TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP TRONG CÁC KỲ THI CHUYÊN NĂM 2023 – 2024

Bài 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đẳng thức:

$$x^3+x^2y-2xy+2x-2y^2+2y+1=0$$

b) Cho 31 điểm bất kì nằm bên trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 12. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 nằm bên trong hình vuông ABCD và không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho.

Bài 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

1) Tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023.$$

2) Trên mặt phẳng cho 2×2024 điểm phân biệt, trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàng người ta tô 2024 điểm trong các điểm màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ-xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung.

Bài 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Cho các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$.

1) Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=xyz$

Bài 4. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Tìm tất cả giá trị nguyên của n để n^2+2026 là một số chính phương.

Bài 5. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Bài 6. *(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023-2024)*

a) Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a)=S(b)=S(a+b)$. Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$

Bài 7. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình $x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0$.

Bài 8. *(Trường chuyên tỉnh Đăk lak năm 2023-2024)*

1) Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích là S.

2) Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó ta luôn chọn được năm đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Bài 9. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2=2023^z+35$.

Bài 10. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023-2024)*

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Bài 11. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Bài 12. *(Trường chuyên Hà Nội chuyên tin năm 2023-2024)*

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thoả mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$

Bài 13. *(Trường chuyên Hà Nội chuyên toán năm 2023-2024)*

1) Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Bài 14. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Bài 15. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023-2024)*

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$

Bài 16. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023-2024)*

Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Bài 17. *(Trường chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)*

Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình $2024(x^2+y^2)-2023(2xy+1)=5$.

Bài 18. *(Trường chuyên Khánh Hòa năm 2023-2024)*

Chứng minh p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Bài 19. *(Trường chuyên Khoa học Tự Nhiên HN năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn $4^x+(1+3^y)(1+7^y)=2^x(3^y+7^y+2)$

Bài 20. *(Trường chuyên Lai Châu năm 2023-2024)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$

Bài 21. *(Trường chuyên Lao Cai năm 2023-2024)*

a) Số nguyên dương m được gọi là số tốt nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng 6m+8. Chứng minh rằng nếu có hai số a pq là số tốt thì pq + 2 là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^{2025}+y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$

Bài 22. *(Trường chuyên Nam Định năm 2023-2024)*

a) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $a^3 \vdots b$; $b^3 \vdots a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right) \vdots ab$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x\left(x^2-y\right)+(y-3)\left(x^2+1\right)=0$

Bài 23. *(Trường chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An năm 2023-2024)*

a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên

b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho 2a là số lập phương và 5a là số chính phương

Bài 24. *(Trường chuyên ĐH Vinh - Nghệ An năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-y^2+2(3y+y)=23.$

b) Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\le 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số $b,c.$

Bài 25. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023-2024)*

Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $\left(x^2+1\right) \vdots p$ thì $p-1 \vdots 4$

b) Chứng minh $2023p+23^p-24$ không là số chính phương.

Bài 26. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ chuyên tin năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n+6^n+2023^n$ cho 11.

Bài 27. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ chuyên toán năm 2023-2024)*

a) Cho các số nguyên a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0.$ Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P\left(x^2-2\right)$ chia hết cho $P(x)$.

Bài 28. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023-2024)*

a) Cho x,y là các số nguyên dương thỏa mãn x^2-y và x^2+y đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

b) Tìm các số nguyên dương a,b thỏa mãn $a^3-2(a+b)^2=b^3+19$.

Bài 29. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

1) Chứng minh n^2+3n+1 là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b sao cho $4a^2+b+4$; $4b^2+a+4$ đều là số chính phương.

Bài 30. *(Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023-2024)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2+2y^2(x+1)+(y+2)^2-9=0$

Bài 31. *(Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023-2024)*

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24

Bài 32. *(Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2023-2024)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5+2024x=y^5+1$

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2+1=y^2$. Chứng minh $2y+2$ là số chính phương

Bài 33. *(Trường chuyên tỉnh Quốc Học Huế năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số thực a sao cho $a+\sqrt{2023}$ và $\frac{999}{a}+\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

Bài 34. *(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023-2024)*

Cho hai số nguyên p,q thỏa mãn đẳng thức $p^2+q^2=2(3pq-4)$ (*)

1) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p,q là bội của 3

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa (*)

Bài 35. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2023-2024)*

Xét các số nguyên $a<b<c$ thỏa mãn $n=a^3+b^3=c^3-3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a<0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a,b,c $(a<b<c)$ sao cho n là một ước của 2023.

Bài 36. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+x+6 là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2=-2(x^6-x^3y-32)$.

Bài 37. *(Trường chuyên ĐH Sư Phạm HN – vòng 2 năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Bài 38. *(Trường chuyên ĐHSPHN – vòng 1 năm 2023-2024)*

Có hay không các số nguyên a,b sao cho $\left(a+b\sqrt{2023}\right)^2=2024+2023\sqrt{2023}$?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$x^3 + x^2y - 2xy + 2x - 2y^2 + 2y + 1 = 0$$

b) Cho 31 điểm bất kì nằm bên trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 12. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 nằm bên trong hình vuông ABCD và không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $(x+y)(x^2 - 2y + 2) = -1$. Do đó có hai khả năng xảy ra:

TH1: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-2y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2-2y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+2x+3=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy có duy nhất cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu là: (-1 ; 2) .

b) Ta chia hình vuông ABCD thành 36 hình vuông có độ dài cạnh bằng 2. Khi đó có ít nhất một hình vuông không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho. Hình tròn nội tiếp hình vuông đã cho là hình tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

1) Tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3 + y^3 + x^2(3y+2z) + y^2(3x+2z) + z^2(x+y) + 4xyz = 2023.$$

2) Trên mặt phẳng cho 2×2024 điểm phân biệt, trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàng người ta tô 2024 điểm trong các điểm màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ-xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung.

Lời giải

1) $x^3 + y^3 + x^2(3y+2z) + y^2(3x+2z) + z^2(x+y) + 4xyz = 2023.$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3x^2y + 2x^2z + 3xy^2 + 2y^2z + z^2x + z^2y + 4xyz = 2023$

$\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + (2x^2z + 2y^2z + 4xyz) + (z^2x + z^2y) = 2023$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 + 2z(x+y)^2 + z^2(x+y) = 2023$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2 + 2z(x+y) + z^2\right] = 2023$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z)^2 = 7.17^2$

Vì x,y,z nguyên dương nếu ta có x + y + z > 0, do đó : $\begin{cases} x+y=7 \\ x+y+z=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ z=10 \end{cases}$

Có x + y = 7 mà x, y nguyên dương nên ta có

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

KL: các bộ số cần tìm là $(1;6;10);(2;5;10);(3;4;10);(4;3;10);(5;2;10);(6;1;10)$

2) Xét tất cả các cách nối 2024 cặp điểm (đỏ với xanh) bằng 2024 đoạn thẳng. các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại do chỉ có 2024 cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn.
Do đó, tìm được một cách nối có tổng độ dài bằng các đoạn thẳng là ngắn nhất.
Ta chứng minh rằng đây là một cách nối phải tìm
Thật vậy, giả sữ ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh). khi đó nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn thẳng khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:
$AY+BX<(AO+OY)=(AO+OX)+(BO+OY)\Rightarrow AY+BX<AX+BY$
Như vậy, việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.
Điều vô lý chứng tỏ: cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

Bài 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*
Cho các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$.

1) Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=xyz$

Lời giải

1. Từ giả thiết ta có $(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)=17(x+y+z)$

Tích của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6 nên $x^3-x=(x-1)x(x+1)\vdots 6$

Tương tự $y^3-y\vdots 6,\ z^3-z\vdots 6\Rightarrow 17(x+y+z)\vdots 6$

Mà 17 và 6 nguyên tố cùng nhau nên $x+y+z\vdots 6$

2. Ta có $x+y+z=6m,\ x^3+y^3+z^3=108m$, với $m\in\mathbb{N}^*$.

Vì $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$ nên $\dfrac{108m}{3}\ge\left(\dfrac{6m}{3}\right)^3\Leftrightarrow m^2\le\dfrac{9}{2}\Rightarrow m\le 2$

Lúc này $F=xyz\le\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3\le\left(\dfrac{12}{3}\right)^3=64$ (1)

Từ $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ suy ra

$108m-3F=6m(36m^2-3(xy+yz+zx))\Leftrightarrow F=36m-6m(12m^2-(xy+yz+zx))$.

Do đó $F\vdots 6$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F\le 60$ (3).

Đẳng thức ở (3) xảy ra, chẳng hạn khi

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 60=72-12\left(48-\left(xy+yz+zx\right)\right) \\ xyz=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ xy+yz+zx=47 \\ xyz=60 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x;y;z\right) \text{ là hoán vị của } \left(3;4;5\right)$$

Vậy giá trị lớn nhất của F là 60, đạt được chẳng hạn khi $\left(x;y;z\right)$ là hoán vị của $\left(3;4;5\right)$

Bài 4. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Tìm tất cả giá trị nguyên của n để n^2+2026 là một số chính phương.

Lời giải

Đặt $n^2+2026=m^2\left(m\in\mathbb{N}^*, m\ge 46\right)\Leftrightarrow (m-n)(m+n)=2026=2.1013$ (*)

Vì $m-n, m+n$ cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow$ không có cặp số m,n thỏa phương trình (*)

Vậy không có giá trị nguyên của n thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 5. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ chia hết cho 24.

Lời giải

a) Ta có $x^2+xy+y^2=x^2y^2 \Leftrightarrow x^2-x^2y^2+xy+y^2=0 \Leftrightarrow \left(1-y^2\right)x^2+xy+y^2=0 \quad \left(1\right)$

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $1-y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm1$.

+) Với $y=1$ ta có $x^2+x+1=x^2 \Leftrightarrow x=-1$.

+) Với $y=-1$ ta có $x^2-x+1=x^2 \Leftrightarrow x=1$.

Trường hợp 2: $1-y^2\ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y\ne 1 \\ y\ne -1. \end{cases}$

Xét phương trình bậc hai $\left(1-y^2\right)x^2+xy+y^2=0$, có

$$\Delta_x=y^2-4\left(1-y^2\right)y^2=y^2\left(4y^2-3\right).$$

+) Nếu $y=0$ ta có $x=0$.

+) Nếu $y\ne 0$, phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $4y^2-3$ là số chính phương.

Đặt $4y^2-3=k^2 \ \left(k\in\mathbb{N}\right)$.

$$4y^2-3=k^2 \Leftrightarrow \left(2y-k\right)\left(2y+k\right)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-k=1 \\ 2y+k=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-k=-3 \\ 2y+k=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ k=1 \end{cases} \left(ktm\right) \\ \begin{cases} y=-1 \\ k=1 \end{cases} \left(ktm\right). \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $\left(0;0\right),\left(1;-1\right),\left(-1;1\right)$.

b) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, ta có $p=2k+1$ $(k\in\mathbb{N},\ k>1)$.

Do đó ta có $(p-1)(p+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)\vdots 8$

+) Nếu $p=3k \Rightarrow p=3$ (loại vì p là số nguyên tố lớn hơn 3).

+) Nếu $p=3k+1$, ta có $(p-1)(p+1)=3k(3k+2)\vdots 3$.

+) Nếu $p=3k+2$, ta có $(p-1)(p+1)=3(3k+1)(k+1)\vdots 3$.

Vì $(3;8)=1$ nên $(p-1)(p+1)\vdots 24$ với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Bài 6. *(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023-2024)*

a) Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a)=S(b)=S(a+b)$. Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$

Lời giải

a) Ta áp dụng tính chất $a-S(a)\vdots 9$ với mọi số nguyên dương a (bạn đọc tự chứng minh tính chất này)

Vậy $a+b-S(a)=a+b-S(a+b)\vdots 9 \Rightarrow (a-S(a))+b\vdots 9 \Rightarrow b\vdots 9$

Tương tự , ta được $a\vdots 9$. Vậy a , b chia hết cho 9 (đpcm)

b) Phương trình viết lại:

$$2x^2+2x+1=2y^4+4y^3+6y^2+4y+1$$
$$\Rightarrow 2x^2+2x+2=2y^4+4y^3+6y^2+4y+2$$
$$\Rightarrow x^2+x+1=(y^2+y+1)^2$$

Vậy từ đây ta được x^2+x+1 là số chính phương hay $4x^2+4x+4=(2x+1)^2+3$ là số chính phương.

Đặt $(2x+1)^2+3=t^2\ (t\in\mathbb{Z})$ (**)

Ta có: $(**)\Leftrightarrow t^2-(2x+1)^2=3 \Leftrightarrow (t-2x-1)(t+2x+1)=3$

Xét tất cả các trường hợp sau:

$t-2x-1$	1	3	-1	-3
$t+2x+1$	3	1	-3	-1
t	2	2	-2	-2
x	0	-1	-1	0

Vậy $x=0$ và $x=-1$

Với x = 0 thay vào (*), ta được:

$$(*)\Leftrightarrow (y^2+y+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+y+1=1 \Leftrightarrow y^2+y=0 \Leftrightarrow y(y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ y^2+y+1=-1\ (\text{vônghiem}) \end{array}\right.$$

Với $x=-1$ thay vào (*), ta được: $(*)\Leftrightarrow (y^2+y+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm $(x;y)=(0;0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1)$

Bài 7. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình $x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0$.

Lời giải

$x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0\left(x,y\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+3x+xy-2y^2+3y-x+2y-3=2$

$\Leftrightarrow x(x-2y+3)+y(x-2y+3)-(x-2y+3)=2$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(x-2y+3)=2$

Do đó ta có bốn trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y-1=2\\x-2y+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y-1=1\\x-2y+3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ (Nhận)

Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y-1=-1\\x-2y+3=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y-1=-2\\x-2y+3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ (Nhận)

Vậy cặp $(x;y)$ nguyên cần tìm là: $(1;1)$ và $(-2;1)$

Bài 8. *(Trường chuyên tỉnh Đăk lak năm 2023-2024)*

1) Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích là S.

2) Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó ta luôn chọn được năm đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Lời giải

1) Gọi $x,x+1,x+2,x+3,x+4,x+5,x+6,x+7,x+8$ với x là số nguyên dương lần lượt là cạnh của các hình vuông đã cho, suy ra

$S=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2+(x+6)^2+(x+7)^2+(x+8)^2$

Rút gọn $S=9x^2+72x+204$. Gọi hình vuông cần tìm có cạnh là y với y là số nguyên dương, ta có

$9x^2+72x+204=y^2\,(1)$

Ta có $9x^2+72x+204=9\left(x^2+8x+22\right)+6$ chia cho 9 dư 6.

