minh tứ giác $AKBD$ nội tiếp.

b) Chứng minh điểm E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD.

c) Tính số đo của $\widehat{NEM}$.

Câu 13. (Đề thi chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Kẻ HM, HN lần lượt vuông góc với AB, AC $(M \in AB, N \in AC)$.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của đường tròn tâm A bán kính AH với cung nhỏ AC của đường tròn (O) là điểm Q. Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

c) Khi điểm A cố định và hai điểm B, C di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác nhọn. Chứng minh MN song song với một đường thẳng cố định.

Câu 14. (Đề thi chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2023 – 2024)

1) Cho tam giác nhọn ABC, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở D. Đường tròn đường kính AD cắt đường tròn đường kính OD tại điểm E (khác D). Gọi F là giao điểm của đoạn thẳng OE và đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng 3 điểm A, O, E thẳng hàng và CF là tia phân giác của $\widehat{BCE}$.

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (đều khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK.

2) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại M. Lấy điểm E nằm giữa A và M. Trên cạnh AC, BC lần lượt lấy điểm D, F sao cho $AD = AE$ và $BF = BE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF lần lượt cắt AB và BC tại G (khác E) và H (khác F). Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và các đường thẳng CM, ED, GH đồng quy.

Câu 15. (Đề thi chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2023 – 2024)

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, $BC = CD$, M là trung điểm của AB, đường tròn tâm C bán kính BC cắt MD tại E $(E \neq D)$, H là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi F là giao điểm của AE và đường tròn (C) $(F \neq E)$. Chứng minh $BC \perp DF$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) $(I \neq B)$, J là giao điểm của AI và DF. Tính tỉ số $\frac{DJ}{DF}$.

Câu 16. (Đề thi chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi H là trung điểm của OA. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC (M không trùng với B và C), AM cắt CD tại I.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC, BC, CH theo R.

b) Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IDM.

c) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho $MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 17. (Đề thi chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của EF và AH, kẻ IJ song song với BC $(J \in HE)$. Đường thẳng AJ cắt BC tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng D là trung điểm BM.

c) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh rằng $\widehat{FLB} = \widehat{CAM}$.

Câu 18. (Đề thi chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).

a) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.

c) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

d) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 19. (Đề thi chuyên Tin thành phố Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B $(R < R' < OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P \in (O)$, $Q \in (O')$; S là giao điểm của

PQ và OO'. Qua S kẻ đường thẳng cắt (O) tại hai điểm E, F và cắt (O') tại hai điểm G, H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

a) Chứng minh rằng $OE // O'G$.

b) Chứng minh $SA^2 = SP.SQ$.

c) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OO' tại M. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt OO' tại N. $ME \cap AB = I$. Chứng minh $\frac{EA^2}{EB^2} = \frac{IA}{IB}$ và N, I, H thẳng hàng.

Câu 20. (Đề thi chuyên Toán thành phố Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, EF cắt AD tại Q. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. IM cắt EF tại K.

a) Chứng minh ΔAEK đồng dạng với ΔABM.

b) $EF \cap BC = S; SI \cap MQ = T$. Chứng minh bốn điểm A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn.

c) Tia TH cắt (O) tại P. Chứng minh A, K, P thẳng hàng.

Câu 21. (Đề thi chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M. Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\Delta OEM \backsim \Delta BHM$.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I. Tính tỉ số $\frac{FI}{AB}$ khi tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{BE}$.

Câu 22. (Đề thi chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023 – 2024)

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm E thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) $(E \neq A, E \neq B)$. Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $MB.NC = AB^2$.

b) Gọi F là giao điểm của MC và BN, H là trung điểm BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.

2) Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 120°$. Điểm M thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp

xúc với MA, MB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu 23. (Đề thi chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường kính AT của đường tròn (O) và lấy điểm P trên đoạn thẳng OT $(P \neq T)$. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC.

a) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$ và hai đường thẳng BC, EF song song với nhau.

b) Cho AH và EF cắt nhau tại U; điểm Q di động trên đoạn thẳng UE $(Q \neq U,\ Q \neq E)$. Đường thẳng vuông góc với AQ tại điểm Q cắt các đường thẳng PE, PF tương ứng tại M, N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ}$.

c) Kẻ KD vuông góc với BC $(D \in BC)$. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 24. (Đề thi chuyên tỉnh Hoà Bình năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C cố định, qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với AC. Gọi K là điểm cố định nằm giữa O và B (K khác O và B), qua K vẽ dây cung ED bất kì của đường tròn (O). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AE và AD với đường thẳng d. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt tia AC tại điểm M (M khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) $\Delta AKD \backsim \Delta AQM$.

c) $AK.AM = AB.AC$.

d) Khi dây ED thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ luôn nằm trên một đường cố định.

Câu 25. (Đề thi chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC đều, nội tiếp đường tròn $(O;R)$, H là trung điểm của cạnh BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN.

a) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh diện tích tam giác IAB không đổi. Xác định vị trí của điểm M để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

Câu 26. (Đề thi chuyên tỉnh Khánh Hoà năm 2023 – 2024)

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A và B $\left(R > R', \widehat{OAO'} > 90^\circ\right)$. Đường thẳng $O'B$ cắt $(O;R)$ và $(O';R')$ lần lượt tại E và P (khác B), đường thẳng OB cắt $(O';R')$ và $(O;R)$ lần lượt tại F và Q (khác B).

a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng và $PQ = 2OO'$.

b) Qua B dựng đường thẳng song song với EF, cắt $(O;R)$ và $(O';R')$ lần lượt tại M và N. Chứng minh năm điểm O, A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn và $MABE$ là hình thang cân.

c) Tiếp tuyến với $(O';R')$ tại A cắt $(O;R)$ tại C và tiếp tuyến với $(O;R)$ tại A cắt $(O';R')$ tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng AB tại I (khác A). Chứng minh B là trung điểm của AI.

Câu 27. (Đề thi chuyên tỉnh Lai Châu năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm F, vẽ FE vuông góc với BC tại E. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF. Đường thẳng BF cắt (O) tại điểm thứ hai là D, DE cắt AC tại H.

a) Chứng minh rằng $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $FH.CA = CH.FA$.

c) Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai G, FG cắt CD tại I, CG cắt FD tại K. Chứng minh rằng K, I, H thẳng hàng.

Câu 28. (Đề thi chuyên tỉnh Lào Cai năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là điểm M.

a) Chứng minh rằng $MB = MC = MI$.

b) Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng tứ giác $AKFE$ nội tiếp.

c) Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng KP vuông góc với KD.

Câu 29. (Đề thi chuyên tỉnh Long An năm 2023 – 2024)

1) Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Từ A và B lần lượt kẻ hai tiếp tuyến Au, Bv với nửa đường tròn. Qua một điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Au và Bv theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{CBO} = \widehat{CNO}$.

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H, gọi K là giao điểm của CH với AN. Chứng minh ba điểm M, K, B thẳng hàng.

c) Gọi S là diện tích của tam giác ABC, S_1 là diện tích của tam giác MON. Hãy tính tỉ số $\frac{S_1}{S}$ khi $AM = 1,5R$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh BC, I và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và tam giác ACM. Xác định vị trí của M để diện tích tam giác AIK nhỏ nhất.

Câu 30. (Đề thi chuyên tỉnh Nam Định năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm đoạn AH, đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại S sao cho P nằm giữa S và F. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

b) $AP^2 = AQ^2 = AE.AC$.

c) Tứ giác $DMEF$ nội tiếp và $\dfrac{FP}{PS} = \dfrac{QE}{ES}$.

Câu 31. (Đề thi chuyên Toán Lê Hồng Phong tỉnh Nam Định năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường BC $(BD > AC)$. Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD. Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E, cắt đường tròn (O) tại F $(F$ *khác* $B)$.

a) Gọi J là trung điểm của EC. Chứng minh rằng 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I. Chứng minh rằng $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.

c) Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N, đường thẳng BN cắt (O) tại K $(K$ *khác* $B)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{PM} = \dfrac{1}{MQ} + \dfrac{1}{BM}$.

Câu 32. (Đề thi chuyên Đại học Vinh tỉnh Nghệ An năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A, I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I. Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $CDNM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB. Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM.AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Câu 33. (Đề thi chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F điểm đối xứng của C qua AB. Đường thẳng BE cắt đường thẳng CF tại H.

a) Chứng minh các tứ giác $AHBF$ và $AHCE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Chứng minh F, B, D thẳng hàng và DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, ACF. Chứng minh sáu điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm I và giao điểm (khác D) của đường thẳng AD với đường tròn (I) là trực tâm tam giác APQ.

d) Giả sử H thuộc đường tròn (I). Chứng minh các đường thẳng AI, DH, BC, PQ đồng quy.

Câu 34. (Đề thi chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O), M là điểm đối xứng với P qua AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q. Chứng minh Q đối xứng với P qua OA.

c) Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại $B; C$ đồng quy.

Câu 35. (Đề thi chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm 2023 – 2024)

Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BN (M khác B và N). Gọi I là giao điểm của AM và BN, H là hình chiếu của I trên AB, IH cắt AN tại C, K là điểm đối xứng với N qua AB.

a) Chứng minh $CM.CB = CI.CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và (O). Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 36. (Đề thi chuyên tỉnh Phú Yên năm 2023 – 2024)

1) Cho đoạn thẳng AB, với M là trung điểm. Trên đường trung trực Mt của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kì. Vẽ tia Ax sao cho AI là phân giác $\widehat{BAx}$. Đường thẳng BI cắt Ax tại N. Gọi C là điểm đối xứng của A qua N, H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân.

b) Chứng minh đẳng thức: $BH^2 = HI.BN$.

c) Khi điểm I di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC vuông tại C, hãy tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng DC. Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại E. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng DC.

a) Chứng minh BH vuông góc với AI.

b) Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác $BCEK$ nội tiếp.

Câu 37. (Đề thi chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn tâm O. Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) theo thứ tự tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q, hai đường thẳng QH và AB cắt nhau tại P. Chứng minh:

a) Tứ giác $AMQK$ nội tiếp.

b) Tam giác APQ cân tại A.

c) $\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{DE}=\dfrac{1}{MQ}$.

Câu 38. (Đề thi chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ đến đường tròn tâm O, đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm và P, F nằm cùng phía so với đường thẳng AD).

1) Chứng minh $AP^2 = AB.AF$ và năm điểm A, P, D, O, Q nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh H, P, Q thẳng hàng.

3) Chứng minh PF, QE, AD đồng quy.

Câu 39. (Đề thi chuyên tỉnh Sơn La năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của đường thẳng BC và EF; I là giao điểm của SA và đường tròn (O) (với I khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $SF.SE = SI.SA$ và $HI \perp SA$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường kính AD của (O). Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và H là trực tâm tam giác ASM.

d) Giả sử T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác IST và tam giác ECT tiếp xúc với nhau.

Câu 40. (Đề thi chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023 – 2024)

1) Cho đường tròn (O) đường kính $AB.$ Trên (O) lấy hai điểm C, D nằm khác phía đối với AB và CD không đi qua $O.$ Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC, I là trung điểm đoạn thẳng EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của $(O).$

2) Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài $(O),$ vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC không đi qua O $(MB < MC).$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $MO.$

a) Chứng minh tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

b) Vẽ đường thẳng qua B song song với AC cắt các đường thẳng MA, AH lần lượt tại $K, I.$ Chứng minh $KB = BI.$

Câu 41. (Đề thi chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = c, AC = b.$ Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính AB và đường tròn tâm O_2 đường kính $AC.$ Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và $(O_2).$ Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E không trùng với A sao cho A nằm giữa $D, E.$

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng (d) thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng (d) để diện tích tứ giác $BDEC$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo $b, c.$

c) Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn DE và vuông góc với BC tại $K.$ Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2.$

Câu 42. (Đề thi chuyên tỉnh Thanh Hoá năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O),$ phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt (O) tại Q (Q khác A). Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB (E thuộc AC, F thuộc AB). Gọi M là trung điểm của $BC,$ tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là $P.$

a) Chứng minh $QM.QP = QD.QA.$

b) Gọi N là giao điểm của PD và $EF.$ Chứng minh $MN // AD.$

c) Dựng đường kính AK của $(O).$ Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại R (R khác N). Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.

Câu 43. (Đề thi chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O),$ có đường cao AD và trực tâm $H.$ Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thẳng EH cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại $M.$

a) Chứng minh M là trung điểm của EH và $AMOF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{OFA}+\widehat{ODF}=180^\circ$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

Câu 44. (Đề thi chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DA^2=DE.DB$.

c) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Câu 45. (Đề thi chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm 2023 – 2024)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, có đường cao AH. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi J là giao điểm của AI và DE; K là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.

b) Gọi M là giao điểm của KI và AC, N là giao điểm của AH và ED. Chứng minh $AM=AN$.

c) Gọi Q là giao điểm của DI và EF, P là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

2) Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O).

a) Chứng minh $CG.AH=AO^2$.

b) Chứng minh EH song song FG.

Câu 46. (Đề thi chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2023 – 2024)

Cho tam giác tù ABC có $\widehat{ABC}>90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S. Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC=SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm E, F (E ở giữa S và F). Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ACS \backsim \Delta CBS$.

b) $\widehat{APS}=\widehat{PBS}$.

c) Tứ giác $EKLF$ là hình thang cân.

Câu 47. (Đề thi chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh $\widehat{PQH} = \widehat{BAH}$.

b) Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh $\Delta MQH \backsim \Delta MHP$ và $MH^2 = MB.MC$.

c) Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). KH cắt đường tròn (O) tại D (D khác K). Gọi J là trung điểm của HD. Chứng minh $JQ = JC$.

Câu 48. (Đề thi chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm E. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm N $(N \neq A)$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm B, C cắt nhau tại điểm D.

a) Chứng minh $AOND$ là tứ giác nội tiếp và tia DO là phân giác của $\widehat{ADN}$.

b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm P $(P \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME cắt đường tròn (O) tại điểm F $(F \neq A)$. Chứng minh $AB.PC = AC.PB$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh 3 điểm D, K, F thẳng hàng và đường thẳng FN đi qua trung điểm của đoạn thẳng DM.

Câu 49. (Đề thi vòng 1 chuyên Khoa học Tự nhiên Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cố định cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AP cắt (O') tại C khác A.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng $\widehat{QBC} + \widehat{ABP} = 90^\circ$.

3) Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc $O'C$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Câu 50. (Đề thi vòng 2 chuyên Khoa học Tự nhiên Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB > BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F. Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG}=\widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm của BC. K đối xứng với A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho $NS\perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR\cdot AH=AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ\perp AS$ và $SQ\perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN.

Câu 51. (Đề thi vòng 1 chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC}=120°, BC=2AB.$ Dựng đường tròn tâm O đường kính $AC.$ Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn $(O).$ Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại $H, S.$ Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn $(O).$

Câu 52. (Đề thi chuyên vòng 2 Sư Phạm Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho tam giác $ABC.$ Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại các điểm $D, E, G.$ Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại $M, N.$ Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm $P.$ Chứng minh:

a) $EG // MN.$

b) Điểm P nằm trên đường tròn $(I).$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (Đề thi chuyên tỉnh An Giang năm 2023 – 2024)

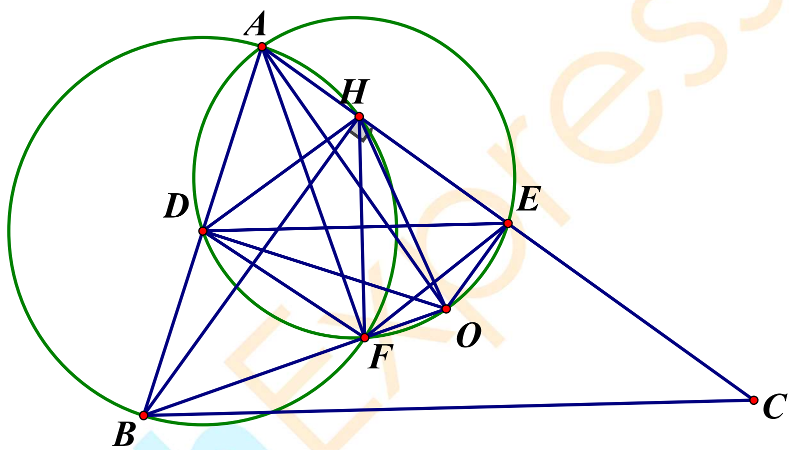
Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, BH là đường cao kẻ từ B $(H \in AC)$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC, F là điểm đối xứng của điểm H qua DE.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABFH$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.

c) Chứng minh rằng BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



a) Xét ΔAHB vuông tại H có D là trung điểm AB

$\Rightarrow DA = DB = DH.$ (1)

Vì F là điểm đối xứng của điểm H qua DE nên $DH = DF$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$$DA = DH = DB = DF.$$

Suy ra bốn điểm A, H, B, F cùng thuộc đường tròn tâm D, đường kính AB.

Vậy tứ giác $ABFH$ nội tiếp.

b) Tứ giác $ABFH$ nội tiếp nên $\widehat{FBA} = \widehat{FHE}$. (3)

Vì F là điểm đối xứng của điểm H qua DE nên $EH = EF$.

Suy ra ΔEHF cân tại $E \Rightarrow \widehat{FHE} = \widehat{EFH}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.

c) Vì F là điểm đối xứng của điểm H qua DE nên $\widehat{FDE} = \dfrac{1}{2}\widehat{HDF}$. (5)

Theo chứng minh câu a, ta có A, H, B, F thuộc đường tròn tâm D đường kính AB nên $\widehat{HAF} = \dfrac{1}{2}\widehat{HDF}$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{HAF} = \widehat{EAF}$.

Suy ra tứ giác $FDAE$ nội tiếp. (7)

Xét đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC có: D là trung điểm dây $AB \Rightarrow \widehat{ODA} = 90^\circ$

E là trung điểm dây $AC \Rightarrow \widehat{OEA} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ODAE$ có: $\widehat{ODA} + \widehat{OEA} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $ODAE$ nội tiếp đường tròn đường kính AO. (8)

Từ (7) và (8), suy ra A, D, F, O, E cùng thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow \widehat{AFO} = \widehat{ADO} = 90^\circ$ (cùng chắn cung AO).

Mặt khác $\widehat{AFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

Suy ra: $\widehat{AFO} + \widehat{AFB} = 180^\circ$ hay ba điểm B, F, O thẳng hàng.

Vậy BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Câu 2. (Đề thi chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023 – 2024)

1) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB. Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác D và cắt BC tại G. Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N.

a) Chứng minh tam giác OMN cân.

b) Gọi I là trung điểm của DE, OA cắt BC tại K. Chứng minh: $IE^2 = IA.IG$.

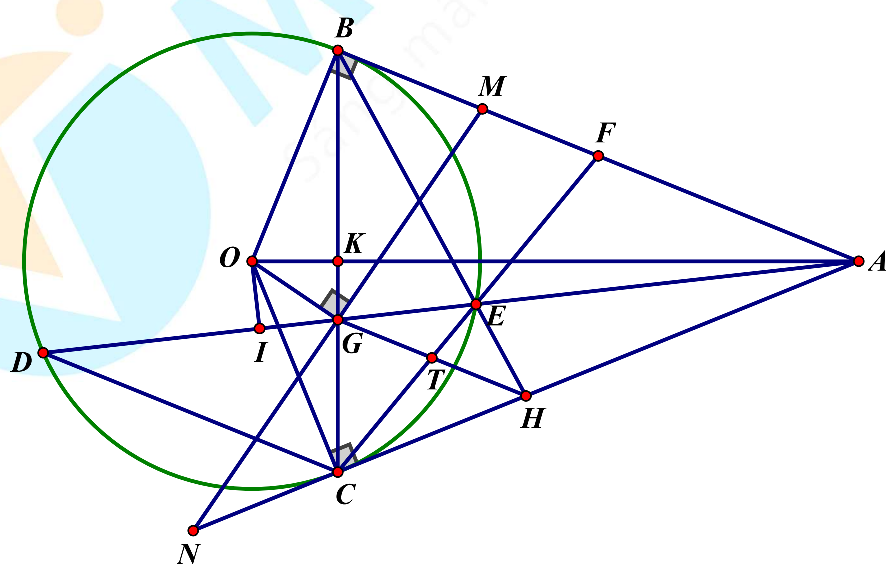
c) Tia BE cắt AC ở H. Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG.

2) Cho đường tròn (O) bán kính 1. Ba điểm phân biệt A, B, C thay đổi nằm trên đường tròn (O) sao cho điểm O nằm bên trong tam giác ABC. Các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB tại M, N, P khác O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = OM^2 + ON^2 + OP^2.$$

Lời giải

1)



a) Tứ giác $OGMB$ nội tiếp đường tròn đường kính $MO \Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{OBG}$.

Tứ giác $OGCN$ nội tiếp đường tròn đường kính $NO \Rightarrow \widehat{ONG} = \widehat{OCG}$.

Mặt khác tam giác OBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{ONG} \Rightarrow \Delta OMN$ cân tại O.

b) Ta có: $\widehat{AKG} = \widehat{AIO} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AKG \backsim \Delta AIO \left(g.g\right) \Rightarrow AG.AI = AK.AO.$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được: $AK.AO = AB^2$ và $AB^2 = AE.AD \Rightarrow AG.AI = AE.AD.$

Khi đó: $AG.AI = \left(AI - IE\right)\left(AI + IE\right) = AI^2 - IE^2 \Rightarrow IE^2 = AI^2 - AG.AI = IG.IA.$

c) Gọi T là giao điểm của HG và CE. Ta có: $\widehat{BED} = \widehat{BCD} = \widehat{CBA} = \widehat{ACB} \Rightarrow HEGC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HGC} = \widehat{HEC} = \widehat{CDB} = \widehat{CBA}.$

Đến đây ta chứng minh hai đường thẳng HG, AB song song với nhau.

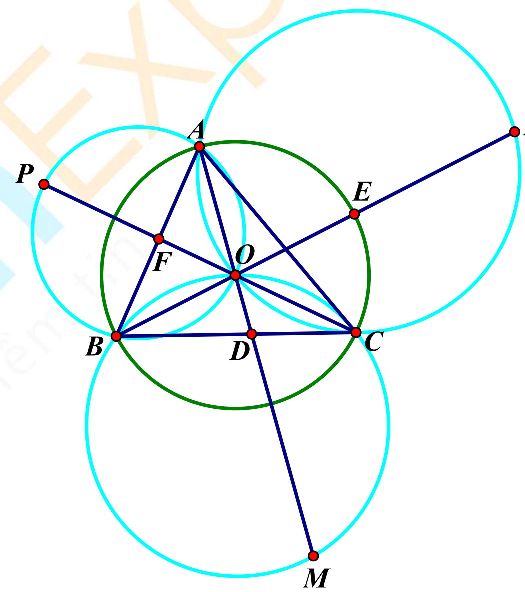
Kéo dài CE cắt AB tại F.

Dễ thấy: $\widehat{FAE} = \widehat{EDC} = \widehat{ECA} \Rightarrow \Delta FAE \backsim \Delta FCA \left(g.g\right) \Rightarrow FA^2 = FE.FC.$

Mà $FB^2 = FE.FC$ nên $FA = FB \Rightarrow F$ là trung điểm của AB.

Theo định lý Thales, ta có: $\dfrac{TG}{FB} = \dfrac{CT}{CF} = \dfrac{TH}{FA} \Rightarrow TG = TH$ hay T là trung điểm của GH.

2) Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của OA, OB, OC với các đường thẳng BC, CA, AB.



Dễ thấy hai tam giác OCD, OMC đồng dạng

$\Rightarrow OD.OM = OC^2 = 1 \Rightarrow OM = \dfrac{1}{OD}.$

Tương tự: $ON = \dfrac{1}{OE}; OP = \dfrac{1}{OF}.$

Đặt: $x = S_{OBC}$; $y = S_{OCA}$; $z = S_{OAB}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OD} = \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{y+z}{x}.$

Tương tự: $\dfrac{1}{OE} = \dfrac{x+z}{y}; \dfrac{1}{OF} = \dfrac{y+z}{x}.$

Khi đó: $\dfrac{1}{OD} + \dfrac{1}{OE} + \dfrac{1}{OF} = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) \ge 6.$

Do đó: $S = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OE^2} + \dfrac{1}{OF^2} \ge \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{OD} + \dfrac{1}{OE} + \dfrac{1}{OF}\right)^2 \ge 12.$

Vậy GTNN của biểu thức S là 12 đạt được khi tam giác ABC đều.

Câu 3. (Đề thi chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023 – 2024)

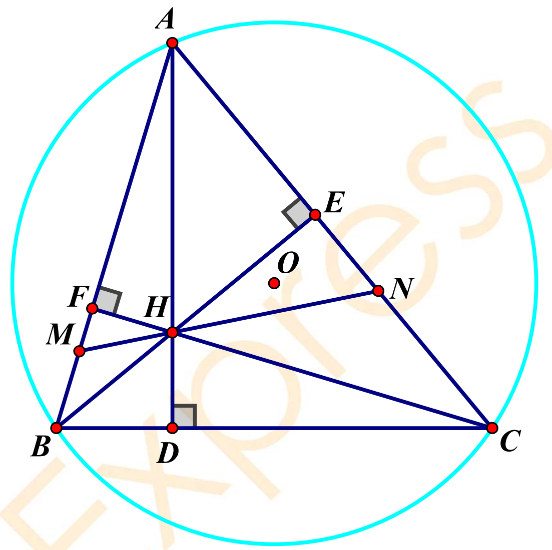
Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC < 2R$. Một điểm A di chuyển trên $\left(O;R\right)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác của $\widehat{CHE}$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh tam giác AMN cân tại A.

b) Gọi I, P, Q, J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB, BE, CF, AC. Chứng minh rằng bốn điểm I, P, Q, J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Vì $BE \perp AC$ tại E nên $\widehat{HEC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{EHN} + \widehat{ENH} = 90°$.

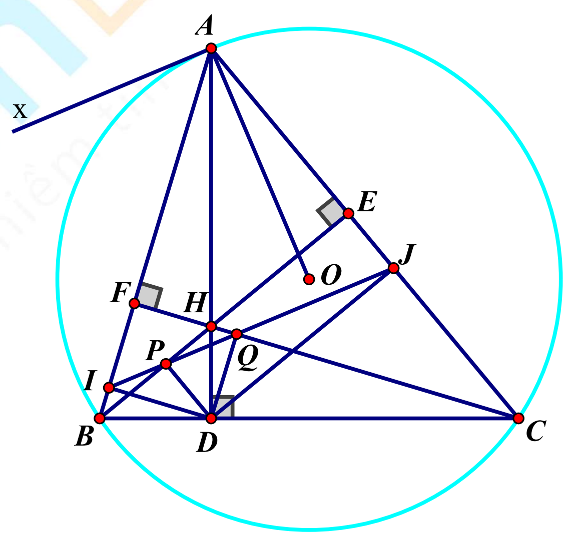
Vì $CF \perp AB$ tại F nên $\widehat{HFB} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{FMH} + \widehat{MHF} = 90°$.

Ta có: $\widehat{EHC} = \widehat{FHB}$ (hai góc đối đỉnh).

Mà HM, HN lần lượt là tia phân giác của $\widehat{FHB}, \widehat{EHC}$ nên $\widehat{EHN} = \widehat{FHM}$.

Suy ra: $\widehat{FMH} = \widehat{ENH} \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A.



b) Chứng minh được tứ giác $BIPD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IBD} + \widehat{IPD} = 180°$. $\quad (1)$

Mặt khác: $\widehat{IBD} = \widehat{FHA}$ (cùng phụ với $\widehat{FAH}$);

$\widehat{FHA} = \widehat{QHD}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{QHD}$.

Chứng minh được tứ giác $DPHQ$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QHD} = \widehat{QPD} \Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{QPD}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{QPD} + \widehat{IPD} = 180°$ nên ba điểm I, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được P, Q, J thẳng hàng.

Vậy bốn điểm I, P, Q, J thẳng hàng.

Vì tứ giác $BIPD$ nội tiếp nên $\widehat{AIP} = \widehat{PDB}$.

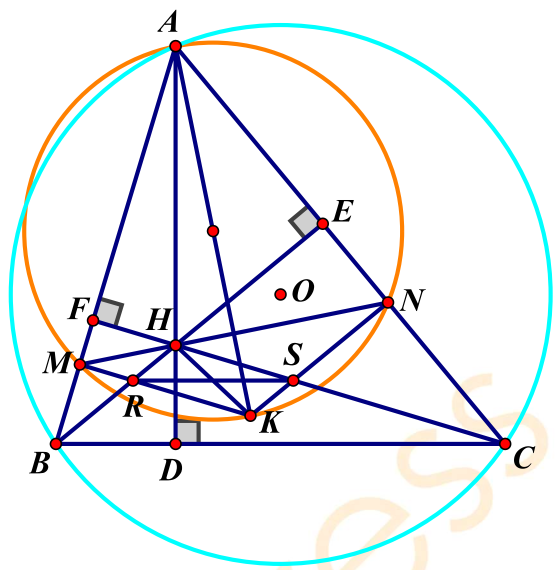
Lại có $PD // AC$ (cùng vuông góc với BE) nên $\widehat{PDB} = \widehat{ACB}$.

