TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN BĐT – GTNN, GTLN TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 – 2024

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\dfrac{15}{ab+bc+ca} \ge 6-abc$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 – 2024)

Với các số thực dương a, b, c thay đổi thoả mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{\sqrt{\left(1+8a^3\right)\left(1+8b^3\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{\left(1+8b^3\right)\left(1+8c^3\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{\left(1+8c^3\right)\left(1+8a^3\right)}}.$$

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cần Thơ năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\dfrac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\dfrac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \dfrac{a+b+c}{4}$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 – 2024)

Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2023 – 2024)

Với a, b, c là ba số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}.$$

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2023 – 2024)

Cho số thực x thỏa mãn $0<x<\dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2-x}{1-2x}+\dfrac{1+2x}{3x}$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Đà Nẵng năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 2023(x+y+z).$$

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đắk Lắk năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+t^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=xy+xz+xt+yz+yt+3zt$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh: $\dfrac{bc}{2a+b+c}+\dfrac{ca}{2b+c+a}+\dfrac{ab}{2c+a+b} \le \dfrac{a+b+c}{4}$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 – 2024)

Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x+y=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Với các số thực a, b và c thoả mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Với các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+6b+6c)(a+b+c)$.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a>b>c$; $ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Phòng năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{2a-1}{a^2+2}+\frac{2b-1}{b^2+2}+\frac{2c-1}{c^2+2}$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hoà Bình năm học 2023 – 2024)

Cho $a, b>0$ thỏa mãn $a(a-1)+b(b-1)=ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{a^3+b^3+2023(a+b)+4}{ab}$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2023 – 2024)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{b}{3a^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{c}{3a^2b^2+abc}}$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 – 2024)

a) Chứng minh $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge\sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge\left|(x+y-2)(z-1)\right|.$$

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Lai Châu năm học 2023 – 2024)

Cho $a; b; c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\dfrac{3}{2}$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Lào Cai năm học 2023 – 2024)

a) Cho $a\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a^2+\dfrac{2}{3a}$.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c\le 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)}+\dfrac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)}+\dfrac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)}\ge 12$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Long An năm học 2023 – 2024)

Cho $a\ge 0, b\ge 0$ thỏa mãn $2a+3b\le 6$ và $2a+b\le 4$. Chứng minh rằng: $-\dfrac{22}{9}\le a^2-2a-b\le 0$.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn $0\le x, y, z\le 4$.

Chứng minh rằng: $x^2y+y^2x+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c\ge 1$ và $a^2+4b^2+c^2+2ab+12=3(a+5b+c)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{a^2}{a+(a+b)^2}+\dfrac{a^2}{a+c^2}$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Vinh năm học 2023 – 2024)

Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$.

Chứng minh $\dfrac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\dfrac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^3+1}}\ge 2$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

Xét ba số $x; y; z\ge 2$ thỏa mãn $4xyz=9(x+y+z)+27$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}+\dfrac{\sqrt{y^2-4}}{y}+\dfrac{\sqrt{z^2-4}}{z}$.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

Xét các số thực dương a, b, c.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2023 – 2024)

Cho $x\ge 1,\ 0<y\le 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+x}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$.

a) Chứng minh $a+b+c\ge 9$.

b) Chứng minh $a+b+c\ge 4\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)+5$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Sơn La năm học 2023 – 2024)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{z^2}}{z}\le xyz$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tây Ninh năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\ge 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right)$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 – 2024)

Cho 3 số thực dương x, y, z thoả mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}-x^2-28y^2-28z^2.$$

Bài 34. (Đề thi vào 10 trường chuyên Quốc Học Huế năm học 2023 – 2024)

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $4a^2+b^2=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{4a}{2+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{2024}{2a+b}$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 – 2024)

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1,\ y>1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$.

a) Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{1}{2z+1}\ge\frac{2}{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+1}{2x+1}+\frac{y+1}{2y+1}+\frac{2z+3}{4z+2}$.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 – 2024)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2023 – 2024)

a) Cho ba số thực dương $a,\ b,\ c$ thoả mãn $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

b) Cho ba số thực không âm $a,\ b,\ c$ thoả mãn $ab+bc+ca+abc\le 4$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Bài 39. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên (vòng 1) năm học 2023 – 2024)

Với a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right)>4.$$

Bài 40. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên (vòng 2) năm học 2023 – 2024)

Với x,y,z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{x^{14}-x^6+3}{x^2y^2+zx+zy}+\frac{y^{14}-y^6+3}{y^2z^2+xy+xz}+\frac{z^{14}-z^6+3}{z^2x^2+yz+yx}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\frac{15}{ab+bc+ca} \geq 6-abc$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc$. $\quad (1)$

Nếu $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq 0$ thì (1) đúng.

Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(3-2a)(3-2b) \leq \left(\frac{3-2a+3-2b}{2}\right)^2 = c^2 \\ (3-2a)(3-2c) \leq \left(\frac{3-2a+3-2c}{2}\right)^2 = b^2 \\ (3-2c)(3-2b) \leq \left(\frac{3-2c+3-2b}{2}\right)^2 = a^2\end{array}\right\} \Rightarrow (3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc.$$

Dấu "=" bất đẳng thức (1) xảy ra khi $a=b=c=1$.

Từ (1) ta có $27-9(2a+2b+2c)+3(4ab+4bc+4ca)-8abc \leq abc$

$\Leftrightarrow 27-9.6+12(ab+bc+ac)-8abc \leq abc$ $(\text{do } a+b+c=3)$

$\Leftrightarrow abc \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca)-3.$

Lúc này $abc+\frac{15}{ab+bc+ca} \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca)+\frac{12}{ab+bc+ca}+\frac{3}{ab+bc+ca}-3$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{3}(ab+bc+ca)\frac{12}{ab+bc+ca}}+\frac{9}{(a+b+c)^2}-3=8+1-3=6.$$

Suy ra $\frac{15}{ab+bc+ca} \geq 6-abc$ (điều phải chứng minh).

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2023 – 2024)

Với các số thực dương a, b, c thay đổi thoả mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{\sqrt{(1+8a^3)(1+8b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+8b^3)(1+8c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+8c^3)(1+8a^3)}}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sqrt{1+8a^3}=\sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)} \leq \frac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}=2a^2+1.$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{1+8b^3} \leq 2b^2+1$; $\sqrt{1+8c^3} \leq 2c^2+1$.

Do đó: $P \ge \frac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)} + \frac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)} + \frac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)}$.

Tiếp theo ta chứng minh: $\frac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)} + \frac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)} + \frac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)} \ge \frac{1}{3}$. $(*)$

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow 3\left[2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+c^2\right] \ge (2a^2+1)(2b^2+1)(2c^2+1)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9.$

Điều này hiển nhiên đúng do $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 3\sqrt[4]{a^4b^4c^4}=3$ và $a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$.

Vậy GTNN của $P=\frac{1}{3}$ đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cần Thơ năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \frac{a+b+c}{4}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \le \frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}-\frac{1}{bc}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)}$.

Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)} \le \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right)$.

Tương tự, ta có: $\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+b-\frac{1}{c}\right)$ và $\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+c-\frac{1}{a}\right)$.

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \frac{a+b+c}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2023 – 2024)

Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải

Từ giả thiết $x+y+z=xyz$, ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c>0$.

Giả thiết trở thành $ab+bc+ca=1$ và $P=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Để ý rằng:

$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$;

$b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c)$;

$c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b)$.

