TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh An Giang năm học 2023 – 2024)

1) Phương trình $x^2+ax+b=0$ (với $a; b$ là các số nguyên) có một nghiệm là $5+\sqrt{21}$. Tính nghiệm còn lại.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3} \\ x+y=2 \end{cases}$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 – 2024)

1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{b-4c}{a}\ge\dfrac{1}{4}$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm âm.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0 \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1 \end{cases}$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008.$

2) Giải phương trình $4\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7.$

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases}$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Yên Bái năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^2=x+2+2\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y)=20 \\ x^2+2x+3y=12 \end{cases}$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Dương năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để biểu thức $P=\dfrac{2023(2x_1x_2+1)}{x_1^2-2mx_2-1-2m}$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Giải phương trình: $4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x.$

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình: $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x+6y=2023|xy|\\x-2y=3xy\end{cases}$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x}\\x+y-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4y}{x^2}\end{cases}$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2023 – 2024)

1) Giải hệ phương trình $\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+y^3=7\\(x+y)(4+3xy)=-2\end{cases}$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Gia Lai năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(y+2)+2=5y\\(xy-1)^2+3(1-y^2)=0\end{cases}$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $5x^2+mx-28=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $5x_1+2x_2=1$.

2) Giải phương trình: $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$.

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0\\4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1}\end{cases}$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Thuận năm học 2023 – 2024)

Giải phương trình $9x^2-53x=\sqrt{2x+1}-71$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Cần Thơ năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình: $x^2+1=2x+\sqrt{3x-1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+y^2-3xy-x+y=0\\x^2-2x-y+2=0\end{cases}$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-4}=3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x|+y^2=10\\2|x|-3y^2=-25\end{cases}$.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Đà Nẵng năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $10x^2+3x+2=(6x+1)\sqrt{x^2+2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-y)\sqrt{x-2}=x(y-x+2) \\ (y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2} \end{cases}$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $(x-2)(x+1)(x+3)(x+6)+56=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ (x+1)(y+1)=6 \end{cases}$.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đắk Lắk năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0 \\ (3x^2+18x-2xy+6y-y^2)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0 \end{cases}$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \end{cases}$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Giải phương trình $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)(2-y)=8 \\ \sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy \end{cases}$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 chuyên tỉnh Đồng Tháp năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(3y+1)-y=3 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hải Dương năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x-1}=2x+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x}}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases}$.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hải Phòng năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(3x^2+4x+6\right)\sqrt{3x^2+4x+5}=27x^3+3x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\\ y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2\left(x+1\right)\sqrt{x}\end{cases}$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hoà Bình năm học 2023 – 2024)

1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=3m-3\\ mx+y=2m-2\end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)$, trong đó x; y là các số nguyên.

2) Giải phương trình: $\left(4x^2-7x+4\right)\left(3x^2-4x+3\right)=3x^2$.

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(2-x\right)\sqrt{1-x}-y\sqrt{y-1}=0\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=3\end{cases}$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hưng Yên năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0\end{cases}$.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 – 2024)

Cho phương trình $x^2+bx-7+2b=0$ $\left(1\right)$ (ẩn x), với b là tham số nguyên.

a) Chứng minh phương trình $\left(1\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm b để $x_2^2=9x_1$.

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình $\left(1\right)$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2023 – 2024)

Cho phương trình $x^2-\left(m-4\right)x-m-2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{{x_1}^2+2023}+x_1\left(m-8-x_1\right)=\sqrt{{x_2}^2+2023}+x_2\left(m-x_2\right).$$

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Long An năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $4x_1+3x_2=1$.

2) Giải phương trình $x^2-5x+2+\left(3-2x\right)\sqrt{x^2+x+2}=0$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lai Châu năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0\end{cases}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (Khối tự nhiên) năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2-\left(2m+1\right)x+4m-2=0$ $\left(1\right)$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.

2) Giải phương trình $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x}\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2}\end{cases}$.

4) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=xy+x-y+2\\ x^3+y^3=y(x+y+4)+x\end{cases}$.

5) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x+5}+2x=\sqrt{2y+5}+y\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2}\end{cases}$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (Khối xã hội) năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m=0$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=13$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x+9}$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x}\\ \left(2-\sqrt{x+y}\right)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3x}\end{cases}$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 trường Đại học Vinh tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^3-2x^2+x-5(x-1)\sqrt{x}-6=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x+y=x^2y^2-15\\ 2x+3y=3x^2y^2-13xy-6\end{cases}$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)\end{cases}$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-8=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+6=\sqrt{x_2}$.

22) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=1-y+\sqrt{y^2+3} \\ y^2-2(x-2)=3\sqrt{(y+1)(y^2+2x)} \end{cases}$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(x-\sqrt{3}\right)^3+\left(x+\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^3=0$.

2) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $2a-b+c=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (xy)^3+3xy^3+2=6y^2 \\ 3xy^3=y^2+2 \end{cases}$.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases}$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Sơn La năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x-5}=7$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=x+2y \\ x^3+2x^2y=x^2+y^2-1 \end{cases}$.

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $3x^2+x-6=4x\left(\sqrt{5x-6}-1\right)$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) \end{cases}$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hoá năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2(3x+1)+\dfrac{7}{x}=5\sqrt{2x+7}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3y^2+3x-6y-4=0 \\ x^2-3x-2y+\sqrt{3x+y+5}=0 \end{cases}$.

Bài 41. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2023 – 2024)

1) Tìm m để phương trình $x^2-2(m-1)x-m^2+2m-3=0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2+1}-x_1=\sqrt{x_2^2+1}+x_2$.

2) Giải phương trình $2\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=9$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2y-3}+2y^2+4y=0 \\ x^2+1=xy \end{cases}$.

Bài 42. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2x^2+2x-1=3x\sqrt{2x-1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2x+4y \\ 2x^3+y^3=3x+3y \end{cases}$.

Bài 43. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chính Minh năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x=\dfrac{5}{x-1}+2\sqrt{x-2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9y+49}{x+y}+x+y=23 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=7\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \end{cases}$.

Bài 44. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tuyên Quang năm học 2023 – 2024)

Cho phương trình $x^4-4x^2+m+2=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=-7$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=2x_1x_2x_3x_4.$$

Bài 45. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-5x+3m+1=0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$.

Bài 46. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$.

2) Giải phương trình $x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7}$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14 \end{cases}$.

Bài 47. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2x+1+2\sqrt{4x^2+6x}=4\sqrt{5x-x^2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=30+\sqrt{x+y+120} \end{cases}$.

Bài 48. (Đề thi vào 10 trường chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0\ \ (1)$ (m là tham số). Chứng minh với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1,x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2xy-x=10\\x+y+xy=11\end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh An Giang năm học 2023 – 2024)

1) Phương trình $x^2+ax+b=0$ (với $a;b$ là các số nguyên) có một nghiệm là $5+\sqrt{21}$. Tính nghiệm còn lại.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3} \\ x+y=2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$. $\quad(1)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1=5+\sqrt{21}$ và x_2 là nghiệm còn lại.

Thay $x=x_1=5+\sqrt{21}$ vào (1) ta được: $\left(5+\sqrt{21}\right)^2+a\left(5+\sqrt{21}\right)+b=0$

$$\Leftrightarrow 46+10\sqrt{21}+5a+\sqrt{21}a+b=0 \Leftrightarrow (a+10)\sqrt{21}+(5a+b+46)=0.$$

Vì $a;b$ là các số nguyên nên ta có hệ: $\begin{cases} a+10=0 \\ 5a+b+46=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=-46-5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=4 \end{cases}$.

Suy ra phương trình (1) là $x^2-10x+4=0$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=10 \Rightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)+x_2=10 \Rightarrow x_2=5-\sqrt{21}$.

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là $x=5-\sqrt{21}$.

2) Ta có: $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3} & (1) \\ x+y=2 & (2) \end{cases}$

Trừ hai phương trình (1) và (2) theo vế ta được: $\left(\sqrt{3}-1\right)y=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow y=\sqrt{3}-1.$

Thay vào (2), ta được: $x=2-y=2-\left(\sqrt{3}-1\right)=3-\sqrt{3}.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(3-\sqrt{3};\sqrt{3}-1\right)$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 – 2024)

1) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{b-4c}{a}\geq\dfrac{1}{4}$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm âm.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0 \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1 \end{cases}$.

Lời giải

1) Từ giả thiết ta có: $a\neq 0$ và $\dfrac{a-4b+16c}{a}\leq 0$

$\Rightarrow a(a-4b+16c)\le 0 \Rightarrow (a-2b)^2 \le 4(b^2-4ac) \Rightarrow \Delta \ge 0.$

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 mà $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ và $x_1.x_2=\frac{c}{a}$.

Đến đây thay vào giả thiết ta thu được: $-(x_1+x_2)-4x_1x_2 \ge \frac{1}{4} \Rightarrow (4x_1+1)(4x_2+1)\le 0$.

Nếu x_1, x_2 đều không âm thì dẫn đến điều vô lý.

Do đó phương trình phải có ít nhất một nghiệm âm.

b) Điều kiện: $x^2-y-1\ge 0$. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1 & (2) \end{cases}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (y-2x)(y+x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=1-x \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $y=2x$ thay vào (2), ta được:

$$\sqrt{x^2-2x-1}=1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ x^2-2x-1=1-6x+9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 8x^2-4x+2=0 \end{cases} \text{(vô nghiệm).}$$

Trường hợp 2: Với $y=1-x$ thay vào (2), ta được: $\sqrt{x^2+x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $S=\{(1;0);(-2;3)\}$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$.

2) Giải phương trình $4\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7$.

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta'>0 \Rightarrow (3m-1)^2-(m^2-m-4)>0 \Leftrightarrow 8m^2-5m+5>0 \Leftrightarrow 8\left(m-\frac{5}{16}\right)^2+\frac{135}{32}>0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(3m-1) \\ x_1x_2=m^2-m-4 \end{cases}$.

Đặt $A=x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}$; $B=x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}$.

Ta có A.B = $(x_1+x_2)^2-x_1x_2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}>0,\ \forall x_1;x_2$.

Suy ra A và B luôn cùng dấu. Do đó $|A|+|B|=|A+B|$.

Suy ra $\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$

$\Rightarrow \left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}+x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$

$\Leftrightarrow |x_1+x_2|=1004 \Leftrightarrow 2|3m-1|=1004 \Leftrightarrow |3m-1|=502 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{503}{3} \\ m=-167 \end{array}\right.$.