Mặt khác y^2 chia cho 9 có số dư là $r\in\{0;1;4;7\}$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy không tồn tại hình vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Gọi các số tự nhiên $a_1,a_2,...,a_{17}$ lần lượt là độ dài đường kính 17 đường tròn đã vẽ và $r_1,r_2,...,r_{17}$ là số dư khi chia lần lượt $a_1,a_2,...,a_{17}$ cho 5. Ta có: $r_1,r_2,...,r_{17}\in\{0;1;2;3;4\}$

Nếu trong 17 số $r_1,r_2,...,r_{17}$ tồn tại năm số bằng nhau, chẳng hạn: $r_1=r_2=r_3=r_4=r_5$ thì ta có $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ chia hết cho 5.

Nếu trong 17 số $r_1,r_2,...,r_{17}$ không có năm số nào bằng nhau, tức là tối đa 4 số bằng nhau, chẳng hạn có 4 nhóm 4 số bằng nhau, như vậy 17 số dư được phân thành 4 lớp mà mỗi lớp có 4 phần tử và 1 lớp có 1 phần tử với các phần tử đại diện là 0;1;2;3;4. Lúc đó lấy trong mỗi lớp 1 số sẽ được năm số có giá trị đôi một khác nhau. Chẳng hạn $r_1\neq r_2\neq r_3\neq r_4\neq r_5$ và $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=10$ nên $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ chia hết cho 5.

Bài 9. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2=2023^z+35$.

Lời giải

Do vai trò của x, y đối xứng nhau nên giả sử $x\le y$.

Với $z=0$ thì $x^2+y^2=36$. (1)

Vì $x\le y$ nên $x^2\le 18\Rightarrow 0\le x\le 4$.

Thử trực tiếp, ta được $\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$ thỏa (1).

Với $z\ge 1$: Do $2023\,\vdots\,7,\ 35\,\vdots\,7$ nên $x^2+y^2\,\vdots\,7$. (2)

Đặt $x=7a+r,\ y=7b+t$ với a, b, r, t là các số tự nhiên thỏa $0\le r\le 6,\ 0\le t\le 6$. Khi đó

$$x^2+y^2=49a^2+14ar+49b^2+14bt+r^2+t^2. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $r^2+t^2\,\vdots\,7$.

Thử trực tiếp, ta thấy chỉ có $r=0,\ t=0$ thỏa mãn.

Do đó $x=7a,\ y=7b$.

Thay vào phương trình ban đầu:

$$49a^2+49b^2=2023^z+35\Leftrightarrow 7\left(a^2+b^2\right)=289^z.7^{z-1}+5.$$

Nếu $z>1$ ta có vế trái chia hết cho 7 và vế phải không chia hết cho 7 (vô lý).

Nếu $z=1$ ta có: $7\left(a^2+b^2\right)=289+5\Leftrightarrow a^2+b^2=42$.

Dễ dàng kiểm tra được phương trình $a^2+b^2=42$ không có nghiệm tự nhiên.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm

$\begin{cases}x=0\\y=6\\z=0\end{cases}, \begin{cases}x=6\\y=0\\z=0\end{cases}.$

Bài 10. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023-2024)*

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x+4000y=2023000 \Leftrightarrow 3x+4y=2023$

Suy ra $y=\dfrac{2023-3x}{4}\geq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq \dfrac{2019}{3}=673$

Mặt khác ta có $y=\dfrac{2023-3x}{4}=\dfrac{2024-4x-1+x}{4}=506-x+\dfrac{x-1}{4}$

Để y nguyên thì $x-1$ chia hết cho 4, suy ra $x=1+4k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Kéo theo $y=505-3k$.

Do đó $1\leq 1+4k\leq 673 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 168$.

Vậy có 169 cặp $(x;y)$

Bài 11. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^{n}$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$2^{2024}+2^{2027}+2^{n}=k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2024}+2^{n}=k^2 \Leftrightarrow \left(k+3.2^{1012}\right)\left(k-3.2^{1012}\right)=2^{n}$.

$$\Rightarrow \begin{cases}k+3.2^{1012}=2^{a}\\k-3.2^{1012}=2^{b}\\a,b\in\mathbb{N}, a+b=n\end{cases} \Rightarrow 2^{a}-2^{b}=3.2^{1013}$$

$$\Leftrightarrow 2^{b}(2^{a-b}-1)=3.2^{1013} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{a-b}-1=3\\2^{b}=2^{1013}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=2\\b=1013\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1015\\b=1013\end{cases} \Rightarrow n=2028$$

Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024}+2^{2027}+2^{n}$ là số chính phương

Bài 12. *(Trường chuyên Hà Nội chuyên tin năm 2023-2024)*

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thoả mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$

Lời giải

1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ nên p^2+2 là số lẻ $\Rightarrow 2^{p^2+2}\equiv 2 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $2^{p^2+2}-8 \vdots 3 \ (1)$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p^2 \equiv 1(mod 3) \Rightarrow p^2+2 \equiv 0(mod 3) \Rightarrow p^2+2=3k\ (k \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow 2^{p^2+2}=2^{3k}=8^k \equiv 1(mod 7) \Rightarrow 2^{p^2+2}-8 \vdots 7(2)$.

Mà $(3,7)=1$ (3). Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow 2^{p^2+2}-8 \vdots 21$ (ĐPCM).

2) $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$

Đặt $x-y=a,\ xy=b\left(a^2 \geq -4b\right)$.

Vì $2(x-y)^2+17>0 \Rightarrow x^3-y^3>0 \Rightarrow x-y>0 \Rightarrow a>0$

Ta có: $x^3-y^3=2(x-y)^2+17 \Rightarrow a^3+3ab=2a^2+17 \Rightarrow 17 \vdots a \Rightarrow a \in \{1;17\}$ (do $a>0$)

TH1: $a=1 \Rightarrow b=6 \Rightarrow (x,y) \in \{(3,2);(-2,-3)\}$ (thử lại thoả mãn)

TH2: $a=17 \Rightarrow b=\dfrac{-254}{3}$ (loại)

Vậy $(x,y) \in \{(3,2);(-2,-3)\}$

Bài 13. *(Trường chuyên Hà Nội chuyên toán năm 2023-2024)*

1) Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Lời giải

1) Nếu a,b,c đều không chia hết cho 3 thì a^2,b^2,c^2 chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 3 \\ abc \not\vdots\, 3 \end{cases} \Rightarrow M \not\vdots\, 3$ (vô lý)

Nếu a,b,c có một hoặc hai số không chia hết cho 3 và các số còn lại chia hết cho 3

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 3 \\ abc \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow M \not\vdots\, 3$ (vô lý)

Vậy $a,b,c \vdots 3 \Rightarrow abc \vdots 27\ (1)$

Lại có, nếu a,b,c đều lẻ thì $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 2 \\ 2abc \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow M \not\vdots\, 2$ (vô lý)

Vậy a,b,c có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow abc \vdots 2\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow abc \vdots 54$ vì $(2,27)=1$.

2) $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0 \Leftrightarrow xy\left(x^2-x+1\right)=(2x-y)^2$ (1)

Gọi $d=(x;y) \Rightarrow x=da; y=db$ với $(a;b)=1$ và a,b,d nguyên dương.

Khi đó (1) trở thành $d^2ab\left(d^2a^2-da+1\right)=d^2(2a-b)^2 \Leftrightarrow ab\left(d^2a^2-da+1\right)=(2a-b)^2$.

Suy ra $(2a-b)^2 \vdots a$ và $(2a-b)^2 \vdots b$

Ta có $(2a-b)^2 \vdots a$ mà $(a;b)=1 \Rightarrow (2a-b;a)=1 \Rightarrow \left((2a-b)^2;a\right)=1$ do đó $a=1$.