Lúc này, ta có: $P=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}}.\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}.\sqrt{\frac{c}{c+b}}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $P\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)$ hay $P\le\frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2023 – 2024)

Với a, b, c là ba số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau:

Với 4 số thực a, b, x, y và $x, y>0$, ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$. $\quad(*)$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Thật vậy, ta viết bất đẳng thức $(*)$ dưới dạng:

$$a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\ge(a+b)^2xy\Leftrightarrow(ay-bx)^2\ge0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Áp dụng bất đẳng thức $(*)$ hai lần ta được: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Áp dụng, ta có: $\sum_{cyc}\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức GM – AM, ta có

$$\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sum_{cyc}\left(\sqrt{3a+2b}\cdot\sqrt{a+4b}\right)\le\sum_{cyc}\frac{(3a+2b)(a+4b)}{2}=5(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}$$

$\Rightarrow \sum_{cyc}\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\dfrac{a+b+c}{5}$ (điều phải chứng minh).

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2023 – 2024)

Cho số thực x thỏa mãn $0<x<\dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2-x}{1-2x}+\dfrac{1+2x}{3x}$.

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$, $a>2$. Khi đó $A=\dfrac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}}+\dfrac{1+\frac{2}{a}}{\frac{3}{a}}=\dfrac{2a-1}{a-2}+\dfrac{a+2}{3}=2+\dfrac{3}{a-2}+\dfrac{a-2}{3}+\dfrac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số dương $\dfrac{3}{a-2}$ và $\dfrac{a-2}{3}$, ta được

$$A\ge 2+2\sqrt{\frac{3}{a-2}.\frac{a-2}{3}}+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=5\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Đà Nẵng năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 2023(x+y+z).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$.

Ta có: $2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 2008\dfrac{(x+y+z)^2}{3}+15.\dfrac{9}{x+y+z}$

Đặt $t=x+y+z$ $(t\ge 3)$, ta phải chứng minh: $2008.\dfrac{(x+y+z)^2}{3}+15.\dfrac{9}{x+y+z}\ge 2023(x+y+z)$

Tức là: $2008.\dfrac{t^2}{3}+15.\dfrac{9}{t}\ge 2023t$

$\Leftrightarrow 2008t^3+405\ge 6069t^2$

$\Leftrightarrow (t-3)\left(2008t^2-45t-135\right)\ge 0.$ $\quad (1)$

Mặt khác $2008t^2-45t-135=1993t^2+15t^2-45t-135=1993t^2+15t(t-3)-135$

$$\geq 1993.3^2+15.3.0-135>0$$

$\Rightarrow 2008t^2-45t-135>0$.

Do đó bất đẳng thức (1) đúng.

Vậy bài toán được chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đắk Lắk năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+t^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=xy+xz+xt+yz+yt+3zt$.

Lời giải

Với mọi số thực $\alpha>0$, ta có

$2\alpha A=2\alpha xy+2\alpha xz+2\alpha xt+2\alpha yz+2\alpha yt+2\alpha 3zt$

$\Leftrightarrow 2\alpha A=\alpha(2xy)+2x(\alpha z)+2x(\alpha t)+2y(\alpha z)+2y(\alpha t)+(2zt)(3\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha A\leq \alpha(x^2+y^2)+x^2+(\alpha z)^2+x^2+(\alpha t)^2+y^2+(\alpha z)^2+y^2+(\alpha t)^2+(z^2+t^2)(3\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha A\leq(\alpha+2)(x^2+y^2)+(2\alpha^2+3\alpha)(z^2+t^2)$.

Do biểu thức trên đúng với mọi số thực $\alpha>0$ nên ta chọn $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow \alpha+2=2\alpha^2+3\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $2\alpha A\leq(\alpha+2)(x^2+y^2)+(2\alpha^2+3\alpha)(z^2+t^2)=(\alpha+2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$

$\Leftrightarrow A\leq\dfrac{\alpha+2}{2\alpha}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ đạt được khi:

$$\begin{cases}x=y\\ z=t\\ x=\alpha z=\alpha t\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=t\\ x=\alpha z=\alpha t\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=y=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}}\end{cases}\end{array}\right..$$

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh: $\dfrac{bc}{2a+b+c}+\dfrac{ca}{2b+c+a}+\dfrac{ab}{2c+a+b}\leq\dfrac{a+b+c}{4}$.