Qua A kẻ tiếp tuyến Ax của (O) (như hình vẽ).

Suy ra $\widehat{BAx} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{AIP}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $IP // Ax \Rightarrow IJ \perp OA$ (do $OA \perp Ax$).

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.



c) Vì tam giác AMN cân tại A và AK là phân giác $\widehat{MAN}$ nên AK là trung trực của MN

$\Rightarrow AK$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔAMN

$\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{ANK} = 90^\circ \Rightarrow KM // CF;\ KN // BE.$

Gọi R, S lần lượt là giao điểm của MK với BH và NK với CH

$\Rightarrow HRKS$ là hình bình hành

$\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của $RS.$ $\quad (3)$

Vì $MR // FH$ nên theo định lý Thales, ta có $\dfrac{HR}{RB} = \dfrac{FM}{MB}.$

Vì HM là phân giác của $\widehat{BHF}$ nên $\dfrac{FM}{MB} = \dfrac{FH}{HB}.$

Suy ra: $\dfrac{HR}{RB} = \dfrac{FH}{HB}.$

Chứng minh tương tự, ta được: $\dfrac{HS}{SC} = \dfrac{HE}{HC}.$

Mặt khác $\Delta FHB \backsim \Delta EHC\ (\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{FH}{HB} = \dfrac{HE}{HC}.$

Do đó: $\Rightarrow \dfrac{HR}{RB} = \dfrac{HS}{SC} \Rightarrow RS // BC.$ $\quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra HK luôn đi qua trung điểm của BC cố định.

Câu 4. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Dương năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh $A, B.$ Gọi F là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng $AO.$

a) Chứng minh rằng 4 điểm B, E, D, F là 4 đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của $BC.$

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO với đường tròn (O); M, N lần lượt là trung điểm của EF và $CP.$ Tính số đo $\widehat{BMN}.$

Lời giải

a) Vì $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ nên 5 điểm A, E, F, D, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB

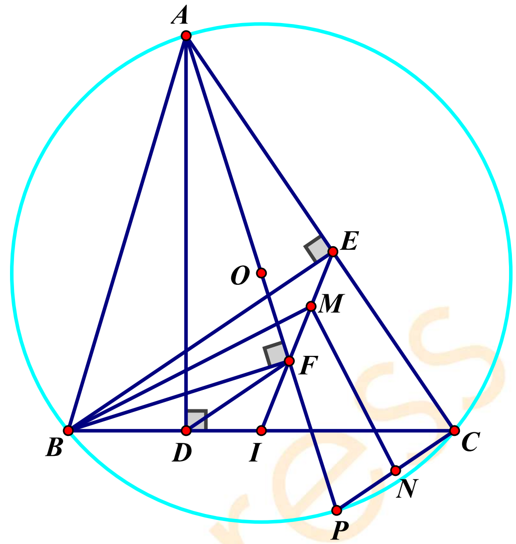
$\Rightarrow AEFD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{DAE} = \widehat{DAC}.$

Mặt khác $\widehat{DAC} = \widehat{EBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{EBC}.$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $DF // BE.$ (1)

Lại có 4 điểm B, E, F, D cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác $BEFD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{BEF}.$ (2)



Từ (1) và (2), suy ra $BEFD$ là hình thang cân hay 4 điểm B, E, D, F là 4 đỉnh của một hình thang cân.

b) Gọi I là giao điểm của EF và BC.

Theo chứng minh câu a, ta có $DF // BE$

$\Rightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{IF}{EF}$ (định lý Thales).

Mà $BD = EF$ (do $BEFD$ là hình thang cân) nên $ID = IF$

$\Rightarrow IE = IB.$

Từ đó, ta chứng minh được $IE = IB = IC$

$\Rightarrow I$ là trung điểm BC.

c) Ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BAF} = \widehat{BCP}$ và $\widehat{BFE} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{BPC}$

$\Rightarrow \Delta BFE \backsim \Delta BPC$ (g.g).

Do M, N lần lượt là trung điểm của EF, PC nên $\Delta BFM \backsim \Delta BPN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{BM}{BF} = \frac{BN}{BP}; \widehat{MBF} = \widehat{NBP} \Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{FBP} \Rightarrow \Delta BMN \backsim \Delta BFP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{BFP} = 90°.$

Câu 5. (Đề thi chuyên tỉnh Yên Bái năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, các đường cao AD, BE, CF. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt DF tại M, MC cắt (O) tại I khác C, IB cắt MD tại N.

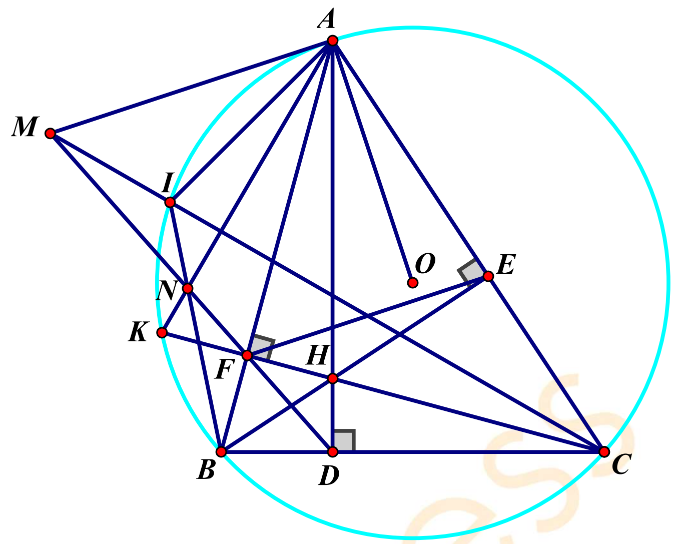
a) Chứng minh rằng $MA // EF$.

b) Chứng minh rằng ΔMAF cân và tứ giác $AINF$ nội tiếp.

c) Chứng minh rằng $MA^2 = MN.MD$.

d) Gọi K là giao điểm của CF và đường tròn (O). Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ACB}.$

Mà $\widehat{ACB}=\widehat{BAM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$ nên $\widehat{AFE}=\widehat{BAM}.$

Vì hai góc này ở vị trí so le trong nên $MA//EF.$

b) Vì $\widehat{AFC}=\widehat{ADC}=90^\circ$ nên tứ giác $ACDF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD}=\widehat{ACB}.$

Mà $\widehat{BFD}=\widehat{MFA}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{MFA}=\widehat{ACB}.$

Mặt khác $\widehat{ACB}=\widehat{BAM}\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{MFA}$

$\Rightarrow \Delta MAF$ cân tại $M.$

Ta có: $\widehat{MAF}=\widehat{MAI}+\widehat{IAF};\ \widehat{AFM}=\widehat{BNF}+\widehat{NBF}.$

Mà $\widehat{MAI}=\widehat{NBF}$ nên $\widehat{IAF}=\widehat{BNF}\Rightarrow AINF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Dễ dàng chứng minh $\Delta AMI\backsim\Delta CMA\ (g.g)\Rightarrow MA^2=MI.MC.$ (1)

Vì $AINF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IAF}=\widehat{MNI}=\widehat{ICB}\Rightarrow INFC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MI.MC=MN.MD.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $MA^2=MN.MD.$

d) Ta có: $MA^2=MN.MD$ (theo chứng minh câu c).

Mà $MA=MF$ (ΔMAF cân tại M) và $MI.MC=MN.MD$ nên $MI.MC=MF^2.$

Suy ra $\Delta MIF\backsim\Delta MFC\Rightarrow \widehat{MFI}=\widehat{MCF}.$

Lại có: $\widehat{MFI}=\widehat{IAN}$ ($AINF$ nội tiếp) và $\widehat{MCF}=\widehat{IAK}.$ Suy ra $\widehat{IAK}=\widehat{IAN}.$ Do đó tia AN, AK trùng nhau. Vậy A, N, K thẳng hàng.

Câu 6. (Đề thi chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023 – 2024)

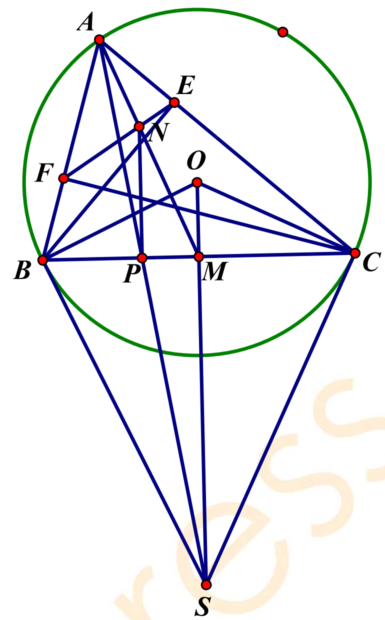
1) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB<AC$, có các đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại $S.$ Gọi M là giao điểm của BC và $SO.$

a) Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác $MBS,$ từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác $ABS.$

b) Gọi N là giao điểm của AM và $EF,$ P là giao điểm của SA và $BC.$ Chứng minh rằng NP vuông góc với $BC.$

2) Cho hình chữ nhật $ABCD.$ Lấy các điểm E, F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A, F); G, H thuộc cạnh BC (C nằm giữa B, H); I, J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C, J); K, M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D, M) sao cho E, F, G, H, I, J, K, M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD,$ đồng thời hình đa giác $EFGHIJKM$ có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF=IJ.$

Lời giải



1a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $SB = SC$.

Mà $OB = OC$ nên SO là trung trực của BC

$\Rightarrow SO \perp BC$ tại trung điểm M của $BC \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{SMB} = 90^\circ$.

Lại có: $\widehat{BAC} = \widehat{SBC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$.

Suy ra $\Delta EAB \backsim \Delta MBS$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{BM}$.

Tam giác BEC vuông tại E, EM là trung tuyến nên $BM = ME$.

Suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$. $\quad (1)$

Tam giác MEC cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$.

Mặt khác $\widehat{ABS} + \widehat{ACB} = 180^\circ = \widehat{AEM} + \widehat{MEC} = \widehat{AEM} + \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AEM}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$ (c.g.c).

b) Vì $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$ nên $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$; $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$. $\quad (3)$

Mà tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\widehat{ABP} = \widehat{AEN}$.

Suy ra $\Delta AEN \backsim \Delta ABP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NE}{BP}$. $\quad (4)$

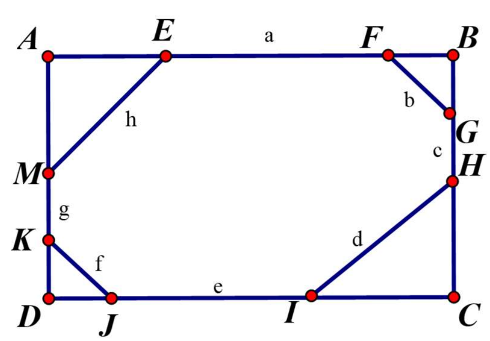
Ta có: $\widehat{NEM} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{NEM} + \widehat{AEN} + \widehat{MEC} = 180^\circ$.

Suy ra: $\widehat{NEM} = \widehat{BAC} = \widehat{SBP}$. $\quad (5)$

Từ (3) và (5), suy ra $\Delta EMN \backsim \Delta BSP \Rightarrow \dfrac{NE}{BP} = \dfrac{MN}{PS}$. $\quad (6)$

Từ (4) và (6), suy ra $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NM}{PS} \Rightarrow \dfrac{AN}{MN} = \dfrac{AP}{PS} \Rightarrow NP \,//\, MS$.

Mặt khác $SM \perp BC \Rightarrow NP \perp BC$.



2) Đặt $EF = a$; $FG = b$; $GH = c$; $HI = d$; $IJ = e$; $JK = f$; $KM = g$; $ME = h$ (theo đơn vị cm, với a, b, c, d, e, f, g, h là các số hữu tỉ dương).

Do các góc của hình bát giác $EFGHIJKM$ bằng nhau nên mỗi góc trong của hình bát giác đó có số đo là 135°.

Suy ra mỗi góc ngoài của hình bát giác này có số đo là $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Do đó các tam giác MAE; FBG; CIH; DKJ là các tam giác vuông cân.

Ta có: $MA = ME = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$; $BF = BG = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$; $CH = CI = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$; $DK = DJ = \dfrac{f}{\sqrt{2}}$.

Vì $AB = CD$ nên $\frac{h}{\sqrt{2}} + a + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} + e + \frac{d}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (e-a)\sqrt{2} = h + b - f - d.$

Nếu $e - a \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{h+b-f-d}{e-a}$, điều này vô lí, do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, còn $\frac{h+b-f-d}{e-a}$, là số hữu tỉ.

Vậy $e - a = 0 \Leftrightarrow e = a$ hay $EF = IJ$ (điều phải chứng minh)

Câu 7. (Đề thi chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023 – 2024)

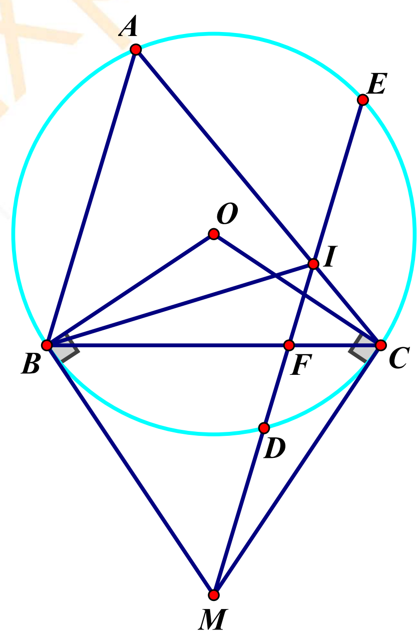
Cho tam giác ABC không có góc tù $(AB < AC, BC < 2R)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ (B, C cố định, A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E ($D \neq E, D$ thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F và cắt AC tại I.

a) Chứng minh rằng $MBIC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $FI.FM = FD.FE$.

c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BC}$.

Mà $MI // AB$ nên $\widehat{MIC} = \widehat{BAC}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Suy ra $\widehat{MIC} = \widehat{MBC} \Rightarrow MBIC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét ΔBFI và ΔMFC có: $\widehat{BFI} = \widehat{MFC}$ (hai góc đối đỉnh);

$\widehat{BIF} = \widehat{MCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM).

Suy ra $\Delta BFI \backsim \Delta MFC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{FB}{FM} = \frac{FI}{FC} \Rightarrow FI.FM = FB.FC.$

Chứng minh tương tự, ta được: $\Delta BFE \backsim \Delta DFC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FC} \Rightarrow FB.FC = FD.FE.$

Suy ra $FI.FM = FD.FE$.

c) Gọi h là khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng BC.

Khi đó: $S_{IBC} = \frac{1}{2}.BC.h.$

Vì B và C là hai điểm cố định nên độ dài của đoạn BC không đổi.

Do đó S_{IBC} lớn nhất khi h đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: MB và MC lần lượt là hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên $\widehat{MBO} = \widehat{MCO} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MBOC$ nội tiếp đường tròn đường kính OM (gọi là đường tròn $\mathcal{C}$).

Lại có $MBIC$ là tứ giác nội tiếp nên 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn cố định $\mathcal{C}$ (do O, M cố định).

Lại có $OB = OC = R$ nên O là điểm chính giữa cung BC của $\mathcal{C}$, vì I di chuyển trên cung này nên khoảng cách từ I đến BC nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách từ O đến BC.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv O$ hay A, O, C thẳng hàng.

Vậy khi A là giao điểm của OC và (O) thì tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Câu 8. (Đề thi chuyên tỉnh Gia Lai năm 2023 – 2024)

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm), cát tuyến MCD không đi qua tâm $O, MD > MC$.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MC.MD$.

b) Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh rằng tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

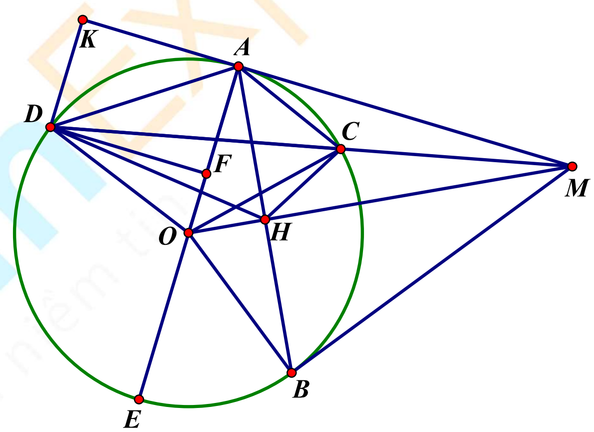
c) Tìm vị trí của điểm D trên đường tròn (O) để tam giác MAD có diện tích lớn nhất.

Lời giải

a) Xét ΔMAC và ΔMDA có: $\widehat{AMD}$ chung; $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Suy ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$.

b) Ta có: $\widehat{OAM} = 90°$ (tính chất của tiếp tuyến); $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB \Rightarrow OM$ là trung trực AB hay $OM \perp AB$ tại H



$\Rightarrow AM^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow MH.MO = MC.MD \left(= MA^2\right) \Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$.

Xét ΔMHD và ΔMCO có: $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$ và $\widehat{DMO}$ chung

$\Rightarrow \Delta MHD \backsim \Delta MCO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{MOC}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{CDH} = \widehat{HOC}$

$\Rightarrow$Tứ giác $DOHC$ nội tiếp đường tròn.

c) Dựng đường cao DK của ΔMAD. Khi đó $S_{\Delta MAD} = \dfrac{1}{2}MA.DK$.

Vì MA không đổi nên $S_{\Delta MAD} = \dfrac{1}{2}MA.DK$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi DK lớn nhất.

Gọi E là điểm đối xứng với A qua O.

Qua D dựng đường thẳng song song MA cắt AE tại $F \Rightarrow DK = AF$.

Khi D di chuyển trên cung lớn AB thì F di chuyển trên đường kính AE.

Suy ra AF lớn nhất khi AF là đường kính hay $D \equiv F \equiv E$.

Câu 9. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Định năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác CDE, BDF.

a) Chứng minh $\widehat{LDF}=\widehat{KDC}$.

b) Chứng minh hai tam giác LDF và KDC đồng dạng, hai tam giác LDK và FDC đồng dạng.

c) Chứng minh tứ giác $BLKC$ nội tiếp.

d) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKC, ALB. Chứng minh PQ song song với KL.

Lời giải

a) Gọi H là trực tâm của ΔABC.

Vì K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác CDE, BDF

$\Rightarrow DL$ là tia phân giác của $\widehat{FDB}$; FL là tia phân giác của $\widehat{BFD}$; CK là tia phân giác của $\widehat{ECD}$; DK là tia phân giác của $\widehat{EDC}$.

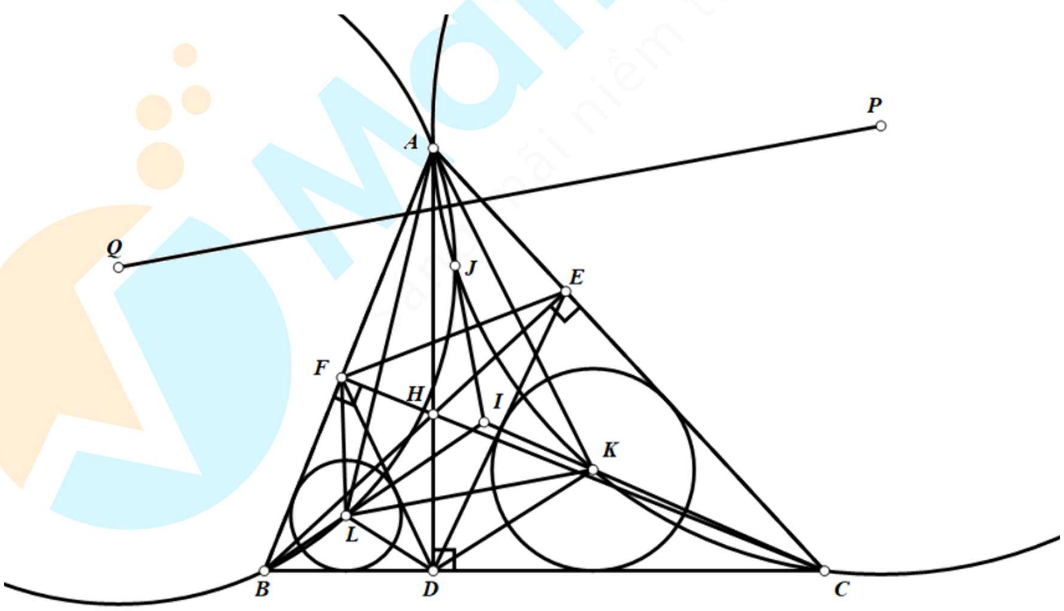
Xét tứ giác $DHFB$ có: $\widehat{FBH}+\widehat{BDH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.

Suy ra tứ giác $DHEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDC}=\widehat{EHC} \Rightarrow \widehat{EDC}=\widehat{FHB}$.

Xét tứ giác $DFHB$ có: $\widehat{FDB}+\widehat{FHB}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.

Suy ra tứ giác $DHFB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDB}=\widehat{FHB}$.

Do đó: $\widehat{EDC}=\widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{LDF}=\widehat{KDC}$.



b) Tứ giác $ACDF$ có: $\widehat{AFC}=\widehat{ADC}=90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACDF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD}=\widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{LFD}=\widehat{KCD}$.

Xét ΔLDK và ΔKDC, ta có: $\widehat{LDF}=\widehat{KDC}$ và $\widehat{LFD}=\widehat{KCD} \Rightarrow \Delta LDF \backsim \Delta KDC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{LD}{KD}=\frac{DF}{DC}\Rightarrow \frac{LD}{DF}=\frac{KD}{DC}.\qquad (1)$

Vì $\begin{cases}\widehat{EDC}=\widehat{FDB}\Rightarrow \widehat{LDB}=\widehat{KDC}\Rightarrow \widehat{LDK}+2\widehat{LDB}=180^\circ\\ \widehat{FDC}+\widehat{FDB}=180^\circ\Rightarrow \widehat{FDC}+2\widehat{LDB}=180^\circ\end{cases}$ nên $\widehat{LDK}=\widehat{FDC}.\qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\Delta LDK\backsim\Delta FDC$ $(c.g.c)$.

c) Vì $\widehat{LFD}=\widehat{KCD}$ và $\widehat{DFC}=\widehat{DLK}\Rightarrow \widehat{DLK}+\widehat{KCD}=\widehat{DFC}+\widehat{LFD}=\widehat{LFC}=90^\circ-\widehat{BFL}$.

Vì L là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDF nên $\widehat{BLD}=90^\circ+\widehat{BFL}$.

Khi đó $\widehat{BLK}+\widehat{KCD}=\widehat{BLD}+\widehat{DLK}+\widehat{KCD}=90^\circ+\widehat{BFL}+90^\circ-\widehat{BFL}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCKL$ nội tiếp.

d) Gọi J, I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của ΔAEF và $\Delta ABC\Rightarrow J\in AI$.

Tương tự ý a, b, c ta suy ra các tứ giác $ABLJ$, $ACKJ$ nội tiếp

$\Rightarrow J$ là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (P) và (Q)

$\Rightarrow PQ\perp AJ\Rightarrow PQ\perp AI.\qquad (3)$

Ta có: $\begin{cases}\widehat{LIK}=90^\circ+\frac{\widehat{ABC}}{2}\Leftrightarrow \widehat{LIK}=90^\circ+\widehat{IAK}+\widehat{KAC}\Leftrightarrow \widehat{IAK}=\widehat{LIK}-\widehat{KAC}-90^\circ\\ \widehat{LKA}=\widehat{LKI}+\widehat{IKA}=\widehat{LKI}+\widehat{KAC}+\widehat{KCA}=\widehat{LKI}+\widehat{KAC}+\widehat{KCB}=\widehat{LKI}+\widehat{KAC}+\widehat{ILK}\end{cases}.$

Do đó $\widehat{IAK}+\widehat{LKA}=\widehat{LIK}+\widehat{LKI}+\widehat{ILK}-90^\circ=90^\circ\Rightarrow AI\perp LK.\qquad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra $PQ\,//\,LK$.

Câu 10. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023 – 2024)

Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $BC>AC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M\neq B$, $M\neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC $(H\in BC)$, đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Hai đường thẳng AK và CM cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp và $BE^2=BA.BC$.

b) Từ C kẻ CN vuông góc với AB (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.

Lời giải

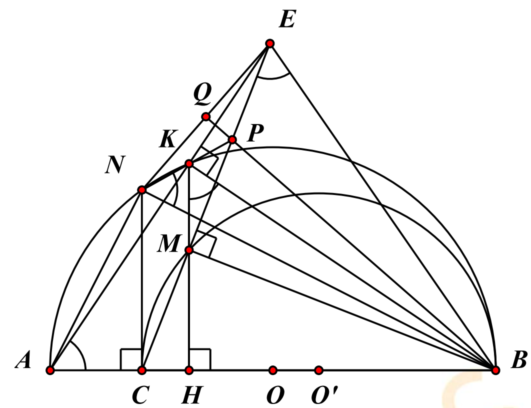
a) Ta có: $\widehat{BME} = \widehat{BKE} = 90^\circ$ nên tứ giác $BMKE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{CEB}$

Mà $\widehat{HKB} = \widehat{BAE}$ (cùng phụ với $\widehat{HKA}$) nên $\widehat{BAE} = \widehat{CEB}$.

Ta có: ΔBEC đồng dạng với ΔBAE (vì $\widehat{ABE}$ chung và $\widehat{BAE} = \widehat{CEB}$).

Do đó $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BC}{BE} \Rightarrow BE^2 = BC.AB$.



b) Xét tam giác vuông ABN có $CN \perp AB \Rightarrow BN^2 = BC \cdot AB$.

Mà $BE^2 = BC.AB$ nên $BN = BE$ hay ΔBNE cân tại $B \Rightarrow \widehat{BNE} = \widehat{BEN}$. $\quad (1)$

Mặt khác, theo câu a, ta có $\widehat{CEB} = \widehat{BAE}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{BNP} \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{BNP}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{PNE} = \widehat{PEN}$ hay ΔPNE cân tại $P \Rightarrow NP = PE$.

Vì $NP = PE$ và $BN = BE$ nên $BP \perp NE$.

Suy ra BP là đường phân giác của các góc $\widehat{EBN}$ và $\widehat{EPN}$.

Do đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.

Câu 11. (Đề thi chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023 – 2024)

Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B, H, C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a) Chứng minh $MP + MQ = AH$.

b) Gọi K là trung điểm của AM. Chứng minh rằng KH vuông góc với PQ.

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM. Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM, AB, AM. Vẽ DN vuông góc với EF tại N. Chứng minh $\widehat{BNE} = \widehat{MNF}$.

Lời giải

a) Xét ΔBMP vuông ở P, ta có:

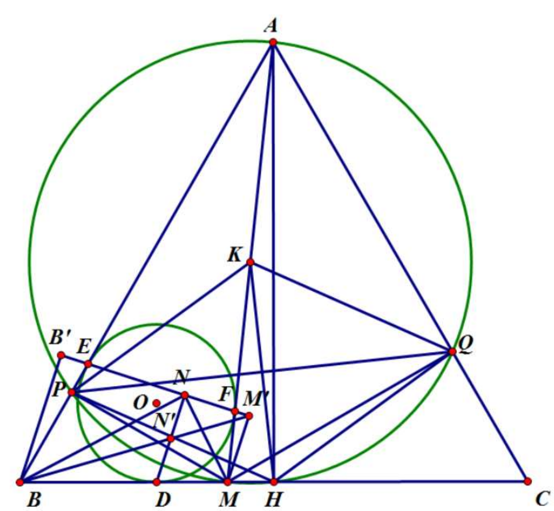
$MP = MB.\sin MBP = MB.\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}MB.$

Tương tự, ta chứng minh được: $MQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}MC.$

Vậy $MP + MQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = AH$

b) Do $\widehat{APM} = \widehat{AQM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$ nên 5 điểm A, M, P, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

Do đó K là tâm của đường tròn này



$\Rightarrow KP = KH = KQ.$

Xét ΔPKH cân ở K có $\widehat{PKH} = 2\widehat{PAH} = 2\widehat{BAH} = 60°$. $\Rightarrow \Delta PKH$ đều $\Rightarrow HP = HK.$

Tương tự, ta chứng minh được Δ QKH đều $\Rightarrow HQ = HK.$

Suy ra $HQ = HK.$ Mà $PQ = PK$ nên PQ là đường trung trực của $HK \Rightarrow PQ \perp HK.$

c) Gọi B', M' lần lượt là hình chiếu của B, M trên EF; N' là giao điểm của DN và $BM.$

Khi đó $BB' // DN // MM'.$

Áp dụng định lý Thales, ta có: $\begin{cases} \dfrac{MD}{DB} = \dfrac{M'N'}{N'B} \\ \dfrac{M'N'}{N'B} = \dfrac{M'N}{NB'} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{BD}{DM} = \dfrac{B'N}{NM'}. \quad (1)$

Xét $\Delta BB'E$ và $\Delta MM'F$ có: $\widehat{BB'E} = \widehat{MM'F} = 90°$; $\widehat{BEB'} = \widehat{AEF} = \widehat{AFE} = \widehat{MFM'}$

$\Rightarrow \Delta BB'E \backsim \Delta MM'F \text{ (g.g)} \Rightarrow \dfrac{B'E}{M'F} = \dfrac{BE}{MF} \qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{B'N}{NM'} = \dfrac{B'E}{M'F} = \dfrac{B'N - B'E}{NM' - M'F} = \dfrac{EN}{FN}.$

Xét ΔBNE và ΔMNF có: $\widehat{BEN} = \widehat{MFN}$; $\dfrac{EN}{FN} = \dfrac{B'N}{MN'} = \dfrac{BE}{MF}$

$\Rightarrow \Delta BNE \backsim \Delta MNF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BNE} = \widehat{MNF}.$

Câu 12. (Đề thi chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác đều ANI và BMK. Gọi điểm D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC, điểm E là trung điểm của đoạn thẳng IK.

a) Chứng minh tứ giác $AKBD$ nội tiếp.

b) Chứng minh điểm E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD.

c) Tính số đo của $\widehat{NEM}$.