Từ $(2a-b)^2 \vdots b \Rightarrow 4a^2 \vdots b$ mà $(a;b)=1 \Rightarrow 4 \vdots b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \\ b=4 \end{array}\right.$ (do $b>0$)

+) TH1: $a=b=1 \Rightarrow x=y=d$.

Thay vào giả thiết ta được $d^4-d^3=0 \Rightarrow d=1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

+) TH2: $a=1;b=2$ không thỏa mãn.

+) TH3: $a=1;b=4$ suy ra $x=d;y=4d$

Thay vào giả thiết ta được $d^4-d^3=0 \Rightarrow d=1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy cặp số $(x;y) \in \{(1;1);(1;4)\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1=\left(n^{2024}-n^2\right)+\left(n^{2023}-n\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

$=n^2\left(n^{2022}-1\right)+n\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)=\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

Ta có $\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)=\left(n^2+n\right)\left[\left(n^3\right)^{674}-1\right]$

$=\left(n^2+n\right)\left(n^3-1\right).B=\left(n^2+n\right)(n-1)\left(n^2+n+1\right).B$ chia hết cho n^2+n+1

Lại có $n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2$

$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ chia hết cho n^2+n+1

Vậy $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ chia hết cho n^2+n+1 với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 nên A không phải là số nguyên tố.

Bài 15. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023-2024)*

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$

Lời giải

1. Đặt $A=2p^4-p^2+16$

Với $p=3$ thì $A=169=13^2$ là số chính phương. Vậy $p=3$ thoả mãn.

Với $p>3$ thì $p^2\equiv 1\pmod 3$. Suy ra $p^4=\left(p^2\right)^2\equiv 1\pmod 3$

Suy ra $A=2p^4-p^2+16\equiv 2.1-1+16\equiv 2\pmod 3$

Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.

2. Ta có phương trình

$$6x^2+7xy+2y^2+x+y-1=1$$
$$\Leftrightarrow 6x^2+\left(7y+1\right)x+2y^2+y-1=1$$
$$\Leftrightarrow \left(2x+y+1\right)\left(3x+2y-1\right)=1$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y+1=1\\3x+2y-1=1\end{cases}\ (1)\\ \begin{cases}2x+y+1=-1\\3x+2y-1=-1\end{cases}\ (2)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}$$

Bài 16. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023-2024)*

Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Lời giải

Ta có $(a-b)^2=4.5^m-20ab\,\vdots\,5\Rightarrow (a-b)\,\vdots\,5\Rightarrow (a-b)^2\,\vdots\,25$.

$a,b\ge 2\Rightarrow a^2+b^2+18ab=4.5^m\ge 80\Rightarrow m\ge 2$

$\Rightarrow 20ab=(a-b)^2-4.5^m\,\vdots\,25\Rightarrow 20ab\,\vdots\,25\Rightarrow ab\,\vdots\,5$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\,\vdots\,5\\b\,\vdots\,5\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a\,\vdots\,5\\b\,\vdots\,5\end{cases}\Rightarrow a=b=5;m=3.$$

Bài 17. *(Trường chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)*

Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình $2024\left(x^2+y^2\right)-2023\left(2xy+1\right)=5$.

Lời giải

$2024(x^2 + y^2) - 2023(2xy + 1) = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2023(x^2 + y^2) - 2023.2xy - 2023 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2023(x^2 + y^2 - 2xy) = 5 + 2023$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2023(x - y)^2 = 2028 \quad (*)$

Vì $x, y \in Z$. Do đó $\left|x-y\right|$ là số tự nhiên

Nhận xét: Nếu $\left|x-y\right|\ge 2$ thì $\left(x-y\right)^2\ge 4\Rightarrow 2023\left(x-y\right)^2\ge 8092$

Do đó $x^2 + y^2 + 2023(x - y)^2 > 2028$

Nên (*) không xảy ra. Nên $|x-y| \le 1$

Vậy có $|x-y| \in \{0;1\}$

* Xét $|x-y|$ = 0. Ta có: $x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Với x = y, từ (*) có $2x^2 = 2028$ mà $x;y \in \mathbb{Z}$ nên loại.

* Xét $|x-y|$ = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

Với $|x-y|=1$, từ (*) có $x^2+y^2=5$

+ Xét $y=x-1$. Ta có $x^2+(x-1)^2=5 \Rightarrow 2x^2-2x+1=5$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$. Với $\left[\begin{array}{l} x=2\,;\, y=1 \\ x=-1;\, y=-2 \end{array}\right.$

+ Xét $y=x+1$. Ta có $x^2+(x+1)^2=5 \Rightarrow 2x^2+2x+1=5$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Với $\left[\begin{array}{l} x=1\,;\, y=2 \\ x=-2;\, y=-1 \end{array}\right.$

Vậy các cặp số nguyên (x;y) cần tìm là $(-1;-2),(2;1),(1;2),(-2;-1)$

Bài 18. *(Trường chuyên Khánh Hòa năm 2023-2024)*

Chứng minh p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p không chia hết cho 2, 3 và 5 (1)

Ta có p^2 là số chính phương $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p^2 \equiv 0(\text{mod}3) \\ p^2 \equiv 1(\text{mod}3) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} p^2 \equiv 0(\text{mod}5) \\ p^2 \equiv 1(\text{mod}5) \\ p^2 \equiv 4(\text{mod}5) \end{array}\right. \end{cases}$

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1(\text{mod}3) \\ \left[\begin{array}{l} p^2 \equiv 1(\text{mod}5) \\ p^2 \equiv 4(\text{mod}5) \end{array}\right. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p^4 \equiv 1(\text{mod}3) \\ p^4 \equiv 1(\text{mod}5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p^4-1) \vdots 3 \\ (p^4-1) \vdots 5 \end{cases}$ (*)

Mặt khác từ (1) $\Rightarrow$ p lẻ

$\Rightarrow p^4 \equiv 1(\text{mod}16)$

$\Rightarrow \left(p^4-1\right) \vdots 16$ (**)

Từ (*), (**) và 3, 5, 16 nguyên tố cùng nhau suy ra $\left(p^4-1\right) \vdots \left(3 \cdot 5 \cdot 16\right) \Rightarrow \left(p^4-1\right) \vdots 240$.

Vậy p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Bài 19. *(Trường chuyên Khoa học Tự Nhiên HN năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn $4^x+\left(1+3^y\right)\left(1+7^y\right)=2^x\left(3^y+7^y+2\right)$

Lời giải

Cách 1. Ta có các biến đổi phương trình sau

$$4^x+\left(1+3^y\right)\left(1+7^y\right)=2^x\left(3^y+7^y+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-1+2+3^y+7^y+21^y=2^x\left(3^y+7^y+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(3^y+7^y+1-2^k\right)=21^y \quad (1)$$

Ta chứng minh UCLN $\left(2^x-1;3^x+7^y+1-2^x\right)=1$ .Thật vậy, nếu UCLN($2^x-1;3^x+7^y+1-2^x$) > 1 thì gọi p là ước nguyên tố chung của $2^x-1, 3^x+7^y+1-2^x$. Suy ra p | 3^y+7^y . chú ý là 3^y+7^y đều không chia hết cho 3, 7 nên $p \neq 3,7$. Lại có p| 21^y nên p $\in$ {3, 7} mâu thuẫn.

Vậy ƯCLN$\left(2^x-1;3^x+7^y+1-2^x\right)=1$ Ta xét hai trường hợp sau

- Nếu x là số chẵn thì 2^x-1 chia hết cho 3 và $3^x+7^y+1-2^x$ chia 3 dư 1.