Lời giải

Chứng minh được bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$

Ta có $\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$

$\Rightarrow\frac{bc}{2a+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)\qquad(1)$

Tương tự, ta có: $\frac{ac}{2b+a+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}\right)\qquad(2)$

$\frac{ab}{2c+a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\qquad(3)$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được

$$VT\le\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{a+c}\right)+\left(\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\right]=\frac{a+b+c}{4}.$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$.

Lời giải

Với $a, b>0$, ta có: $5a^2+2ab+2b^2=(2a+b)^2+(a-b)^2\ge(2a+b)^2$

$\Rightarrow\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}\ge\sqrt{(2a+b)^2}=2a+b$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\le\frac{1}{2a+b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$; $\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$.

Suy ra: $P\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow P\le\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Vậy $\max P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2023 – 2024)

Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x+y=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}$.

Lời giải

Ta có: $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow 4 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 \ge 2$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có: $\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4(x^2+y^2)}} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{4}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge 1$

Suy ra $B \ge \frac{3}{4}\cdot 2+1=\frac{5}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Vậy $\min B=\frac{5}{2}$ khi $x=y=1$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Với các số thực a, b và c thoả mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $ab+bc+ac=-1$.

Xét $A^2=a^2+b^2+c^2+2|ab|+2|bc|+2|ac|$.

Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, ta có:

$$A^2=(a+b+c)^2+2(|ab|+|bc|+|ac|)+2 \ge 0+2|ab+bc+ac|+2=4$$

Từ đây kết hợp $A \ge 0 \Rightarrow A \ge 2$.

Dấu "=" xảy ra nhiều trường hợp, chẳng hạn $(a;b;c)=(0;1;-1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2023 – 2024)

Với các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+6b+6c)(a+b+c)$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$P \ge \left(a+\sqrt{6}b+\sqrt{6}c\right)^2 \ge \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a+\frac{2\sqrt{6}}{3}b+\sqrt{6}c\right)^2=\frac{2}{3}(a+2b+3c)^2=\frac{2}{3}$$

Mặt khác, dễ thấy với $a=b=0$ và $c=\frac{1}{3}$ thì $P=\frac{2}{3}$. Vậy $\min P=\frac{2}{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$4P=(a+6b+6c)(4a+4b+4c) \le \left(\frac{a+6b+6c+4a+4b+4c}{2}\right)^2=\left(\frac{5a+10b+10c}{2}\right)^2$$

$$=\frac{25}{4}(a+2b+2c)^2 \le \frac{25}{4}(a+2b+3c)^2=\frac{25}{4}$$

Từ đó $P \le \frac{25}{16}$. Mặt khác, $c = 0, b = \frac{3}{8}$ và $a = \frac{1}{4}$ thì $P = \frac{25}{16}$. Vậy $\max P = \frac{25}{16}$

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a > b > c; ab + bc + ca > 0$ và $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Lời giải

Ta sử dụng các bất đẳng thức $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ge \frac{4}{m+n} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ với $m > 0; n > 0$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $m = n$.

Ta có: $P = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$

$$\ge \frac{4}{a-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} = \frac{5}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Lại có: $\frac{5}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \ge 5\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \quad (\text{do } a+c = 1-b)$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}} \ge \frac{10\sqrt{6}}{\frac{3-3b+1+3b}{2}} = 5\sqrt{6}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{6}$ khi:

$$\begin{cases} a > b > c \\ a+b+c = 1 \\ a-b = b-c \\ a-c = 2\sqrt{b(a+c)+ca} \\ 3-3b = 1+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b > c \\ b = \frac{1}{3} \\ a+c = \frac{2}{3} \\ a-c = 2\sqrt{\frac{2}{9}+ca} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}.$$

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \ge \frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó:

$c \le a \Rightarrow c^2 \le ac \Rightarrow a^2 + c^2 \le a^2 + ac \le \left(a + \frac{c}{2}\right)^2$;

$c \le b \Rightarrow c^2 \le bc \Rightarrow b^2 + c^2 \le b^2 + bc \le \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$;

$$a^2 + b^2 \le \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Suy ra $VT(*) \ge \dfrac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{c}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}$.