Vậy $m\in\left\{\dfrac{503}{3};-167\right\}$ là các giá trị cần tìm.

2) Điều kiện $x\ge 1$.

Ta có $4\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7 \Leftrightarrow x+3-4\sqrt{x+3}+4+\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2+\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+3}=2\\ \sqrt{x-1}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

3) $\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ \left(x^4-4x^3y+4x^2y^2\right)+x^2-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ \left(x^2-2xy\right)^2+x^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ (2-x)^2-x^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \quad (*) \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}.$

Với $x=0$, thay vào $(*)$ ta được $0=2$ (vô lý).

Với $x=2$, thay vào $(*)$ ta được $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Yên Bái năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^2=x+2+2\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y)=20 \\ x^2+2x+3y=12 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có: $x^2=x+2+2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-x-2-2\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x-3\right)+\left(x+1-2\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)+\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left[\sqrt{x+1}(x-3)+\left(\sqrt{x+1}-2\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=0 \\ \sqrt{x+1}(x-3)+\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Trường hợp 2: $\sqrt{x+1}(x-3)+\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(x-3)+\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)=0.$$

Vì $\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}>0$ với mọi $x\ge -1$ nên $x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{-1;3\}$.

2) $\begin{cases} x(x+1)(x+3y)=20 \\ x^2+2x+3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(x+3y)=20 \\ (x^2+x)+(x+3y)=12 \end{cases}.$

Đặt $\begin{cases} x^2+x=a \\ x+3y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=20 \\ a+b=12 \end{cases}$. Khi đó a, b là nghiệm của phương trình

$$t^2-12t+20=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=10 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=10 \end{cases} \\ \begin{cases} a=10 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x=2 \\ x+3y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x=10 \\ x+3y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x+3y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{2} \\ x+3y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{2} \\ y=\dfrac{5\mp\sqrt{41}}{6} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$(x;y)=\left\{(-2;4);(1;3);\left(\frac{-1-\sqrt{41}}{2};\frac{5+\sqrt{41}}{6}\right);\left(\frac{-1+\sqrt{41}}{2};\frac{5-\sqrt{41}}{6}\right)\right\}.$$

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Dương năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để biểu thức $P=\dfrac{2023(2x_1x_2+1)}{x_1^2-2mx_2-1-2m}$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Giải phương trình: $4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x.$

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2+2mx-1-2m=0.$ $\quad(1)$

a) Ta có: $\Delta'=m^2+2m+1=(m+1)^2\ge 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Với mọi m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = -2m - 1 \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên $x_1^2 + 2mx_1 - 1 - 2m = 0 \Rightarrow x_1^2 - 1 - 2m = -2mx_1$.

Khi đó: $P = \dfrac{2023(2x_1x_2 + 1)}{x_1^2 - 2mx_2 - 1 - 2m} = \dfrac{2023(2x_1x_2 + 1)}{-2mx_1 - 2mx_2} = \dfrac{2023(2x_1x_2 + 1)}{-2m(x_1 + x_2)}$

$\Rightarrow P = \dfrac{2023\left[2(-2m - 1) + 1\right]}{-2m.(-2m)} = \dfrac{2023(-4m - 1)}{4m^2} \Rightarrow \dfrac{P}{2023} = \dfrac{-4m - 1}{4m^2}$ (điều kiện: $m \neq 0$)

Xét $\dfrac{P}{2023} - 1 = \dfrac{-4m - 1}{4m^2} - 1 = -\dfrac{4m^2 + 4m + 1}{4m^2} = -\dfrac{(2m + 1)^2}{4m^2} \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{P}{2023} - 1 \le 0 \Leftrightarrow P \le 2023.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy với $m = -\dfrac{1}{2}$ thì P đạt giá trị lớn nhất bằng 2023.

2) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{3}$.

Ta có: $4x^2 + 5 + \sqrt{3x + 1} = 13x \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 5 = -\sqrt{3x + 1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 5 \le 0 \\ (4x^2 - 13x + 5)^2 = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 5 \le 0 \\ 16x^4 - 104x^3 + 209x^2 - 133x + 24 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 5 \le 0 \\ (4x^2 - 11x + 3)(4x^2 - 15x + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11 + \sqrt{73}}{8} \\ x = \dfrac{15 - \sqrt{97}}{8} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{11 + \sqrt{73}}{8}; \dfrac{15 - \sqrt{97}}{8}\right\}$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình: $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 6y = 2023|xy| \\ x - 2y = 3xy \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{4}$.

Ta có $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1} \Leftrightarrow 2x + 3 + \sqrt{(x + 2)(4x + 1)} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1}$.

Đặt $t=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}\left(t\ge\sqrt{7}\right)$

$$\Rightarrow t^2=8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9\Rightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=\frac{t^2-9}{4}.$$

Phương trình đã cho trở thành $\frac{t^2-9}{4}+3=t\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $t\ge\sqrt{7}$ ta được $t=3$.

Với $t=3$ thì $2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3\Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)(4x+1)}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\(x+2)(4x+1)=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{2}{9}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{2}{9}$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases}6x+6y=2023|xy|\\x-2y=3xy\end{cases}$. $\quad(1)$

Nếu $xy>0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{y}+\frac{6}{x}=2023\\\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{2032}{9}\\\frac{1}{x}=\frac{2005}{18}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{18}{2005}\\y=\frac{9}{2032}\end{cases}$ (thoả mãn $xy>0$).

Nếu $xy<0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{y}+\frac{6}{x}=-2023\\\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=-\frac{2014}{9}\\\frac{1}{x}=-\frac{2041}{18}\end{cases}$ (loại, vì không thỏa mãn $xy<0$).

Nếu $xy=0$ thì từ (1) ta suy ra $x=y=0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\left\{(0;0);\left(\frac{18}{2005};\frac{9}{2032}\right)\right\}$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x}\\x+y-\frac{4}{x}=\frac{4y}{x^2}\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định $x\ge 2$.

Ta có: $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)$$

$\Leftrightarrow 8\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+4x-12}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)^2=\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+x^2+4x-12+2\sqrt{x^2+4x-12}=x+6+x-2+2\sqrt{x^2+4x-12}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $x\geq 2$, ta được $x=3$ thoả mãn.

2) Điều kiện xác định: $x^2+y^2\neq 0$.

Ta có $x+y-\frac{4}{x}=\frac{4y}{x^2} \Leftrightarrow x+y=\frac{4}{x^2}(x+y) \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{4}{x^2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ \frac{4}{x^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

- Với $x=-y$, thay vào phương trình $x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x}$, ta được $\frac{1}{y}=-\frac{9}{y}\Rightarrow \frac{10}{y}=0$ (vô lý).
- Với $x=2$, thay vào phương trình $x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x}$, ta được $y+\frac{1}{y}=\frac{9}{2}-2$

  $\Rightarrow 2y^2-5y+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{array}\right.$ (thoả mãn).
- Với $x=-2$, thay vào phương trình $x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x}$, ta được $y+\frac{1}{y}=-\frac{9}{2}+2$

  $\Rightarrow 2y^2+5y+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;2);(-2;-2);\left(2;\frac{1}{2}\right);\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2023 – 2024)

1) Giải hệ phương trình $\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện $x\geq\frac{1}{4}$.

Ta có: $\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x-1}-2\right)+\sqrt{4x+1}\left(\sqrt{4x-1}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x-1}-2\right)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)=0$.

Với $x\geq\frac{1}{4}$ thì $\sqrt{4x+1}+1>0$.

Do đó $\sqrt{4x-1}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x-1}=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{5}{4}$.

2) Ta có: $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=7 \\ 4(x+y)+3xy(x+y)=-2 \end{cases}$.

Suy ra $(x+y)^3+4(x+y)-5=0 \Leftrightarrow (x+y-1).\left[(x+y)^2+(x+y)+5\right]=0$.

Vì $(x+y)^2+(x+y)+5=\left(x+y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$ với mọi x, y.

Do đó $x+y-1 \Leftrightarrow x+y=1$, khi đó ta có $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình $u^2-u-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\{(-1;2);(2;-1)\}$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Gia Lai năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+2)+2=5y \\ (xy-1)^2+3(1-y^2)=0 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x(y+2)+2=5y \\ (xy-1)^2+3(1-y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+2x+2=5y \\ x^2y^2-2xy+4=3y^2 \end{cases}$.

+ Với $y=0$ thì hệ vô nghiệm.

+ Với $y\neq 0$ hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x+\frac{2x}{y}+\frac{2}{y}=5 \\ x^2-\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{y}+2\frac{x}{y}=5 \\ \left(x+\frac{2}{y}\right)^2-6\frac{x}{y}=3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=x+\frac{2}{y} \\ b=\frac{x}{y} \end{cases}$. Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} a+2b=5 \\ a^2-6b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ (5-2b)^2-6b=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ 4b^2-26b+22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\frac{11}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-6 \\ b=\frac{11}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

+ Với $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

+ Với $\begin{cases} a=-6 \\ b=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=-6 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11y}{2}+\dfrac{2}{y}=-6 \\ x=\dfrac{11y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y^2+12y+4=0 \\ x=\dfrac{11y}{2} \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1);(2;2)\}$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $5x^2+mx-28=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $5x_1+2x_2=1$.

2) Giải phương trình: $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$.

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0 \\ 4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1} \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có $\Delta=m^2+560>0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m.

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m}{5} \\ x_1.x_2=-\dfrac{28}{5} \end{cases}$.

Kết hợp với $5x_1+2x_2=1$, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m}{5} \\ 5x_1+2x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-\dfrac{m+1}{3} \\ x_1=\dfrac{2m+5}{15} \end{cases}$.

Thay các giá trị x_1, x_2 vừa tìm được vào $x_1.x_2=-\dfrac{28}{5}$ ta được:

$$\left(\frac{2m+5}{15}\right)\left(-\frac{m+1}{3}\right)=-\frac{28}{5} \Leftrightarrow 2m^2+7m+5=252 \Leftrightarrow 2m^2+7m-247=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-13 \\ m=\dfrac{19}{2} \end{array}\right..$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=-13$; $m=-\dfrac{19}{2}$.

2) Điều kiện: $x^2+2x-5\ge 0$.

Ta có $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8=2\sqrt{x^2+2x-5}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-5-2\sqrt{x^2+2x-5}-3=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-5}$, $t\ge 0$.