Khi đó, từ phương trình (1) ta có $\begin{cases} 2^x-1=3^y \\ 3^x+7^y+1-2^x=7^y \end{cases}$

Suy ra $2^x=3^y+1$,Chi ý là $3^y \equiv 1,3$ (mod 8) nên 3^y+1 không chia hết cho 8. Từ đó $x=2$ và $y=1$.

Vậy $\left(x,y\right)=\left(2,1\right)$

Nếu x là số lẻ thì 2^x-1 chia 3 dư 1 và $3^x+7^y+1-2^x$ chia hết cho 3.

Khi đó, từ phương trình (1) ta có $\begin{cases} 2^x-1=7^y \\ 3^x+7^y+1-2^x=3^y \end{cases}$

Suy ra $2^x=7^y+1$. Về phải chia 7 dư 1 nên về trái chia 7 dư 1. Từ đó $x=3k, k \in \mathbb{N}^*$ và thay vào phương trình được

$$\left(2^k-1\right)\left(2^{2k}+2^k+1\right)=7^y$$

Vì ƯCLN $\left(2^k-1;2^{2k}+2^k+1\right) \in \left\{1,3\right\}$ nên ƯCLN$\left(2^k-1;2^{2k}+2^k+1\right)=1$. Vì $2^{2k}+2^k+1>1$ nên $2^k-1=1$ suy ra $k=1$ và $7^y=7$ nên $y=1$ và $x=3k=3$. Vậy $\left(x,y\right)=\left(3,1\right)$.

Vậy tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn là (2, 1), (3, 1) .

Cách 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$\left(2^x-7^y-1\right)\left(2^x-3^y-1\right)=0$$

Tới đây giải giống hai trường hợp ở trên.

Bài 20. *(Trường chuyên Lai Châu năm 2023-2024)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$

Lời giải

Ta có: $(2x+y)(x-y)+x+8y=22 \Leftrightarrow (2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$

$\Leftrightarrow (2x+y)(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5)=7$

Khi đó ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \end{cases} (l)$

TH4: $\begin{cases} x-y+3=1 \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases} (l)$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y) \in \{(-2;8);(-2;2)\}$

Bài 21. *(Trường chuyên Lào Cai năm 2023-2024)*

a) Số nguyên dương m được gọi là số tốt nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng 6m+8. Chứng minh rằng nếu có hai số a pq là số tốt thì pq + 2 là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^{2025}+y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$

Lời giải

a) Do p. q là các số nguyên nên pq có các ước dương là 1, p, q, pq.

Vì p, q là số tốt nên $p^2+q^2=6pq+8$ (1)

$\Leftrightarrow pq+2=p^2+q^2-5pq-6=p^2+q^2-2pq-3pq-6=(p-q)^2-3(qp+2)$

$\Leftrightarrow 4(qp+2)=(p-q)^2 \Rightarrow pq+2=\left(\dfrac{p-q}{2}\right)^2 (2)$

Từ (1) $\Leftrightarrow (p-q)^2=4pq+8$

Do $4pq+8 \vdots 2$ nên $(p-q)^2 \vdots 2$

$\Rightarrow p-q \vdots 2$ (Do 2 là số nguyên tố)

$\Rightarrow \dfrac{p-q}{2} \in Z$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow pq+2$ là số chính phương.

b) $x^{2025}-y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$. Đặt $x^{675}=m:y^{675}=n\Rightarrow y^{2025}=n^3:y^{1350}=n^2$

Do x,y $\in$ Z phương trình đã cho trở thành $m^3=n^3-n^2-n+2$

Xét $\left(n-1\right)^3-m^3=-2n^2+4n-3=-2(n^2-2n+1)-1=2(n-1)^2-1<0$

Do $-2(n-1)^2-1<0$ với mọi n $\Rightarrow (n-1)^3<m^3$ (1)

Xét $(n+3)^3-m^3=10n^2+28n+25=10\left(n^2+\dfrac{14}{5}+\dfrac{49}{25}\right)+\dfrac{27}{5}=10\left(n+\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{27}{5}$

Do $10\left(n+\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{27}{5}>0$ với mọi n.

Suy ra $(n+3)^3>m^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :$(n+1)^3<m^3<(n+3)^3$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m^3=n^3 \\ m^3=(n+1)^3 \\ m^3=(n+2)^3 \end{array}\right.$

*TH1: $m^3=n^3\Leftrightarrow n^2+n-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=-2 \end{array}\right.$

Với $n=1\Rightarrow y^{675}=1\Rightarrow y=1(TM)$

Với $n=-2\Rightarrow y^{675}=-2\Rightarrow$ không có giá trị nào của y $\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Thay y=1 vào phương trình đã cho

$\Leftrightarrow x^{2025}+1=2$

$\Leftrightarrow x^{2025}=1$

$\Leftrightarrow x=1(TM)$

*TH2: $m^3=(n+1)^3\Leftrightarrow 4n^2+4n-1=0$

$\Delta=8$ không là số chính phương.

Suy ra không có giá trị $n\in\mathbb{Z}$.

*TH3: $m^3=(n+2)^3\Leftrightarrow 7n^2+13n+6=0$

$\Leftrightarrow (n+1)(7n+6)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} n=-1 \\ n=\dfrac{-6}{7} \end{array}\right.$ (loại vì n không thuộc $\mathbb{Z}$)

Với $n=-1\Rightarrow y^{675}=-1\Leftrightarrow y=-1(TM)$

Thay $y=-1$ vào phương trình ban đầu ta có:

$x^{2025}+1=2\Leftrightarrow{}^{2025}=1\Leftrightarrow x=1(TM)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x,y)\in\{(1;1);(1;-1)\}$

Bài 22. *(Trường chuyên Nam Định năm 2023-2024)*

a) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $a^3\,\vdots\, b$; $b^3\,\vdots\, a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right)\vdots\, ab$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x(x^2-y)+(y-3)(x^2+1)=0$

Lời giải

a) Vì $a^3 \vdots b$ nên $a^3.a \vdots b.a$ hay $a^4 \vdots ab$. Tương tự, vì $b^3 \vdots a$ nên $b^3.b \vdots a.b$ hay $b^4 \vdots ab$. Từ đấy suy ra $(a^4+b^4) \vdots ab$.

b) Từ đề bài $x(x^2-y)+(y-3)(x^2+1)=0$ ta rút ra $y=\dfrac{-x^3+3x^2+3}{x^2-x+1}=-x+2+\dfrac{3x+1}{x^2-x+1}$

(Vì $x^2-x+1>0$ với mọi x)

Khi x nguyên, để y là nguyên thì $(3x+1) \vdots (x^2-x+1)$ do đó;

$(3x+1)^2=(9x^2+6x+1)=9(x^2-x+1)+(15x-8) \vdots (x^2-x+1)$ hay $(15x-8) \vdots (x^2-x+1)$

Suy ra $13=\left[5(3x+1)-(15x-8)\right] \vdots (x^2-x+1)$

Như vậy:

❖ $x^2-x+1=13 \Rightarrow x^2-x-12=0 \Rightarrow x=-3$ hoặc $x=4$

Với $x=-3$ thì $y=\dfrac{57}{13}$ (không nguyên); với $x=4$ thì $y=-1$ (nguyên).

❖ $x^2-x+1=1 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=1$

Với $x=0$ thì $y=3$ (nguyên); với $x=1$ thì $y=5$ (nguyên).

Thử lại thấy các nghiệm trên đều thỏa mãn. Vậy có 3 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là (0; 3), (1;5) và (4; -1).