Lời giải

a) Vì tam giác BMK đều nên $MK = MB.$

Mà M là trung điểm của AB nên

$MK = MB = MA = \dfrac{AB}{2}$

$\Rightarrow \Delta AKB$ vuông tại K

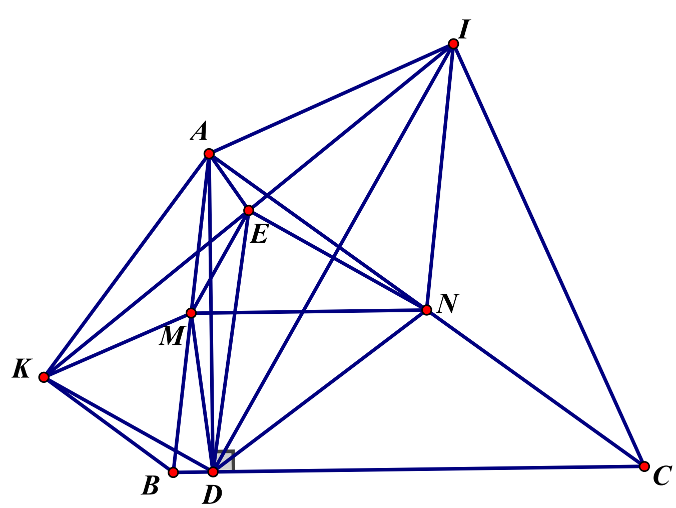
$\Rightarrow \widehat{AKB} + \widehat{ADB} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow AKBD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có

$NI = NA = NC \Rightarrow \Delta AIC$ vuông tại I

$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{AIC} = 90° + 90° = 180°$



$\Rightarrow AICD$ là tứ giác nội tiếp.

Vì $AKBD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KDA} = \widehat{KBA} = 60°$.

Vì $AICD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ADI} = \widehat{ACI} = 90° - \widehat{IAC} = 90° - 60° = 30°$.

Do đó $\widehat{KDI} = \widehat{KDA} + \widehat{ADI} = 60° + 30° = 90° \Rightarrow \Delta IKD$ vuông tại D.

Mặt khác E là trung điểm $IK \Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD.

c) Theo chứng minh câu b, ta có: ΔIKD vuông tại $D \Rightarrow ED = EI$.

Lại có: $ND = NI = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow EN$ là đường trung trực của đoạn thẳng $DI \Rightarrow EN$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$.

Chứng minh tương tự, ta được: EM là tia phân giác của $\widehat{KED}$.

Mặt khác $\widehat{DEI}$ và $\widehat{KED}$ là hai góc kề bù nên $EN \perp EM \Rightarrow \widehat{NEM} = 90°$.

Câu 13. (Đề thi chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Kẻ HM, HN lần lượt vuông góc với AB, AC $(M \in AB, N \in AC)$.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của đường tròn tâm A bán kính AH với cung nhỏ AC của đường tròn (O) là điểm Q. Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

c) Khi điểm A cố định và hai điểm B, C di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác nhọn. Chứng minh MN song song với một đường thẳng cố định.

Lời giải

a) Ta có $HN \perp AC \Rightarrow \widehat{HNA} = 90°$;

$HM \perp AB \Rightarrow \widehat{HMA} = 90°$.

Xét tứ giác $AMHN$, có $\widehat{HNA} + \widehat{HMA} = 180°$, hai góc $\widehat{HNA}$ và $\widehat{HMA}$ ở vị trí đối nhau. Do đó tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

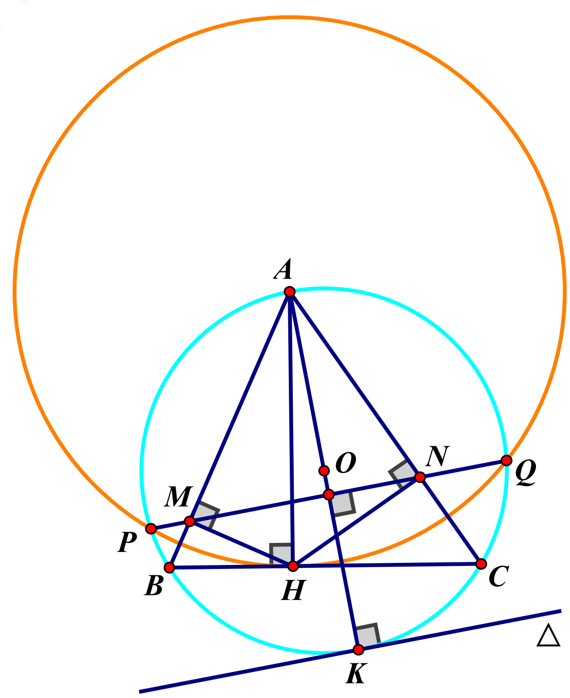
b) Xét ΔAHB vuông tại H, có đường cao HM, ta có $AH^2 = AM.AB$.

Xét ΔAHC vuông tại H, có đường cao HN, ta có $AH^2 = AN.AC$.

Do đó $AM.AB = AN.AC$ hay $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$.

Lại có $\widehat{A}$ chung nên $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$.



Kẻ AO cắt đường tròn (O) tại điểm K.

Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{AKC}$. Do đó $\widehat{ANM}=\widehat{AKC}$. $\quad (1)$

Mặt khác Q thuộc đường tròn tâm A, bán kính AH nên $AQ=AH$.

Suy ra $AQ^2=AH^2=AN.AC \Rightarrow \dfrac{AQ}{AN}=\dfrac{AC}{AQ} \Rightarrow \Delta AQC \backsim \Delta ANQ \Rightarrow \widehat{AQC}=\widehat{ANQ}$.

Tứ giác $AQCK$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{AQC}+\widehat{AKC}=180°$.

Suy ra $\widehat{ANQ}+\widehat{AKC}=180°$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{ANM}+\widehat{ANQ}=180°$ hay ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

c) Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn tâm A, bán kính AH là P.

Chứng minh tương tự ý b) ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Gọi Δ là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại K.

Ta có $PQ \perp AK \Rightarrow PQ // \Delta$.

Vì A cố định, (O) cố định nên Δ cố định.

Do đó khi B, C thay đổi trên đường tròn (O) sao cho ΔABC luôn là tam giác nhọn thì MN luôn song song với tiếp tuyến Δ cố định của đường tròn (O).

Câu 14. (Đề thi chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2023 – 2024)

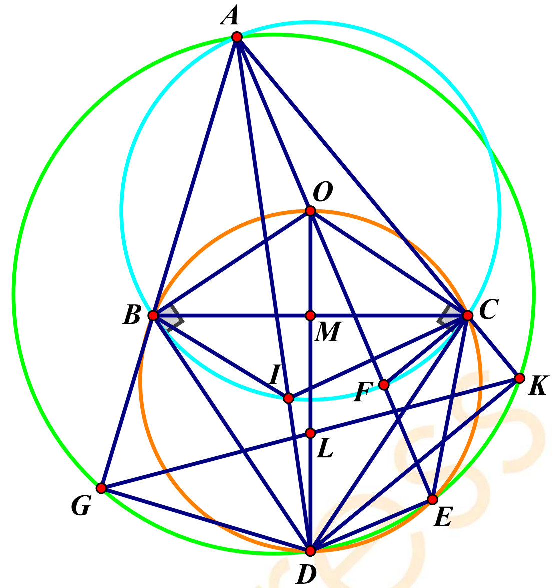
1) Cho tam giác nhọn ABC, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở D. Đường tròn đường kính AD cắt đường tròn đường kính OD tại điểm E (khác D). Gọi F là giao điểm của đoạn thẳng OE và đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng 3 điểm A, O, E thẳng hàng và CF là tia phân giác của $\widehat{BCE}$.

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (đều khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK.

2) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại M. Lấy điểm E nằm giữa A và M. Trên cạnh AC, BC lần lượt lấy điểm D, F sao cho $AD=AE$ và $BF=BE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF lần lượt cắt AB và BC tại G (khác E) và H (khác F). Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và các đường thẳng CM, ED, GH đồng quy.

Lời giải



1a) Vì E thuộc đường tròn đường kính AD và đường tròn đường kính OD nên $\widehat{AED}=\widehat{OED}=90^\circ$

$\Rightarrow$ 3 điểm A, O, E thẳng hàng.

Vì DB, DC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{DBO}=90^\circ$; $\widehat{DCO}=90^\circ$

$\Rightarrow B, C$ thuộc đường tròn đường kính OD

$\Rightarrow \widehat{BOE}=\widehat{BCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$).

Mà $\widehat{BCE}=2\widehat{BAF}=2\widehat{BCF}$ nên $\widehat{BCF}=\dfrac{\widehat{BCE}}{2}$

$\Rightarrow CF$ là tia phân giác của $\widehat{BCE}$.

b) Gọi I là giao điểm thứ hai của AD và (O); L là giao điểm của GK và OD; M là giao điểm của OD và BC.

Dễ dàng ta chứng minh được OD là trung trực của BC.

$\Rightarrow \widehat{CKD}+\widehat{CMD}=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow CMDK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{LDK}=\widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB}=\widehat{AIB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)) nên $\widehat{LDK}=\widehat{AIB}$.

Lại có: $\widehat{BAI}=\widehat{DKL}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{GD}$ của đường tròn đường kính AD).

Suy ra $\Delta ABI \backsim \Delta KLD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{LK}{LD}=\dfrac{BA}{BI}$.

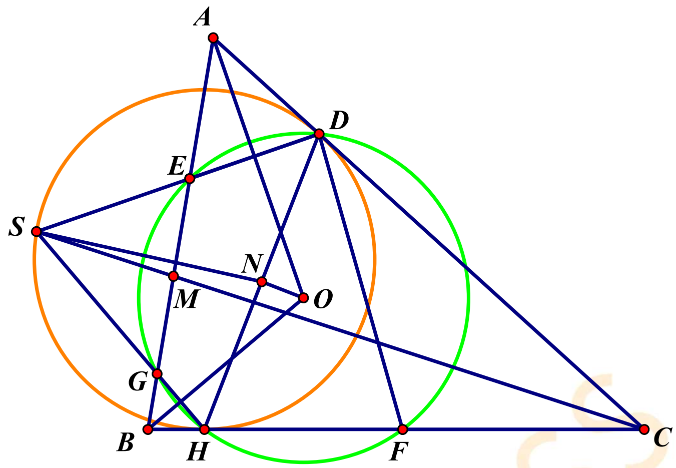
Chứng minh tương tự, ta được: $\Delta ACI \backsim \Delta GLD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{LG}{LD}=\dfrac{CA}{CI}$.

Từ bổ đề quen thuộc về hai tiếp tuyến và một cát tuyến, ta chứng minh được như sau:

$\Delta DIB \backsim \Delta DBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BA}{BI}=\dfrac{BD}{DI}$ và $\Delta DIC \backsim \Delta DCA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CA}{CI}=\dfrac{CD}{DI}$.

Mà $\dfrac{BD}{DI}=\dfrac{CD}{DI}$ nên $\dfrac{BA}{BI}=\dfrac{CA}{CI}$. Từ đó suy ra $\dfrac{LK}{LD}=\dfrac{LG}{LD} \Rightarrow LK=LG$.

Vậy OD đi qua trung điểm L của GK.



2) Vì O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AO, BO lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ABC}$.

Mà $AE = AD; BE = BF$ nên $\Delta AED; \Delta BEF$ lần lượt cân tại A, B

$\Rightarrow OA, OB$ lần lượt là trung trực của $ED; EF$

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

Gọi S là giao của DE và GH. Ta đi chứng minh C, M, S thẳng hàng.

Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{DHS}$

$\Rightarrow CD$ là tiếp tuyến của (SHD) tại D.

Chứng minh tương tự, ta có CH là tiếp tuyến của (SHD) tại H.

Khi đó SC là đường đối trung của tam giác SHD.

Gọi N là trung điểm HD. Theo bổ đề đường đối trung, ta có: $\widehat{HSN} = \widehat{CSD}$.

Lại có: $\Delta SEG \backsim \Delta SHD \Rightarrow \Delta SEM \backsim SHN \Rightarrow \widehat{ESM} = \widehat{HSN}$.

Do đó: $\widehat{CSD} = \widehat{ESM} \Rightarrow C, M, S$ thẳng hàng. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 15. (Đề thi chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2023 – 2024)

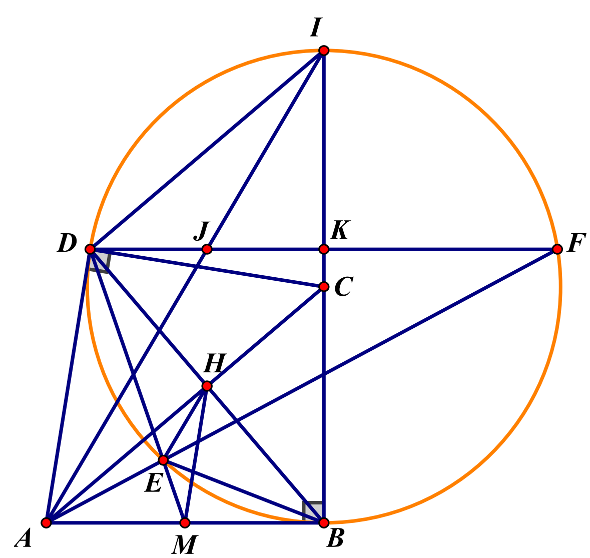
Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, $BC = CD$, M là trung điểm của AB, đường tròn tâm C bán kính BC cắt MD tại E $(E \neq D)$, H là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi F là giao điểm của AE và đường tròn (C) $(F \neq E)$. Chứng minh $BC \perp DF$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) $(I \neq B)$, J là giao điểm của AI và DF. Tính tỉ số $\dfrac{DJ}{DF}$.

Lời giải



a) Ta có $\Delta ABC = \Delta ADC \Rightarrow AB = AD$.

Vì $MH = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}AB = MB$ nên $\widehat{MBH} = \widehat{MHB}$.

Vì AB, AD là tiếp tuyến của đường tròn tâm C bán kính BC nên $\widehat{MBE} = \widehat{BDM}$.

Ta có ΔMEB đồng dạng với tam giác ΔMBD suy ra $\widehat{MEB} = \widehat{MBD} = \widehat{MHB}$.

Mà $\widehat{MEB}; \widehat{MHB}$ cùng nhìn cạnh MB nên tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do ΔMEB đồng dạng với tam giác ΔMBD suy ra $\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MD}{MA}$.

Từ đó có tam giác MAE đồng dạng với tam giác MDA, suy ra $\widehat{MDA}=\widehat{MAE}$.

Mặt khác $\widehat{MDA}=\widehat{DFA}$ do cùng chắn cung DE nên $\widehat{MAE}=\widehat{DFA}$

$\Rightarrow DF // AB \perp BC \Rightarrow BC \perp DF$.

c) Gọi K là giao của BC và DF suy ra K là trung điểm của DF.

Ta có: $DF // AB \Rightarrow \dfrac{JK}{AB}=\dfrac{IK}{IB}$. $\qquad (1)$

Tam giác ΔDIK đồng dạng tam giác ΔACB (là hai tam giác vuông có $\widehat{DIK}=\dfrac{1}{2}\widehat{DCB}=\widehat{ACB}$)

$\Rightarrow \dfrac{IK}{CB}=\dfrac{DK}{AB} \Rightarrow \dfrac{IK}{2CB}=\dfrac{DK}{2AB} \Rightarrow \dfrac{IK}{IB}=\dfrac{DK}{2AB}$. $\qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{IK}{IB}=\dfrac{DK}{2AB}=\dfrac{JK}{AB} \Rightarrow JK=\dfrac{1}{2}DK \Rightarrow \dfrac{DJ}{DF}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 16. (Đề thi chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023 – 2024)

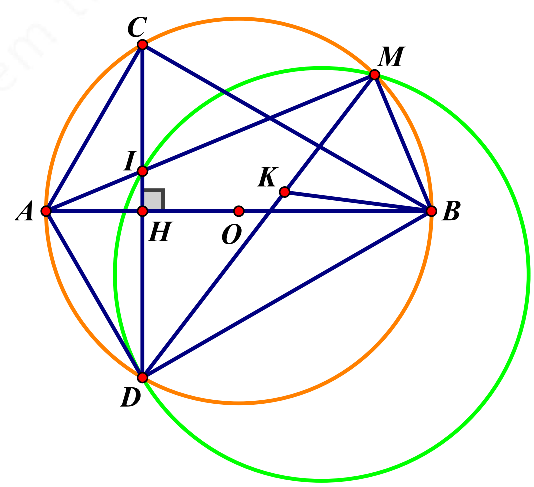
Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Gọi H là trung điểm của OA. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC (M không trùng với B và C), AM cắt CD tại I.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC, BC, CH theo R.

b) Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IDM.

c) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho $MB+MC+MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Vì H là trung điểm của OA nên $AH=\dfrac{OA}{2}=\dfrac{R}{2}$.

Ta có $\widehat{ACB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét tam giác ABC vuông tại C có đường cao CH:

$AC^2=AB.AH=2R.\dfrac{R}{2}=R^2 \Rightarrow AC=R$.

$BC^2=AB^2-AC^2=4R^2-R^2=3R^2 \Rightarrow BC=R\sqrt{3}$.

$CH.AB=AC.BC \Rightarrow CH=\dfrac{AC.BC}{AB}=\dfrac{R.R\sqrt{3}}{2R}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

b) Vì OA là đường trung trực của CD nên $AC=AD$.

Tam giác ACD cân tại A nên $\widehat{ACD}=\widehat{ADI}$.

Mặt khác $\widehat{ACD}=\widehat{AMD}$ (cùng chắn cung AD).

Vậy $\widehat{ADI}=\widehat{AMD}$. Do đó AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIDM.

c) Ta có $CD=2.CH=2.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$.

Mặt khác ΔBCD cân tại B nên $BD = BC = R\sqrt{3}$.

Vậy ΔBCD là tam giác đều.

Trên đoạn MD lấy điểm K sao cho $MK = MB$.

ΔMBK cân tại M có $\widehat{BMK} = \widehat{BCD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Ta có $\widehat{CBM} + \widehat{CBK} = 60^\circ, \widehat{DBK} + \widehat{CBK} = 60^\circ$.

Dẫn đến $\widehat{CBM} = \widehat{DBK}$.

Xét ΔCBM và ΔDBK có: $CB = DB, \widehat{CBM} = \widehat{DBK}, BM = BK$.

Do đó $\Delta CBM = \Delta DBK \Rightarrow MC = KD$.

Vậy $MD = MK + KD = MB + MC.$

Ta có $MB + MC + MD = 2MD \le 4R$.

Vậy $MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất khi MD là đường kính của đường tròn (O).

Do đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Câu 17. (Đề thi chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023 – 2024)

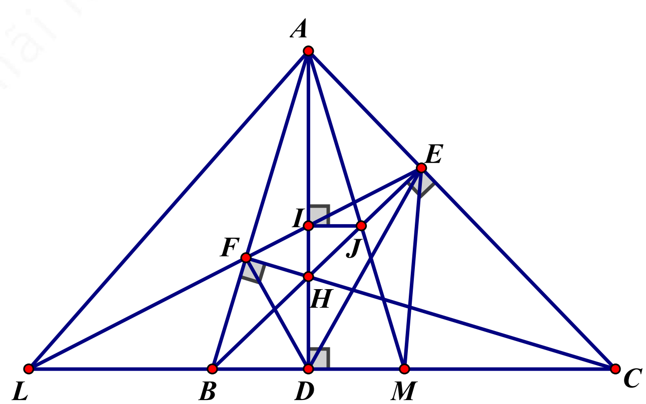
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của EF và AH, kẻ IJ song song với BC $(J \in HE)$. Đường thẳng AJ cắt BC tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng D là trung điểm BM.

c) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh rằng $\widehat{FLB} = \widehat{CAM}$.

Lời giải



a) Vì $IJ // BC$ nên $IJ \perp AI$.

Ta có $\widehat{AIJ} = 90^\circ; \widehat{AEJ} = 90^\circ.$

Suy ra $\widehat{AIJ} + \widehat{AEJ} = 180^\circ$.

Vậy tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn.

b) Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$, suy ra $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$ (cùng chắn cung FH). $\quad (1)$

Tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{IAJ} = \widehat{IEJ}$ (cùng chắn cung IJ). $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{FAH} = \widehat{IAJ} \Rightarrow AD$ là đường phân giác của $\widehat{BAM}$.

Mà AD là đường cao tam giác BAM nên ΔBAM cân tại $A \Rightarrow D$ là trung điểm BM.

c) Tứ giác $AFDC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{FAD} = \widehat{FCD}.$

Mà $\widehat{FAD} = \widehat{DAM}$ nên $\widehat{HAM} = \widehat{HCM}$

$\Rightarrow AHMC$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{MHC}$. $\quad (3)$

Vì ΔHBM cân tại H nên $\widehat{HMB} = \widehat{HBM}$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$

$\Rightarrow LFHM$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{FLM} = \widehat{MHC}$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp). $\quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{FLB} = \widehat{CAM}$.

Câu 18. (Đề thi chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).

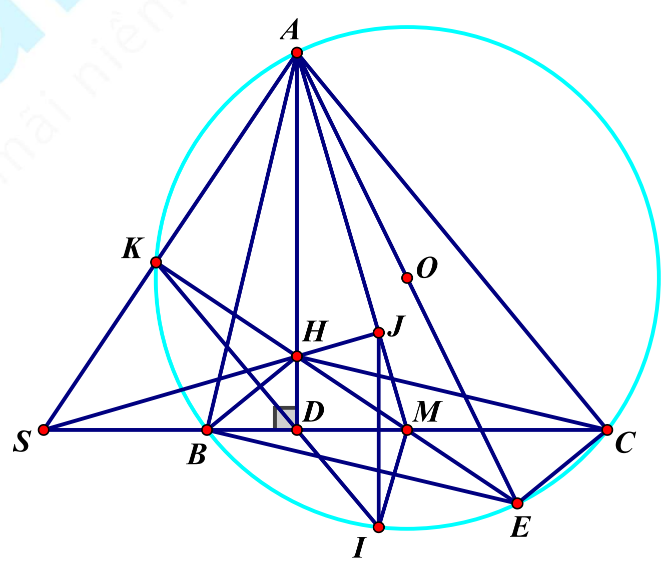
a) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.

c) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

d) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Vì $AH \perp BC$ nên $\widehat{ADB} = 90°$.

Lại có $\widehat{ABE} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

Mặt khác $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

b) Ta có $\widehat{ACE} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC \perp AC$.

Mà H là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó suy ra $EC // BH$.

Chứng minh tương tự, ta được $HC // BE$.

Xét tứ giác $BHCE$ có $EC // BH$ và $HC // BE$ nên tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, M, E thẳng hàng.

Lại có ba điểm M, K, H thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm K, H, E thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AKE}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AKM}=90^\circ$.

Xét ΔAKH và ΔMDH có: $\widehat{AKM}=\widehat{MDH}\left(=90^\circ\right)$; $\widehat{KHA}=\widehat{DHM}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AKH \backsim \Delta MDH\,(\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{HA}{HM}=\dfrac{HK}{HD} \Rightarrow HA.HD=HK.HM.$

c) Kéo dài AK cắt đường thẳng BC tại S, ΔSAM có hai đường cao AD và MK cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác SAM.

Xét tam giác ΔHDM và ΔSDA có $\widehat{ADS}=\widehat{HDM}=90^\circ$ và $\widehat{DMH}=\widehat{DAS}$ (cùng phụ với $\widehat{ASM}$)

$\Rightarrow \Delta HDM \backsim \Delta SDA\,(\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{HD}{DM}=\dfrac{DS}{AD}$. $\quad(1)$

Tương tự H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow \Delta BDH \backsim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BD}{HD}=\dfrac{AD}{CD}$. $\quad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{HD}{DM}.\dfrac{BD}{HD}=\dfrac{DS}{AD}.\dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{BD}{DM}=\dfrac{DS}{CD} \Rightarrow BD.CD=DM.DS.$ $\quad(3)$

Mặt khác $\Delta BDK \backsim \Delta IDC\,(\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{BD}{ID}=\dfrac{DK}{DC} \Rightarrow BD.CD=DI.DK.$ $\quad(4)$

Từ (3) và (4), suy ra $DI.DK=DM.DS$ nên $SKMI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SMI}=\widehat{SKI}$.

Mà $AKDM$ là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{AKM}=\widehat{ADM}=90^\circ$) nên $\widehat{SKI}=\widehat{DMA}$.

Từ đó suy ra $\widehat{SMI}=\widehat{DMA}$.

Xét ΔMIJ có $\widehat{SMI}=\widehat{DMA}$ và $IJ\perp BC \Rightarrow BC$ là đường trung trực của IJ

$\Rightarrow \widehat{SJM}=\widehat{SIM}=90^\circ$ (vì $SKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{SIM}=180^\circ-\widehat{SKM}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$)

$\Rightarrow SJ\perp AM$.

Mà H là trực tâm $\Delta SAM \Rightarrow SH\perp AM$. Từ đó suy ra ba điểm S, H, J thẳng hàng.

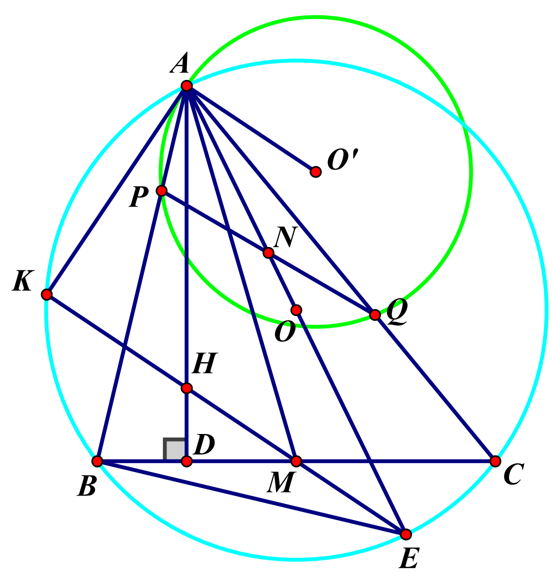
Vậy các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua điểm S.

d) Gọi N' là giao điểm của PQ và AE.

Xét $\Delta AQN'$ và ΔBEM có:

$\widehat{QAN'}=\widehat{EBM}$; $\widehat{AQN'}=\widehat{KAP}=\widehat{BEM}$

$\Rightarrow \Delta AQN' \backsim \Delta BEM\,(\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'}=\dfrac{BM}{EM}$. $\quad(5)$



Do $\widehat{QAN'}=\widehat{EBM}$; $\widehat{AQN'}=\widehat{KAP}=\widehat{BEM}$ nên theo tính chất góc ngoài của $\Delta AQN'$ và ΔBEM ta có $\widehat{EMC}=\widehat{PN'A}$.

Mà $\widehat{PAN'}=\widehat{ECM}$ nên $\Delta ECM \backsim \Delta PAN'\,(\text{g.g})$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{EM}=\dfrac{AN'}{PN'}$. $\quad(6)$

Từ (5) và (6) và kết hợp $BM = CM \Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'} = \dfrac{AN'}{PN'} \Rightarrow QN' = PN' \Rightarrow N \equiv N'$.

Vậy AN luôn đi qua một điểm cố định O.