Ta có phương trình $t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Do $t \ge 0$ nên $t=3$ thoả mãn.

Với $t=3$, ta có $\sqrt{x^2+2x-5}=3 \Leftrightarrow x^2+2x-5=9 \Leftrightarrow x^2+2x-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{15} \\ x=-1+\sqrt{15} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-1\pm\sqrt{15}\right\}$.

3) Điều kiện: $\begin{cases} 2x+y+2 \ge 0 \\ x+4y+1 \ge 0. \end{cases}$

Xét phương trình $2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0 \Leftrightarrow 2x^2+(7-3y)x+y^2-5y+6=0. \quad (*)$

Ta xem $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến x.

Ta có: $\Delta_x=(7-3y)^2-4.2.(y^2-5y+6)=(y-1)^2$.

Suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3y-7+y-1}{4}=y-2 \\ x=\dfrac{3y-7-(y-1)}{4}=\dfrac{y-3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$.

+ Với $y=x+2$, thay vào phương trình $4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1}$, ta được:

$$3x^2+5x+5=\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x+9}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x+\left[(x+2)-\sqrt{3x+4}\right]+\left[(x+3)-\sqrt{5x+9}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2+x)+\frac{x^2+x}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{x^2+x}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)\left[3+\frac{1}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{1}{x+3+\sqrt{5x-9}}\right]=0. \qquad (**)$$

Với điều kiện $\begin{cases} 3x+4 \ge 0 \\ 5x+9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{4}{3}$, ta có: $3+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{1}{x+3+\sqrt{5x-9}}>0$.

Do đó $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

+ Với $y=2x+3$, thay vào phương trình $4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1}$, ta được:

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{9x+13}+3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}-1\right)+\left(\sqrt{9x+13}-2\right)+3x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9(x+1)}{\sqrt{9x+13}+2}+3(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+13}+2}+3\right]=0. \qquad (***)$$

Với điều kiện $\begin{cases}4x+5\ge 0\\9x+13\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\frac{5}{4}$, ta có: $\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+13}+2}+3>0$.

Do đó $(***) \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)\in\{(0;2);(-1;1)\}$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Thuận năm học 2023 – 2024)

Giải phương trình $9x^2-53x=\sqrt{2x+1}-71$.

Lời giải

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $9x^2-53x=\sqrt{2x+1}-71 \Leftrightarrow 36x^2-212x+284=4\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow 36x^2-212x+284+8x+5=4(2x+1)+4\sqrt{2x+1}+1$

$\Leftrightarrow 36x^2-204x+289=4(2x+1)+4\sqrt{2x+1}+1$

$\Leftrightarrow (6x-17)^2=\left(2\sqrt{2x+1}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2\sqrt{2x+1}+1=6x-17 & (1)\\2\sqrt{2x+1}+1=17-6x & (2)\end{array}\right.$.

Giải (1): Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=6x-18 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=3(2x+1)-21$.

Đặt $t=\sqrt{2x+1}$ $(t\ge 0)$, phương trình trở thành: $3t^2-2t-21=0 \Leftrightarrow (t-3)(3t+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3\\t=-\frac{7}{3}\end{array}\right.$.

Vì $t\ge 0$ nên $t=3$. Suy ra $\sqrt{2x+1}=3 \Leftrightarrow x=4$.

Giải (2): Ta có: $(2) \Leftrightarrow 6x+2\sqrt{2x+1}-16=0 \Leftrightarrow 3(2x+1)+2\sqrt{2x+1}-19=0$.

Đặt $t=\sqrt{2x+1}$ $(t\ge 0)$, phương trình trở thành: $3t^2+2t-19=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{58}}{3}$.

Vì $t\ge 0$ nên $t=\frac{-1+\sqrt{58}}{3}$. Suy ra $\sqrt{2x+1}=\frac{-1+\sqrt{58}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{25-\sqrt{58}}{9}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{25-\sqrt{58}}{9};4\right\}$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Cần Thơ năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình: $2x^2-(x-2)\sqrt{x^2-x+1}=5x-2$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-35=0\\2x^2-4x+3y^2+9y=0\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $x^2-x+1\ge 0$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$).

Ta có: $2x^2-(x-2)\sqrt{x^2-x+1}=5x-2$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=(x-2)\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow (x-2)(2x-1)=(x-2)\sqrt{x^2-x+1}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \sqrt{x^2-x+1}=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ x^2-x+1=4x^2-4x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 3x(x-1)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1;2\}$.

2) $\begin{cases} x^3-y^3-35=0 \\ 2x^2-4x+3y^2+9y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3-35=0 \\ 6x^2-12x+9y^2+27y=0 \end{cases}.$

Trừ vế với vế của hai phương trình, ta được:

$x^3-y^3-35-6x^2+12x-9y^2-27y=0$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8-y^3-9y^2-27y-27=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3-(y+3)^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3=(y+3)^3$

$\Leftrightarrow x-2=y+3$

$\Leftrightarrow x=y+5.$

Thay vào phương trình $x^3-y^3-35=0,$ ta được

$$(y+5)^3-y^3-35=0 \Leftrightarrow 3y^2+15y+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=3 \\ y=-3 \Rightarrow x=2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\{(3;-2);(2;-3)\}$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-4}=3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x|+y^2=10 \\ 2|x|-3y^2=-25 \end{cases}.$

Lời giải

1) Điều kiện $\begin{cases} x\ne 0 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\ge 0 \end{cases}.$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t\ (|t|\ge 2) \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2.$ Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t+\sqrt{t^2-6}=3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{6}\le t\le 3 \\ t\le -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ t^2-6=(3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{6}\le t\le 3 \\ t\le -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ t=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}.$$

Với $t=\frac{5}{2}$, ta có: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.

2) Ta có: $\begin{cases} |x|+y^2=10 \\ 2|x|-3y^2=-25 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} |x|=1 \\ y^2=9 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 3 \end{cases}.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)\in\{(-1;3);(1;3);(-1;-3);(1;-3)\}$.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Đà Nẵng năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $10x^2+3x+2=(6x+1)\sqrt{x^2+2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-y)\sqrt{x-2}=x(y-x+2) \\ (y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2} \end{cases}$.

Lời giải

1) Đặt $t=\sqrt{x^2+2}\ (t>0)\Rightarrow t^2=x^2+2.$

Phương trình đã cho trở thành: $9x^2+3x+t^2=(6x+1)t$

$\Leftrightarrow (9x^2-6xt+t^2)+3x-t=0\Leftrightarrow (3x-t)^2+(3x-t)=0$

$\Leftrightarrow (3x-t)(3x-t+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=t \\ 3x+1=t \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\sqrt{x^2+2} \\ 3x+1=\sqrt{x^2+2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ 9x^2=x^2+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge -\frac{1}{3} \\ 9x^2+6x+1=x^2+2 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{8} \end{array}\right..$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{8}\right\}$.

2) Điều kiện: $x\ge 2$.

Xét phương trình: $(x^2-y)\sqrt{x-2}=x(y-x+2)\Leftrightarrow x^2\sqrt{x-2}-y\sqrt{x-2}=xy-x(x-2)$

$\Leftrightarrow x^2\sqrt{x-2}-xy+x(x-2)-y\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow x\left(x\sqrt{x-2}-y\right)+\sqrt{x-2}\left(x\sqrt{x-2}-y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x-2}-y\right)\left(x+\sqrt{x-2}\right)=0\Leftrightarrow x\sqrt{x-2}-y=0$ (do $x\ge 2$ nên $x+\sqrt{x-2}>0$)

$\Leftrightarrow y=x\sqrt{x-2}.$

Xét phương trình: $(y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow y^2-3xy-4y+3x+3=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}.$

Thay $y=x\sqrt{x-2}$, ta được:

$x^2(x-2)-3x^2\sqrt{x-2}-4x\sqrt{x-2}-x^2+6x+8\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow (x^3-3x^2+6x)-\sqrt{x-2}(3x^2+4x-8)=0$

$\Leftrightarrow x^3-3x(x-2)-\sqrt{x-2}(3x^2+4x-8)=0. \qquad (*)$

Đặt $t=\sqrt{x-2}$ $(t\ge 0)$ thì $t^2=x-2$ và $4x-8=4t^2$, phương trình $(*)$ trở thành:

$(x^3-3xt^2)-t(3x^2+4t^2)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2t-3xt^2-4t^3=0 \Leftrightarrow (x-4t)(x^2+tx+t^2)=0.$

Mà $x^2+tx+t^2>0, \forall x\ge 2; t>0$ nên $x-4t=0$

$\Leftrightarrow x=4\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=16x-32 \end{cases} \Leftrightarrow x=8\pm 4\sqrt{2}$ (thoả mãn).

Với $x=8+4\sqrt{2} \Rightarrow y=x\sqrt{x-2}=32+16\sqrt{2}.$

Với $x=8-4\sqrt{2} \Rightarrow y=x\sqrt{x-2}=32-16\sqrt{2}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\left\{\left(8+4\sqrt{2};32+16\sqrt{2}\right);\left(8-4\sqrt{2};32-16\sqrt{2}\right)\right\}.$

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $(x-2)(x+1)(x+3)(x+6)+56=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ (x+1)(y+1)=6 \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có: $(x-2)(x+6)(x+1)(x+3)+56=0 \Leftrightarrow (x^2+4x-12)(x^2+4x+3)+56=0$.

Đặt $t=x^2+4x-12$, phương trình trở thành: $t(t+15)+56=0 \Leftrightarrow t^2+15t+56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-7 \\ t=-8 \end{array}\right.$.

Với $t=-7$ thì $x^2+4x-12=-7 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Với $t=-8$ thì $x^2+4x-12=-8 \Leftrightarrow x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+2\sqrt{2} \\ x=-2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;-5;-2+2\sqrt{2};-2-2\sqrt{2}\right\}$.

2) Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S^2-2P=5 \\ S+P=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2-2(5-S)=5 \\ P=5-S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2+2S-15=0 \\ P=5-S \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=-5 \\ P=10 \end{cases} \\ \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} S=-5 \\ P=10 \end{cases}$ thì x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2+5X+10=0$ (vô nghiệm).

Với $\begin{cases}S=3\\P=2\end{cases}$ thì x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2-3X+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=1\\X=2\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\{(1;2);(2;1)\}$.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đắk Lắk năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0\\(3x^2+18x-2xy+6y-y^2)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-y\ge -1$.