Đặt $x = a + \frac{c}{2}$; $y = b + \frac{c}{2}$. Khi đó $x > 0$, $y > 0$ và $x + y = a + b + c$.

Ta có $VT(*) \ge \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2} \ge \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{2}{xy} = \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{2xy} + \dfrac{3}{2xy} \ge \dfrac{4}{x^2+y^2+2xy} + \dfrac{3}{2xy}$

$= \dfrac{4}{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2} + 3 \cdot \dfrac{2}{(x+y)^2} = \dfrac{10}{(x+y)^2} = \dfrac{10}{(a+b+c)^2} = VP(*)$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} c = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \end{cases}$. Do vai trò của a, b, c bình đẳng nên dấu "=" của $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hải Phòng năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a + b + c = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{2a-1}{a^2+2} + \dfrac{2b-1}{b^2+2} + \dfrac{2c-1}{c^2+2}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ab \ge 0$.

Khi đó $P + 3 \ge \dfrac{(a+b+2)^2}{(a+b)^2+4} + \dfrac{(c+1)^2}{c^2+2} = \dfrac{(c-2)^2}{c^2+4} + \dfrac{(c+1)^2}{c^2+2}$.

Xét bất đẳng thức: $\dfrac{(c-2)^2}{c^2+4} + \dfrac{(c+1)^2}{c^2+2} \ge \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow c^2(c-2)^2 \ge 0$ (đúng).

Suy ra $P \ge \dfrac{-3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $a = b = c = 0$, $a = b = -1, c = 2$.

Vậy $P_{min} = \dfrac{-3}{2}$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hoà Bình năm học 2023 – 2024)

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a(a-1) + b(b-1) = ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \dfrac{a^3 + b^3 + 2023(a+b) + 4}{ab}$.

Lời giải

Từ giả thiết $a(a-1)+b(b-1)=ab \Rightarrow a^2+b^2-(a+b)=ab$

$\Rightarrow a^2+b^2=ab+a+b.$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow ab+a+b \ge 2ab \Rightarrow a+b \ge ab.\quad (1)$

Lại có: $ab+a+b+8=(a^2+4)+(b^2+4) \ge 4a+4b=4(a+b)$

$\Rightarrow ab+8 \ge 3(a+b) \ge 3ab \quad (\text{do } (1))$

$\Rightarrow ab \le 4$.

Đặt $t=\sqrt{ab} \Rightarrow 0<t\le 2 \Rightarrow \frac{2}{t} \ge 1 \Rightarrow \frac{4}{t^2} \ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$F=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2023\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{ab} \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{b^2}{a}}+2023.2\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{4}{ab}=2t+4046.\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}$$

$$\Rightarrow F \ge 2t+\frac{8}{t}+2019\cdot\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}..$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $2t+\frac{8}{t} \ge 2\sqrt{2t.\frac{8}{t}}=8$

$\Rightarrow F \ge 8+2019+1=2028$.

Vậy $\min F=2028$, đạt khi $a=b=2$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2023 – 2024)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{b}{3a^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{c}{3a^2b^2+abc}}$.