Câu 19. (Đề thi chuyên Tin thành phố Hà Nội năm 2023 – 2024)

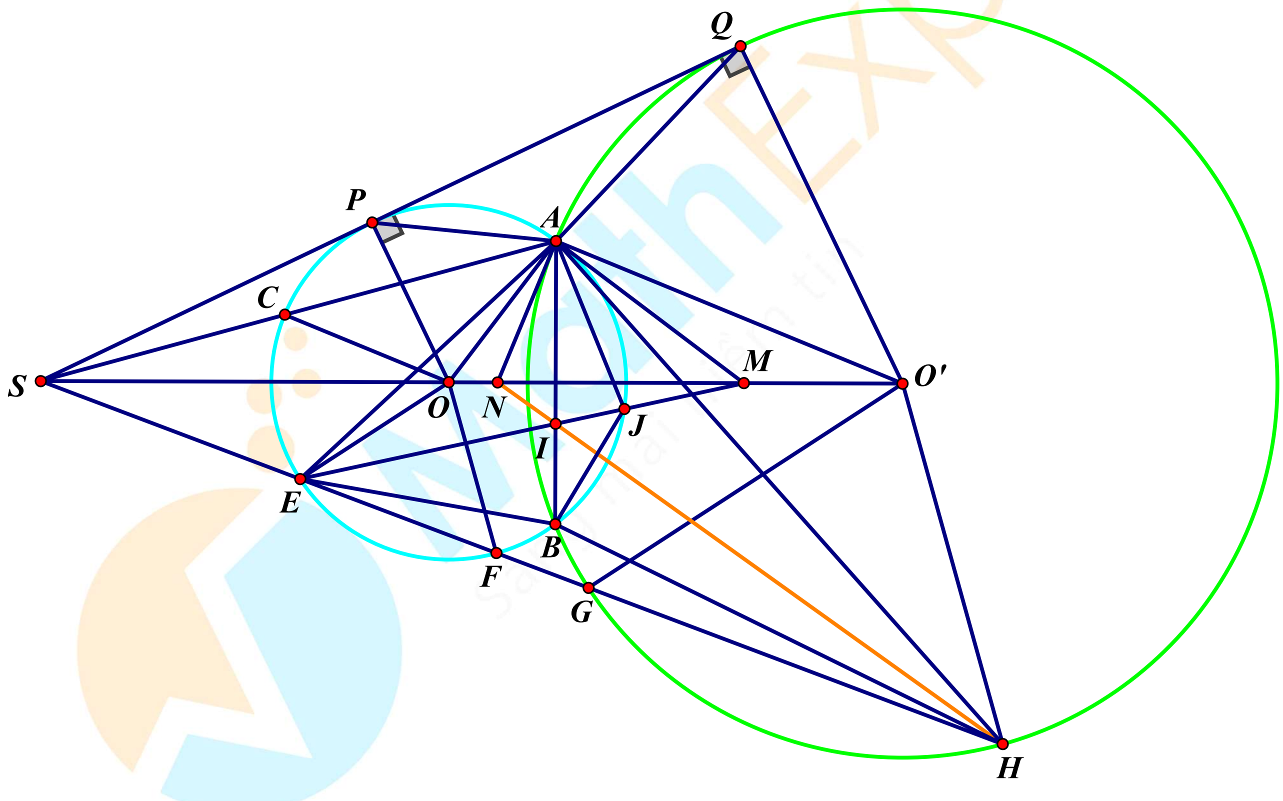
Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B $(R < R' < OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P \in (O)$, $Q \in (O')$; S là giao điểm của PQ và OO'. Qua S kẻ đường thẳng cắt (O) tại hai điểm E, F và cắt (O') tại hai điểm G, H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

a) Chứng minh rằng $OE // O'G$.

b) Chứng minh $SA^2 = SP.SQ$.

c) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OO' tại M. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt OO' tại N. $ME \cap AB = I$. Chứng minh $\dfrac{EA^2}{EB^2} = \dfrac{IA}{IB}$ và N, I, H thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta thấy $OP // O'Q$ (do cùng vuông góc với PQ) $\Rightarrow \dfrac{SP}{SQ} = \dfrac{R}{R'}$.

Kẻ $O'G' // OE$ (G' thuộc SE) $\Rightarrow \dfrac{OE}{O'G'} = \dfrac{SO}{SO'} = \dfrac{R}{R'} \Rightarrow O'G' = R' \Rightarrow G' \in (O')$.

Lại có: $\widehat{OEF} + \widehat{O'HG} < 180^\circ$ nên $O'H$ không song song với OE.

Do đó G' trùng $G \Rightarrow OE // O'G$ (điều phải chứng minh).

b) Gọi C là giao điểm thứ hai của SA và (O).

Tương tự phần a, ta cũng chứng minh được $OC // AO'$.

Theo định lí Thales, ta có $\frac{SC}{SA} = \frac{SO}{SO'} = \frac{SP}{SQ} \Rightarrow PC // AQ$

$\Rightarrow \widehat{SAP} = \widehat{SPC} = \widehat{SQA} \Rightarrow \Delta SAP \backsim \Delta SQA \Rightarrow \frac{SA}{SQ} = \frac{SP}{SA} \Rightarrow SA^2 = SP.SQ.$

c) Gọi J là giao điểm thứ hai của ME và (O).

Vì tính đối xứng nên ta có MB cũng là tiếp tuyến của (O).

Ta có $\Delta MJA \backsim \Delta MAE$ (g.g) và $\Delta MJB \backsim \Delta MBE$ (g.g) nên $\frac{JA}{EA} = \frac{MJ}{MA} = \frac{MJ}{MB} = \frac{JB}{EB}$.

Suy ra $\frac{EB}{EA} = \frac{JB}{JA}$. Lại có $\Delta IAE \backsim \Delta IJB$ và $\Delta IBE \backsim \Delta IJA$ nên $\frac{IA}{IB} = \frac{IA}{IE}.\frac{IE}{IB} = \frac{JA}{EB}.\frac{EA}{JB} = \frac{EA}{EB}.\frac{JA}{JB} = \frac{EA^2}{EB^2}$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Thật vậy, ta có $SP^2 = SE.SF$ và $SQ^2 = SG.SH$.

Do đó $SB^2 = SA^4 = SP^2.SQ^2 = SE.SF.SG.SH$.

Mặt khác, từ câu a ta có $\frac{SE}{SF} = \frac{SG}{SH}$ hay $SE.SH = SG.SF$.

Như vậy, ta được $SA^2 = SB^2 = (SE.SH)^2$ hay $SA^2 = SB^2 = SE.SH$.

Từ đó ta thu được $\Delta SEA \backsim \Delta SAH$ (c.g.c) và $\Delta SEB \backsim \Delta SBH$ (c.g.c).

Do đó $\frac{EA}{HA} = \frac{SE}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{EB}{HB}$.

Nói cách khác, ta thu được $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$.

Đến đây, gọi I' là giao điểm của HN và AB.

Chứng minh tương tự như ý trên ta cũng được $\frac{I'A}{I'B} = \frac{HA^2}{HB^2}$.

Từ đó suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{I'A}{I'B}$ và dẫn đến $I \equiv I'$. Như vậy N, I, H thẳng hàng.

Câu 20. (Đề thi chuyên Toán thành phố Hà Nội năm 2023 – 2024)

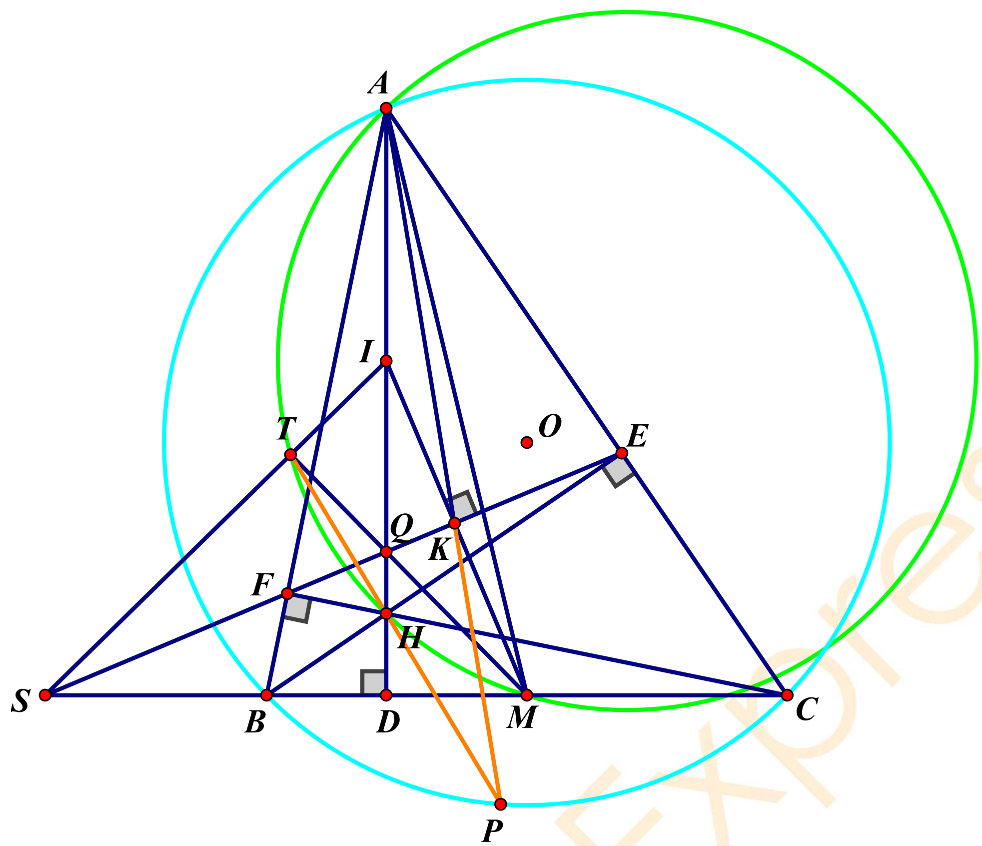
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, EF cắt AD tại Q. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. IM cắt EF tại K.

a) Chứng minh ΔAEK đồng dạng với ΔABM.

b) $EF \cap BC = S$; $SI \cap MQ = T$. Chứng minh bốn điểm A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn.

c) Tia TH cắt (O) tại P. Chứng minh A, K, P thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét các tam giác BFC và BEC lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FM và EM, khi đó ta được $FM = EM = \frac{1}{2}BC.$

Tương tự, xét các tam giác AFH và AEH lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FI và EI, khi đó ta cũng được $FI = EI = \frac{1}{2}AH.$

Như vậy, MI là đường trung trực của EF, vì thế K là trung điểm của EF.

Mặt khác, lại chú ý rằng $\Delta AEB \backsim \Delta AFC\ (g.g)$ nên $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, kéo theo $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\ (c.g.c)$.

Từ đó ta thu được $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EK}{2BM} = \frac{EK}{BM}$. Do đó $\Delta AEK \backsim \Delta ABM\ (c.g.c)$.

b) Xét ΔISM với $ID \perp SM$ và $SK \perp IM$ (vì MI là trung trực của EF), vì thế Q là trực tâm của ΔISM.

Như vậy, $MQ \equiv MT \perp SI$ và từ đó ta được $\widehat{ITM} = 90^\circ = \widehat{IEM} = \widehat{IFM}$.

Do đó, năm điểm I, T, E, F, M cùng thuộc một đường tròn và dẫn đến $QT.QM = QE.QF$.

Mặt khác, lại chú ý rằng tứ giác $AEFH$ là tứ giác nội tiếp, ta cũng có $QE.QF = QA.QH$.

Như vậy $QT.QM = QA.QH$, vì vậy bốn điểm A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn.

c) Trên tia TH lấy một điểm P' sao cho $HT.HP' = HA.HD$.

Khi đó, ta cũng được $HT.HP' = HB.HE = HC.HF$ và do đó các tứ giác $TBP'E$ và $TCP'F$ là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có $\widehat{BP'T} = \widehat{BET} = \widehat{HET}$ và $\widehat{CP'T} = \widehat{CFT} = \widehat{HFT}$. Từ đó, chú ý rằng tứ giác $TIEF$ nội tiếp nên $\widehat{ETF} = \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$, ta thu được

$$\widehat{BP'C} = \widehat{BP'T} + \widehat{CP'T} = \widehat{HET} + \widehat{HFT} = 360^\circ - \widehat{EHF} - \widehat{ETF}$$

$$= 360^\circ - \left(180^\circ - \widehat{BAC}\right) - \widehat{2BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$$

Do đó $P' \in (O)$ và kéo theo $P' \equiv P$.

Như vậy $HA.HD = HT.HP$ nên tứ giác $ATDP$ nội tiếp và $\widehat{DAP} = \widehat{DTH}$.

Mặt khác, ta có các kết quả quen thuộc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$ và $AO \perp EF$, kết hợp với $\Delta AEK \backsim \Delta ABM$, ta thu được $\widehat{OAM} = \widehat{BAO} - \widehat{BAM} = \widehat{CAH} - \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$ và $IM // AO$ (cùng vuông góc với EF).

Lại chú ý rằng các tứ giác $ATHM$ và $ITDM$ là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\widehat{DTH} = \widehat{AHT} - \widehat{IDT} = \widehat{AMT} - \widehat{IMT} = \widehat{AMI} = \widehat{OAM} = \widehat{DAK}.$$

Do đó $\widehat{DAP} = \widehat{DAK}$, từ đó suy ra A, P, K thẳng hàng.

Câu 21. (Đề thi chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023 – 2024)

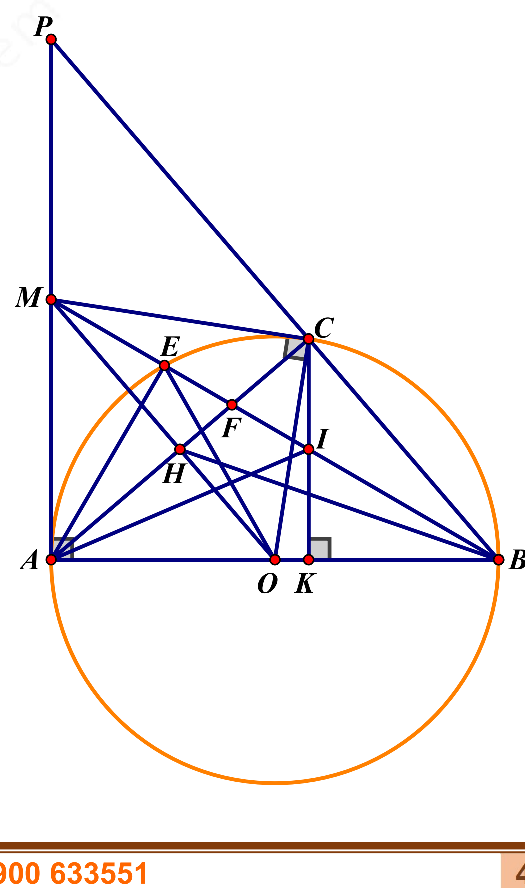
Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M. Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\Delta OEM \backsim \Delta BHM$.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I. Tính tỉ số $\dfrac{FI}{AB}$ khi tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{BF} = \dfrac{2}{BE}$.

Lời giải



a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$ME.MB = MA^2$ và $MH.MO = MA^2$

$\Rightarrow ME.MB = MH.MO \Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MB} \Rightarrow \Delta OME \backsim \Delta BMH.$

b) Ta có $MA = MC$, $OA = OC$ suy ra đường thẳng MO là trung trực đoạn thẳng AC nên $MO \perp AC$.

Kéo dài BC cắt AM tại P nên $MO // PB$

$\Rightarrow M$ trung điểm AP.

Ta có $\dfrac{IC}{MP} = \dfrac{BI}{BM}$ và $\dfrac{IK}{MA} = \dfrac{BI}{BM} \Rightarrow \dfrac{IC}{MP} = \dfrac{IK}{MA} \Rightarrow IC = IK$.

Suy ra I trung điểm của đoạn thẳng CK.

$\Rightarrow S_{\Delta ACI} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta ACK}; S_{\Delta BCI} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta BCK}$

$\Rightarrow S_{\Delta AIC} + S_{\Delta BCI} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4} CK.AB.$

Do đoạn thẳng AB không đổi nên tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất khi C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ hay K trùng tâm O.

Khi đó tứ giác $AOCM$ là hình vuông $\Rightarrow \dfrac{FI}{FM}=\dfrac{IC}{AM}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow FI=\dfrac{1}{3}IM=\dfrac{1}{6}BM.$

Lại có $BM^2=AB^2+MA^2=\dfrac{5AB^2}{4}\Rightarrow BM=\dfrac{AB\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \dfrac{FI}{AB}=\dfrac{1}{6}.\dfrac{\dfrac{AB\sqrt{5}}{2}}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{12}.$

c) Ta có $\Delta MEC\backsim\Delta MCB\Rightarrow \dfrac{ME}{MC}=\dfrac{CE}{CB}$ và $\Delta MEA\backsim\Delta MAB\Rightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{EA}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MC}.\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{CE}{CB}.\dfrac{EA}{AB}\Rightarrow \dfrac{ME}{MB}=\dfrac{CE}{CB}.\dfrac{AE}{AB}.\qquad (1)$

Mặt khác $\Delta FEC\backsim\Delta FAB\Rightarrow \dfrac{FE}{FA}=\dfrac{CE}{AB}$ và $\Delta FAE\backsim\Delta FBC\Rightarrow \dfrac{FA}{FB}=\dfrac{AE}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{FE}{FA}.\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{CE}{AB}.\dfrac{EA}{CB}\Rightarrow \dfrac{FE}{FB}=\dfrac{CE}{CB}.\dfrac{AE}{AB}.\qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{ME}{MB}=\dfrac{FE}{FB}\Rightarrow \dfrac{MB-EB}{MB}=\dfrac{EB-FB}{FB}\Rightarrow 1-\dfrac{EB}{MB}=\dfrac{EB}{FB}-1\Rightarrow 2=\dfrac{EB}{MB}+\dfrac{EB}{FB}$

$\Rightarrow 2=EB\left(\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{FB}\right)\Rightarrow \dfrac{1}{BM}+\dfrac{1}{BF}=\dfrac{2}{BE}$ (điều phải chứng minh).

Câu 22. (Đề thi chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023 – 2024)

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm E thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) $(E\neq A, E\neq B)$. Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $MB.NC=AB^2$.

b) Gọi F là giao điểm của MC và BN, H là trung điểm BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.

2) Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB}=120^\circ$. Điểm M thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{ABM}=\widehat{ACB}=\widehat{BAC}=60^\circ\Rightarrow BM//AC\Rightarrow \widehat{BMA}=\widehat{CAN}.\qquad (1)$

Tương tự ta có $CN//AB\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{CNA}.\qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\Delta AMB\backsim\Delta NAC$ $(g.g)\Rightarrow \dfrac{MB}{AC}=\dfrac{AB}{NC}\Rightarrow MB.NC=AB.AC\Rightarrow MB.NC=AB^2.$

b) Gọi I là giao điểm của EF và BC. Từ câu a, suy ra $MB.NC=BC^2\Rightarrow \dfrac{MB}{BC}=\dfrac{BC}{NC}.\qquad (3)$

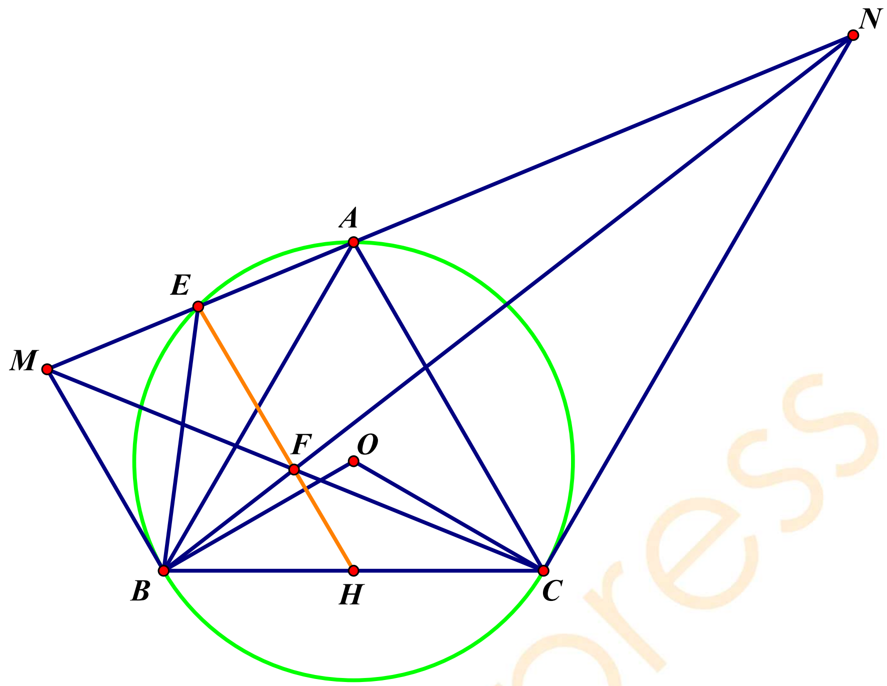
Mặt khác $\widehat{MBC}=\widehat{MBA}+\widehat{ABC}=60^\circ+60^\circ=120^\circ$. Tương tự $\widehat{BCN}=120^\circ$

Suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BCN}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra

$\Delta MBC \backsim \Delta BCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{NBC}$.



Ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BCF} + \widehat{FBC} = \widehat{BCF} + \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{MBC} = 60^\circ$. (5)

Do tứ giác $BEAC$ nội tiếp nên $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60^\circ$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $\widehat{BFM} = \widehat{BEM}$.

Suy ra $BMEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BMF} = \widehat{NBC} = \widehat{FBI}$.

Do đó $\Delta IBF \backsim \Delta IEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IE.IF$. (7)

Chứng minh tương tự ta có $IC^2 = IE.IF$. (8)

Từ (7) và (8), suy ra $IB = IC \Rightarrow I \equiv H$.

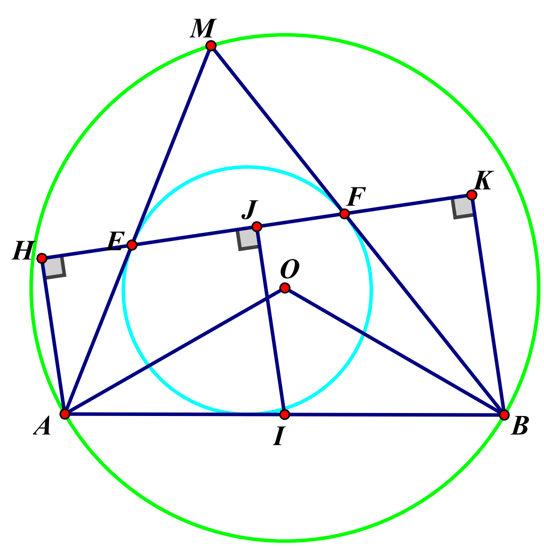
Vậy ba điểm E, F, H thẳng hàng.

2) Gọi I là trung điểm của AB.

Gọi D là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác AMB với đoạn thẳng AB

Vẽ AH, IJ, BK cùng vuông góc EF.

Ta có $\widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$, hơn nữa $ME = MF$ nên tam giác MEF đều.



Tam giác vuông AHE có

$AH = AE.\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.AE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.AD$. (1)

Tam giác vuông BKF có

$BK = BF.\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BD.$ $\quad (2)$

Cộng vế (1) và (2), ta có

$AH + BK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow 2IJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow IJ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$ không đổi.

Vì điểm I cố định nên EF tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I, bán kính $\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$.

Câu 23. (Đề thi chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023 – 2024)

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường kính AT của đường tròn (O) và lấy điểm P trên đoạn thẳng OT $(P \neq T)$. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC.

a) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$ và hai đường thẳng BC, EF song song với nhau.

b) Cho AH và EF cắt nhau tại U; điểm Q di động trên đoạn thẳng UE $(Q \neq U,\ Q \neq E)$. Đường thẳng vuông góc với AQ tại điểm Q cắt các đường thẳng PE, PF tương ứng tại M, N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ}$.

c) Kẻ KD vuông góc với BC $(D \in BC)$. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ do cùng phụ với $\widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{PAF} = \widehat{HAC}$.

Có $AEPF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{APF}$.

Có $\widehat{APF} = 90^\circ - \widehat{PAF}$ và $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{HAC}$

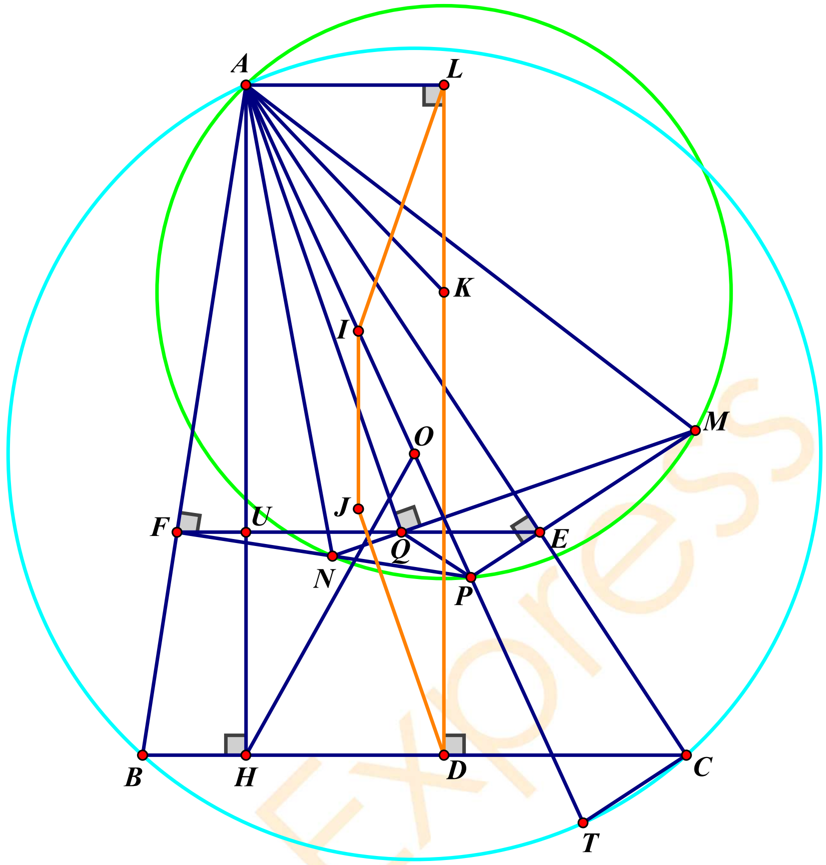
$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB} \Rightarrow EF // BC$.

b) $AQEM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AEF} = \widehat{APN}$

$\Rightarrow A, M, N, P$ cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$, tương tự $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$.



$\widehat{OAH} = \widehat{OAB} - \widehat{HAB}$

$= 90^\circ - \widehat{ACB} - \left(90^\circ - \widehat{ABC}\right)$

$= 90^\circ - \widehat{AMN} - \left(90^\circ - \widehat{ANM}\right) = \widehat{KAN} - \widehat{QAN} = \widehat{KAQ}$.

c) Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ điểm A xuống đường thẳng KD.

Từ $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{KAQ} - \widehat{OAQ} = \widehat{OAH} - \widehat{OAQ} = \widehat{QAH}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AP và J là giao điểm của đường thẳng qua D song song với AQ và đường thẳng qua I vuông góc với $BC \Rightarrow \widehat{QAH} = \widehat{JDL} \Rightarrow \widehat{ILK} = \widehat{JDL}$.

Mặt khác ta có $IJ // LD$ nên suy ra tứ giác $ILDJ$ (hoặc $IJLD$) là hình thang cân.

Suy ra I và J đối xứng với nhau qua trung trực của DL, hay qua trung trực của AH.

Lại có $ALDH$ là hình chữ nhật.

Từ đây, vì I là điểm cố định và trung trực của AH là đường thẳng cố định nên J là điểm cố định.

Câu 24. (Đề thi chuyên tỉnh Hoà Bình năm 2023 – 2024)

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C cố định, qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với AC. Gọi K là điểm cố định nằm giữa O và B (K khác O và B), qua K vẽ dây cung ED bất kì của đường tròn (O). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AE và AD với đường thẳng d. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt tia AC tại điểm M (M khác A). Chứng minh rằng:

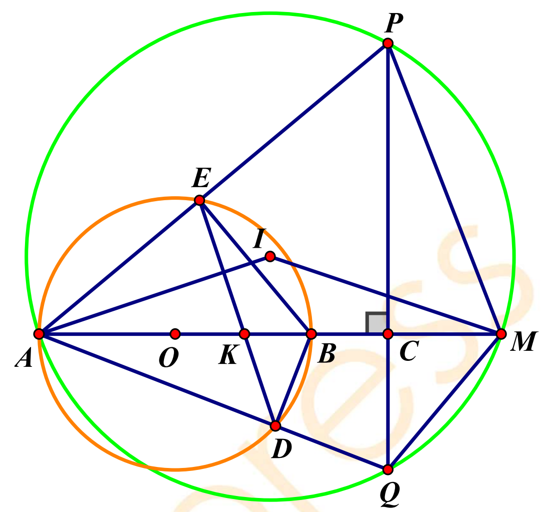
a) Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) $\Delta AKD \backsim \Delta AQM$.

c) $AK.AM = AB.AC$.

d) Khi dây ED thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ luôn nằm trên một đường cố định.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BEP}+\widehat{BCP}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEPC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EPC}=\widehat{EBA}$ (vì cùng bù với $\widehat{EBC}$)

Mà $\widehat{EDA}=\widehat{EBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

$\Rightarrow \widehat{EDA}=\widehat{APQ}\Rightarrow$ Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{AMQ}=\widehat{APQ}\Rightarrow \widehat{APQ}=\widehat{ADE}$

$\Rightarrow \widehat{AMQ}=\widehat{ADK}.$

Xét tam giác AKD và tam giác AQM có $\widehat{QAM}$ chung

và $\widehat{ADK}=\widehat{AMQ}$

$\Rightarrow \Delta AKD \backsim \Delta AQM\ (g.g).$

c) Từ $\Delta AKD\backsim\Delta AQM \Rightarrow \dfrac{AK}{AQ}=\dfrac{AD}{AM}\Rightarrow AK.AM=AD.AQ.$

Ta có: $\Delta ADB\backsim\Delta ACQ$ vì có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ADB}=\widehat{ACQ}=90^\circ$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AQ}\Rightarrow AB.AC=AD.AQ\Rightarrow AK.AM=AB.AC.$

d) Ta có $AK.AM=AB.AC\Rightarrow AM=\dfrac{AB.AC}{AK}$ (không đổi) $\Rightarrow M$ cố định.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ thì ta có $IA=IM$ nên I nằm trên đường trung trực của AM cố định.