Bài 23. *(Trường chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An năm 2023-2024)*

a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\dfrac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên

b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho 2a là số lập phương và 5a là số chính phương

Lời giải

a) Theo giả thiết ta có thể đặt như sau $x+\sqrt{2024}=a, \dfrac{1}{x}-\sqrt{2024}=b$ thì $a,b \in \mathbb{Z}$

Bằng các phép biến đổi ta được

$$\left(a-\sqrt{2024}\right)\left(b+\sqrt{2024}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2024}(a-b)=2025-ab$$

Vì $\sqrt{2024}$ vô tỷ và a – b, 2025 – ab nguyên nên a = b và 2025 = ab suy ra $a=b=\pm 45$

Khi đó bằng phép thế ta được

$x+\sqrt{2024}=a=\pm 45 \Leftrightarrow x \in \left\{45-\sqrt{2024}, -45-\sqrt{2024}\right\}$

Vậy tất cả giá trị x thỏa mãn là $x \in \left\{45-\sqrt{2024}, -45-\sqrt{2024}\right\}$

b) Theo giả thiết $2a=b^3\,(1)$ và $5a=c^2\,(2)$ với b,c là các số nguyên dương.

Từ (1) suy ra b^3 chia hết cho 2, mà 2 là số nguyên tố nên b chia hết cho 2.

Đặt b = 2d, thay vào (1) được $2a=8d^3$, hay là $a=4d^3\,(3)$.

Từ (2) suy ra c^2 chia hết cho 5, mà 5 là số nguyên tố nên c chia hết cho 5
Đặt c = 5e, thay vào (2) được $5a = 25e^2$, hay là $a = 5e^2\left(4\right)$
Từ (3) và (4) có $a = 4d^3 = 5e^2\left(5\right)$ với d,e là các số nguyên dương. Do 4 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (5) thì d^3 chia hết cho 5, suy ra d chia hết cho 5
Đặt d = 5k, thay vào (5) được $a = 5e^2 = 500k^3$ với k là số nguyên dương
Từ đó $e^2 = 100k^3 = 10^2k^3$. Điều này xảy ra với số k nhỏ nhất là k = 1, e = 10 và a = 500
Lúc đó $2a = 1000 = 10^3$ và $5a = 2500 = 50^2$ thỏa mãn bài toán
Vậy số nguyên dương a nhỏ nhất thỏa mãn là $a = 500$

Bài 24. *(Trường chuyên ĐH Vinh - Nghệ An năm 2023-2024)*
a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 + 2\left(3y + y\right) = 23$.
b) Cho đa thức $P\left(x\right) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $\left|c\right| \le 16$ và $\left|P\left(9\right)\right|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b,c.

Lời giải

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$x^2 - y^2 + 2\left(3x + y\right) = 23 \Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + 9\right) - \left(y^2 - 2y + 1\right) = 31 \Leftrightarrow \left(x + 3\right)^2 - \left(y - 1\right)^2 = 31$$

$$\Leftrightarrow \left(x - y + 4\right)\left(x + y + 2\right) = 31$$

Từ đây, ta xét bảng sau

$x - y + 4$	31	1	-31	-1
$x + y + 2$	1	31	-1	-31
x	13	13	-19	-19
y	-14	16	16	-14

Vậy tất cả các nghiệm $\left(x,y\right)$ thỏa mãn là $\left(13,-14\right);\left(13,16\right);\left(-19,16\right);\left(-19,-14\right)$.

b) Gọi hai nghiệm nguyên của $P\left(x\right) = x^2 + bx + c$ là u,v.

Theo định lý Vi – et ta được $u + v = -b$, $uv = c$.

Vì $\left|P\left(9\right)\right|$ là số nguyên tố nên $\left|\left(9 - u\right)\left(9 - v\right)\right|$ là số nguyên tố dẫn đến $\left|9 - u\right| = 1$ hoặc $\left|9 - v\right| = 1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\left|9 - u\right| = 1 \Leftrightarrow u \in \left\{8;10\right\}$.

Trường hợp 1. $u = 10$, vì $\left|c\right| \le 16$, nên $\left|v\right| \in \left\{0;1\right\} \Leftrightarrow v \in \left\{-1;0;1\right\}$.

Mặt khác $9 - 1 = 8, 9 - 0 = 9, 9 + 1 = 10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.

Trường hợp 2. $u = 8$, vì $\left|c\right| \le 16$, nên $\left|v\right| \le 2$.

Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v \in \left\{-2;2\right\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b,c tương ứng là $-10,16$ và $-6,-16$.

Vậy tất cả cặp $\left(b,c\right)$ thỏa mãn là $\left(b,c\right) \in \left\{\left(-10,16\right);\left(-6,-16\right)\right\}$.

Bài 25. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023-2024)*

Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $\left(x^2+1\right)\vdots p$ thì $p-1\vdots 4$

b) Chứng minh $2023p+23^p-24$ không là số chính phương.

Lời giải

a) Vì p là SNT lẻ nên p chỉ có 1 trong 2 dạng: 4k + 1 hoặc 4k + 3

Vì $(x^2 + 1) \vdots p$ nên p có dạng 4x + 1, hay $p-1=4k\vdots 4$.

b) Tồn tại STN x sao cho $2023p+23^p-24=x^2 \Leftrightarrow x^2+1=2023p+23^p-23$

Theo Fermat nhỏ, ta có $23^p-23\equiv 0\left(\text{mod } p\right)$

$\Rightarrow 2023p+23^p-23\equiv 0\ \left(\text{mod } p\right)$

$\Rightarrow x^2+1\equiv 0\ \left(\text{mod } p\right)\Rightarrow p=4k+1$

$\Rightarrow 2023p+23^p-24\equiv -p+\left(-1\right)^p\equiv 2\ \left(\text{mod } 4\right)$

Mà $x^2 \equiv 0,1$ (mod 4), mâu thuẫn

Vậy $2023p+23^p-24$ không là số chính phương.

Bài 26. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ chuyên tin năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n+6^n+2023^n$ cho 11.

Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$

Vì $\left(x;y\right)$ nguyên dương nên từ điều kiện $2x+1\vdots x^2-x-1$

$2x^2+x\vdots x^2-x-1\Rightarrow 2x^2-2x-2+3x+2\vdots x^2-x-1\Rightarrow 3x+2\vdots x^2-x-1$

Từ đó suy ra $\begin{cases}2x+1\vdots x^2-x-1\\3x+2\vdots x^2-x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+3\vdots x^2-x-1\\6x+4\vdots x^2-x-1\end{cases}\Rightarrow 1\vdots x^2-x-1$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=1\\x^2-x-1=-1\end{array}\right.$

+) Với $x^2-x-1=1\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\ \left(\text{loai}\right)\end{array}\right.$

Từ $x=2\Rightarrow\left(y^2+2y-9\right)=5\Leftrightarrow\left(y+1\right)^2=15$ (loại)

+ Với $x^2-x-1=-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\ \left(\text{loai}\right)\end{array}\right.$

Từ $x=1\Rightarrow -\left(y^2+y-9\right)=3\Leftrightarrow y^2+y-6=0\Leftrightarrow\left(y+3\right)\left(y-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-3\ \left(\text{loai}\right)\\y=2\end{array}\right.$

Vậy cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$ là $(x;y)=(1;2)$.

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n+6^n+2023^n$ cho 11.