Lời giải

Theo bài ra, ta có: $a, b, c>0$ và $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3.$

Đặt $\frac{1}{a}=x; \frac{1}{b}=y; \frac{1}{c}=z\ (x; y; z>0) \Rightarrow x+y+z=3.$

Khi đó: $\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}=\sqrt{\frac{y^2z^2}{3x+yz}}=\sqrt{\frac{y^2z^2}{x(x+y+z)+yz}}=\frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{yz}{2}.\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right).$

Chứng minh tương tự, ta được: $\sqrt{\frac{b}{3a^2c^2+abc}} \le \frac{zx}{2}.\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right);$

$$\sqrt{\frac{c}{3a^2b^2+abc}} \le \frac{xy}{2}.\left(\frac{1}{z+x}+\frac{1}{y+z}\right).$$

Suy ra: $T \le \frac{1}{2}\left(\frac{yz+zx}{x+y}+\frac{yz+yx}{x+z}+\frac{xy+zx}{y+z}\right)=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{3}{2}.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy GTNN của T bằng $\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Khánh Hoà năm học 2023 – 2024)

a) Chứng minh $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge\sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge\left|(x+y-2)(z-1).\right|$$

Lời giải

a) **Cách 1:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhia Copxki, ta có

$$\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]\left[1^2+1^2\right]\ge\left[(x-1).1+(y-1).1\right]^2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2\ge\frac{(x+y-2)^2}{2}.\quad(1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}\Leftrightarrow x=y$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(x+y-2)^2}{2}+(z-1)^2\ge2\sqrt{\frac{\left[(x+y-2)(z-1)\right]^2}{2}}=\sqrt{2}\left|(x+y-2)(z-1)\right|.\qquad(2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(x+y-2)^2}{2}=(z-1)^2$.

Mặt khác: $\left|(x+y-2)(z-1)\right|\ge(x+y-2)(z-1).\qquad(3)$

Dấu "=" xảy ra khi $(x+y-2)(z-1)\ge0$.

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge\sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$ (điều phải chứng minh).

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\ |x+y-2|=\sqrt{2}|z-1|\\ (x+y-2)(z-1)\ge0\end{cases}$ (Chẳng hạn tại $x=y=z=1$).

Cách 2: Đặt $x-1=a; y-1=b; z-1=c$.

Ta có: $VT=a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}+c^2\ge2\sqrt{\frac{(a+b)^2.c^2}{2}}=\sqrt{2}\left|(a+b)c\right|\ge\sqrt{2}(a+b)c=VP$

Vậy $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge\sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$ với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{z-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (Chẳng hạn tại $x=y=z=1$).

b) Giả sử k là số thực nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$:

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge\left|(x+y-2)(z-1)\right|\qquad(*)$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức $(*)$ cũng đúng khi $x=y$, $|x+y-2|=\left|\sqrt{2}(z-1)\right|$ hay $x=y$, $|z-1|=\sqrt{2}|x-1|$.

Do đó: $k\left[2(x-1)^2+2(x-1)^2\right]\ge\left|2(x-1).\sqrt{2}(x-1)\right|\Leftrightarrow 4k(x-1)^2\ge 2\sqrt{2}(x-1)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=2$, ta được: $4k\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta chứng minh với mọi $k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Thật vậy:

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]=\left(k-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$
$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$
$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left|(x+y-2)(z-1)\right|=\left|(x+y-2)(z-1)\right|$$ (theo chứng minh của câu a).

Khi $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì theo chứng minh câu a, ta cũng có bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Vậy giá trị k nhỏ nhất cần tìm là $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Lai Châu năm học 2023 – 2024)

Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $a+b+c=3\Leftrightarrow 9=(a+b+c)^2\ge 3(ab+ac+bc)\Leftrightarrow ab+ac+bc\le 3$.

Khi đó: $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+ab+ac+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a+b}+\dfrac{bc}{a+c}\right)$.

Tương tự ta có : $\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{ac}{b+c}\right)$; $\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{ab}{a+c}\right)$.

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c}\right)\le\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Mà $a+b+c=3$ nên $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{3}{2}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{3}{2}$ (điều phải chứng minh).

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Lào Cai năm học 2023 – 2024)

a) Cho $a \ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^2 + \frac{2}{3a}$.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)} + \frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)} + \frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)} \ge 12$.