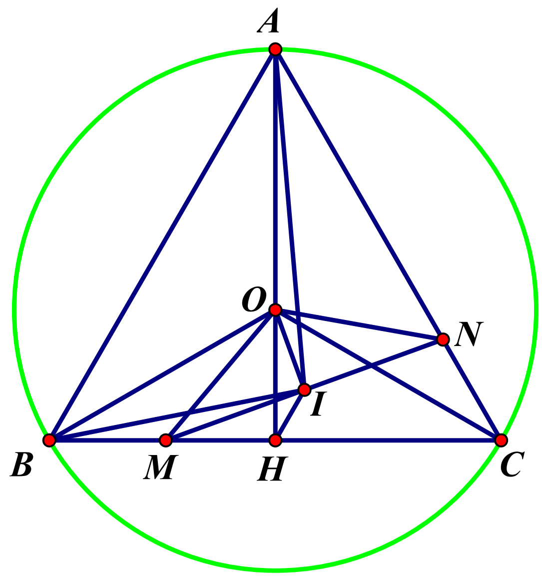
Câu 25. (Đề thi chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC đều, nội tiếp đường tròn $(O;R)$, H là trung điểm của cạnh $BC.$ M là điểm bất kì thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn CA sao cho $CN=BM.$ Gọi I là trung điểm của đoạn $MN.$

a) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh diện tích tam giác IAB không đổi. Xác định vị trí của điểm M để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



a) Xét ΔOBM và ΔOCN có:

$BM = CN;\ \widehat{OBM} = \widehat{OCN};\ OB = OC$

$\Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$ hay O nằm trên đường trung trực MN

$\Rightarrow OI \perp MN$.

Xét tứ giác $OIHM$ có: $\widehat{OIM} = \widehat{OHM} = 90^\circ$

$\Rightarrow OIHM$ là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì $\Delta OBM = \Delta OCN$ nên $\widehat{MOB} = \widehat{NOC}$

$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{NOC} + \widehat{MOC} = \widehat{MOB} + \widehat{MOC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MOI} = 60^\circ$.

Mà tứ giác $OIHM$ nội tiếp nên $\widehat{IHC} = \widehat{MOI} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IHC} = \widehat{ABC}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $IH // AB$.

Từ đó suy ra đường cao hạ từ I và từ H cùng vuông góc với AB có độ dài bằng nhau.
Do đó, diện tích tam giác IAB luôn bằng diện tích tam giác AHB không đổi.

Theo chứng minh trên, ta có $OI \perp MN$ và $\widehat{MON} = 120^\circ$ nên $MN = 2MI = 2.OM.\sin 60^\circ = OM\sqrt{3}$.
Khi M chuyển động trên BH thì $OM \geq OH$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng H.

Từ đó suy ra: $\min MN = OH\sqrt{3}$ khi và chỉ khi M trùng H.

Câu 26. (Đề thi chuyên tỉnh Khánh Hoà năm 2023 – 2024)

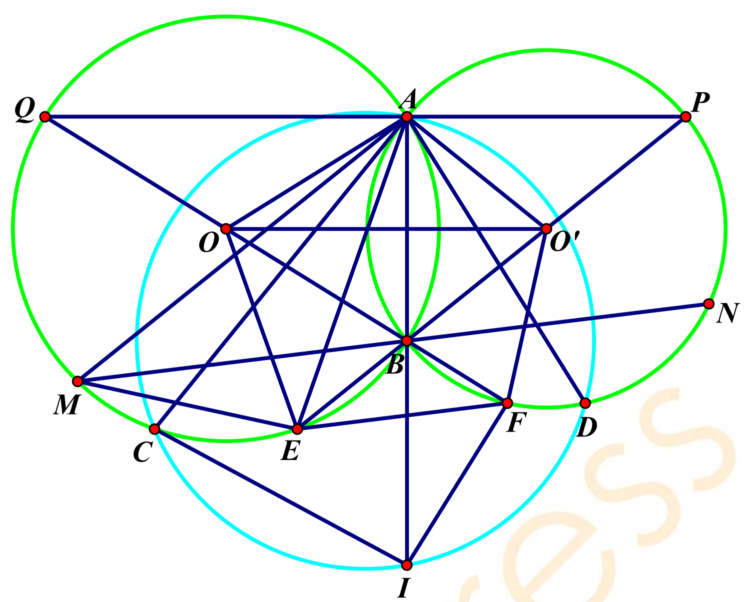
Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B $\left(R > R', \widehat{OAO'} > 90^\circ\right)$. Đường thẳng $O'B$ cắt $(O; R)$ và $(O'; R')$ lần lượt tại E và P (khác B), đường thẳng OB cắt $(O'; R')$ và $(O; R)$ lần lượt tại F và Q (khác B).

a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng và $PQ = 2OO'$.

b) Qua B dựng đường thẳng song song với EF, cắt $(O; R)$ và $(O'; R')$ lần lượt tại M và N. Chứng minh năm điểm O, A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn và $MABE$ là hình thang cân.

c) Tiếp tuyến với $(O'; R')$ tại A cắt $(O; R)$ tại C và tiếp tuyến với $(O; R)$ tại A cắt $(O'; R')$ tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng AB tại I (khác A). Chứng minh B là trung điểm của AI.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{QAB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O) đường kính BQ).

$\widehat{PAB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O') đường kính BP).

Mặt khác: $\widehat{QAP}=\widehat{QAB}+\widehat{PAB}$

$=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow A;\,P;\,Q$ thẳng hàng.

Xét ΔBPQ có O là trung điểm QB (do QB là đường kính của (O));

O' là trung điểm PB (do PB là đường kính của (O')).

Do đó OO' là đường trung bình của $\Delta BPQ \Rightarrow OO'//PQ;\, PQ=2OO'$.

b) ΔOEB cân tại O (do $OE=OB=R$) $\Rightarrow \widehat{EOB}=180^\circ-2\widehat{OBE}$ hay $\widehat{EOF}=180^\circ-2\widehat{OBE}$.

$\Delta O'FB$ cân tại O' (do $O'F=O'B=R'$) $\Rightarrow \widehat{BO'F}=180^\circ-2\widehat{O'BF}$ hay $\widehat{EO'F}=180^\circ-2\widehat{O'BF}$.

Mặt khác $\widehat{OBE}=\widehat{O'BF}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{EOF}=\widehat{EO'F} \Rightarrow$ Tứ giác $EOO'F$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow O;\,O';\,E;\,F$ cùng thuộc một đường tròn. $(*)$

Ta có: $\widehat{AO'B}=2\widehat{APB}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O')) hay $\widehat{AO'E}=2\widehat{APB}$..

Mặt khác: $\widehat{BFE}=\widehat{OFE}$ và $\widehat{OFE}=\widehat{OO'E}$ (tứ giác $EOO'F$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BFE}=\widehat{OO'E}$. (1)

Lại có $\widehat{AFB}=\widehat{APB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O'));

$OO'//QP$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{OO'E}=\widehat{APB}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{BFE}=\widehat{APB}$.

Do đó $\widehat{AFE}=\widehat{AFB}+\widehat{BFE}=2\widehat{APB}$. Mà $\widehat{AO'E}=2\widehat{APB}$ nên $\widehat{AFE}=\widehat{AO'E}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AO'FE$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow A;\,O';\,E;\,F$ cùng thuộc một đường tròn. $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra năm điểm $O;\,A;\,O';\,E;\,F$ cùng thuộc một đường tròn.

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A và B nên $OO'\perp AB$.

Mà ΔAOB cân tại O (do $OA=OB=R$) nên OO' là phân giác của $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BOO'}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Mặt khác: $\widehat{MAE}=\widehat{MBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ME}$ của (O));

$\widehat{MBE}=\widehat{O'EF}$ (do $MN//EF$);

$\widehat{O'EF}=\widehat{FOO'}=\widehat{BOO'}$ (do tứ giác $EOO'F$ nội tiếp).

Do đó $\widehat{MAE}=\widehat{BOO'}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Mặt khác $\widehat{AEB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)).

Suy ra $\widehat{MAE}=\widehat{AEB}$ (cặp góc nằm ở vị trí so le trong) $\Rightarrow MA//EB$. (3)

$\widehat{AMB}=\widehat{AEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)) và $\widehat{MAE}=\widehat{AEB}$ (chứng minh trên);

$\widehat{BME}=\widehat{BAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$ của (O)).

Ta có $\widehat{MAB}=\widehat{MAE}+\widehat{BAE}$. Mặt khác $\widehat{AME}=\widehat{AMB}+\widehat{BME}=\widehat{AEB}+\widehat{BAE}=\widehat{MAE}+\widehat{BAE}$.

Do đó $\widehat{AME}=\widehat{MAB}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra tứ giác $MABE$ là hình thang cân.

c) Ta có $\widehat{BAD}=\widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)) ;

$\widehat{CAB}=\widehat{ADB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O')).

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta DBA\ (g.g) \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2=BC.BD \\ \widehat{ABC}=\widehat{ABD} \end{cases}$. (5)

Mặt khác $\widehat{CBI}=180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-\widehat{ABD}=\widehat{DBI} \Rightarrow \widehat{CBI}=\widehat{DBI}$.

Tứ giác $ACID$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IAD}=\widehat{ICD}$.

Suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{IAD}=\widehat{ICD}$. Mặt khác $\widehat{BAD}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{ICD}$.

Lại có $\widehat{BCI}=\widehat{ICD}+\widehat{BCD}=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}=\widehat{ACD}$.

Mà $\widehat{ACD}=\widehat{AID}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$).

Do đó $\widehat{BCI}=\widehat{AID}=\widehat{BID} \Rightarrow \widehat{BCI}=\widehat{BID}$.

Suy ra $\Delta BCI \backsim \Delta BID\ (g.g) \Rightarrow \frac{BC}{BI}=\frac{BI}{BD} \Rightarrow BI^2=BC.BD$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $AB=BI \Rightarrow B$ là trung điểm của AI.

Câu 27. (Đề thi chuyên tỉnh Lai Châu năm 2023 – 2024)

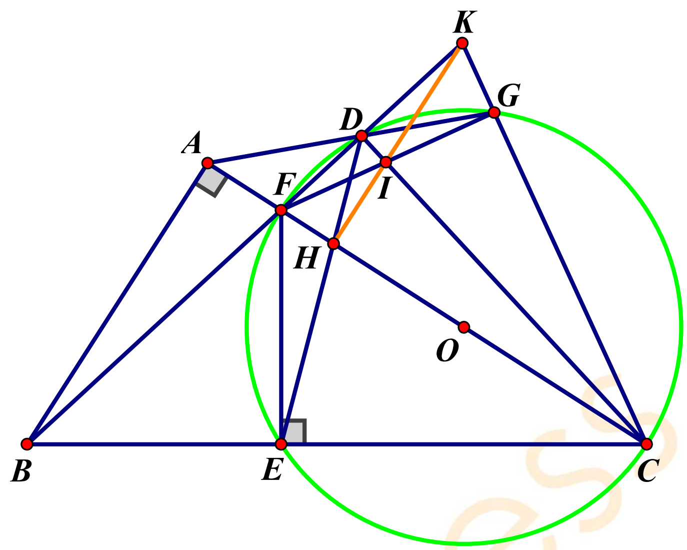
Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm F, vẽ FE vuông góc với BC tại E. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF. Đường thẳng BF cắt (O) tại điểm thứ hai là D, DE cắt AC tại H.

a) Chứng minh rằng $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $FH.CA=CH.FA$.

c) Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai G, FG cắt CD tại I, CG cắt FD tại K. Chứng minh rằng K, I, H thẳng hàng.

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAC}=90^\circ$ hay $\widehat{BAF}=90^\circ$.

Ta có $FE\perp BC$ tại E nên $\widehat{FEB}=\widehat{FEC}=90^\circ$.

Xét tứ giác $ABEF$ có $\widehat{BAF}+\widehat{FEB}=180^\circ$.
Mà hai góc đối nhau nên $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FDC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{BDC}=90^\circ$.

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}=90^\circ$.
Mà hai đỉnh kề nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$) hay $\widehat{ABF}=\widehat{FCD}$. (1)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEF$ có $\widehat{ABF}=\widehat{AEF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$). (2)

Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FCD}=\widehat{FED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DF}$). (3)

Từ $(1),(2)$ và (3), suy ra $\widehat{FED}=\widehat{AEF}$ nên FE là tia phân giác của $\widehat{AED}$.

Xét ΔAEH có $EF; EC$ là đường phân giác trong và ngoài của tam giác nên $\dfrac{AF}{FH}=\dfrac{AE}{EH};\dfrac{AC}{CH}=\dfrac{AE}{EH}$.

Suy ra $\dfrac{AF}{FH}=\dfrac{AC}{CH}\Rightarrow AF.CH=FH.AC$.

c) Xét đường tròn (O) có $\widehat{FGC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CG\perp FI$.

Xét tam giác IFC có $FD; CG$ là hai đường cao.

Mà FD cắt CG tại K nên K là trực tâm tam giác $IFC\Rightarrow IK\perp FC$. (4)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{FDA}=\widehat{FCG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{GF}$).

Mà $\widehat{FDA}=\widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) nên $\widehat{BCA}=\widehat{FCG}$ hay $\widehat{FCE}=\widehat{FCG}$.

Xét ΔFEC và ΔFGC có $\widehat{FCE}=\widehat{FCG}$ và $\widehat{FEC}=\widehat{FGC}=90^\circ$.

Suy ra $\Delta FEC\backsim\Delta FGC\ (g.g)\Rightarrow \overset{\frown}{GC}=\overset{\frown}{EC}$.

Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{GFC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{GC}$; $\widehat{EDC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{EC}$.

Suy ra $\widehat{GFC}=\widehat{EDC}$ hay $\widehat{IFH}=\widehat{HDC}$.

Xét tứ giác $FHDI$ có $\widehat{IFH}=\widehat{HDC}\Rightarrow \widehat{FHI}=\widehat{FDI}=90^\circ\Rightarrow IH\perp FC$. (5)

Từ (4) và (5), suy ra $K; I; H$ thẳng hàng.

Câu 28. (Đề thi chuyên tỉnh Lào Cai năm 2023 – 2024)

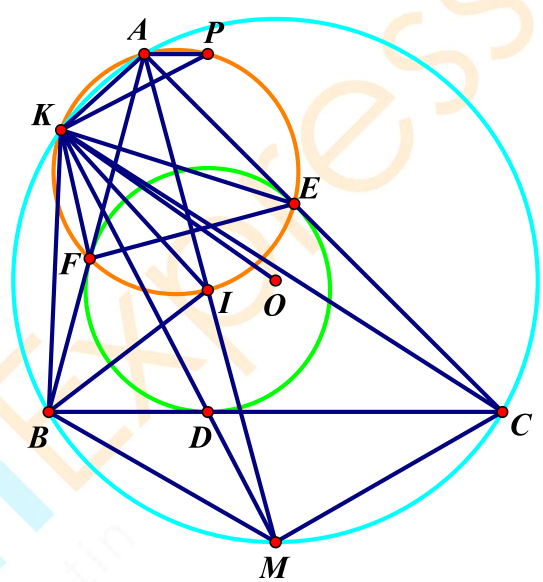
Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là điểm M.

a) Chứng minh rằng $MB = MC = MI$.

b) Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng tứ giác $AKFE$ nội tiếp.

c) Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng KP vuông góc với KD.

Lời giải



a) Do AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên M là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A của (O)

$\Rightarrow MB = MC$.

Từ đó ta có biến đổi góc sau:

$\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{IBC} = \widehat{MAB} + \widehat{IBA} = \widehat{MIB}$.

Do đó tam giác MBI cân tại $M \Rightarrow MB = MI$.

Mặt khác $MB = MC \Rightarrow MB = MC = MI$.

b) Gọi K' là giao điểm thứ hai của (AEF) và (O).

Ta sẽ chứng minh $K \equiv K'$.

Thật vậy:

Do tứ giác $AK'FE$ nội tiếp nên $\widehat{FK'E} = \widehat{FAE}$.

Mặt khác $\widehat{BK'C} = \widehat{BAC} = \widehat{FAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC của (O)).

Suy ra $\widehat{BK'C} = \widehat{FK'E} \Rightarrow \widehat{BK'C} - \widehat{FK'C} = \widehat{FK'E} - \widehat{FK'C} \Rightarrow \widehat{BK'F} = \widehat{CK'E}$.

Mặt khác $\widehat{K'BF} = \widehat{K'BA} = \widehat{K'CA} = \widehat{K'CE}$.

Từ đó suy ra $\Delta K'BF \backsim \Delta K'CE \; (g.g) \Rightarrow \dfrac{K'B}{K'C} = \dfrac{BF}{CE}$.

Mà $BF = BD$ và $CE = CD$ nên $\dfrac{K'B}{K'C} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow K'D$ là phân giác của $\widehat{BKC}$.

Mà M cũng chính là điểm chính giữa cung BC không chứa K' của (O)

$\Rightarrow K', D, M$ thẳng hàng hay $K \equiv K'$.

Từ đó ta suy ra tứ giác $AKFE$ nội tiếp.

c) Xét hai tam giác MBD và MKB, có $\widehat{MBD} = \widehat{MBC} = \widehat{MKB}$ và $\widehat{M}$ chung

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MKB \; (g.g) \Rightarrow \dfrac{MB}{MK} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MK.MD = MB^2 = MI^2 \Rightarrow \dfrac{MI}{MD} = \dfrac{MK}{MI}$.

Xét hai tam giác MID và MKI, có $\dfrac{MI}{MD} = \dfrac{MK}{MI}$; $\widehat{M}$ chung

$\Rightarrow \Delta MID \, \Delta MKI \; (c.g.c) \Rightarrow \widehat{MKI} = \widehat{MID}$. $\qquad (1)$

Ta có $\widehat{API} = \widehat{AEI} = 90^\circ \Rightarrow AP \perp PI$. Mà $AP // BC$ nên $PI \perp BC$.

Mặt khác $ID \perp BC$. Từ đó suy ra P, I, D thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{AIP} = 90^\circ - \widehat{PAI} = 90^\circ - \widehat{PKI}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{MKI} = 90^\circ - \widehat{PKI} \Rightarrow \widehat{MKP} = 90^\circ$ hay $KP \perp KM$.

Câu 29. (Đề thi chuyên tỉnh Long An năm 2023 – 2024)

1) Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Từ A và B lần lượt kẻ hai tiếp tuyến Au, Bv với nửa đường tròn. Qua một điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Au và Bv theo thứ tự ở M và N.

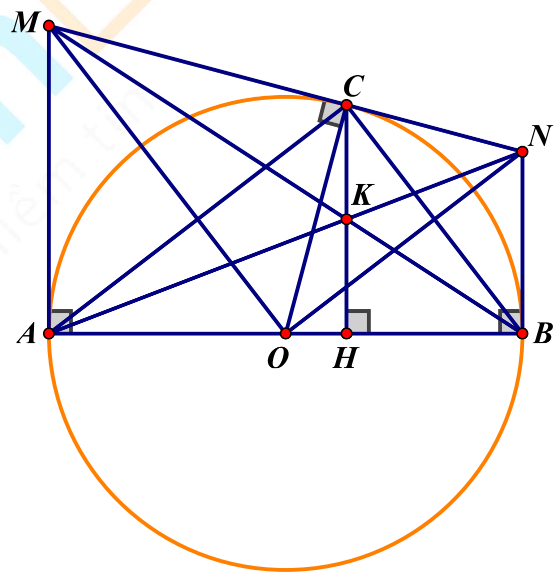
a) Chứng minh tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{CBO} = \widehat{CNO}$.

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H, gọi K là giao điểm của CH với AN. Chứng minh ba điểm M, K, B thẳng hàng.

c) Gọi S là diện tích của tam giác ABC, S_1 là diện tích của tam giác MON. Hãy tính tỉ số $\frac{S_1}{S}$ khi $AM = 1,5R$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh BC, I và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và tam giác ACM. Xác định vị trí của M để diện tích tam giác AIK nhỏ nhất.

Lời giải



a) Xét tứ giác $AMCO$ có: $\widehat{MAO} = 90^\circ$; $\widehat{MCO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow AMCO$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta có $BNCO$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CBO} = \widehat{CNO}$.

b) Ta có $CK // AM$ nên $\frac{KN}{KA} = \frac{CN}{CM}$.

Mà $MC = MA, NC = NB$ nên $\frac{KN}{KA} = \frac{NB}{MA}$.

Lại có $\widehat{MAK} = \widehat{ANB}$ (so le trong).

Suy ra $\Delta AKM \backsim \Delta NKB \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{NKB}$.

Mà A, K, N thẳng hàng nên M, K, B thẳng hàng.

c) Ta có $\Delta MON \backsim \Delta ACB$ nên ΔMON vuông tại O

$\Rightarrow OC^2 = CM.CN \Rightarrow CN = \frac{2}{3}R \Rightarrow MN = MC + CN = \frac{13}{6}R$.

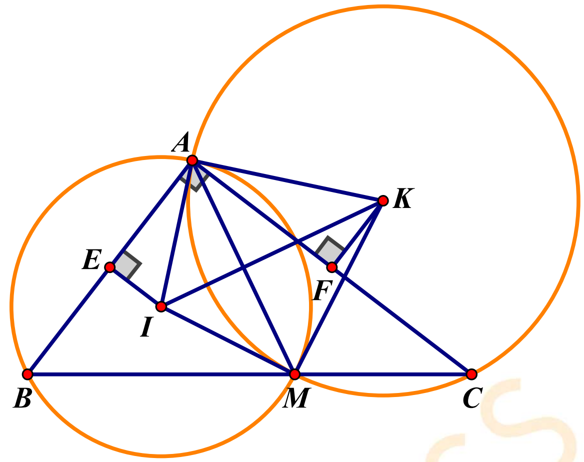
Vậy $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

2) Ta có $\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\widehat{AIM}=\widehat{AIK};\ \widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AKM}=\widehat{AKI}$

$\Rightarrow \widehat{AIK}+\widehat{AKI}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$ nên tam giác AIK vuông tại A

$\Rightarrow S_{AIK}=\frac{1}{2}AI.AK\ge\frac{1}{2}AE.AF=\frac{1}{8}AB.AC$ với E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

Đẳng thức xảy ra khi $I\equiv E$ và $K\equiv F$, khi đó M là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC.



Câu 30. (Đề thi chuyên tỉnh Nam Định năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm đoạn AH, đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại S sao cho P nằm giữa S và F. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

b) $AP^2=AQ^2=AE.AC$.

c) Tứ giác $DMEF$ nội tiếp và $\frac{FP}{PS}=\frac{QE}{ES}$.

Lời giải

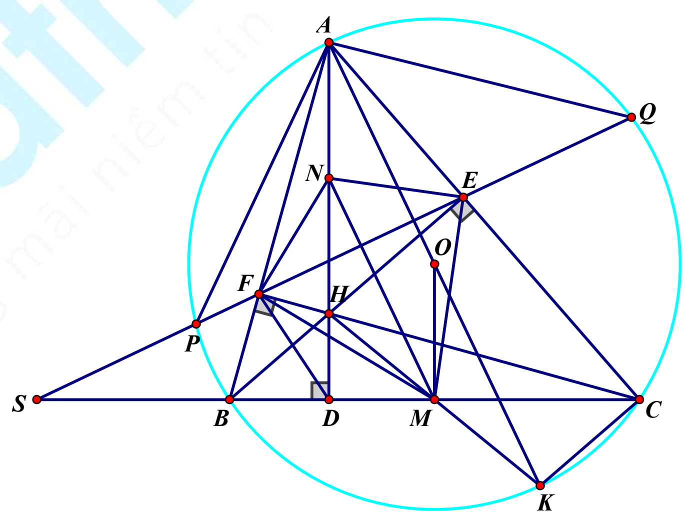
a) Kẻ đường kính AK (K nằm trên đường tròn (O)).

Khi đó $AC\perp CK; BK\perp AB$.

Dễ dàng suy ra $BK // CH$ và $CK // BH$ (cùng vuông góc với một đường thẳng).

Từ đó suy ra $BHCK$ là hình bình hành.

Vì M là trung điểm BC nên $M\in HK$ và $MH=MK$.



Tam giác AHK có M và N lần lượt là trung điểm của HK và AH nên MN là đường trung bình của ΔAHK. Suy ra $MN // AO$ và $MN=\frac{1}{2}AK=AO$.

Vậy $AOMN$ là hình bình hành.

b) Tam giác AFH vuông tại F suy ra $FN=HN$.

Tương tự, ΔAEH vuông tại E nên $NE=NH$. Suy ra $NF=NE$. $\quad (1)$

Lại có ΔBFC và ΔBEC lần lượt vuông tại F và E, có các đường trung tuyến lần lượt là MF và ME. Do đó $MF = ME = \frac{1}{2}BC$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra MN là trung trực của EF. Suy ra $EF \perp MN$. $\quad (3)$

Lại có $MN // AO$, kết hợp với (3) suy ra $AO \perp F$ hay $AO \perp PQ$.

Suy ra A là điểm chính giữa cung PAQ, suy ra $AP = AQ$ hay cung AQ bằng cung AP.

Mặt khác $\widehat{AQP} = \widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ (các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau) nên $\Delta AQC \backsim \Delta AEQ$.

Suy ra $\frac{AE}{AQ} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow AE.AC = AQ^2$.

Vậy $AP^2 = AQ^2 = AE.AC$.

c) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{FEM} = 180° - \widehat{AEF} - \widehat{MEC} = 180° - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$.

Tứ giác $DFAC$ nội tiếp nên $\widehat{FDM} + \widehat{BAC} = 180°$. Suy ra $\widehat{FEM} = \widehat{FDM} = 180°$.

Vậy tứ giác $DMEF$ là tứ giác nội tiếp.

Xét ΔSDF và ΔSEM có: $\widehat{SDF} = \widehat{SEM}$ và $\widehat{DSF}$ chung

$\Rightarrow \Delta SDF \backsim \Delta SEM\ (g.g) \Rightarrow \frac{SD}{SF} = \frac{SE}{SM} \Rightarrow SD.SM = SE.SF$.

Từ tứ giác $BFEC$ nội tiếp, ta suy ra $SE.SF = SB.SC$, tứ giác $BCQP$ nội tiếp nên $SB.SC = SP.SQ$.

Suy ra $SP.SQ = SE.SF \Rightarrow \frac{SF}{SP} = \frac{SQ}{SE}$.

Vậy $\frac{SF}{SP} - 1 = \frac{SQ}{SE} - 1$ hay $\frac{SF - SP}{SP} = \frac{SQ - SE}{SE} \Rightarrow \frac{PF}{PS} = \frac{EQ}{SE}$.