Xét phương trình $x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0$

$\Leftrightarrow(x^3-6x^2+12x-8)+(x-2)=\sqrt{x-y+1}(x-y+1)+\sqrt{x-y+1}$

$\Leftrightarrow(x-2)^3+(x-2)=\left(\sqrt{x-y+1}\right)^3+\sqrt{x-y+1}$.

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\v=\sqrt{x-y+1}\end{cases}$, phương trình trở thành: $u^3+u=v^3+v\Leftrightarrow(u-v)(u^2+v^2+uv+1)=0\Leftrightarrow u=v$

$\Rightarrow\sqrt{x-y+1}=x-2.\qquad(1)$

Xét phương trình $(3x^2+18x-2xy+6y-y^2)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0$

$\Leftrightarrow(3x^2-2xy-y^2+18x+6y)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0$

$\Leftrightarrow\left[(3x^2-2xy-y^2)+6(3x+y)\right]\sqrt{x-y+6}-8(3x+y)=0$

$\Leftrightarrow\left[(3x+y)(x-y)+6(3x+y)\right]\sqrt{x-y+6}-8(3x+y)=0$

$\Leftrightarrow(3x+y)\left[\left(\sqrt{x-y+6}\right)^3-8\right]=0\Leftrightarrow 3x+y=0$ (do $x-y\ge-1\Rightarrow\left(\sqrt{x+y+6}\right)^3-8>0$). $\qquad(2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}3x=-y\\\sqrt{x-y+1}=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-y\\\sqrt{4x+1}=x-2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-y\\x\ge2\\x^2-8x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-y\\\left[\begin{array}{l}x=4+\sqrt{13}\\x=4-\sqrt{13}\end{array}\right.\\x\ge2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4+\sqrt{13}\\y=-12-3\sqrt{13}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(4+\sqrt{13};-12-3\sqrt{13}\right)$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có: $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4 \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=(x-1)(2x-4)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{x^2+6x+16}-2x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x^2+6x+16}=2x-4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} 2x-4\ge 0 \\ x^2+6x+16=(2x-4)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x\ge 2 \\ 3x^2-22x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{22}{3} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1;\dfrac{22}{3}\right\}$.

2) Điều kiện: $\begin{cases} 3(x^2+y)+7\ge 0 \\ 5x^2+5y+14\ge 0 \end{cases}$.

Ta có: $2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y$

$\Leftrightarrow 2x^3+2xy^2-x^2y+2x^2+6x=xy+y^3+3y$

$\Leftrightarrow (2x^3-x^2y)+(2xy^2-y^3)+(2x^2-xy)+(6x-3y)=0$

$\Leftrightarrow x^2(2x-y)+y^2(2x-y)+x(2x-y)+3(2x-y)=0$

$\Leftrightarrow (2x-y)(x^2+y^2+x+3)=0$

$\Leftrightarrow (2x-y)\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+\dfrac{11}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow 2x-y=0 \Leftrightarrow y=2x$ (do $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+\dfrac{11}{4}>0$).

Thay $y=2x$ vào phương trình $\sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2$, ta được

$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2+6x+7}-2\right)+\left(\sqrt{5x^2+10x+14}-3\right)+(x^2+2x+1)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x+1)^2}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\dfrac{5(x+1)^2}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+(x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1\right)=0.$

Vì $\dfrac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1>0$ nên $(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-2$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;-2)$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Giải phương trình $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \frac{7}{2}$.

Ta có: $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x+7}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}=2(x-4)$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}=2(x-4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}=-2 \end{array}\right..$$

Với $x=4$ thoả mãn điều kiện xác định.

Với $\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}=-2$, phương trình vô nghiệm do $VT>0$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{4\}$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}$.

Ta có: $2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2} \Rightarrow (2x+2)^2=(5-x)^2(3x-2)$

$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4=(x^2-10x+25)(3x-2) \Leftrightarrow 4x^2+8x+4=3x^3-32x^2+95x-50$

$$\Leftrightarrow 3x^3-36x^2+87x-54=0 \Leftrightarrow (x-9)(x-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=9 \end{array}\right..$$

Thử lại, ta thấy $x=1$ và $x=2$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{1;2\}$.

2) Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} (a^2 \ge 4b)$. Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} a+3b=9 \\ a^3-3ab=9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=9-3b \\ (9-3b)^3-3(9-3b)b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9-3b \\ -27b^3+252b^2-756b+720=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3;\ b=2 \\ a=-3;\ b=4 \\ a=-1;\ b=\frac{10}{3} \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện $a^2 \ge 4b$, ta được: $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ thoả mãn.

Khi đó $x; y$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ X=2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) \in \{(1;2);(2;1)\}$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+11} - \sqrt{x+2} = 2x - 2$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)(2-y) = 8 \\ \sqrt{11-4(x-y)} + x^2y^2 + 1 = 3xy \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \ge -2$.

Ta có: $\sqrt{x^2+3x+11} - \sqrt{x+2} = 2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 5(x+2)} - \sqrt{x+2} = 2(x-1)$.

Xét $x = -2$ (không phải là nghiệm).

Xét $x > -2$, chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+2}$ ta được: $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x+2} + 5} - 1 = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x+2}}$.

Đặt $t = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$, ta được phương trình: $\sqrt{t^2+5} - 1 = 2t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5} = 2t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1 \ge 0 \\ t^2+5 = (2t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -\dfrac{1}{2} \\ 3t^2+4t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}.$$

Với $t = \dfrac{2}{3}$, ta có: $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 4(x+2) = 9(x-1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 9x^2 - 22x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x = \dfrac{11 \pm 4\sqrt{7}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}\right\}$.

2) Điều kiện: $x - y \le \dfrac{11}{4}$.

Ta có: $\begin{cases} (x+2)(2-y) = 8 \\ \sqrt{11-4(x-y)} + x^2y^2 + 1 = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) - xy - 4 = 0 \\ \sqrt{11-4(x-y)} + x^2y^2 - 3xy + 1 = 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x-y = a \\ xy = b \end{cases} \left(a \le \dfrac{11}{4}\right)$, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 2a - b - 4 = 0 \\ \sqrt{11-4a} + b^2 - 3b + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b+4 \\ \sqrt{11-2(b+4)}+b^2-3b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b+4 \\ \sqrt{3-2b}+b^2-3b+1=0 \end{cases}.$$

Xét phương trình: $\sqrt{3-2b}+b^2-3b+1=0$ (điều kiện: $b\le\frac{3}{2}$)

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3-2b}-1\right)+\left(b^2-3b+2\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2(1-b)}{\sqrt{3-2b}+1}+(b-1)(b-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\left[\frac{-2}{\sqrt{3-2b}+1}-(b-2)\right]=0.$$

Vì $b\le\frac{3}{2}$ nên $b-2<0 \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{3-2b}+1}-(b-2)<0.$

Suy ra $b-1=0\Leftrightarrow b=1\Rightarrow a=\frac{5}{2}.$

Khi đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-y=\frac{5}{2} \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\frac{5}{2} \\ y^2+\frac{5}{2}y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{41}}{4} \\ y=\frac{-5+\sqrt{41}}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-5-\sqrt{41}}{4} \\ y=\frac{-5+\sqrt{41}}{4} \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\left\{\left(\frac{5+\sqrt{41}}{4};\frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right);\left(\frac{5-\sqrt{41}}{4};\frac{-5-\sqrt{41}}{4}\right)\right\}.$

Bài 21. (Đề thi vào 10 chuyên tỉnh Đồng Tháp năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(3y+1)-y=3 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x(3y+1)-y=3 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+3xy=3 \\ (x-y)^2+3xy=3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x-y \\ v=xy \end{cases}$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=3 \\ u^2+3v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+3v=3 \\ u^2-u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\frac{3-u}{3} \\ \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{6} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là

$$(x;y)\in\left\{(1;1);(-1;-1);\left(\frac{3+\sqrt{33}}{6};\frac{-3+\sqrt{33}}{6}\right);\left(\frac{3-\sqrt{33}}{6};\frac{-3-\sqrt{33}}{6}\right)\right\}.$$

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hải Dương năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x-1}=2x+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x}}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge 1$.

Ta có: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x-1}=2x+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x(x+3)}+2\sqrt{x-1}-2x-\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}}=0$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}}\right]+\left(2\sqrt{x-1}-2x\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}\left(x-\sqrt{x-1}\right)-2\left(x-\sqrt{x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x-1}\ (1) \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}=2\ (2) \end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x+1=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x}=4 \Rightarrow x+3=4x \Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

2) Ta có: $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+2)=4 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=8 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y+2 \end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} a.b=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} ab=4 \\ a+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\{(1;0);(-3;-4)\}$.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hải Phòng năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(3x^2+4x+6\right)\sqrt{3x^2+4x+5}=27x^3+3x.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\\ y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2\left(x+1\right)\sqrt{x}\end{cases}.$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases}\sqrt{3x^2+4x+5}=a\\ 3x=b\end{cases}\left(a>0\right).$

Khi đó phương trình trở thành: $a^3+a=b^3+b$

$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0\Leftrightarrow a=b$ (vì $a^2+ab+b^2+1>0$)

$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+4x+5}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 6x^2-4x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{34}}{6}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{2+\sqrt{34}}{6}\right\}.$

b) Điều kiện: $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Xét phương trình: $y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2\left(x+1\right)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow y+4\sqrt{y}+4=\left(x^2+2x+1\right)-2\left(x+1\right)\sqrt{x}+x$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}+2\right)^2=\left(x+1\right)^2-2\left(x+1\right)\sqrt{x}+x$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}+2\right)^2=\left[\left(x+1\right)-\sqrt{x}\right]^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}+2=x+1-\sqrt{x}\\ \sqrt{y}+2=-\left(x+1-\sqrt{x}\right)\end{array}\right..$

Mà $x+1-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ge 0$ và $\sqrt{y}+2\ge 2$ nên $\sqrt{y}+2=x+1-\sqrt{x}$ thoả mãn.

Khi đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\\ \sqrt{y}+2=x+1-\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1\\ \left(x-\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1\\ \left(x-\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1\\ x-\sqrt{x}-1=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1\\ x-1=\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2x+1=x+1\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1\\ \begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=7-4\sqrt{3}\end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(3;7-4\sqrt{3})$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hoà Bình năm học 2023 – 2024)

1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=3m-3 \\ mx+y=2m-2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$, trong đó $x;\ y$ là các số nguyên.