Lời giải

a) Ta có $Q = a^2 + \frac{27}{a} + \frac{27}{a} - \frac{160}{3a}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a^2 + \frac{27}{a} + \frac{27}{a} \ge 3.\sqrt[3]{a^2.\frac{27}{a}.\frac{27}{a}} = 27$.

Lại có: $a \ge 3 \Rightarrow 0 < \frac{160}{3a} \le \frac{160}{9} \Rightarrow -\frac{160}{3a} \ge -\frac{160}{9}$.

Suy ra $Q \ge \frac{83}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{83}{9}$ tại $a = 3$.

b) Ta đặt $x = \frac{3ab+1}{b}$, $y = \frac{3bc+1}{c}$, $z = \frac{3ca+1}{a} \Rightarrow x, y, z > 0$.

$\Rightarrow P = \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy-Schwarz ta có $P \ge \frac{(y+z+x)^2}{x+y+z} = x+y+z$. (1)

Ta có: $x+y+z = 3a + \frac{1}{b} + 3b + \frac{1}{c} + 3c + \frac{1}{a}$

$= \left(9a + \frac{1}{a}\right) + \left(9b + \frac{1}{b}\right) + \left(9c + \frac{1}{c}\right) - 6(a+b+c) \ge 2.\sqrt{9a.\frac{1}{a}} + 2.\sqrt{9b.\frac{1}{b}} + 2.\sqrt{9c.\frac{1}{c}} - 6(a+b+c)$

$= 6+6+6-6(a+b+c) \ge 18-6 = 12$ (vì $a+b+c \le 1$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $P \ge 12$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Long An năm học 2023 – 2024)

Cho $a \ge 0, b \ge 0$ thỏa mãn $2a+3b \le 6$ và $2a+b \le 4$. Chứng minh rằng: $-\frac{22}{9} \le a^2 - 2a - b \le 0$.

Lời giải

Ta có: $2a+3b \le 6 \Rightarrow -b \ge \frac{2}{3}a - 2$.

Khi đó: $a^2 - 2a - b \ge a^2 - 2a + \frac{2}{3}a - 2 = \left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{22}{9} \ge -\frac{22}{9}$. (1)

$2a+b\le 4\Rightarrow 2a^2+ab\le 4a\Rightarrow a^2-2a-b\le -\dfrac{ab}{2}-b\le 0.\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn $0\le x, y, z\le 4$.

Chứng minh rằng: $x^2y+y^2x+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$.

Lời giải

Ta có: $x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$

$\Leftrightarrow x^2y+y^2z+z^2x+16-xy^2-yz^2-zx^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-z)(y-z)+16\ge 0.$

Ta có bất đẳng thức: $ab\ge -\dfrac{1}{4}(a-b)^2$, $\forall a, b\in\mathbb{R}$ và $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: Nếu $x\ge y$ ta có $(x-z)(y-z)\ge -\dfrac{1}{4}(x-y)^2$

$\Rightarrow (x-y)(x-z)(y-z)+16\ge -\dfrac{1}{4}(x-y)^3+16\ge -\dfrac{1}{4}4^3+16\ge 0.$

Trường hợp 2: Nếu $y>x$ ta xét

Trường hợp 2.1: Nếu $y\ge z$, ta có $(x-y)(x-z)\ge -\dfrac{1}{4}(y-z)^2$

$\Rightarrow (x-y)(x-z)(y-z)+16\ge -\dfrac{1}{4}(y-z)^3+16\ge -\dfrac{1}{4}4^3+16=0.$

Trường hợp 2.2: Nếu $y<z$, ta có: $(x-y)(x-z)(y-z)+16=(y-z)(x-z)(x-y)=16.$

Kết hợp với $(y-x)(z-y)\le -\dfrac{1}{4}(z-x)^2$ và $x<y<z$, ta được:

$$(y-x)(x-z)(z-y)+16\ge\frac{1}{4}(z-x)^2(x-z)+16=-\frac{1}{4}(z-x)^3+16\ge 0$$

Vậy với mọi trường hợp thì $(x-y)(x-z)(y-z)+16\ge 0$ hay $x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nghệ An năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c\ge 1$ và $a^2+4b^2+c^2+2ab+12=3(a+5b+c)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{a^2}{a+(a+b)^2}+\dfrac{a^2}{a+c^2}$.