Câu 31. (Đề thi chuyên Toán Lê Hồng Phong tỉnh Nam Định năm 2023 – 2024)

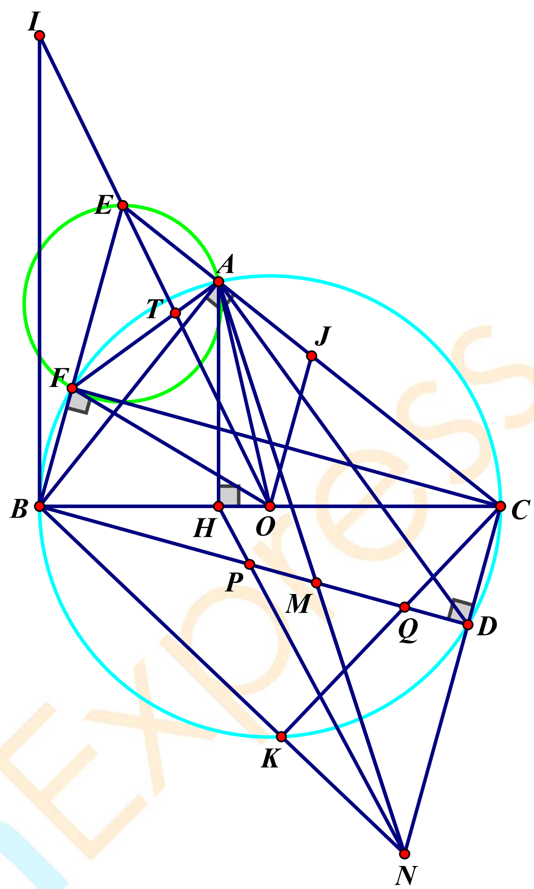
Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường BC $(BD > AC)$. Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD. Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E, cắt đường tròn (O) tại F (F *khác* B).

a) Gọi J là trung điểm của EC. Chứng minh rằng 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I. Chứng minh rằng $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.

c) Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N, đường thẳng BN cắt (O) tại K (K *khác* B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$.

Lời giải



a) Vì tứ giác $AFBC$ nội tiếp nên

$\widehat{EAF}=180^\circ-\widehat{FAJ}=\widehat{FBC}=\frac{1}{2}\widehat{FOC}.$

Vì JO là đường trung bình tam giác CBE nên $JO // BF.$

Mà $CF\perp BF$ nên $JO\perp CF.$

Vì O thuộc trung trực của CF nên OJ là trung trực CF nên $\widehat{FOJ}=\frac{1}{2}\widehat{FOC}.$

Suy ra $\widehat{FOJ}=\widehat{EAF}\Rightarrow AJOF$ là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi T là giao điểm của OE và $AF.$

Trước hết, chứng minh $\frac{ID}{IA}=\frac{BD^2}{BA^2}.$

Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $AFD,$ cát tuyến ITO ta có $\frac{ID}{IA}.\frac{TA}{TF}.\frac{OF}{OD}=1.$

Từ đây kết hợp $OF=OD,$ $\Delta AEB\backsim\Delta FEC$ $(g.g)$ và $BD=CF,$ ta có

$$\frac{ID}{IA}=\frac{TF}{TA}=\frac{EF.\sin\widehat{FET}}{EA.\sin\widehat{AET}}=\frac{EF}{EA}\cdot\frac{\sin\widehat{BEO}}{\sin\widehat{CEO}}=\frac{EF}{EA}\cdot\frac{CE}{BE}=\left(\frac{CF}{BA}\right)^2=\left(\frac{BD}{BA}\right)^2.$$

Bằng các phép biến đổi góc, ta có $\widehat{OFA}=\widehat{OAF}=90^\circ-\widehat{ADF}=90^\circ-\widehat{ACF}=\widehat{AEF}.$

Do đó OF và OA là hai tiếp tuyến của đường tròn $(AEF).$

Gọi I' là giao điểm của tiếp tuyến tại B của (O) với $AD,$ ta có $\Delta I'BA\backsim\Delta I'DB$ $(g.g)$

$$\Rightarrow\frac{I'A}{I'B}=\frac{I'B}{I'D}=\frac{BA}{BD}\Rightarrow\frac{I'D}{I'A}=\frac{I'D}{I'B}\cdot\frac{I'B}{I'A}=\frac{BD^2}{BA^2}=\frac{ID}{IA}\Rightarrow I\equiv I'.$$

Từ đây ta được IB là tiếp tuyến của $(O)\Rightarrow\widehat{IBA}=\widehat{BDA}.$

c) Ta có $\widehat{DNM}+\widehat{DMN}=\widehat{BAM}+\widehat{CAN}=90^\circ;$ $\widehat{BAM}=\widehat{BMA}.$

Do đó $\widehat{CAN}=\widehat{CNA}$ hay tam giác CAN cân tại C suy ra $CA=CN.$

Theo hệ thức lượng ta có $CA^2=CH.CB$ nên $CN^2=CH.CB\Rightarrow\frac{CN}{CH}=\frac{CB}{CN}.$

Suy ra $\Delta CNH\backsim\Delta CBN$ $(c.g.c)\Rightarrow\widehat{CHN}=\widehat{CNB}=\widehat{CQD}.$

Do đó tứ giác $CQPH$ nội tiếp nên $BP.BQ=BH.BC=BA^2\Rightarrow BM^2=BP.BQ$

$\Leftrightarrow BM^2 = (BM - PM)(BM + MQ) \Leftrightarrow BM.MQ = PM.(BM + MQ)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{PM} = \dfrac{BM + MQ}{BM.MQ} = \dfrac{1}{MQ} + \dfrac{1}{BM}$ (điều phải chứng minh).

Câu 32. (Đề thi chuyên Đại học Vinh tỉnh Nghệ An năm 2023 – 2024)

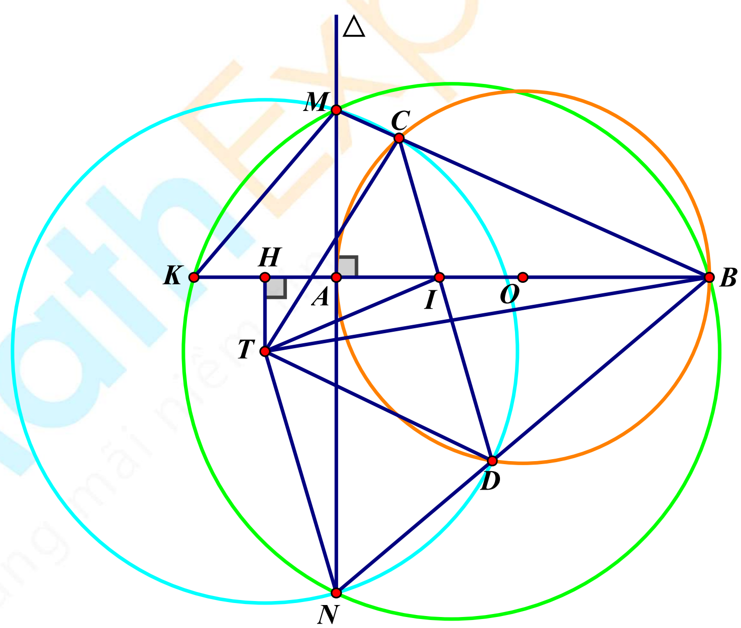
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A, I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I. Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $CDNM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB. Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM.AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Lời giải



a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho hai tam giác BAM và BAN với hai đường cao tương ứng là AC, AD, ta có: $BA^2 = BC.BM = BD.BN$

$\Rightarrow CDNM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{MKB} = \widehat{MNB} = \widehat{DCB}$

$\Rightarrow CIKM$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó: $BC.BM = BI.BK = BA^2$

$\Rightarrow K$ là điểm cố định

$\Rightarrow AM.AN = AK.AB$ không đổi.

c) Gọi r là bán kính của (T)

$\Rightarrow r^2 - TA^2 = AN.AM = a$ không đổi.

Ta cũng có $ID.IC$ không đổi.

Đặt $ID.IC = b = r^2 - TI^2 \Rightarrow TI^2 - TA^2 = a - b$.

Gọi H là hình chiếu của T lên AB.

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$(AI + 2AH).AI = HI^2 - HA^2 = (TI^2 - TH^2) - (TA^2 - TH^2) = TI^2 - TA^2 = a - b.$$

Từ đây, kết hợp với AI không đổi, suy ra H cố định. Do đó BH không đổi.

Theo định lý Pythagore, ta có: $BT^2 = TH^2 + BH^2 \geq BH^2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi T trùng với H tức là BA là trung trực của $CD \Rightarrow CD \perp AB$ tại I.

Vậy khi CD vuông góc với AB tại I thì độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Câu 33. (Đề thi chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F điểm đối xứng của C qua AB. Đường thẳng BE cắt đường thẳng CF tại H.

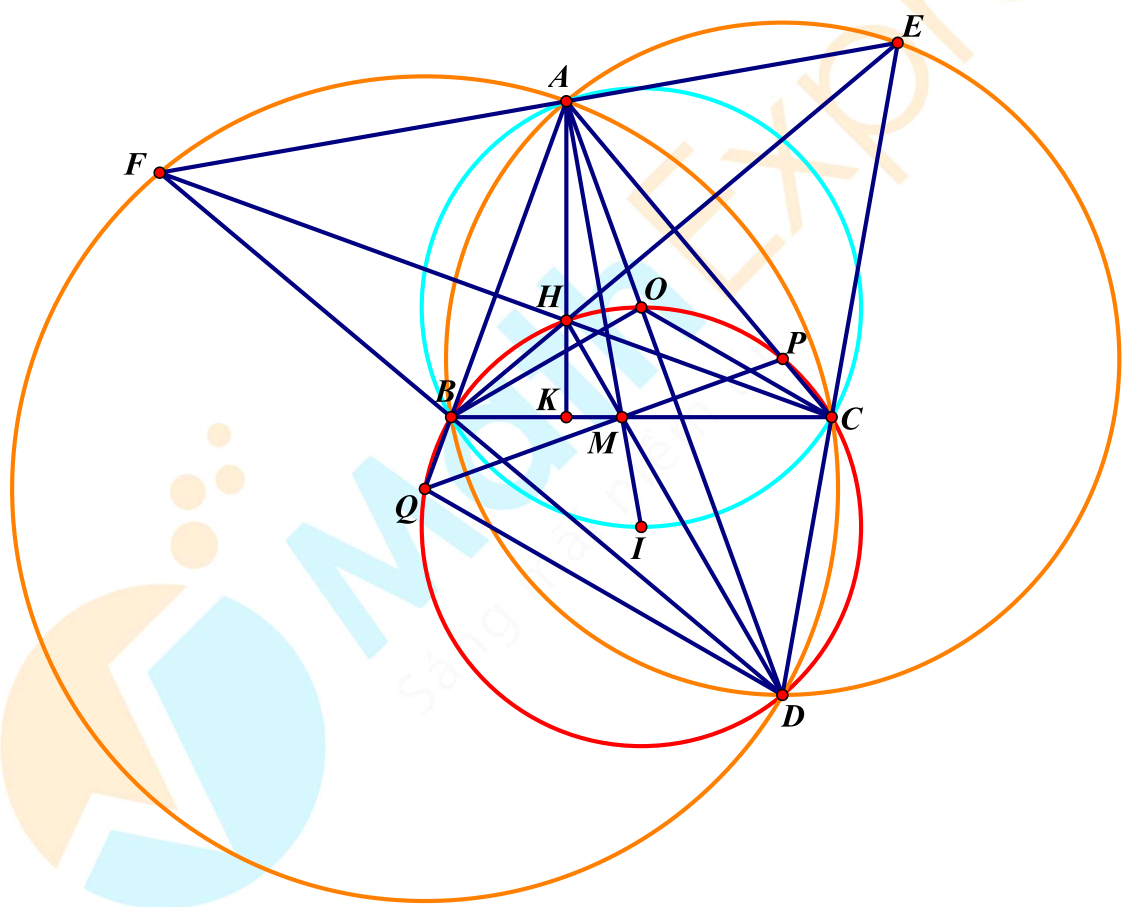
a) Chứng minh các tứ giác $AHBF$ và $AHCE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Chứng minh F, B, D thẳng hàng và DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, ACF. Chứng minh sáu điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm I và giao điểm (khác D) của đường thẳng AD với đường tròn (I) là trực tâm tam giác APQ.

d) Giả sử H thuộc đường tròn (I). Chứng minh các đường thẳng AI, DH, BC, PQ đồng quy.

Lời giải



a) Gọi K là giao điểm của AH và BC.

Dễ dàng chứng minh được H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$ tại K.

Ta có: $\widehat{AFB} = \widehat{ACB}$ (đối xứng); $\widehat{AHB} = \widehat{KHE}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{ACB} + \widehat{KHE} = 180°$ nên $AHBF$ là tứ giác nội tiếp.

Tương tự, ta chứng minh được $AHCE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{AED}=\widehat{AHF}$ (cùng bù với $\widehat{AHC}$).

Mà $\widehat{AHF}=\widehat{ABF}$ (tứ giác $AHBF$ nội tiếp) nên $\widehat{AED}=\widehat{ABF}$.

Mặt khác $\widehat{AED}+\widehat{ABD}=180^\circ$ ($ABDE$ nội tiếp) nên $\widehat{ABF}+\widehat{ABD}=180^\circ$.

Do đó ba điểm F, B, D thẳng hàng.

Tương tự, ta chứng minh được ba điểm E, C, D thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{ADF}=\widehat{ACF}$; $\widehat{ADE}=\widehat{ABE}$.

Mà $\widehat{ACF}=\widehat{ABE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) nên $\widehat{ADF}=\widehat{ADE}$ hay DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

c) Dễ thấy P thuộc AC, Q thuộc AB.

Ta có: $\widehat{ADC}=\widehat{AFC}$.

Mà $\widehat{AFC}=\widehat{ACF}=90^\circ-\widehat{BAC}$ nên $\widehat{ADC}=90^\circ-\widehat{BAC}$.

Tương tự $\widehat{ADB}=90^\circ-\widehat{BAC}$.

Suy ra $\widehat{BDC}=180^\circ-2\widehat{BAC}$.

Lại có $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm) nên $\widehat{BDC}+\widehat{BOC}=180^\circ$

$\Rightarrow BOCD$ là tứ giác nội tiếp.

Tam giác PAB cân tại P nên $\widehat{APB}=180^\circ-2\widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{PAB}=\widehat{BDC}$ nên tứ giác $\widehat{BPCD}$ nội tiếp.

Tương tự ta có tứ giác $BQDC$ nội tiếp.

Vậy 6 điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn (I).

Dễ chứng minh O thuộc AD. Do đó giao điểm khác D của AD và (I) là O.

Vì OP là đường trung trực của AB nên OP vuông góc với AB; OQ là đường trung trực của AC nên OQ vuông góc với AC.

Vậy O là trực tâm của tam giác APQ.

d) Dễ chứng minh được I là giao điểm của tia phân giác của $\widehat{BAC}$ với (O).

Gọi M là giao điểm của AI và BC thì HD, PQ đi qua M.

Do đó 4 đường thẳng AI, BC, HD, PQ đồng quy tại M.

Câu 34. (Đề thi chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm 2023 – 2024)

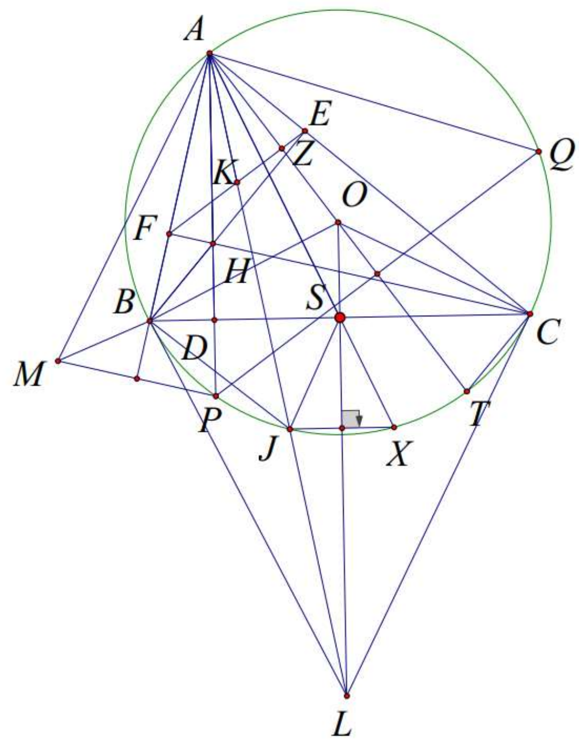
Cho tam giác nhọn ABC với $AB<AC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O), M là điểm đối xứng với P qua AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q. Chứng minh Q đối xứng với P qua OA.

c) Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại B; C đồng quy.

Lời giải



a) Ta có tứ giác $CDHE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DCE}+\widehat{DHE}=180^\circ$.

$\widehat{APB}=\widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB) ;

$\widehat{APB}=\widehat{AMB}$ (tính chất đối xứng) ;

$\widehat{AHB}=\widehat{EHD}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{AMB}+\widehat{AHB}=180^\circ$.

Vậy tứ giác $AHBM$ nội tiếp

b) Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FBC}=\widehat{AEF}=\widehat{ATC}\Rightarrow \widehat{ACT}=\widehat{AZE}=90^\circ$.

Mà $PQ//EF$ nên Q đối xứng với P qua OA.

c) Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại L, AL cắt đường tròn tại J. Dễ có $LB^2=LS.LA=LS.LO$.

Suy ra tứ giác $AJSO$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{JSL}=\widehat{XSL}\Rightarrow \widehat{ASC}=\widehat{ABJ}; \widehat{AJB}=\widehat{ACS}$

$\Rightarrow \Delta ABJ\backsim\Delta ASC\,(\text{g.g})$.

Giả sử AJ cắt EF tại K'.

Vì $\Delta ABC\backsim\Delta AEF\,(\text{g.g})$ nên $\Delta FAK'\backsim\Delta ABS\,(\text{g.g})$.

Vì S là trung điểm $BC\Rightarrow K'$ là trung điểm $EF\Rightarrow K'\equiv K$.

Vậy tiếp tuyến của (O) tại B, C và AK đồng quy.

Câu 35. (Đề thi chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm 2023 – 2024)

Trên đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ lấy điểm N sao cho $AN=R$ và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BN (M khác B và N). Gọi I là giao điểm của AM và BN, H là hình chiếu của I trên AB, IH cắt AN tại C, K là điểm đối xứng với N qua AB.

a) Chứng minh $CM.CB=CI.CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và (O). Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB+MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{ANB}=\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì AM cắt BN tại I nên I là trực tâm ΔABC $\Rightarrow AI\perp BC\Rightarrow B, M, C$ thẳng hàng.

Dễ thấy $\Delta BCH\backsim\Delta ICM\Rightarrow CB.CM=CI.CH$.

Dễ thấy $\widehat{NHI}=\widehat{MHI}=\widehat{MBI}=\widehat{IAN}\Rightarrow \widehat{NHA}=\widehat{BHM}$.

Mà $\widehat{NHA}=\widehat{KHA}$ (tính chất đối xứng) nên $\widehat{AHK}=\widehat{BHM}$.

Lại có: $\widehat{BHM}+\widehat{MHA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AHK}+\widehat{AHM}=180^\circ \Rightarrow K, H, M$ thẳng hàng.

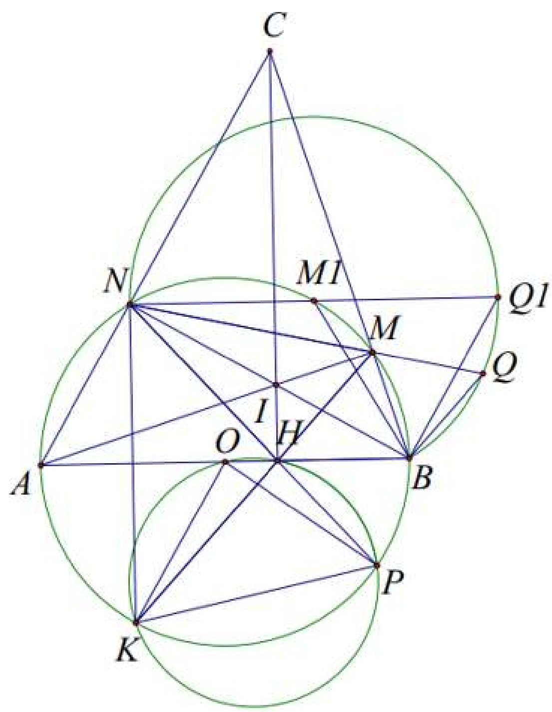
b) Ta có: $\widehat{PHK}=2\widehat{PNK}$ (góc ngoài ΔHNK cân);

$\widehat{KOP}=2\widehat{KNP}$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow KOHP$ là tứ giác nội tiếp.

Vì N cố định suy ra OK cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KHP thuộc trung trực OK cố định.



c) Ta có $\widehat{NMB}=120^\circ$.

Trên tia đối MN lấy điểm Q sao cho $MB=MQ$

$\Rightarrow \widehat{NQB}=60^\circ$.

Vì NB cố định nên Q thuộc cung chứa góc 60° dựng trên $NB \Rightarrow MN+MB$ lớn nhất khi NQ là đường kính của đường tròn.

Khi đó: $MB=MQ=MN \Rightarrow M\equiv M_1;\ Q\equiv Q_1$.

Vậy M là trung điểm cung NB thì $MN+MB$ lớn nhất và bằng $2R$.

Câu 36. (Đề thi chuyên tỉnh Phú Yên năm 2023 – 2024)

1) Cho đoạn thẳng AB, với M là trung điểm. Trên đường trung trực Mt của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kì. Vẽ tia Ax sao cho AI là phân giác $\widehat{BAx}$. Đường thẳng BI cắt Ax tại N. Gọi C là điểm đối xứng của A qua N, H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân.

b) Chứng minh đẳng thức: $BH^2=HI.BN$.

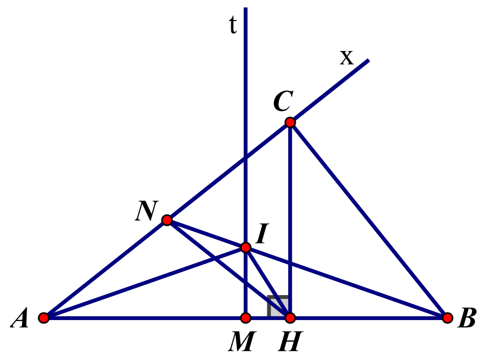
c) Khi điểm I di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC vuông tại C, hãy tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng DC. Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại E. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng DC.

a) Chứng minh BH vuông góc với AI.

b) Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác $BCEK$ nội tiếp.

Lời giải



1a) Xét ΔAHC vuông tại H có HN là trung tuyến ứng với cạnh huyền AC nên $NA = NC = NH$

$\Rightarrow \Delta AHN$ cân tại $N \Rightarrow \widehat{NHA} = \widehat{NAH}.$

Do đó $\widehat{NHA} = 2\widehat{IAB} = 2\widehat{IBH} = 2\widehat{NBH}.$ $\quad (1)$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có

$\widehat{NHA} = \widehat{HNB} + \widehat{HBN}.$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{HNB} = \widehat{HBN}$ hay ΔNHB cân tại $H.$

b) Theo chứng minh câu a, ΔNHB cân tại $H \Rightarrow HB = HN = \frac{1}{2}AC.$ $\quad (3)$

Xét ΔNHI và ΔBHI có: $\widehat{IAN} = \widehat{IBH};\ IA = IB;\ AN = BH(= HN)$

$\Rightarrow \Delta ANI = \Delta BHI\ (\text{c.g.c}) \Rightarrow IN = IH$

$\Rightarrow \Delta NIH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IHN} = \widehat{INH} \Rightarrow \Delta NHB \backsim \Delta NIH$

$\Rightarrow \frac{BH}{BN} = \frac{HI}{HN} \Rightarrow BH.HN = HI.BN \Rightarrow BH^2 = HI.BN.$

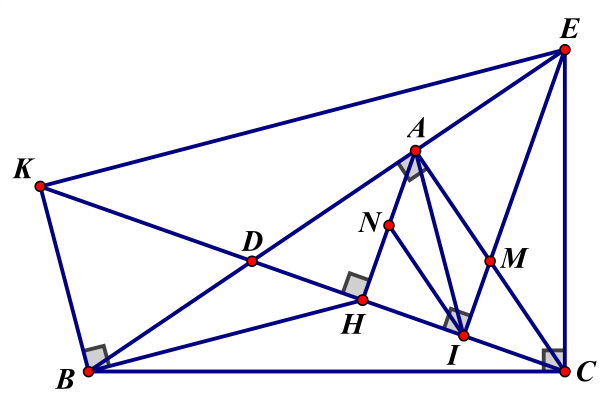
c) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Pytago ta có

$$BC^2 = BH.BA = AB^2 - AC^2 \Leftrightarrow AB^2 - BH.BA - AC^2 = 0. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có $2AB^2 - AB.AC - 2AC^2 = 0.$

Chia cả 2 vế cho $AC^2 > 0$, ta được phương trình bậc hai với ẩn $x = \frac{AB}{AC}$ là $2x^2 - x - 2 = 0.$

Do $x > 0$ nên $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$



2) Gọi M là giao điểm của EI và AC, ta có M là trực tâm của tam giác $ECD \Rightarrow DM // BC.$

Xét tam giác ABC có $DA = DB,\ DM // BC$

$\Rightarrow MA = MC.$

Xét tam giác AHC có $MA = MC,\ MI // AH$

$\Rightarrow IH = IC.$

Gọi N là trung điểm của AH, ta có $IN // AC$

$\Rightarrow IN$ vuông góc với $AD.$

Xét tam giác ADI có hai đường cao AH, IN cắt nhau tại N nên N là trực tâm ΔADI

$\Rightarrow DN \perp AI \Rightarrow BH \perp AI.$

b) Từ $BH \perp AI \Rightarrow AI // KB \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{KBD}.$

Xét ΔKBD và ΔIAD có: $\widehat{IAD} = \widehat{KBD};\ DA = DB;\ \widehat{ADI} = \widehat{BDK}$

$\Rightarrow \Delta KBD = \Delta IAD\ (\text{g.c.g}) \Rightarrow DK = DI.\qquad (1)$

Vì $\Delta DAC \backsim \Delta DIE\ (\text{g.g})$ nên $\dfrac{DA}{DI} = \dfrac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE = DI.DC.\qquad (2)$

Từ (1) và (2), kết hợp với $DA = DB$, suy ra $DB.DE = DK.DC$

$\Rightarrow \dfrac{DK}{DE} = \dfrac{DB}{DC} \Rightarrow \Delta DEK \backsim \Delta DCB\ (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{DEK} = \widehat{DCB}$

$\Rightarrow BCEK$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 37. (Đề thi chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023 – 2024)

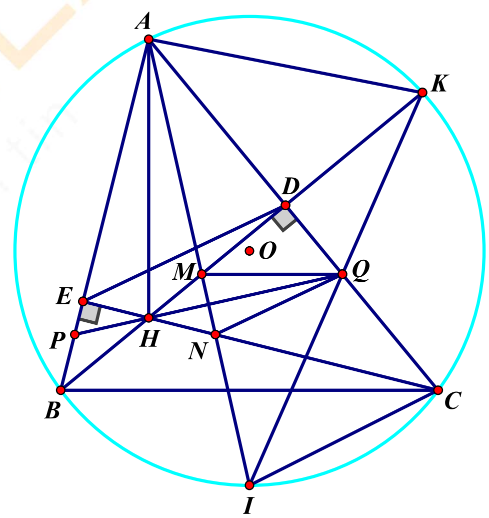
Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn tâm O. Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) theo thứ tự tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q, hai đường thẳng QH và AB cắt nhau tại P. Chứng minh:

a) Tứ giác $AMQK$ nội tiếp.

b) Tam giác APQ cân tại A.

c) $\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{MQ}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BKI} = \widehat{BAI}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BI}$).

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$ nên $\widehat{MAQ} = \widehat{MKQ}$

$\Rightarrow AMQK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì tứ giác $AMQK$ nội tiếp nên $\widehat{MQA} = \widehat{MKA}$.

Lại có $\widehat{BKA} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{MQA} = \widehat{BCA} \Rightarrow MQ\,//\,BC.$

Vì H là trực tâm của ΔABC nên $AH \perp BC \Rightarrow MQ \perp AH.$

Xét ΔAHQ có $HD \perp AQ, MQ \perp AH$ nên M là trực tâm $\Delta AHQ \Rightarrow AM \perp HQ.$

Xét ΔAPQ có AM vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên ΔAPQ cân tại A.

c) Gọi N là giao điểm của AI và CE.

Ta có $\widehat{AIK} = \widehat{ABK}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$), $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \widehat{NIQ} = \widehat{NCQ} \Rightarrow NICQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QNC} = \widehat{QIC}.$

Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BEDC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DBC}; \widehat{KBC} = \widehat{KIC}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{KC}$)

$\Rightarrow \widehat{QNC} = \widehat{DEC} \Rightarrow NQ\,//\,ED.$

Vì tứ giác NICQ nội tiếp nên $\widehat{MNQ} = \widehat{QCI}$.

Vì tứ giác $AMQK$ nội tiếp nên $\widehat{QMN} = \widehat{AKQ}$.

Mặt khác $\widehat{AKI} = \widehat{ACI}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$)

$\Rightarrow \widehat{QMN} = \widehat{QNM} \Rightarrow \Delta QMN$ cân tại $Q \Rightarrow QM = QN$.

Vì $MQ // BC$ nên $\dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{DQ}{DC}$ và $NQ // ED$ nên $\dfrac{NQ}{ED} = \dfrac{CQ}{CD}$.

Lại có $MQ = NQ$ nên $\dfrac{MQ}{BC} + \dfrac{MQ}{DE} = \dfrac{DQ}{DC} + \dfrac{CQ}{CD} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{MQ}$.