Ta có: $3^n+8^n+7^n+4^n \vdots 11$ (vì n lẻ)

$\Rightarrow 4^n+8^n \vdots 11 \Rightarrow 4^n(1+2^n) \vdots 11 \Rightarrow 2^n+1 \vdots 11 \Rightarrow n=10k+5\,(k\in\mathbb{N})$

Ta có $6^n=6^{10k+5}=(6^{10})^k.6^5 \equiv -1 \pmod{11}; 2023^n \equiv -1 \pmod{11}$

Suy ra $2^n+6^n+2023^n \equiv -3 \equiv 8 \pmod{11}$

Vậy $2^n+6^n+2023^n \equiv 8 \pmod{11}$

Bài 27. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ chuyên toán năm 2023-2024)*

a) Cho các số nguyên a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0$. Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2-2)$ chia hết cho $P(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d) \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b)^3+(c+d)^3 \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^3-3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 \vdots 3$

$\Rightarrow a+b+c+d \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^2 \vdots 9$ (đpcm)

b) Xét đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$, với $a\in\mathbb{R}$, đa thức $P(x)$ có bậc là 2024

Ta có: $P(x^2-2)=a.(x^2-1)^{1012}(x^2-4)^{1012}=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}(x-a)^{1012}(x+2)^{1012}$

$$=P(x)(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$$

$\Rightarrow P(x^2-2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$

Vậy tồn tại đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$ với hệ số thực, có bậc 2024 thỏa mãn đã thức $P(x^2-2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$.

Bài 28. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023-2024)*

a) Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $x^2 - y$ và $x^2 + y$ đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 - 2(a+b)^2 = b^3 + 19$.

Lời giải

a) $x^2 - y = a^2; x^2 + y = b^2$ với a, b là các số tự nhiên $\Rightarrow 2y = b^2 - a^2$

Ta có $b^2 - a^2$ là số chẵn suy ra a, b là hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ$\Rightarrow (b-a)(b+a) \vdots 4 \ \Rightarrow y \vdots 2$.

b) $a^3 - 2(a+b)^2 = b^3 + 19 \Leftrightarrow (a-b-2)(a^2+ab+b^2) = 2ab+19$

Vì $2ab+19 > 0,\ a^2+ab+b^2 > 0 \Rightarrow a-b-2 \geq 1 \Rightarrow a-b \geq 3$

Từ $a-b-2 \geq 1 \Rightarrow a^2+ab+b^2 \leq 2ab+19 \Rightarrow (a-b)^2 < 19 \Rightarrow a-b \leq 4$

Vì $2ab+19$ lẻ $\Rightarrow a-b-2$ lẻ $\Rightarrow a-b$ lẻ $\Rightarrow$ $a-b=3$

Từ $a-b=3 \Rightarrow b^2+3b-10=0 \Rightarrow b=-5$ (loại) hoặc $b=2$. Vậy $b=2; a=5$.

Bài 29. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

1) Chứng minh n^2+3n+1 là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $4a^2+b+4;\ 4b^2+a+4$ đều là số chính phương.

Lời giải

1) Ta có $n^2+3n+1 = n(n+1)+2n+1$.

Do $n(n+1)$ chẵn, $2n+1$ lẻ nên n^2+3n+1 là số lẻ.

2) Do vai trò a, b bình đẳng nên ta có thể giả sử $b \leq a$.

Khi đó $(2a)^2 < 4a^2+b+4 \leq 4a^2+a+4 \leq 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2$

Suy ra $4a^2+b+4 = (2a+1)^2 \Rightarrow b = 4a-3$.

Khi đó $(8a-6)^2 < 4b^2+a+4 = 64a^2-95a+40 < (8a-4)^2$

Suy ra $64a^2-95a+40 = (8a-5)^2 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $a=1; b=1$.

Bài 30. *(Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023-2024)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2 + 2y^2(x+1) + (y+2)^2 - 9 = 0$

Lời giải

$(x+y)^2 + 2y^2(x+1) + (y+2)^2 - 9 = 0 \ (*)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2xy^2 + 2y^2 + y^2 + 4y + 4 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 + 2x(y^2+y) + 4(y^2+y) = 1$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)+2(y^2+y)(x+2)=1$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2+2y^2+2y)=1$

TH1: $\begin{cases} x+2=1 \\ x-2+2y^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y^2+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (-1;1),\ (-1;-2)$

TH2: $\begin{cases} x+2=-1 \\ x-2+2y^2+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2y^2+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (-3;1),\ (-3;-2)$

Bài 31. *(Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023-2024)*

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24

Lời giải

Do p nguyên tố $p>3 \Rightarrow p$ không là bội của 3 và 2

$\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$ và $p^2 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow p^2-1 \vdots 3$ và 8 suy ra $\Rightarrow p^2-1 \vdots 24$

Vì $(3,8)=1$ nên $(7-p)(7+p)=49-p^2=48-(p^2-1) \vdots 24$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 32. *(Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2023-2024)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5+2024x=y^5+1$

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2+1=y^2$. Chứng minh $2y+2$ là số chính phương

Lời giải

a) Ta có $x^5-x+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x^4-1)+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2-4+5)+2025x=y^5+1$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)+5x(x^2-1)+2025x=y^5+1 \quad (1)$

Do $x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

Khi đó $VT(1)=x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)+5x(x^2-1)+2025x$ Chia hết cho 5.

$VP(1)=y^5+1$ chia cho 5 dư 2 hoặc 1

Vậy vế trái của (1) chia hết cho 5, vế phải của (1) không chia hết cho 5 nên phương trình (1) vô nghiệm, hay phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Dễ thấy y là số lẻ nên đặt $y=2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$

Khi đó ta có $44x^2+1=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow 11x^2=k(k+1)$ (*)

$\Rightarrow k(k+1)$ chia hết cho 11

Do 11 là SNT nên hoặc k chia hết cho 11 hoặc k + 1 chia hết cho 11

TH1: $k \vdots 11$, đặt $k = 11.m(m \in \mathbb{N})$ Thay vào (*) ta có $x^2 = m(11m+1)$

Lại có $(m\,, 11m+1) = 1 \Rightarrow m$ và $11m+1$ đều là các số chính phương.

$\Rightarrow \begin{cases} m = a^2 \\ 11m+1 = b^2 \end{cases}$ với a, b là STN, b > 0

Khi đó $2y+2 = 4k+4 = 44m+4 = 4b^2$ là SCP.

TH2: $k+1 \vdots 11$, đặt $k+1 = 11.n$ $(n \in N)$. Thay vào (*) ta có $x^2 = n(11n-1)$

Lại có $(n, 11n-1) = 1 \Rightarrow n$ và $11n-1$ đều là các số chính phương.

$\Rightarrow \begin{cases} n = c^2 \\ 11n-1 = d^2 \end{cases}$ với c, d là STN khác 0

Khi đó ta có $11c^2 - d^2 = 1 \Rightarrow 12c^2 = c^2 + d^2 + 1(**)$

Ta thấy VT(**) $= 12c^2$ chia hết cho 4

VP(**) $= c^2 + d^2 + 1$ chia cho 4 chỉ có thể có số dư là 1; 2 hoặc 3 nên (**) không xảy ra.

Vậy nếu các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2 + 1 = y^2$ thì $2y+2$ là số chính phương.

Bài 33. *(Trường chuyên tỉnh Quốc Học Huế năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số thực a sao cho $a + \sqrt{2023}$ và $\dfrac{999}{a} + \sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = a + \sqrt{2023} \\ y = \dfrac{999}{a} + \sqrt{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x - \sqrt{2023} \\ y = \dfrac{999}{x - \sqrt{2023}} + \sqrt{2023} \end{cases}$.