2) Giải phương trình: $(4x^2-7x+4)(3x^2-4x+3)=3x^2$.

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2-x)\sqrt{1-x}-y\sqrt{y-1}=0 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} x+my=3m-3 \\ mx+y=2m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+my=3m-3 \\ (m^2-1)x=2m^2-5m+3 \end{cases}$.

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x=\dfrac{2m-3}{m+1}=2-\dfrac{5}{m+1} \\ y=3-\dfrac{5}{m+1} \end{cases}$.

Vì m nguyên để hệ phương trình có nghiệm duy nhất là các số nguyên thì $m+1$ phải là ước của 5 $\Rightarrow m+1\in\{1;-1;5;-5\} \Rightarrow m\in\{0;-2;4;-6\}$ (thoả mãn).

Vậy $m\in\{0;-2;4;-6\}$ là các giá trị cần tìm.

2) Xét phương trình: $(4x^2-7x+4)(3x^2-4x+3)=3x^2$. $\quad (1)$

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Xét $x\neq 0$, chia cả 2 vế của phương trình (1) cho x^2 ta được

$$\left(4x-7+\frac{4}{x}\right)\left(3x-4+\frac{3}{x}\right)=3 \Leftrightarrow \left[4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7\right].\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right]=3.$$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$, phương trình trở thành: $(4t-7)(3t-4)=3 \Leftrightarrow 12t^2-37t+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{25}{12} \end{array}\right.$.

Với $t=1 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (phương trình vô nghiệm).

Với $t=\dfrac{25}{12} \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{25}{12} \Rightarrow 12x^2-25x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{4}{3};\dfrac{3}{4}\right\}$.

3) Điều kiện: $x \le 1;\ y \ge 1$.

Ta có: $(2-x)\sqrt{1-x} - y\sqrt{y-1} = 0 \Leftrightarrow (1-x)\sqrt{1-x} - (y-1)\sqrt{y-1} + \sqrt{1-x} - \sqrt{y-1} = 0$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{1-x} = u \\ \sqrt{y-1} = t \end{cases} (u \ge 0;\ t \ge 0)$, ta được phương trình: $u^3 - t^3 + u - t = 0$

$\Leftrightarrow (u-t)(u^2+ut+t^2+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-t=0 \\ u^2+ut+t^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow u-t=0 \Rightarrow 1-x = y-1 \Leftrightarrow x = 2-y$.

Thay $x = 2-y$ vào phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 3$, ta được: $\sqrt{4-y} + \sqrt{y+1} = 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le y \le 4 \\ 5 + 2\sqrt{(4-y)(y+1)} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le y \le 4 \\ \sqrt{4+3y-y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le y \le 4 \\ 3y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le y \le 4 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = -1.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-1;3)$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hưng Yên năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có: $3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 16x^2 + 6x + 2 + 3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$.

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}} = t$, ta được: $3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 3t^3 + 3t$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = t^3 + t \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = t^3 + t$

$\Leftrightarrow (x+1-t)\left[(x+1)^2 + (x+1)t + t^2 + 1\right] = 0.$

Mà $(x+1)^2 + (x+1)t + t^2 + 1 > 0$ nên $x + 1 - t = 0 \Rightarrow x + 1 = t \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 16x^2 + 6x + 2 \Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 - 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$.

Thử lại thấy cả 3 nghiệm thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}; \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right\}$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & (1) \\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (2) \end{cases}$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 2x^2+3(1-y)x+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow (x+1-y)(2x+1-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $y=x+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2+(x+1)^2+x+x+1=8 \Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $y=2x+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2+(2x+1)^2+x+2x+1=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{11}{5} \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y) \in \left\{(-2;-3);\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right);(1;2);(-3;-2)\right\}$.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 – 2024)

Cho phương trình $x^2+bx-7+2b=0$ (1) (ẩn x), với b là tham số nguyên.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm b để $x_2^2=9x_1$.

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta=b^2-4.1.(-7+2b)=b^2-8b+28=(b-4)^2+12 \geq 12>0, \forall b$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi b.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1.x_2=2b-7 \end{cases}$.

Với $x_2^2=9x_1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{9}+x_2=-b \\ \dfrac{x_2^2}{9}\cdot x_2=2b-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2+\dfrac{2x_2^2}{9}=-2b \\ \dfrac{x_2^3}{9}=2b-7 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được: $2x_2+\dfrac{2x_2^2}{9}+\dfrac{x_2^3}{9}=-7 \Leftrightarrow x_2^3+2x_2^2+18x_2+63=0$

$\Leftrightarrow (x_2+3)(x_2^2-x_2+21)=0 \Leftrightarrow x_2=-3 \Rightarrow x_1=\dfrac{x_2^2}{9}=1.$

Suy ra $\begin{cases} -2=-b \\ -3=2b-7 \end{cases} \Leftrightarrow b=2 \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn).

Vậy $b=2$ là giá trị cần tìm.

b) Nếu b lẻ $\Rightarrow b-4$ lẻ.

Đặt $b-4=2k+1\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta cần chứng minh Δ không là số chính phương.

Phản chứng: Giả sử Δ là số chính phương.

Đặt $\Delta=\left(2k+1\right)^2+12=m^2\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m=2l+1\Rightarrow\Delta=4k^2+4k+13=4l^2+4l+1$

$\Rightarrow k^2+k+3=l^2+l$ (vô lí).

Vậy Δ không là số chính phương nên phương trình đã cho không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2023 – 2024)

Cho phương trình $x^2-\left(m-4\right)x-m-2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{{x_1}^2+2023}+x_1\left(m-8-x_1\right)=\sqrt{{x_2}^2+2023}+x_2\left(m-x_2\right).$$

Lời giải

Xét phương trình $x^2-\left(m-4\right)x-m-2=0.$ $\qquad(1)$

Ta có: $\Delta=\left(m-4\right)^2-4\left(-m-2\right)=m^2-8m+16+4m+8=m^2-4m+24=\left(m-2\right)^2+20>0,\ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m-4\\ x_1x_2=-m-2\end{cases}$.

Theo bài ra, ta có: $\sqrt{{x_1}^2+2023}+x_1\left(m-8-x_1\right)=\sqrt{{x_2}^2+2023}+x_2\left(m-x_2\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{{x_1}^2+2023}+x_1\left(x_1+x_2-4-x_1\right)=\sqrt{{x_2}^2+2023}+x_2\left(x_1+x_2+4-x_2\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{{x_1}^2+2023}-\sqrt{{x_2}^2+2023}+x_1\left(x_2-4\right)-x_2\left(x_1+4\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{\sqrt{{x_1}^2+2023}+\sqrt{{x_2}^2+2023}}+x_1x_2-4x_1-x_1x_2-4x_2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)}{\sqrt{{x_1}^2+2023}+\sqrt{{x_2}^2+2023}}-4\left(x_1+x_2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{{x_1}^2+2023}+\sqrt{{x_2}^2+2023}}-4\right)=0.$$

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{{x_1}^2+2023}+\sqrt{{x_2}^2+2023}>\sqrt{{x_1}^2}+\sqrt{{x_2}^2}=\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\\ x_1-x_2\le\left|x_1-x_2\right|\le\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{x_1-x_2}{\sqrt{{x_1}^2+2023}+\sqrt{{x_2}^2+2023}}<\frac{\left|x_1\right|+\left|x_2\right|}{\left|x_1\right|+\left|x_2\right|}=1$$

$\Rightarrow \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} - 4 < 0.$

Do đó $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Long An năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $4x_1 + 3x_2 = 1.$

2) Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 + (3-2x)\sqrt{x^2 + x + 2} = 0.$

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 7 = 0.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = -4m + 29 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{29}{4}.$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1.x_2 = m^2 - 7 \end{cases}.$

Kết hợp với giả thiết, ta có hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 6m \\ x_2 = 8m - 5 \end{cases}.$

Thay vào $x_1.x_2 = m^2 - 7,$ ta tìm được $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{13}{49} \end{array}\right.$.

Vậy $m \in \left\{1; \dfrac{13}{49}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

2) Ta có: $x^2 - 5x + 2 + (3-2x)\sqrt{x^2 + x + 2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2x\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} - 2x = 0$ (vì $\sqrt{x^2 + x + 2} + 3 > 0, \forall x$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}.$

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lai Châu năm học 2023 – 2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}.$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ (x-y+1)(2x-y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ \left[\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x-y+1=0 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} (**) \end{array}\right..$$

Giải $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ 2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$

Giải $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2x+1)^2+x+2x+1=8 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{5} \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{11}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y) \in \left\{(1;2);(-3;-2);(-2;-3);\left(\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right)\right\}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (Khối tự nhiên) năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.

2) Giải phương trình $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x} \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} \end{cases}$.

4) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x-y+2 \\ x^3+y^3=y(x+y+4)+x \end{cases}$.

5) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x+5}+2x=\sqrt{2y+5}+y \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} \end{cases}$.

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0.$ (1)

a) Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(4m-2)=4m^2-12m+9=(2m-3)^2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta>0 \Leftrightarrow m\neq\frac{3}{2}$.

b) Với $m\neq\frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x=2,\ x=2m-1$.

Vì x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $2m-1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2=13 \Leftrightarrow 2^2+(2m-1)^2=13 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, ta được $m=2$ thoả mãn.

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

2) Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta có: $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$

$\Leftrightarrow \left[(2x+5)-6\sqrt{2x+5}+9\right]+\left[(x+2)-4\sqrt{x+2}+4\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+5}-3\right)^2+\left(\sqrt{x+2}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5}-3=0 \\ \sqrt{x+2}-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{x+2}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

3) Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \\ y+3-x^2 \geq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{2x}-2\sqrt{y}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)\left[\dfrac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)(2x+y)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+2\right]=0$

$\Leftrightarrow y=2x \left(\text{do } \dfrac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)(2x+y)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+2>0 \right)$.

Thay vào phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2}$, ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^2}$.

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{2x+3-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$.

Phương trình trở thành: $t=2+\dfrac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=0$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=0$ (vô nghiệm).

Với $t=2$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{(x+1)(3-x)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=6$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;6)$.

4) Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x-y+2 \\ x^3+y^3=y(x+y+4)+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=x-y+2 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=xy+y^2+4y+x \end{cases}$

$\Rightarrow (x+y)(x-y+2)=xy+y^2+4y+x$

$\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2+x-2y=0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-y-1 \end{array}\right.$.