Câu 38. (Đề thi chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023 – 2024)

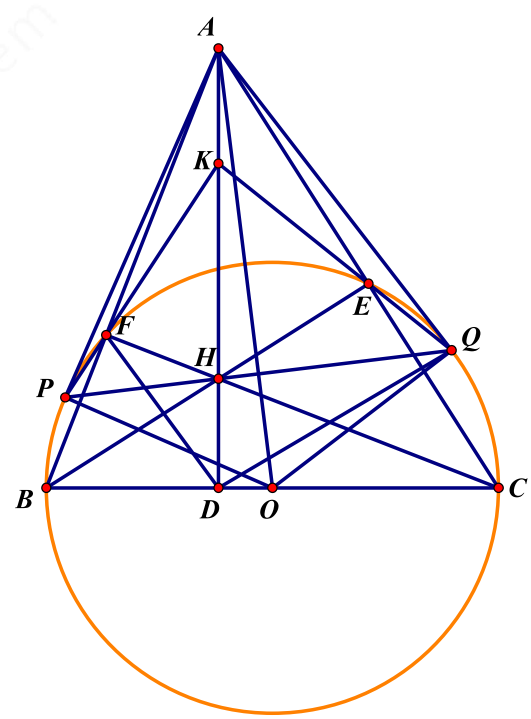
Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ đến đường tròn tâm O, đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm và P, F nằm cùng phía so với đường thẳng AD).

1) Chứng minh $AP^2 = AB.AF$ và năm điểm A, P, D, O, Q nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh H, P, Q thẳng hàng.

3) Chứng minh PF, QE, AD đồng quy.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{APF} = \widehat{ABP}$ nên $\Delta APF \backsim \Delta ABP$

$\Rightarrow AP^2 = AB.AF$.

Ta có $\widehat{APO} = \widehat{ADO} = \widehat{AQO} = 90^\circ$ nên năm điểm A, P, D, O, Q nằm trên đường tròn đường kính AO.

2) Ta có $\Delta AFH \backsim \Delta ADB$ nên $AP^2 = AB.AF = AH.AD$.

Suy ra $\Delta APH \backsim \Delta ADP \Rightarrow \widehat{APH} = \widehat{ADP}$. (1)

Tứ giác $APDO$ nội tiếp nên $\widehat{ADP} = \widehat{AOP} = \widehat{APQ}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{APH} = \widehat{APQ}$ nên ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

3) Gọi K là giao điểm QE và AD.

Ta có $\widehat{KQF} = \widehat{EBF} = \widehat{HDF} = \widehat{KDF}$ nên tứ giác $DFKQ$ nội tiếp.

Lại có $\begin{cases} \overset{\frown}{PFD} = \overset{\frown}{PFB} + \overset{\frown}{BFD} = \overset{\frown}{PCB} + \overset{\frown}{ACB} \\ \overset{\frown}{KQD} = \overset{\frown}{EQP} + \overset{\frown}{PQD} = \overset{\frown}{ACP} + \overset{\frown}{POD} = \overset{\frown}{ACP} + 2\overset{\frown}{PCD} = \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{PCB} \end{cases}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{PFD} = \overset{\frown}{KQD} \Rightarrow \overset{\frown}{PFD} + \overset{\frown}{DFK} = \overset{\frown}{KQD} + \overset{\frown}{DFK} = 180^\circ$

$\Rightarrow P, F, K$ thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng PF, QE, AD đồng quy.

Câu 39. (Đề thi chuyên tỉnh Sơn La năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của đường thẳng BC và EF; I là giao điểm của SA và đường tròn (O) (với I khác A).

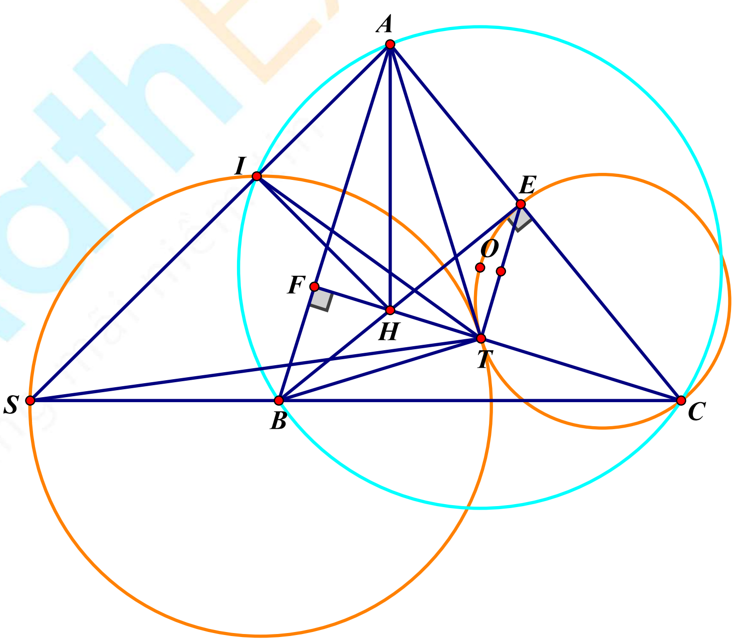
a) Chứng minh rằng tứ giác $AFHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $SF.SE = SI.SA$ và $HI \perp SA$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường kính AD của (O). Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và H là trực tâm tam giác ASM.

d) Giả sử T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác IST và tam giác ECT tiếp xúc với nhau.

Lời giải



a) Vì $BE \perp AC; CF \perp AB$ nên

$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEHF$ có

$\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tứ giác $BFEC$ có

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$)

Xét ΔSEB và ΔSCF có: $\widehat{ESC}$ chung; $\widehat{SEB} = \widehat{SCF}$

$\Rightarrow \Delta SEB \backsim \Delta SCF (g.g) \Rightarrow \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{SB}{SF} \Rightarrow SE.SF = SB.SC.$ (1)

Xét ΔSAB và ΔSCI có: $\widehat{ASC}$ chung; $\widehat{SAB} = \widehat{SCI} \left(= \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{IB} \right)$

$\Rightarrow \Delta SAB \backsim \Delta SCI (g.g) \Rightarrow \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SB}{SI} \Rightarrow SA.SI = SB.SC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SE.SF = SA.SI \Rightarrow \frac{SE}{SI} = \frac{SA}{SF}$

$\Rightarrow \Delta SIF \backsim SEA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{SIF} = \widehat{SEA} \Rightarrow AIFE$ là tứ giác nội tiếp.

Mà bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn nên năm điểm A, I, E, H, F cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow AIHE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow IH \perp SA$.

c) Xét (O) có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BD \\ AC \perp AD \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases}$ nên $\begin{cases} CH // BD \\ BH // CD \end{cases}$

$\Rightarrow BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow BC$ và HD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mà M là trung điểm BC nên ba điểm H, M, D thẳng hàng.

Vì I thuộc đường tròn (O), đường kính AD nên $\widehat{DIA} = 90^\circ \Rightarrow DI \perp IA$.

Mà $HI \perp IA$ (theo chứng minh câu b) nên I, H, M, D thẳng hàng $\Rightarrow MI \perp SA$.

Vì ΔABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H nên H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Xét ΔASM có $AH \perp SM; MI \perp SA; MI \cap AH = \{H\}$

$\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ASM.

d) Ta chứng minh được $AT^2 = AI.AS \Rightarrow AT$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIST.

Tương tự $AT^2 = AE.AC \Rightarrow AT$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECT.

Suy ra AT là tiếp tuyến chung của hai đường tròn hay hai đường tròn ngoại tiếp của ΔIST và ΔECT tiếp xúc nhau.

Câu 40. (Đề thi chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023 – 2024)

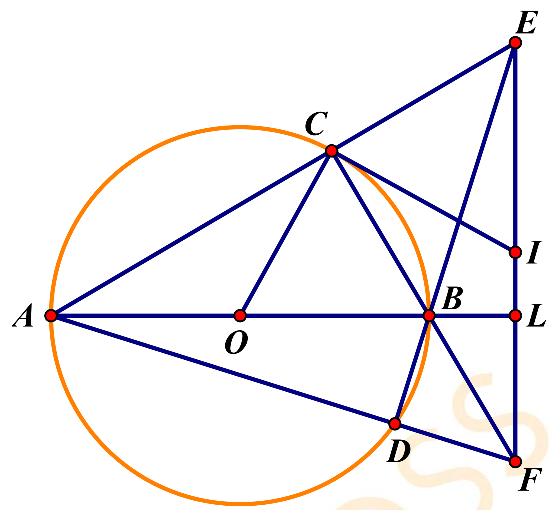
1) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy hai điểm C, D nằm khác phía đối với AB và CD không đi qua O. Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC, I là trung điểm đoạn thẳng EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

2) Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC không đi qua O $(MB < MC)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên MO.

a) Chứng minh tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

b) Vẽ đường thẳng qua B song song với AC cắt các đường thẳng MA, AH lần lượt tại K, I. Chứng minh $KB = BI$.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow FC \perp AE$ và $ED \perp AF$

$\Rightarrow B$ là trực tâm của tam giác AEF.

Gọi L là giao điểm của AB và EF thì $AL \perp EF$

$\Rightarrow \widehat{BLF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{LBF}$ (cùng phụ với $\widehat{CFE}$).

Xét $\Delta EFC\left(\hat{C} = 90^\circ\right)$ có CI là trung tuyến ứng với cạnh huyền $EF \Rightarrow CI = IE$

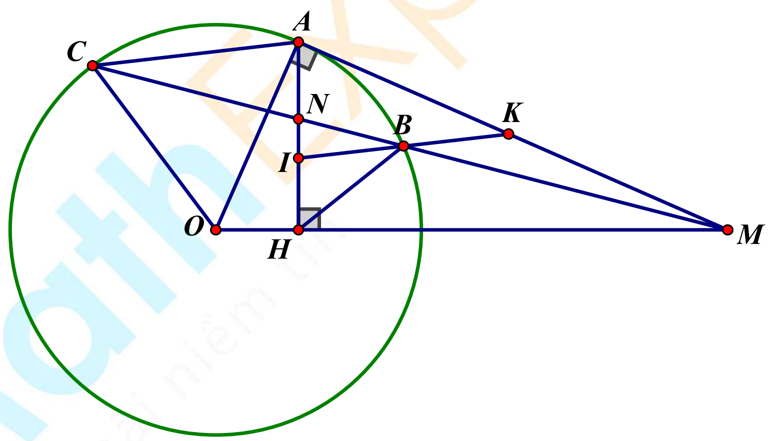
$\Rightarrow \Delta EIC$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{ICE}$.

Mặt khác $\widehat{OCB} = \widehat{LBF}$ (do ΔOBC cân tại O).

Suy ra $\widehat{OCB} = \widehat{ICE}$.

Ta có: $\widehat{OCI} = \widehat{ICE} + \widehat{OCA} = \widehat{OCB} + \widehat{OCA} = \widehat{ACB} = 90^\circ$

$\Rightarrow IC \perp OC \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O).



2a) Ta có $\Delta MBA \backsim \Delta MAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $MA^2 = MH.MO$.

Suy ra $MB.MC = MH.MO$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MO} = \dfrac{MH}{MC} \Rightarrow \Delta BMH \backsim \Delta OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BCO}$

$\Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của BC và AH.

Ta có $BK // AC \Rightarrow \dfrac{BK}{AC} = \dfrac{MB}{MC}$; $BI // AC \Rightarrow \dfrac{BI}{AC} = \dfrac{BN}{NC}$.

Do tứ giác $BHOC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{OHC} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \widehat{BHM}$.

Khi đó $\left.\begin{array}{l}\widehat{AHC} + \widehat{OHC} = 90^\circ \\ \widehat{AHB} + \widehat{BHM} = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AHB} \Rightarrow HA$ là phân giác trong của $\widehat{BHC} \Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BN}{NC}$.

Mà $HM \perp AH \Rightarrow HM$ là phân giác ngoài của $\widehat{BHC} \Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{MB}{MC}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{BK}{AC} = \dfrac{BI}{AC} \Leftrightarrow BK = BI$.

Câu 41. (Đề thi chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023 – 2024)

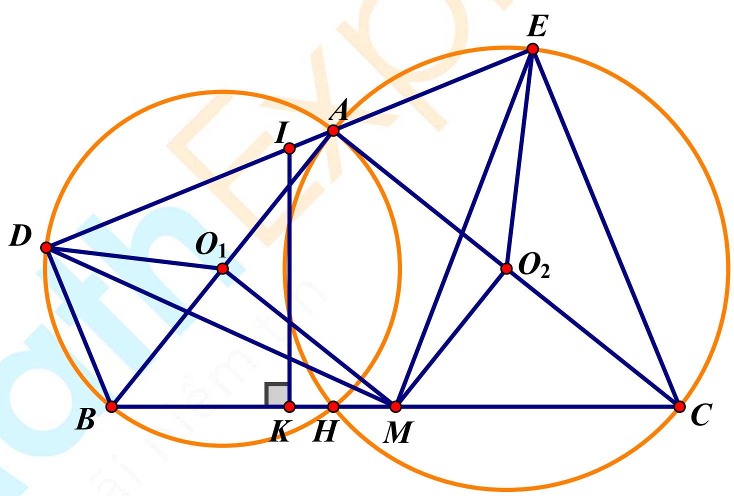
Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = c$, $AC = b$. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính AB và đường tròn tâm O_2 đường kính AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E không trùng với A sao cho A nằm giữa D, E.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng (d) thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng (d) để diện tích tứ giác $BDEC$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo b, c.

c) Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn DE và vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$.

Lời giải



a) Gọi M là trung điểm BC

$\Rightarrow MO_1 = \frac{1}{2}AC;\ MO_2 = \frac{1}{2}AB.$

Do D thuộc đường tròn đường kính AB nên tam giác ADB vuông tại D

$\Rightarrow DO_1 = \frac{1}{2}AB = MO_2.$

Tương tự thì $EO_2 = MO_1$.

Vì ΔABC vuông tại A nên

$\widehat{DAB} + \widehat{EAC} = 90°$.

Mặt khác ΔDAB vuông tại D nên

$\widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ABD} \Rightarrow 2\widehat{EAC} = 2\widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{DO_1A} = \widehat{EO_2C} \Rightarrow \widehat{DO_1B} = \widehat{EO_2A}.$

Dễ thấy $MO_1 \,//\, AC$, $MO_2 \,//\, AB \Rightarrow \widehat{MO_1B} = \widehat{MO_2A} = 90° \Rightarrow \widehat{MO_1D} = \widehat{MO_2E}.$

Xét ΔMO_1D và ΔEO_2M có: $MO_1 = EO_2$; $\widehat{DO_1M} = \widehat{MO_2E}$; $DO_1 = MO_2$

$\Rightarrow \Delta MO_1D = \Delta EO_2M$ (c.g.c) $\Rightarrow MD = ME$

$\Rightarrow M$ thuộc trung trực DE. Do đó trung trực DE luôn đi qua điểm M cố định.

b) Ta có $2s_{BDEC} = 2S_{BDA} + 2_{BAC} + 2_{ABC} = DB.DA + AB.AC + EA.AC \le \frac{BD^2 + DA^2}{2} + \frac{EA^2 + EC^2}{2} + bc$

$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) + bc = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) + bc = \frac{1}{2}(b + c)^2.$

Dấu "=" xảy ra khi $DA = DB; EA = EC \Leftrightarrow d$ tạo với AB một góc $45°$.

c) Ta có điều phải chứng minh:

$KB^2 = BD^2 + KH^2 \Leftrightarrow IB^2 - KI^2 = IB^2 - ID^2 + IH^2 - IK^2 \Leftrightarrow IH^2 = ID^2 \Rightarrow IH = ID = IE.$

Do đó tam giác DHE vuông tại H.

Thật vậy, có $\widehat{DHB}+\widehat{EHC}=\widehat{DAB}+\widehat{EAC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{DHE}=90^\circ$.

Do đó tam giác DHE vuông tại H, tức $KB^2=BD^2+KH^2$ (điều phải chứng minh).

Câu 42. (Đề thi chuyên tỉnh Thanh Hoá năm 2023 – 2024)

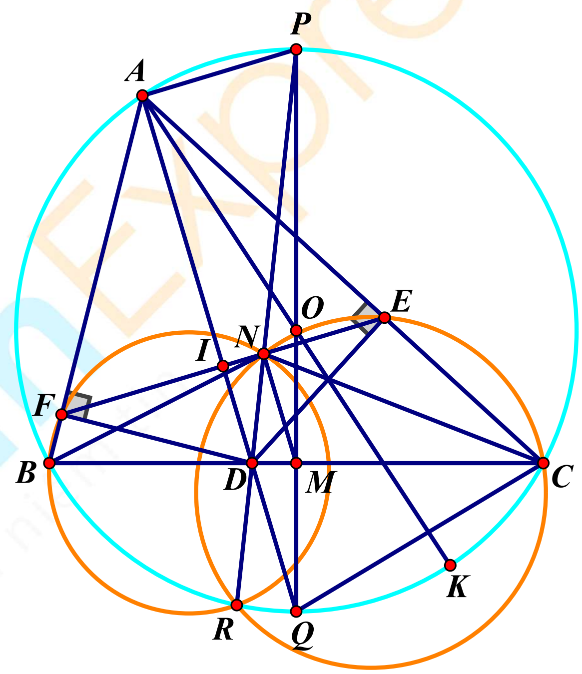
Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O), phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt (O) tại Q (Q khác A). Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB (E thuộc AC, F thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh $QM.QP=QD.QA$.

b) Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh $MN // AD$.

c) Dựng đường kính AK của (O). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại R (R khác N). Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét ΔQMD và ΔQAP có $\widehat{QMD}=\widehat{QAP}=90^\circ$; $\widehat{Q}$ chung $\Rightarrow \Delta QMD \backsim \Delta QAP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{QM}{QD}=\dfrac{QA}{QP} \Rightarrow QM.QP=QD.QA$.

b) Gọi I là giao điểm của AD và EF.

Ta chứng minh $\Delta AED \backsim \Delta PQD$ (g.g) có các đường cao tương ứng là EI và DM nên $\dfrac{QM}{QP}=\dfrac{DI}{DA}$.

Mà $NI // AP$ nên $\dfrac{DI}{DA}=\dfrac{DN}{DP} \Rightarrow \dfrac{QM}{QP}=\dfrac{DN}{DP}$

$\Rightarrow MN // DQ$ hay $MN // AD$.

c) Trước hết, ta chứng minh $R\in(O)$.

Ta có $\widehat{BRC}=\widehat{BRN}+\widehat{CRN}=\widehat{AEF}+\widehat{AFE}$

$=180^\circ-\widehat{BAC}$

$\Rightarrow ABRC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow R\in(O)$

$\Rightarrow \widehat{NRC}=\widehat{NEA}=\widehat{EAP}=\widehat{PRC} \Rightarrow P, D, R$ thẳng hàng.

Câu 43. (Đề thi chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2023 – 2024)

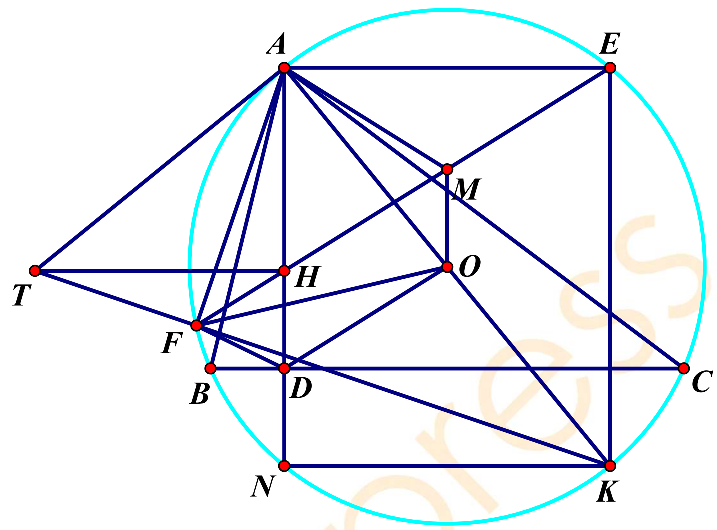
Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD và trực tâm H. Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thẳng EH cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại M.

a) Chứng minh M là trung điểm của EH và $AMOF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{OFA}+\widehat{ODF}=180^\circ$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

Lời giải



a) Vì hai dây AE và BC song song nên AH vuông góc với AE và trung trực của BC cũng là trung trực của AE.

Tam giác AEH vuông tại A nên đường trung trực của AE cũng chính là đường trung bình của tam giác đó. Suy ra M là trung điểm của EH.

Do đó $MA = ME = MH$

$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AEM} + \widehat{EAM} = 2\widehat{AEM}$

$\Rightarrow \widehat{AMF} = 2\widehat{AEF}$.

Mặt khác $\widehat{AOF} = 2\widehat{AEF}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AF).

Suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{AOF}$, do đó tứ giác $AMOF$ nội tiếp. (1)

b) Gọi N là giao điểm thứ hai của AH với (O).

Ta có $\widehat{CBN} = \widehat{CAN}$ (cùng chắn cung CN); $\widehat{CBH} = \widehat{CAN}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$).

Suy ra $\widehat{CBH} = \widehat{CBN}$.

Tam giác BHN có BD vừa là đường cao vừa là phân giác nên D là trung điểm của HN.

Tứ giác $AENF$ nội tiếp (O) và AN cắt EF tại H nên $HA.HN = HE.HF$

$\Leftrightarrow HA.2HD = 2HM.HF \Leftrightarrow HA.HD = HM.HF$.

Suy ra tứ giác $AMDF$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AODF$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{OAF} + \widehat{ODF} = 180^\circ$.

Mặt khác tam giác OAF cân tại O nên $\widehat{OAF} = \widehat{OFA}$.

Suy ra $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180^\circ$.

c) Ta có $\widehat{ATF} = \widehat{FAK}$ (cùng phụ với $\widehat{AKF}$). (3)

Lại có $\widehat{EAN} = 90^\circ$ nên EN là đường kính của (O).

Tứ giác $AEKN$ có hai đường chéo AK và NE bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $AEKN$ là hình chữ nhật. Suy ra $AE = NK$ hay $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{NK}$.

Ta có $\widehat{FAK}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{KN}+sđ\overset{\frown}{NF}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AE}+\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{NF}=\widehat{AHE}.$ $\quad(4)$

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{ATF}=\widehat{AHE}$, do đó tứ giác $ATFH$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AHT}=\widehat{AFT}=90^\circ$.

Ta có $AH\perp TH$ và $AH\perp BC$ nên $TH//BC.$

Câu 44. (Đề thi chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023 – 2024)

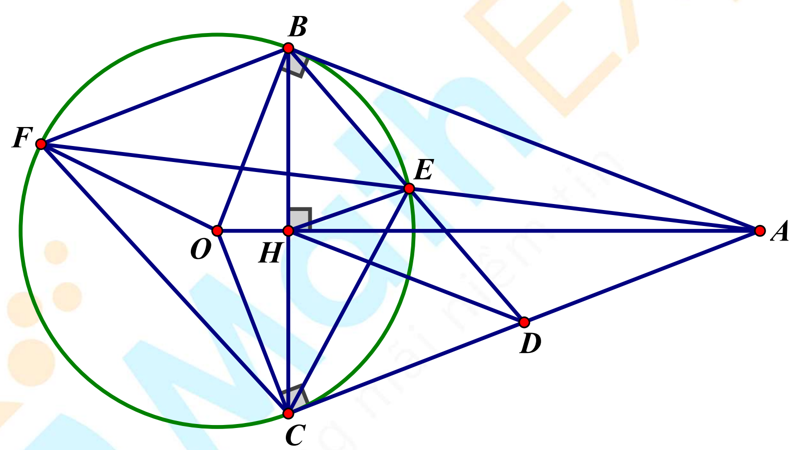
Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là $E.$

a) Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DA^2=DE.DB.$

c) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng $BF.$

Lời giải



a) Vì AB, AC là tiếp tuyến của $(O)\Rightarrow AO$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

ΔABC có D là trung điểm AC, H là trung điểm BC nên HD là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $HD//AB$

$\Rightarrow \widehat{HDE}=\widehat{ABE}=\widehat{BCE}=\widehat{HCE}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BE}\Rightarrow CDEH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét ΔDCE và ΔDBC có: $\widehat{EDC}$ chung; $\widehat{DCE}=\widehat{DBC}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BE}$

$\Rightarrow \Delta DCE\backsim\Delta DBC\ (g.g)\Rightarrow \frac{DC}{DB}=\frac{DE}{DC}\Rightarrow DC^2=DE.DB.$

Mặt khác $DA=DC$ nên $DA^2=DE.DB$.

c) Từ $DA^2 = DE.DB \Rightarrow \dfrac{DA}{DE} = \dfrac{DB}{DA}$

Xét hai tam giác DAE và tam giác DBA có: $\widehat{EDA}$ chung; $\dfrac{DA}{DE} = \dfrac{DB}{DA}$

$\Rightarrow \Delta DAE \backsim \Delta DBA\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{DBA} = \widehat{BFA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BE} \Rightarrow BF // AC.$

Mà $OC \perp AC$ nên $OC \perp BF$.

Mặt khác $OF = OB$ (bán kính của (O)) nên OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Câu 45. (Đề thi chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm 2023 – 2024)

1) Cho tam giác ABC vuông tại $A\ (AB < AC)$, có đường cao AH. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi J là giao điểm của AI và DE; K là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.

b) Gọi M là giao điểm của KI và AC, N là giao điểm của AH và ED. Chứng minh $AM = AN$.

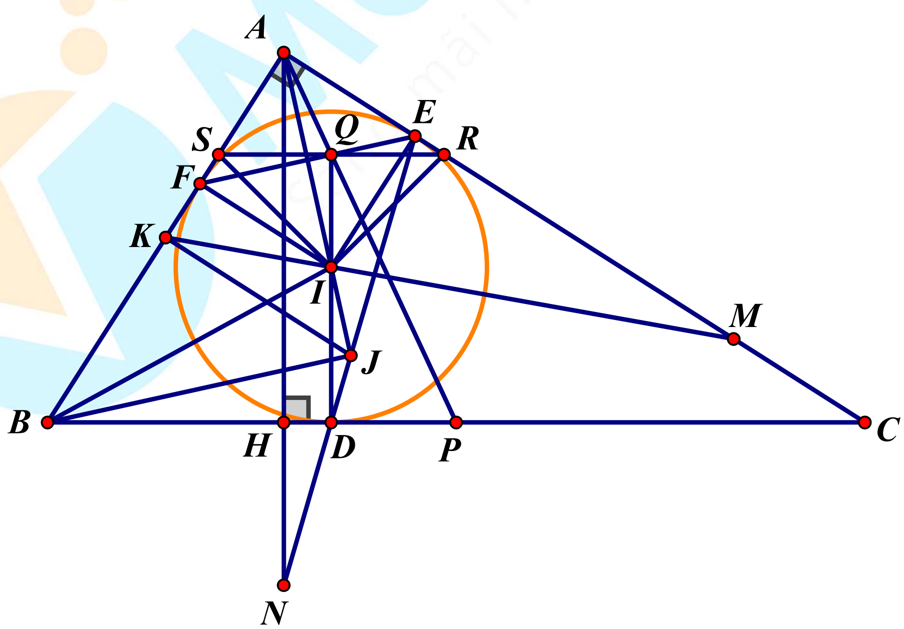
c) Gọi Q là giao điểm của DI và EF, P là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

2) Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O).

a) Chứng minh $CG.AH = AO^2$.

b) Chứng minh EH song song FG.

Lời giải



1a) Ta có $CD = CE$ nên tam giác CDE cân tại C. Suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{CED} = \dfrac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2}$.

Áp dụng tính chất góc ngoài trong tam giác AJE, ta có

$$\widehat{AJE} = \widehat{CEJ} - \widehat{EAJ} = \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{IBD}.$$

Suy ra tứ giác $BIJD$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $BIJD$ nội tiếp nên $\widehat{BJI} = \widehat{BDI} = 90^\circ$.

Vì $\widehat{AJB} = 90^\circ$ và $\widehat{JAB} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 45^\circ$ nên tam giác JAB vuông cân tại J.

Theo giả thiết K là trung điểm của AB, ta có $JK \perp AB$.

Chú ý rằng $IF // AM // JK$ (cùng vuông góc với AB) và $ID // AH$ (cùng vuông góc với BC), ta có

$$\frac{IF}{AM} = \frac{KI}{KM} = \frac{JI}{JA} = \frac{ID}{AN}.$$

Vì $IF = ID$ nên $AM = AN$.

c) Đường thẳng qua Q vuông góc với ID cắt AC, AB lần lượt lại R, S.

Vì $\widehat{IQR} = \widehat{IQS} = \widehat{IER} = \widehat{IFS} = 90^\circ$ nên các tứ giác $IQER$, $IQSF$ nội tiếp.