Ta có $y = \dfrac{999}{x - \sqrt{2023}} + \sqrt{2023} \Leftrightarrow xy - y\sqrt{2023} = 999 + x\sqrt{2023} - 2023$

$\Leftrightarrow xy + 1024 = (x+y)\sqrt{2023}$

Vì x, y nguyên nên $x + y = 0$, suy ra $y = -x$ và $xy + 1024 = 0$.

Do đó $x = \pm 32$. Vậy $a = \pm 32 - \sqrt{2023}$.

Bài 34. *(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023-2024)*

Cho hai số nguyên p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2 + q^2 = 2(3pq - 4)$ (*)

1) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p, q) thỏa (*)

Lời giải

1) Giả sử trong hai số p,q không có số nào chia hết cho 3.

Khi đó p^2,q^2 chia 3 dư 1. Suy ra:

+) p^2+q^2 chia 3 dư 2;

+) Trong khi vế phải $2(3pq-4)=6pq-9+1$ chia 3 dư 1, vô lý

Do đó trong hai số p,q phải có ít nhất một số là bội của 3.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa (*)

Do vai trò của p,q như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử q là bội của 3.

Do q nguyên tố nên $q=3$

Khi đó từ (*) ta có $p^2+9=2(2p-4)\Leftrightarrow p^2-18p+17=0\Leftrightarrow p=1$ hoặc $p=17$

Do p nguyên tố nên $p=17$.

Bài 35. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2023-2024)*

Xét các số nguyên $a<b<c$ thỏa mãn $n=a^3+b^3=c^3-3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a<0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a,b,c $(a<b<c)$ sao cho n là một ước của 2023.

Lời giải

a) Giả sử $a\ge 0$, khi đó $b\ge 1$ và $c\ge 2$. Ta có

$n=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ là số nguyên tố, mà $a+b+c>1$

Nên $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$, hay $(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2=2$.

Vì $c>b>a$ nên $(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\ge 1^2+1^2+2^2>2$.

Từ mâu thuẫn nhận được, ta suy ra $a<0$.

b) Nếu $c\le 0$, thì ta có $a+b+c<0$, suy ra $n<0$, mâu thuẫn. Do đó $c\ge 1$. Như vậy

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right]\ge\frac{1}{2}(c-a)^2\ge\frac{1}{2}\left[1-(-1)\right]^2=2>1$.

Vì n là số nguyên tố và là ước của 2023 = 7.17^2 nên $n\in\{7,17\}$.

Trường hợp 1: $n=17$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=17$ và $a+b+c=1$. Từ đó, ta dễ dàng tính được

$$3(a^2+b^2+c^2)=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2=35.$$

Mâu thuẫn vì 35 không chia hết cho 3

Trường hợp 2: $n=7$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=7$ và $a+b+c=1$.

Từ đó $3(a^2+b^2+c^2)=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2=15$, suy ra $a^2+b^2+c^2=5$ và $ab+bc+ca=-2$.

Do $5 = a^2 + b^2 + c^2 \ge 1 + c^2$ nên $c \le 2$. Mà $c \ge 1$ nên $c \in \{1;2\}$.

- Nếu $c = 2$, thì ta có $a^2 + b^2 = 1$. Suy ra $a^2 \le 1$, tức $a \ge -1$. Mà $a < 0$ nên $a = -1$ và $b = 0$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Nếu $c = 1$, thì ta có $a^2 + b^2 = 4$. Suy ra $a^2 \le 4$, tức $a \ge -2$. Mà $a < 0$ nên $a \in \{-1,-2\}$. Thử trực tiếp, ta được $a = -2$ và $b = 0$. Tuy nhiên, các số $a = -2, b = 0$ và $c = 1$ không thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Vậy, có duy nhất một bộ số (a,b,c) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(-1,0,2)$.

Bài 36. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 + x + 6$ là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$.

Lời giải

a) Ta có $x^2 + x + 6 = n^2; (n, x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 4x^2 + 4x + 24 = 4n^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 4n^2 = -23 \Leftrightarrow (2x + 1 - 2n)(2x + 1 + 2n) = -23$$

TH1: $\begin{cases} 2x + 1 - 2n = -1 \\ 2x + 1 + 2n = 23 \end{cases} \Rightarrow x = 5$

TH2: $\begin{cases} 2x + 1 - 2n = 1 \\ 2x + 1 + 2n = -23 \end{cases} \Rightarrow x = -6$

b) Ta có $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32) \Leftrightarrow x^6 + (y - x^3)^2 = 64$

$\Rightarrow x^6 \le 64 \Leftrightarrow x \le 2$ do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2;-1;0;1;2\}$

Xét các trường hợp:

+ $x = 2 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 0 \Rightarrow y = 8$

+ $x = 1 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 63 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$ (loại)

+ $x = 0 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 64 \Rightarrow y = 8$ và $y = -8$

+ $x = -1 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 63 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$ (loại)

+ $x = -2 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 0 \Rightarrow y = -8$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0;8);(0;-8);(2;8);(-2;-8)$.

Bài 37. *(Trường chuyên ĐH Sư Phạm HN – vòng 2 năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Lời giải

Lấy $\alpha \in \mathbb{Q}$ sao cho $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}} = \alpha$

Viết lại phương trình dưới dạng $\sqrt{a} - \alpha\sqrt{b} = \alpha\sqrt{5} - \sqrt{3}$

Bình phương 2 vế ta có: $a + \alpha^2 b - 2\alpha\sqrt{ab} = 5\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{15} + 3 \Rightarrow \sqrt{ab} - \sqrt{15} = \dfrac{a + \alpha^2 b - 5\alpha^2 - 3}{2\alpha}$

Từ đó suy ra $\sqrt{ab} - \sqrt{15} = \beta \in \mathbb{Q}$

Bình phương 2 vế đẳng thức $\sqrt{ab} - \sqrt{15} = \beta$ ta được

$$ab = 15 + \beta^2 + 2\beta\sqrt{15} \Leftrightarrow 2\beta\sqrt{15} = ab - 15 - \beta^2$$

Đẳng thức cuối xảy ra khi và chỉ khi $\beta = 0$ tức là $ab = 15$. Xét tất cả khả năng có thể xảy ra, ta được.

- $a = 1$, $b = 15$ tức là $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ là 1 số vô tỷ.
- $a = 3$, $b = 5$ tức là $\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ là 1 số vô tỷ.
- $a = 5$, $b = 3$ tức là $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 1$ là 1 số hữu tỷ.
- $a = 15, b = 1$ tức là $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{3}$ là 1 số vô tỷ.

Vậy tất cả các cặp (a,b) thỏa mãn là $a = 5$, $b = 3$.

Bài 38. *(Trường chuyên ĐHSPHN – vòng 1 năm 2023-2024)*

Có hay không các số nguyên a, b sao cho $\left(a + b\sqrt{2023}\right)^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$?

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên a,b thoả mãn đề bài.

Khi đó $\left(a + b\sqrt{2023}\right)^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$

$\Rightarrow a^2 + 2ab.\sqrt{2023} + 2023b^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$

$\Rightarrow a^2 + 2023b^2 - 2024 = 2023\sqrt{2023} - 2ab.\sqrt{2023}$

$\Rightarrow a^2 + 2023b^2 - 2024 = \sqrt{2023}\left(2023 - 2ab\right)$

Vì $a^2 + 2023b^2 - 2024$ là số hữu tỉ, còn $\sqrt{2023}\left(2023 - 2ab\right)$ là số vô tỉ nên $2ab = 2023$. Điều này là vô lí vì 1 vế là chẵn 1 vế là lẻ. Suy ra giả sử trên sai. Vậy không tồn tại các số nguyên a,b thoả mãn đề bài.