Với $x=2y$, thay vào $x^2-xy+y^2=x-y+2$, ta có:

$$4y^2-2y^2+y^2=y+2 \Leftrightarrow 3y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=-\frac{2}{3} \Rightarrow x=-\frac{4}{3} \end{array}\right..$$

Với $x=-y-1$, thế vào $x^2-xy+y^2=x-y+2$, ta được:

$$(y+1)^2+(y+1)y+y^2=-y-1-y+2 \Leftrightarrow 3y^2+5y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=-1 \\ y=-\frac{5}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y) \in \left\{(2;1);\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right);(-1;0);\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)\right\}$.

5) Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ y \ge -\frac{5}{2} \\ y+3-x^2 \ge 0 \end{cases}$.

Ta có: $\sqrt{4x+5}+2x=\sqrt{2y+5}+y \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{2y+5}\right)+(2x-y)=0$

$\Leftrightarrow (2x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{2y+5}}+1\right)=0 \Leftrightarrow y=2x.$

Thay vào phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2}$, ta được: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^2}$.

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{2x+3-x^2}=\frac{t^2-4}{2}$.

Khi đó $t=2+\frac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=0$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=0$ (vô nghiệm).

Với $t=2$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Với $x=-1 \Rightarrow y=-2$.

Với $x=3 \Rightarrow y=6$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \{(-1;-2);(3;6)\}$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (Khối xã hội) năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m=0$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=13$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x+9}$.

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0.\qquad (1)$

a) Với $m=0$, phương trình (1) trở thành $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy với $m=0$ thì phương trình có tập nghiệm là $S=\{-1;2\}$.

b) Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(4m-2)=4m^2-12m+9=(2m-3)^2 \geq 0,\ \forall m$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1x_2=4m-2 \end{cases}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13 \Leftrightarrow (2m+1)^2-2(4m-2)=13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy $m\in\{-1;2\}$ là các giá trị cần tìm.

2) Điều kiện: $-1\leq x\leq 4$.

Ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x+9} \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-x=2x+9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=x+2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ -x^2+3x+4=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x} \\ \left(2-\sqrt{x+y}\right)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3x} \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có: $x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow (x^2-2x-1)(x^2-2x+3)=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\ \left(\text{vì } x^2-2x+3=(x-1)^2+2>2>0\right)$

$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}$.

2) Điều kiện xác định: $x+y\geq 0,\ 2y-x^2+2x\geq 0.$

Ta có: $2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x} \Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+y}\right)^2=2y-x^2+2x$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x+y}+x+y=2y-x^2+2x \Leftrightarrow 5x^2-4x\sqrt{x+y}-(x+y)=0$

$\Leftrightarrow 5x\left(x-\sqrt{x+y}\right)+\sqrt{x+y}\left(x-\sqrt{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+y}\right)\left(5x+\sqrt{x+y}\right)=0.$

Trường hợp 1: $x-\sqrt{x+y}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{x+y}\ (x\ge 0)$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$(2-x)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3}x \Leftrightarrow (2-x)^2(x^2+4)=12x^2$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)(x^2+4)=12x^2 \Leftrightarrow x^4+4x^2-4x^3-16x+4x^2+16=12x^2$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3-4x^2-16x+16=0 \Leftrightarrow (x^2+2x+4)(x^2-6x+4)=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+4=0\ \left(\text{vì } x^2+2x+4=(x+1)^2+3>3>0\right)$

$\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{5}.$

Để ý điều kiện $0\le x\le 2$ nên $x=3-\sqrt{5}$ (thoả mãn.)

Khi đó $y=11-5\sqrt{5}$

Trường hợp 2: $5x+\sqrt{x+y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=-5x\ (x\le 0)$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có $7x=\sqrt{2y-x^2+2x}$.

Từ đây kết hợp $x\le 0$ suy ra $x=y=0$. Thử lại, ta thấy nghiệm trên không thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(3-\sqrt{5};11-5\sqrt{5}\right)$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 trường Đại học Vinh tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^3-2x^2+x-5(x-1)\sqrt{x}-6=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x+y=x^2y^2-15\\2x+3y=3x^2y^2-13xy-6\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Ta có: $x^3-2x^2+x-5(x-1)\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2-5(x-1)\sqrt{x}-6=0.$

Đặt $t=(x-1)\sqrt{x}$ phương trình trở thành $t^2-5t-6=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=6\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $t=-1$ suy ra $0\le x<1$. Đặt $\sqrt{x}=a\ \ (0\le a<1)$, khi đó ta có

$$(x-1)\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow a^3-a+1=0 \text{ (vô lý } a^3+1-a>0\text{)}.$$

Trường hợp 2. $t=6$. Đặt $\sqrt{x}=a\ (a\ge 0)$, khi đó ta có

$(x-1)\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow a^3-a-6=0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+3)=0$

$\Leftrightarrow a=2$ (vì $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>2>0$)

$\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{4\}$.

2) Xét hệ phương trình: $\begin{cases}5x+y=x^2y^2-15 & (1)\\ 2x+3y=3x^2y^2-13xy-6 & (2)\end{cases}$.

Trường hợp 1: Nếu $x=0$ thì $-15=y=-2$ vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $x\neq 0$, ta có

$$(1).3-(2)\Leftrightarrow 13x=13xy-39\Leftrightarrow xy=x+3\Leftrightarrow y=1+\frac{3}{x}$$

Thế $y=1+\frac{3}{x}$ vào phương trình (1), ta có

$$5x+1+\frac{3}{x}=(x+3)^2-15\Leftrightarrow 5x^2+x+3=x(x^2+6x+9)-15x$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-7x-3=0\Leftrightarrow (x+3)(x^2-2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Nếu $x=-3$ thì $y=1+\frac{3}{x}=0$.

Nếu $x=1+\sqrt{2}$ thì $y=1+\frac{3}{x}=-2+3\sqrt{2}$.

Nếu $x=1-\sqrt{2}$ thì $y=1+\frac{3}{x}=-2-3\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\left\{(-3;0);\left(1+\sqrt{2};-2+3\sqrt{2}\right);\left(1-\sqrt{2};-2-3\sqrt{2}\right)\right\}$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2}\\ \frac{9}{4}+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{y}\right)=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $-7\le x\le 6$.

Với điều kiện xác định thì $\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7}\neq 0$.

Do đó $\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8\Leftrightarrow 16\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8\left(\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{6-x}+2\right)=\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+23}-5\right)+\left(\sqrt{x+7}-3\right)+2\left(2-\sqrt{6-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2}{\sqrt{x+23}+5}+\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2(x-2)}{2+\sqrt{6-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x+23}+5}+\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2}{2+\sqrt{6-x}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0$ (do $\dfrac{1}{\sqrt{x+23}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2}{2+\sqrt{6-x}}>0$)

$\Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2\}$.

b) Điều kiện: $x\neq 0;\ y\neq 0$.

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y};\ b=y+\dfrac{1}{x}$, hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} a+b=\dfrac{9}{2} & (1)\\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}a=ab & (2)\end{cases}$.

Từ (1), suy ra $b=\dfrac{9}{2}-a$, thay vào (2), ta được:

$\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}a=a\left(\dfrac{9}{2}-a\right)\Leftrightarrow 9+6a=2a(9-2a)\Leftrightarrow 4a^2-12a+9=0$

$\Leftrightarrow (2a-3)^2=0\Leftrightarrow 2a-3=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow b=3.$

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\\ y+\dfrac{1}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy+2=3y\\ xy+1=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+1=3x\\ y=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x+1=0\\ y=2x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\left\{(1;2);\left(\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-8=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1+6=\sqrt{x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=1-y+\sqrt{y^2+3}\\ y^2-2(x-2)=3\sqrt{(y+1)(y^2+2x)}\end{cases}$.

Lời giải

1) Xét phương trình: $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-8=0.\qquad (1)$

Ta có: $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.(m^2-2m-8)=9>0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm là $x=m+2$ và $x=m-4$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}x_1=m+2\\ x_2=m-4\end{cases}$. Để $x_1+6=\sqrt{x_2}$ thì $m+2+6=\sqrt{m-4}$

$\Leftrightarrow m+8=\sqrt{m-4} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m^2+16m+64=m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m^2+15m+68=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x_1=m-4 \\ x_2=m+2 \end{cases}$. Để $x_1+6=\sqrt{x_2}$ thì $m-4+6=\sqrt{m+2}$ (điều kiện: $m \geq -2$)

$\Leftrightarrow m+2=\sqrt{m+2} \Leftrightarrow \sqrt{m+2}\left(\sqrt{m+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-1 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy $m \in \{-2;-1\}$ là các giá trị cần tìm.

2) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=1-y+\sqrt{y^2+3} & (1) \\ y^2-2(x-2)=3\sqrt{(y+1)(y^2+2x)} & (2) \end{cases}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (2x+y-1)=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow (2x+y-1)=\left[y^2+3-4\left(x^2-x+1\right)\right].\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow (2x+y-1)=\left[y^2-\left(4x^2-4x+1\right)\right].\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow (2x+y-1)=\left[y^2-(2x-1)^2\right].\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow (2x+y-1)=(y-2x+1).(y+2x-1).\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow (2x+y-1)\left[\dfrac{y-2x+1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y-1=0 \\ y-2x+1=\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $2x+y-1=0 \Rightarrow 2x=-y+1$, thay vào phương trình (2), ta được

$y^2-1+y+4=3\sqrt{(y+1)(y^2-y+1)} \Leftrightarrow y^2-y+1+2y+2=3\sqrt{(y+1)(y^2-y+1)}$.

Đặt $\begin{cases} a=y+1 \\ b=y^2-y+1 \end{cases}$, ta được phương trình: $2a^2-3ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(2a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a=b \end{array}\right.$.

Với $a=b \Rightarrow y+1=y^2-y+1 \Leftrightarrow y^2-2y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $2a=b \Rightarrow 2y+2=y^2-y+1 \Leftrightarrow y^2-3y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-\sqrt{13}-1}{4} \\ y=\dfrac{-\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{4} \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $y-2x+1=\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}$ (điều kiện: $y-2x+1 \geq 0$).