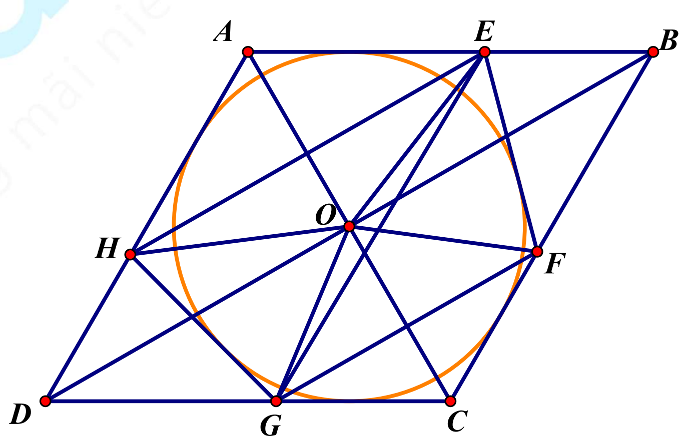
Chú ý rằng tam giác IEF cân tại I, ta có $\widehat{IRQ} = \widehat{IEQ} = \widehat{IFQ} = \widehat{ISQ}$. Suy ra, tam giác IRS cân tại I.

Do $IQ \perp RS$ nên Q là trung điểm của RS.

Ta có $RS // BC$ (cùng vuông góc với ID) và P, Q lần lượt là trung điểm của BC, RS nên A, P, Q thẳng hàng (theo bổ đề hình thang).

2a) Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh của hình thoi $ABCD$ nên O là trung điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta thấy O là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác DGH.



Suy ra $\widehat{GOH} = 180^\circ - \widehat{OGH} - \widehat{OHG}$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{DGH}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{DHG}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{DHG} + \widehat{DGH}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{GDH}}{2}.$$

Do tam giác DAC cân tại D nên $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = \dfrac{180^\circ - \widehat{ADC}}{2}$.

Kết hợp hai điều trên, ta thấy $\widehat{GOH} = \widehat{DAC} = \widehat{DCA}$.

Từ đó $\widehat{COG} = 180^\circ - \widehat{GOH} - \widehat{AOH} = 180^\circ - \widehat{OAH} - \widehat{AOH} = \widehat{AHO}$.

Suy ra $\Delta OAH \backsim \Delta GCO\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{OA}{GC} = \dfrac{AH}{CO} \Rightarrow AH.CG = OA.OC = OA^2$.

b) Chứng minh tương tự ý trên, ta có $AE.CF = OA^2 = AH.CG$.

Suy ra $\dfrac{AE}{CK} = \dfrac{AH}{CF}$. Chú ý rằng $\widehat{EAH} = \widehat{GCF}$, ta suy ra $\Delta AEH \backsim \Delta CGF\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{CGF}$.

Lại có $\widehat{AEG} = \widehat{CGE}$ (do $AB // CD$) $\Rightarrow \widehat{HEG} = \widehat{FGE}$.

Vậy $EH // FG$ (điều phải chứng minh).

Câu 46. (Đề thi chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2023 – 2024)

Cho tam giác tù ABC có $\widehat{ABC} > 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S. Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC = SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm E, F (E ở giữa S và F). Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ACS \backsim \Delta CBS$.

b) $\widehat{APS} = \widehat{PBS}$.

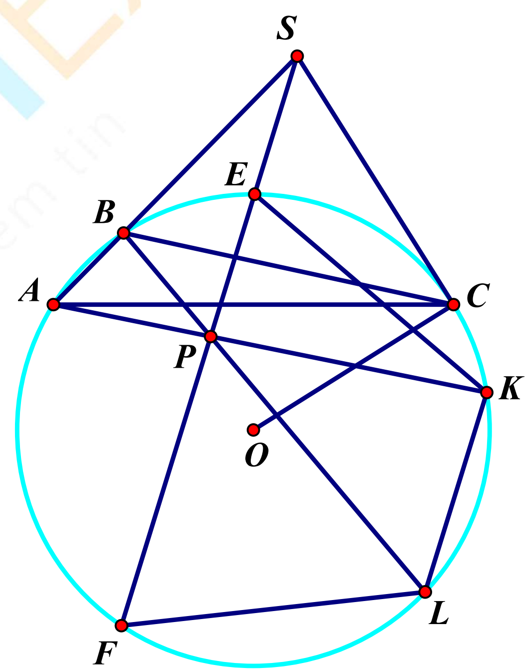
c) Tứ giác $EKLF$ là hình thang cân.

Lời giải

a) Xét tam giác ACS và tam giác CBS có:

$\widehat{ASC}$ chung; $\widehat{CAS} = \widehat{BCS}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \Delta ACS \backsim \Delta CBS\ (g.g)$.



b) Theo chứng minh câu a, ta có $\Delta ACS \backsim \Delta CBS$

$\Rightarrow \dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow SC^2 = SA.SB$.

Mà $SC = SP$ (giả thiết) nên $SP^2 = SA.SB$

$\Rightarrow \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{SB}{SP}$.

Xét tam giác SAP và tam giác SPB có

$\widehat{ASP}$ chung; $\dfrac{SP}{SA} = \dfrac{SB}{SP}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta SAP \backsim \Delta SPB\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{APS} = \widehat{PBS}$.

c) Theo chứng minh câu b, ta có $\Delta SAP \backsim \Delta SPB \Rightarrow \widehat{SAP} = \widehat{SPB}$.

Mặt khác $\widehat{SAP} = \widehat{BLK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$) và $\widehat{SPB} = \widehat{FPL}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{BLK} = \widehat{FPL}$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $PF // KL \Rightarrow EKLF$ là hình thang.

Mà $EKLF$ nội tiếp (O) nên $\overset{\frown}{EK} = \overset{\frown}{FL} \Rightarrow \overset{\frown}{EL} = \overset{\frown}{FK} \Rightarrow EL = FK$.

Vậy $EKLF$ là hình thang cân.

Câu 47. (Đề thi chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023 – 2024)

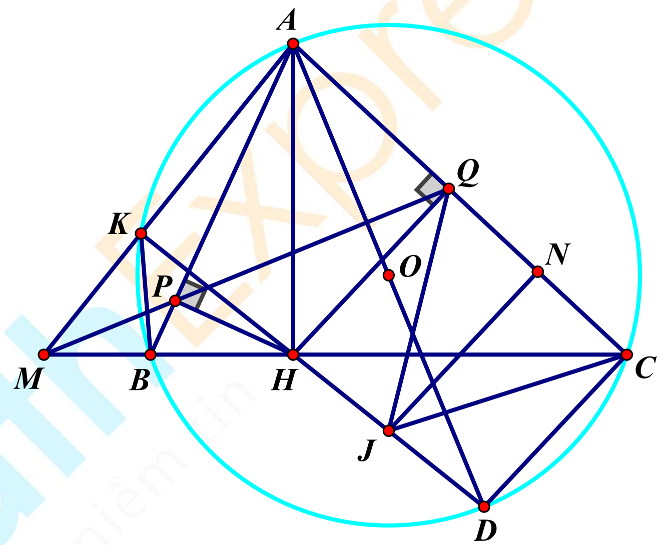
Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh $\widehat{PQH}=\widehat{BAH}$.

b) Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh $\Delta MQH \backsim \Delta MHP$ và $MH^2=MB.MC$.

c) Đường thẳng MA cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại K (K khác A). KH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại D (D khác K). Gọi J là trung điểm của HD. Chứng minh $JQ=JC$.

Lời giải



a) Xét tứ giác $APHQ$ có

$$\widehat{APH}+\widehat{AQH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$$

$\Rightarrow APHQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{PQH}=\widehat{BAH}$.

b) Ta có $\widehat{PQH}=\widehat{BHP}$. Mà $\widehat{BAH}=\widehat{BHP}$ (cùng phụ $\widehat{PBH}$) nên $\widehat{MQH}=\widehat{MHP}$.

Xét ΔMQH và ΔMHP có $\widehat{MQH}=\widehat{MHP}$;

$\widehat{PMH}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta MQH \backsim \Delta MHP\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{MH}=\dfrac{MH}{MP}\Rightarrow MH^2=MP.MQ. \quad \left(1\right)$

Chứng minh được tứ giác $BPQC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MBP}=\widehat{MQC}$ (cùng bù $\widehat{PBC}$).

Ta lại có $\widehat{BMP}$ là góc chung $\Rightarrow \Delta MBP \backsim \Delta MQC\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{MP}{MC}\Rightarrow MH^2=MP.MQ. \qquad \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$, suy ra $MH^2=MB.MC$.

c) Vì $AKBC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MKB}=\widehat{MCA}$ (cùng bù với $\widehat{AKB}$).

Mà $\widehat{AMC}$ là góc chung nên $\Delta MKB \backsim \Delta MCA\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{MK}{MC}=\dfrac{MB}{MA}\Rightarrow MK.MA=MB.MC$.

Mặt khác $MH^2=MB.MC\Rightarrow MH^2=MB.MC\Rightarrow MH^2=MK.MA$.

Do ΔAHM vuông tại H nên HK là đường cao của tam giác AHM (vì $\Delta MHA \backsim \Delta MKH$

$\Rightarrow AK\perp KH\Rightarrow AK\perp KD\Rightarrow AD$ là đường kính của $\left(O\right)$.

Suy ra $\widehat{ACD}=90^\circ$ nên $DC\perp AC$.

Mà $HQ\perp AC\Rightarrow DC /\!/ HQ$ nên $HQCD$ là hình thang.

Gọi N là trung điểm của $QC\Rightarrow JN$ là đường trung bình của hình thang $HQCD$

$\Rightarrow JN // HQ \Rightarrow JN \perp QC.$

Suy ra JN là đường trung trực của $QC \Rightarrow JQ = JC.$

Câu 48. (Đề thi chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2023 – 2024)

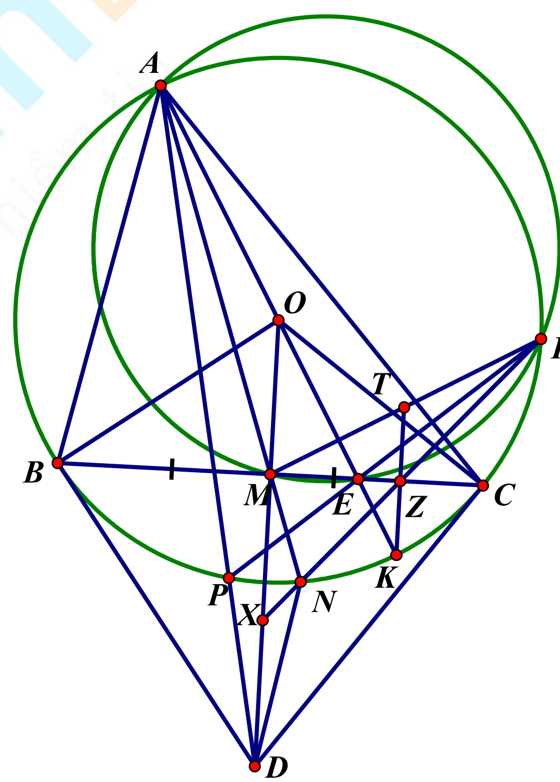
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm E. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm N $(N \neq A)$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm B, C cắt nhau tại điểm D.

a) Chứng minh $AOND$ là tứ giác nội tiếp và tia DO là phân giác của $\widehat{ADN}$.

b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm P $(P \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME cắt đường tròn (O) tại điểm F $(F \neq A)$. Chứng minh $AB.PC = AC.PB$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh 3 điểm D, K, F thẳng hàng và đường thẳng FN đi qua trung điểm của đoạn thẳng DM.

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có $BD \perp BO$, $CD \perp CO$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{DBO} = \widehat{DCO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBO} + \widehat{DCO} = 180^\circ$

$\Rightarrow OBDC$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $OB = OC$, $MB = MC$, $DB = DC$

$\Rightarrow O, M, D$ cùng thuộc trung trực của đoạn BC.

Suy ra $MO.MD = MB.MC$.

Mà tứ giác $ABNC$ nội tiếp nên $MB.MC = MA.MN$

$\Rightarrow MO.MD = MA.MN \Rightarrow AOND$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ON} = \widehat{ODN}$

$\Rightarrow DO$ là phân giác của $\widehat{ADN}$.

b) Xét ΔDBP và ΔDAB có $\widehat{BDP}$ chung; $\widehat{DBP} = \widehat{DAB}$

$\Rightarrow \Delta DBP \backsim \Delta DAB\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AD}{DB}$.

Tương tự, ta có $\Delta DCP \backsim \Delta DAC \Rightarrow \dfrac{AC}{CP} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AC}{CP} \Rightarrow AB.CP = AC.BP$.

Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác $ABPC$ nội tiếp ta có $AP.BC = AB.CP + AC.BP$

$\Rightarrow 2AP.CM = 2AC.BP \Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{BP}{CM}$.

Xét ΔABP và ΔAMC có $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{BP}{CM}$; $\widehat{APB} = \widehat{ACM}$

$\Rightarrow \Delta ABP \backsim \Delta AMC\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{AMC}$.

Lại có tứ giác $ABPF$ nội tiếp nên $\widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{AFP}$.

Vì tứ giác $AMEF$ nội tiếp nên $\widehat{AME} = 180^\circ - \widehat{AFB}$

$\Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{AFE} \Rightarrow E,\ F,\ P$ thẳng hàng.

c) Áp dụng hệ thức lượng cho ΔOCD vuông tại C, ta có $OM.OD = OC^2 = OF^2$

$\Rightarrow \dfrac{OF}{OM} = \dfrac{OD}{OF} \Rightarrow \Delta OMF \backsim \Delta OFD\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OFD} = \widehat{OMF} = 90^\circ - \widehat{CMF} = 90^\circ - \widehat{FAE} = 90^\circ - \widehat{AFO}$

$\Rightarrow AFD = 90^\circ \Rightarrow AF \perp FD$.

Mà $AF \perp FK$ nên $D,\ F,\ K$ thẳng hàng

Gọi $Z,\ X$ lần lượt là giao điểm của FN với $BC,\ DM$.

Gọi T là giao điểm của KZ với MF.

Ta có $DC^2 = DK.DF = DM.DO \Rightarrow OMKF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KMF} = \widehat{KOF} = 2\widehat{OAF} = 2\widehat{FMS}$

$\Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{FME} = \widehat{FAO} = \widehat{KNF} \Rightarrow MNKZ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KZM} = 180^\circ - \widehat{MNK} = 90^\circ \Rightarrow KZ // DM$.

Lại có ΔTMK có MZ là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow ZT = ZK$.

Do $TK // DM$ nên $\dfrac{ZT}{MX} = \dfrac{FZ}{FX} = \dfrac{ZK}{DX}$

$\Rightarrow XD = XM \Rightarrow X$ là trung điểm của DM.

Vậy FN đi qua trung điểm của đoạn thẳng DM.

Câu 49. (Đề thi vòng 1 chuyên Khoa học Tự nhiên Hà Nội năm 2023 – 2024)

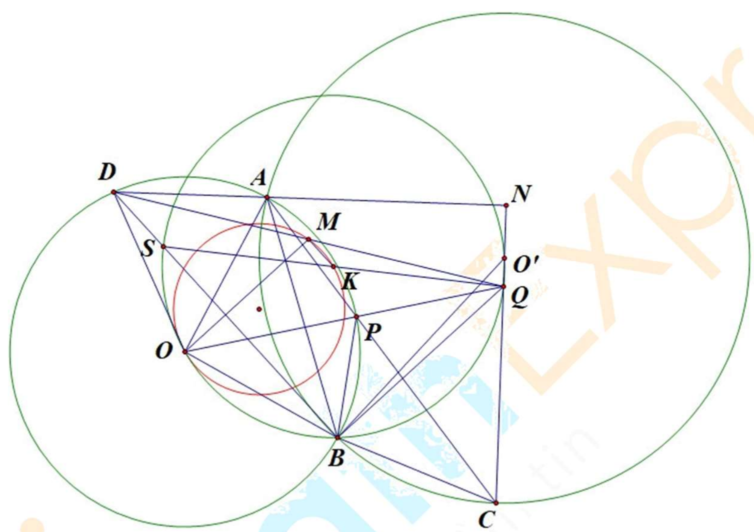
Cho hai đường tròn (O) và (O') cố định cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AP cắt (O') tại C khác A.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng $\widehat{QBC}+\widehat{ABP}=90^\circ$.

3) Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc $O'C$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Lời giải



1) Ta có: $\widehat{POB}=2\widehat{PAB}=\widehat{BO'C}$ nên hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Từ câu 1) ta thu được $\widehat{OPB}=\widehat{O'CB}$ nên tứ giác $BPQC$ nội tiếp. Suy ra

$$\widehat{QBC}=\widehat{QPC}=\widehat{APO}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{AOP}=90^\circ-\widehat{ABP}.$$

3) CQ cắt AD tại N. M là trung điểm của DQ.

Ta có: $\widehat{BQC}=\widehat{BPC}=\widehat{BAN}$ nên tứ giác $DNQB$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DBQ}=90^\circ$.

Suy ra $MD=MB=MQ$, ta thu được $OM\perp BD$.

Từ câu 1) ta cũng có $\widehat{BOQ}=\widehat{BO'Q}$ nên tứ giác $BOO'Q$ nội tiếp (K).

Kẻ đường kính QS của (K) thì D, S, B thẳng hàng.

Ta có $MK // DS$ nên $\widehat{OMK}=90^\circ$. Do O, B, O' cố định nên K cố định.

Vậy M chuyển động trên đường tròn đường kính OK cố định.

Câu 50. (Đề thi vòng 2 chuyên Khoa học Tự nhiên Hà Nội năm 2023 – 2024)

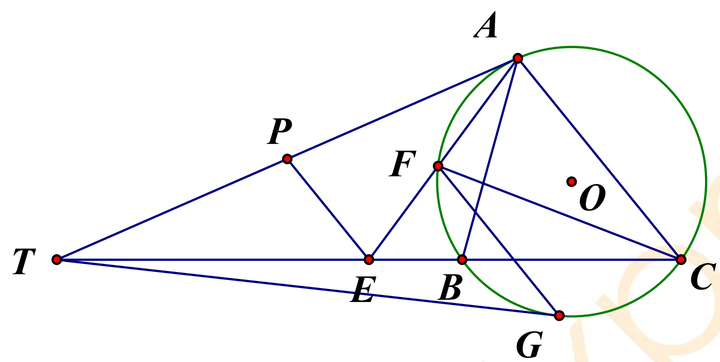
Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB>BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F. Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm của BC. K đối xứng với A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho $NS \perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR \cdot AH = AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ \perp AS$ và $SQ \perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN.

Lời giải



1) Vì AT là tiếp tuyến của (O) nên ta được $TA^2 = TB.TC$.

Như vậy, ta được $TP.TA = \frac{1}{2}TA^2 = \frac{1}{2}TB.TC = TB.TE$.

Do đó, tứ giác $APEB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Vì EP là đường trung bình của ΔTAC, $AFGC$ là hình thang cân và AT là tiếp tuyến của (O) nên ta thu được $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = \widehat{GCA} = \widehat{TAG}$ và $\widehat{GAC} = \widehat{FCA} = \widehat{TAF} = \widehat{PAE}$.

Như vậy, ta được $\Delta AEP \backsim \Delta ACG\ (g.g)$ và dẫn đến $\frac{AE}{AC} = \frac{AP}{AG}$.

Lại chú ý rằng $AT = 2AP$ và $AC = 2EP$, ta thu được $\frac{AE}{EP} = \frac{2AE}{AC} = \frac{2AP}{AG} = \frac{AT}{AG}$.

Kết hợp với $\widehat{AEP} = \widehat{TAG}$ ta thu được $\Delta AEP \backsim \Delta TAG\ (c.g.c)$.

Do đó, $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3) Gọi AY là đường kính của (O), L và Y_1 là giao của AY với QS và KN. Theo tính chất quen thuộc ta có M là trung điểm của HY nên theo bổ đề hình thang ta được N là trung điểm của KY_1

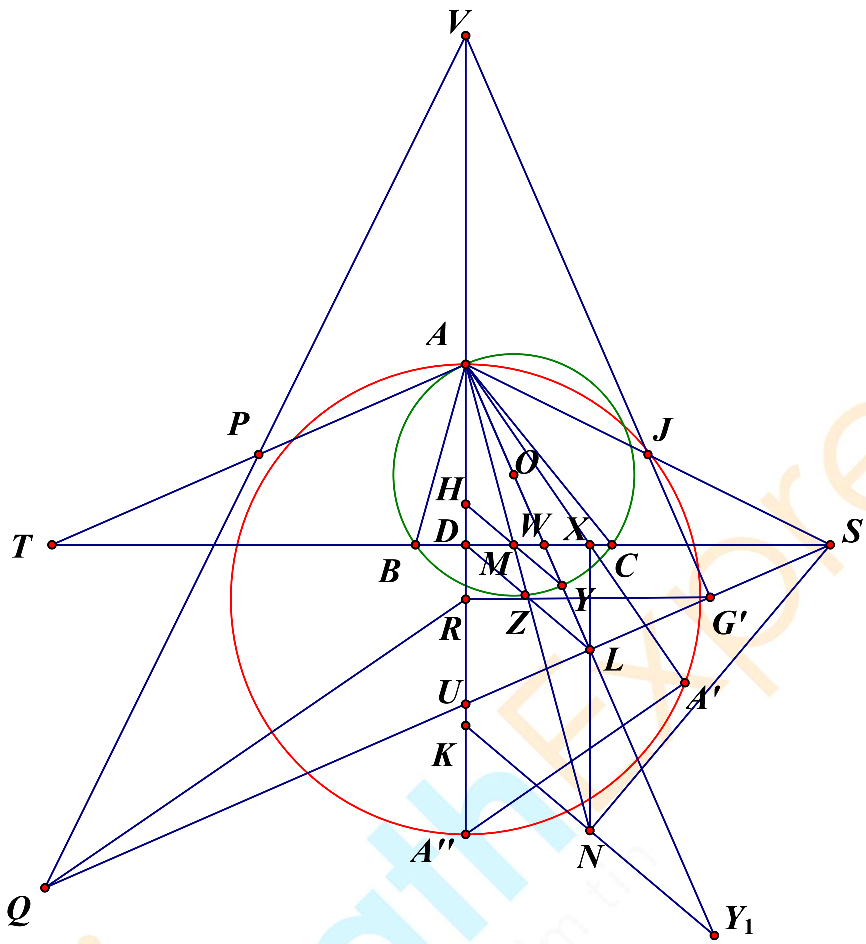
Vì $SN \perp KY_1$ và SD là đường trung trực của AK nên S là tâm ngoại tiếp của tam giác AKY_1.

Vì $QS \perp AO$ nên $AY_1 \perp SL$ là S là tâm (AKY_1) nên L là trung điểm AY_1. Theo tính chất đường trung bình ta được $DN // AO$ và $NL // AD$ suy ra tứ giác $ADNL$ là hình bình hành.

Gọi Z là giao điểm của DL và AN thì ta được Z là trung điểm của AN và DL.

Gọi A'' đối xứng của A qua R, X là giao điểm của NL với BC, A' là giao của AX với (R) thì $XA' \perp A'A''$ nên A' thuộc đường tròn (DN).

Áp dụng định lý Thales ta được: $\dfrac{AD}{AA''}=\dfrac{AD}{2AR}=\dfrac{AH}{2AD}=\dfrac{AM}{2AZ}=\dfrac{AM}{AN}$.



Theo định lý Thales đảo ta suy ra $NA''//DM$ nên $NA''\perp DA''$ suy ra $DXNA$ là hình chữ nhật và D, X, A'', N thuộc (DN).

Gọi U, V lần lượt là giao điểm của QS và QP với AH; W là giao của AO và BC.

Ta có: $\Delta QUV \backsim \Delta AWS\,(g.g)$ (do 2 tam giác này có các cặp cạnh tương ứng vuông góc).

Từ V kẻ $VG'\perp QS$ vì $SQ//AT$ nên $VG'\perp AT$.

Vì đường qua T vuông góc với AS và đường qua S vuông góc với AT đồng quy tại trực tâm tam giác ATS trên AH nên VG' phải đi qua trung điểm J của AS.

Mặt khác $JG'//AL$ (cùng vuông góc với QS nên G' là trung điểm LS)

Theo tính chất đường trung bình của tam giác $\Delta ANA''$, ΔDLS ta được $G'Z//DS$, $RZ//NA''$ mà $NA''//DS$ nên G', Z, R thẳng hàng và $G'R\perp VU$.

Vì $\Delta VG'U \backsim \Delta SLW\,(g.g)$ $\left(\widehat{VG'U}=\widehat{WLS}=90^\circ \text{ và } \widehat{VUG'}=\widehat{LWS}\right)$ vì LX và $G'R$ là hai đường cao tương ứng của hai tam giác này nên từ tính tương ứng của đồng dạng ta được $\dfrac{VR}{RU}=\dfrac{WX}{XS}$.

Từ đây kết hợp với $\Delta QUV \backsim \Delta AWS\,(g.g)$ ta được $\Delta QUR \backsim \Delta AWX\,(c.g.c)$ suy ra QR vuông góc với AX.

Vì $QR \perp AA'$ mà R thuộc đường trung trực của AA' nên A và A' đối xứng nhau QR.
Vậy điểm đối xứng của A qua QR là A' thuộc (DN).

Câu 51. (Đề thi vòng 1 chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2023 – 2024)

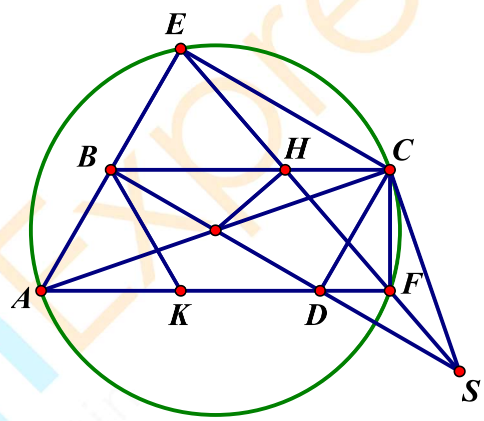
Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120°$, $BC = 2AB$. Dựng đường tròn tâm O đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Gọi K là trung điểm của đoạn AD

Ta có tam giác ABK đều (do $AB = AK = a$ và $\widehat{BAK} = 60°$)

Suy ra $\widehat{ABK} = 60°$ (1)

Tam giác KBD cân tại K và $\widehat{BKD} = 120°$

Suy ra $\widehat{KBD} = 30°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABD} = 90°$

Vậy tam giác ABD là tam giác vuông tại B.

b) Do đó $OB \perp AE$ và $OA = OE$, suy ra B là trung điểm của AE.

Xét tam giác EAF có B là trung điểm của AE và $BH // AF$ nên H là trung điểm của EF.

Suy ra $OH \perp EF$.

Tứ giác $BEHO$ có $\widehat{OBE} = \widehat{OHE} = 90°$ tứ giác $BEHO$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{CHS} = \widehat{BHE}$. Do tứ giác $BEHO$ nội tiếp nên $\widehat{BHE} = \widehat{BOE} = \widehat{BOA} = \widehat{COS}$.

Suy ra $\widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90°$. Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

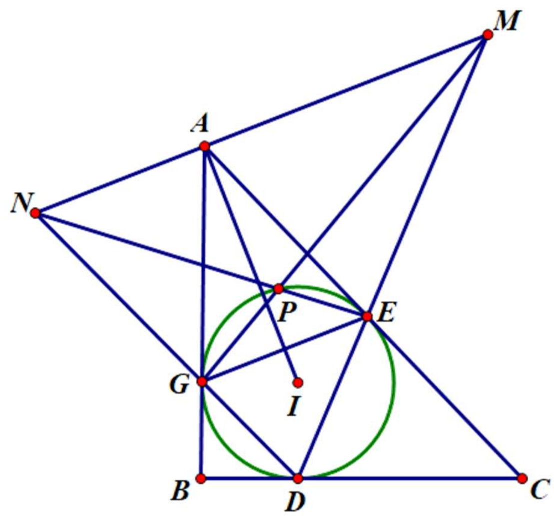
Câu 52. (Đề thi chuyên vòng 2 Sư Phạm Hà Nội năm 2023 – 2024)

Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G. Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N. Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P. Chứng minh:

a) $EG // MN$.

b) Điểm P nằm trên đường tròn (I).

Lời giải



a) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác trong của góc BAC. Mà AM là phân giác ngoài của góc BAC nên $MN \perp AI$

Do AE, AG là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $EG \perp AI$. Vậy $EG \perp AI$

b) Ta có $\widehat{GDE} = \widehat{GEA}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung)

Mà $\widehat{GEA} = \widehat{EAM}$ (so le trong) suy ra $\widehat{GDE} = \widehat{EAM}$. Do đó tứ giác $AEDN$ nội tiếp. Vì thế $\widehat{NED} = \widehat{NAD}$.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $AGDM$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{MGD}$.

Ta có $\widehat{DEP} + \widehat{DGP} = \widehat{DEN} + \widehat{MGD} = \widehat{NAD} + \widehat{MAD} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $DEPG$ nội tiếp.

Vậy điểm P nằm trên đường tròn (I).