Bình phương hai vế ta được: $(y-2x+1)^2 = y^2+3+4(x^2-x+1)+4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)}$

$\Leftrightarrow y^2+4x^2+1-4xy-4x+2y = y^2+4x^2-4x+7+4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)}$

$\Leftrightarrow -4xy+2y-6 = 4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 2x+3 \\ (-2xy+y-3)^2 = 4(y^2+3)(x^2-x+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 2x+3 \\ 3(4x^2+y^2+1-4xy-4x+2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 2x+3 \\ 3(-2x+y+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 2x+3 \\ 2x = y+1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là

$$(x;y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2};0\right); \left(\frac{-1}{2};2\right); \left(\frac{-\sqrt{13}-1}{4};\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{13}-1}{4};\frac{-\sqrt{13}+3}{2}\right) \right\}.$$

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\left(x-\sqrt{3}\right)^3 + \left(x+\sqrt{5}\right)^3 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^3 = 0$.

2) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \ne 0)$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $2a-b+c=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (xy)^3 + 3xy^3 + 2 = 6y^2 \\ 3xy^3 = y^2+2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Đặt $\begin{cases} u = x-\sqrt{3} \\ v = x+\sqrt{5} \end{cases}$, khi đó $\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x = -(u+v)$.

Phương trình đã cho trở thành: $u^3+v^3-(u+v)^3 = 0 \Leftrightarrow 3(u+v)uv = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=0 \\ u=0 \\ v=0 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $u+v=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{3}+x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$.

Trường hợp 2: $u=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$.

Trường hợp 3: $v=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{5}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2};\sqrt{3};\sqrt{5}\right\}$.

2) Ta có: $\Delta = b^2-4ac = b^2-4a(b-2a) = (2a-b)^2+4a^2 > 0,\ \forall a \ne 0; b$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Giả sử 2 nghiệm đã cho là x_1, x_2.Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Từ giả thiết $2a-b+c=0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}=2$, do đó $-(x_1+x_2)-x_1x_2=2 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1)=-1.\ (*)$

Nếu 2 nghiệm đều dương thì $(x_1+1)(x_2+1)>1$, mâu thuẫn với $(*)$.

Vậy 2 nghiệm của phương trình không thể đều dương.

3) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} (xy)^3+3xy^3+2=6y^2 \\ 3xy^3=y^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^3+3xy.y^2+2=6y^2 \\ 3xy.y^2=y^2+2 \end{cases}$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của phương trình $3xy.y^2=y^2+2$ nên $y\neq 0$

$\Rightarrow 3xy=\dfrac{y^2+2}{y^2}>0 \Leftrightarrow xy>0.$

Đặt $\begin{cases} u=xy \\ v=y^2 \end{cases} (u>0)$, hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} u^3+3uv+2=6v \\ 3uv=v+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3uv=v+2 \\ u^3+4=5v \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u.\dfrac{u^3+4}{5}=v+2 \\ v=\dfrac{u^3+4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u.\dfrac{u^3+4}{5}=\dfrac{u^3+4}{5}+2 \\ v=\dfrac{u^3+4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^4-u^3+12u-14=0 \\ v=\dfrac{u^3+4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-1)(3u^3+2u^2+2u+14)=0 \\ v=\dfrac{u^3+4}{5} \end{cases}.$$

Vì $u>0$ nên $u=1 \Rightarrow v=1$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} xy=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1);(-1;-1)\}$.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=1+\sqrt{2x-1}$

Bình phương hai vế, rút gọn, ta được $2\sqrt{2x-1}=x+1$ (điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow 4(2x-1)=(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;5\}$.

2) Điều kiện: $\begin{cases}xy\ge 0\\x;\ y\ge -1\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=x.y\end{cases}$ $(S^2\ge 4P)$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}S-\sqrt{P}=3\\S+2+2\sqrt{S+P+1}=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S\ge 3;\\P=(S-3)^2\\2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=7-S\end{cases}.$$

Xét phương trình: $2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=7-S \Leftrightarrow \begin{cases}S\le 7\\4(S^2-5S+10)=49-14S+S^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}S\le 7\\3S^2-6S-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S=-1\\S=3\end{array}\right.$.

Kết hợp với $S\ge 3$, ta được $S=3$ thoả mãn.

Khi đó, ta có $\begin{cases}S=3\\P=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\{(0;3);(3;0)\}$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Sơn La năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x-5}=7$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy-2y^2=x+2y\\x^3+2x^2y=x^2+y^2-1\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x^2-4x-5\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -1\\x\ge 5\end{array}\right.$.

Ta có: $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x-5}=7 \Leftrightarrow x^2-4x-5+\sqrt{x^2-4x-5}-2=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x-5}$, $(t\ge 0)$, ta được phương trình: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $t\ge 0$, ta được: $t=1$ thoả mãn.

Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x-5}=1 \Leftrightarrow x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{10}\\x=2-\sqrt{10}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm tập nghiệm là $S=\left\{2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}\right\}$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=x+2y & (1) \\ x^3+2x^2y=x^2+y^2-1 & (2) \end{cases}$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x^2+(y-1)x-2y^2-2y=0$.

$\Delta=y^2-2y+1+8y^2+8y=9y^2+6y+1=(3y+1)^2\ge 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-y+3y+1}{2}=y+1 \\ x=\dfrac{1-y-3y-1}{2}=-2y \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $x=y+1$ thế vào (2) ta được:

$$x^3+2x^2(x-1)=x^2+(x-1)^2-1\Leftrightarrow 3x^3-4x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=-1.$$

Trường hợp 2: Với $x=-2y$ thế vào (2) ta được:

$$-8y^3+2(-2y)^2.y=4y^2+y^2-1\Leftrightarrow 5y^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x=-2\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x=2\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left\{(0;-1);\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right);\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\dfrac{-\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$.

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $3x^2+x-6=4x\left(\sqrt{5x-6}-1\right)$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge\dfrac{6}{5}$.

Ta có: $3x^2+x-6=4x\left(\sqrt{5x-6}-1\right)\Leftrightarrow -x^2+5x-6=4x\left(\sqrt{5x-6}-x\right)$

$\Leftrightarrow -x^2+5x-6=4x.\dfrac{-x^2+5x-6}{\sqrt{5x-6}+x}\Leftrightarrow\left(-x^2+5x-6\right)\left(1-\dfrac{4x}{x+\sqrt{5x-6}}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -x^2+5x-6=0 \\ \dfrac{4x}{x+\sqrt{5x-6}}=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -x^2+5x-6=0 \\ \sqrt{5x-6}=3x \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $-x^2+5x-6=0\Leftrightarrow -(x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$ (thoả mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $3x=\sqrt{5x-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{6}{5} \\ 9x^2-5x+6=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2;3\}$.

2) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 & (1) \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) & (2) \end{cases}$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow (x+y)(x+2y)=3(xy+2) \Leftrightarrow x^2+2y^2=6$.

Thay $6=x^2+2y^2$ vào (1), ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3-xy^2-y(x^2+2y^2)=0 \Leftrightarrow x^3-xy^2-yx^2-2y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+xy+y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x^2+xy+y^2=0 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x=2y$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x=2y \\ x^2+2y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 6y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x^2+xy+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ (không thoả mãn $x^2+2y^2=$).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\{(-2;-1);(2;1)\}$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hoá năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2(3x+1)+\dfrac{7}{x}=5\sqrt{2x+7}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3y^2+3x-6y-4=0 \\ x^2-3x-2y+\sqrt{3x+y+5}=0 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{7}{2}; x \ne 0$.

Ta có $2(3x+1)+\dfrac{7}{x}=5\sqrt{2x+7} \Rightarrow 6x^2+2x+7=5x\sqrt{2x+7}$. $\quad (1)$

Đặt $\sqrt{2x+7}=t$ $(t \ge 0)$, phương trình (1) trở thành: $6x^2+t^2=5xt$

$\Leftrightarrow 6x^2-5xt+t^2=0 \Leftrightarrow (2x-t)(3x-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=t \\ 3x=t \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $2x=t \Rightarrow 2x=\sqrt{2x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2-2x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{29}}{4}$ (thoả mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $3x=t \Rightarrow 3x=\sqrt{2x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 9x^2-2x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1;\dfrac{1+\sqrt{29}}{4}\right\}$.

2) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3-3y^2+3x-6y-4=0 & (1) \\ x^2-3x-2y+\sqrt{3x+y+5}=0 & (2) \end{cases}$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x^3+3x=y^3+3y^2+6y+4\Leftrightarrow x^3+3x=(y+1)^3+3(y+1)$. $\quad (*)$

Đặt $u=y+1$, phương trình $(*)$ trở thành: $x^3+3x=u^3+3u\Leftrightarrow (u-x)(x^2+xu+u^2+3)=0$.

Do $x^2+xu+u^2+3=\left(x+\dfrac{u}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}u^2+3>0$ với mọi u, x nên $x-u=0$

$\Rightarrow x=u=y+1\Rightarrow y=x-1$.

Thay vào phương trình (2), ta được: $x^2-5x+2+2\sqrt{x+1}=0$ (điều kiện: $x\ge -1$)

$\Leftrightarrow x^2-4x+4-(x+1)+2\sqrt{x+1}-1=0\Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{x+1}-1 \\ x-2=-\sqrt{x+1}+1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{x+1} \\ 3-x=\sqrt{x+1} \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x-1=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-2x+1=x+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=2$.

Trường hợp 2: $3-x=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x^2-6x+9=x+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\left\{(3;2);\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$.

Bài 41. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2023 – 2024)

1) Tìm m để phương trình $x^2-2(m-1)x-m^2+2m-3=0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2+1}-x_1=\sqrt{x_2^2+1}+x_2$.

2) Giải phương trình $2\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=9$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2y-3}+2y^2+4y=0 \\ x^2+1=xy \end{cases}$.

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2-2(m-1)x-m^2+2m-3=0$ có $\Delta'=2(m-1)^2+2>0, \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = -m^2 + 2m - 3 \end{cases}$.

Ta có $\sqrt{x_1^2+1} - x_1 = \sqrt{x_2^2+1} + x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} = x_1 + x_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} = x_1 + x_2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1} = x_1 - x_2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Trường hợp 2: $\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1} = x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 > 0 \Rightarrow x_1 > x_2$.

Vì $x_1x_2 = -m^2 + 2m - 3 = -(m-1)^2 - 2 < 0$ nên phương trình có 2 nghiệm trái dấu

$\Rightarrow x_1 > 0$ và $x_2 < 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = |x_1| + |x_2| = \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} < \sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}$.

Do đó trường hợp này không có giá trị m thoả mãn.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

2) Điều kiện: $-9 \le x \le 9$.

Ta có: $\left(\sqrt{x+9} - 3\right)\left(\sqrt{9-x} + 3\right) = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \sqrt{81 - x^2} + 3\left(\sqrt{x+9} - \sqrt{9-x}\right) - \dfrac{27}{2} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x+9} - \sqrt{9-x}$, suy ra $t^2 = 18 - 2\sqrt{81 - x^2}$, ta có phương trình

$\dfrac{18 - t^2}{2} + 3t - \dfrac{27}{2} = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 3t - 9 = 0 \Leftrightarrow -(t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Với $t = 3$, ta có $\sqrt{x+9} - \sqrt{9-x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+9} = 3 + \sqrt{9-x}$

$\Leftrightarrow x + 9 = 18 - x + 6\sqrt{9-x} \Leftrightarrow 6\sqrt{9-x} = 2x - 9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{9}{2} \\ 36(9-x) = 4x^2 - 36x + 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{9}{2} \\ 4x^2 = 243 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3) Xét phương trình $\begin{cases} \sqrt{x - 2y - 3} + 2y^2 + 4y = 0 & (1) \\ x^2 + 1 = xy & (2) \end{cases}$.

Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên $y \ne 0$.

Từ (2), suy ra $y = x + \dfrac{1}{x}$. Thay vào (1), ta được: $\sqrt{-x - \dfrac{2}{x} - 3} + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x^2+2x+1\right)+2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x+1\right)^2+2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow -x-\frac{2}{x}-3=x+1=\frac{1}{x}+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$

Với $x=-1$, ta suy ra $y=-2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(-1;-2\right)$.

Bài 42. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2x^2+2x-1=3x\sqrt{2x-1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2x+4y \\ 2x^3+y^3=3x+3y \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge \frac{1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\ge 0$, phương trình đã cho trở thành

$$2x^2+t^2=3xt \Leftrightarrow t^2-3xt+2x^2=0 \Leftrightarrow \left(t-x\right)\left(t-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=2x \end{array}\right..$$

Với $t=x \Rightarrow \sqrt{2x-1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 2x-1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Với $t=2x \Rightarrow \sqrt{2x-1}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 2x-1=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4x^2-2x+1=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1\right\}$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2x+4y & (1) \\ 2x^3+y^3=3x+3y & (2) \end{cases}$.

Lấy phương trình $\left(1\right)$ trừ phương trình $\left(2\right)$ vế theo vế ta được

$x^3-y^3=-x+y \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)+x-y=0$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x=y$ (do $x^2+xy+y^2+1=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1>0,\ \forall x;\ y$).

Thay $y=x$ vào phương trình $\left(1\right)$, ta được $3x^3=6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow x=y=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow x=y=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)\in\left\{\left(0;0\right);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

Bài 43. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chính Minh năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $x=\dfrac{5}{x-1}+2\sqrt{x-2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{9y+49}{x+y}+x+y=23\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=7\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge 2$.

Ta có: $x=\dfrac{5}{x-1}+2\sqrt{x-2}\Rightarrow x^2-x-5=2(x-1)\left(\sqrt{x-2}\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(x-2)-2(x-1)\sqrt{x-2}=4\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{x-2}\right)^2=4.$

Vì $(x-1)^2-(x-2)=x^2-3x+3>0$ nên $x-1-\sqrt{x-2}>0$.

Suy ra $x-1-\sqrt{x-2}=2\Leftrightarrow x-3=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ x^2-7x+11=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0$ và $x+y\ne 0$.

Với chú ý $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$, phương trình thứ hai của hệ có thể được viết lại thành: $x+y-\sqrt{xy}=7$. $\quad(1)$

Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $9y+49+(x+y)^2=23(x+y)$, hay

$$9\left(7+\sqrt{xy}-x\right)+49+\left(\sqrt{xy}+7\right)^2=23\left(\sqrt{xy}+7\right).$$

Sau khi thu gọn, ta được $x(y-9)=0$. Từ đó $x=0$ hoặc $y=9$. Kết hợp với (1), ta tìm được các nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình đã cho là $(x;y)\in\{(0;7);(1;9);(4;9)\}$.

Bài 44. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tuyên Quang năm học 2023 – 2024)

Cho phương trình $x^4-4x^2+m+2=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=-7$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=2x_1x_2x_3x_4.$$

Lời giải

a) Thay $m=-7$ vào phương trình (1), ta được: $x^4-4x^2-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=-1\\ x^2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$.

Vậy với $m=-7$ thì phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

b) Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-4t+m+2=0$. $\quad(*)$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt cùng dương.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m-2>0\\ 4>0\\ m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \forall m\\ m>-2\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2.$$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases}t_1+t_2=4\\ t_1t_2=m+2\end{cases}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1^2=x_2^2=t_1;\ x_3^2=x_4^2=t_2\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2=-t_1\\ x_3x_4=-t_2\end{cases}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}+\dfrac{1}{x_4^2}=2x_1x_2x_3x_4\Leftrightarrow\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\dfrac{1}{t_2}=2t_1t_2\Leftrightarrow\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=t_1t_2$.

$\Leftrightarrow\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=t_1t_2\Rightarrow t_1+t_2=\left(t_1t_2\right)^2\Rightarrow 4=(m+2)^2\Leftrightarrow m+2=2\Leftrightarrow m=0$ (do $m+2>0$).

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 45. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 – 2024)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-5x+3m+1=0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}\\ x^2-y^2=5\end{cases}$.

Lời giải

1) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta=5^2-4(3m+1)>0\Leftrightarrow 21-12m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{7}{4}$.

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=5\\ x_1x_2=3m+1\end{cases}$.

Ta có: $\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5^2-4(3m+1)}=\sqrt{21-12m}$.

Theo yêu cầu đề bài: $\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)\right|=\left|5\left(x_1-x_2\right)\right|=5\left|x_1-x_2\right|=5\sqrt{21-12m}$.

Suy ra $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15\Leftrightarrow 5\sqrt{21-12m}=15\Leftrightarrow m=1$ (thoả mãn).

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

2) Điều kiện: $x\ne 0;\ y\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

$\Rightarrow x^4-5x^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=9 \\ x^2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=2 \\ x=-3 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(3;2);(-3;-2)\}$.

Bài 46. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$.

2) Giải phương trình $x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7}$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14 \end{cases}$.

Lời giải

1) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$

$\Leftrightarrow [(x-1)(x+6)][(x+2)(x+3)]=160$

$\Leftrightarrow (x^2+5x-6)(x^2+5x+6)=160$

$\Leftrightarrow (x^2+5x)^2-36=160$

$\Leftrightarrow (x^2+5x)^2=196$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=14 \\ x^2+5x=-14 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x^2+5x=14 \Leftrightarrow (x+7)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x^2+5x=-14 \Leftrightarrow x^2+5x+14=0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{2;-7\}$.

2) Điều kiện: $x\ge -7$.

Ta có: $x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7} \Leftrightarrow (x+1)^2+x+7-2(x+1)\sqrt{x+7}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x+7}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x+7}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+2x+1=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+x-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{2\}$.

3) Điều kiện: $x,\ y \ne 0$.

Ta có: $\begin{cases} x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{x^2}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}+y+\dfrac{1}{y}=6 \\ \left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=20 \end{cases}$.

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=a;\ y+\dfrac{1}{y}=b,$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a+b=6 \\ a^2+b^2=20 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ (a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ \left[\begin{array}{l} a-b=2 \\ a-b=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \end{array}\right..$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=4 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+2=0 \\ y^2-4y+1=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,;y)=\left\{\left(2+\sqrt{2};1\right);\left(2-\sqrt{2};1\right)\right\}$.

Bài 47. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội năm học 2023 – 2024)

1) Giải phương trình $2x+1+2\sqrt{4x^2+6x}=4\sqrt{5x-x^2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=30+\sqrt{x+y+120} \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện: $0 \le x \le 5$.

Ta có: $2x+1+2\sqrt{4x^2+6x}=4\sqrt{5x-x^2} \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}\sqrt{4x+6}+4x+6=4x+4\sqrt{x}\sqrt{5-x}+5-x$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{4x+6}\right)^2=\left(2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{4x+6}=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$ (do hai vế không âm)

$\Leftrightarrow\sqrt{4x+6}=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}\Leftrightarrow 4x+6=x+5-x+2\sqrt{x(5-x)}\Leftrightarrow 4x+1=2\sqrt{x(5-x)}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 5\\16x^2+8x+1=4x(5-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 5\\20x^2-12x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1}{10}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{10}\right\}$.

2) Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases}SP=30\\S^3-3SP=30+\sqrt[3]{S+120}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=30\\S^3=120+\sqrt[3]{S+120}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}SP=30\\S^3+S=(S+120)+\sqrt[3]{S+120}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=30\\S=\sqrt[3]{S+120}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=6\\S=5\end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=2\\X=3\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\{(2;3);(3;2)\}$.

Bài 48. (Đề thi vào 10 trường chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2023 – 2024)

1) Cho phương trình $x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0$ (1) (m là tham số). Chứng minh với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2xy-x=10\\x+y+xy=11\end{cases}$.

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0$ (1) là phương trình bậc hai ẩn x có các hệ số $a=1,\ b=-(2m-1),\ c=-(m^2+1)$

$\Rightarrow ac=-(m^2+1)<0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2.

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\x_1x_2=-(m^2+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{x_1+x_2+1}{2}\\x_1x_2=-(m^2+1)\end{cases}$

$$\Rightarrow x_1x_2=-\left[\left(\frac{x_1+x_2+1}{2}\right)^2+1\right]\Leftrightarrow x_1x_2+\frac{(x_1+x_2+1)^2}{4}+1=0.$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1.x_2+\dfrac{(x_1+x_2+1)^2}{4}+1=0.$

2) Ta có: $\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y-1) = 10 \\ (x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$.

Vì $x; y$ là các số nguyên nên $x \in Ư(10) = \{-10;-5;-2;-1;1;2;5;10\}$.

Mặt khác: $x+1 \in Ư(12) = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$.

Kết hợp, ta được $x \in \{-5;-2;1;2;5\}$.

Lại có $2y-1$ là số lẻ nên x là số chẵn $\Rightarrow x \in \{-2;2\}$.

Trường hợp 1: $x = -2 \Rightarrow \begin{cases} -2(2y-1) = 10 \\ -(y+1) = 12 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2: $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2(2y-1) = 10 \\ 3(y+1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3.$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(x;y) = (2;3)$.