Lời giải

Bằng các phép biến đổi giả thiết, ta có

$3(a+b+c)=a^2+4b^2+c^2+2ab+12-12b=(a+b)^2+c^2+3(b-2)^2\ge (a+b)^2+c^2.$

Bằng biến đổi bất đẳng thức kết hợp cộng mẫu, ta có: $3(a+b+c)\ge (a+b)^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{2}$.

Do đó $a+b+c\le 6$ suy ra $(a+b)^2+c^2\le 18$.

Khi đó, bằng các phép biến đổi ta có:

$$T=\frac{a^2}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}\ge\frac{4a^2}{2a+(a+b)^2+c^2}\ge\frac{4a^2}{2a+18}=\frac{2a^2}{a+9}\ge\frac{2a^2}{10a}=\frac{a}{5}\ge\frac{1}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)=(1;2;3)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{1}{5}$ khi $(a;b;c)=(1;2;3)$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 trường chuyên Đại học Vinh năm học 2023 – 2024)

Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Lời giải

Ta có nhận xét sau :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\right)^2=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}}$$

$$\le\frac{a+b+2}{a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{a+b+1}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}\right)^2.$$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\le 1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$.

Mặt khác, ta có $(a+b+c)^2\ge a^2+b^2+c^2=1$ suy ra $a+b\ge 1-c$.

Từ đây kết hợp với $c\le 1$ (vì $c\ge 0$ và $c^2\le 1$), ta suy ra

$$P\le 1+\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}=1+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^2}=1+\sqrt{\frac{1}{2-c}+\frac{1}{2+c}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{4}{4-c^2}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}\le 1+\sqrt{\frac{4}{4-1}+\frac{2}{\sqrt{4-1}}}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $a=b=0, c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$.

Chứng minh $\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}}\ge 2.$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\sqrt{b^3+1}=\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}\le\frac{b+1+b^2-b+1}{2}=\frac{b^2+2}{2}$.

Tương tự, ta chứng minh được: $\sqrt{c^3+1} \le \dfrac{c^2+2}{2}$; $\sqrt{a^3+1} \le \dfrac{a^2+2}{2}$.

Do đó $VT \ge \dfrac{2a}{b^2+2} + \dfrac{2b}{c^2+2} + \dfrac{2c}{a^2+2}$.

Ta cần chứng minh: $S = \dfrac{2a}{b^2+2} + \dfrac{2b}{c^2+2} + \dfrac{2c}{a^2+2} \ge 2$.

Ta có: $\dfrac{2a}{b^2+2} = \dfrac{a\left(b^2+2\right) - ab^2}{b^2+2} = a - \dfrac{ab^2}{b^2+2}$.

Lại có: $\dfrac{ab^2}{b^2+2} = \dfrac{2ab^2}{b^2+b^2+4} \le \dfrac{2ab^2}{3\sqrt[3]{4b^4}} = \dfrac{a\sqrt{2b^2}}{3} \le \dfrac{a.(2+b+b)}{9} = \dfrac{2a.(b+1)}{9}$.

Chứng minh tương tự, ta suy ra

$$S \ge a+b+c - \frac{2.(a+b+c)}{9} - \frac{2(ab+bc+ca)}{9} = \frac{7.(a+b+c)}{9} - \frac{2(ab+bc+ca)}{9}.$$

Mặt khác $ab+bc+ca \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Do đó $S \ge \dfrac{7.6}{9} - \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{6^2}{3} = 2$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

Xét ba số $x; y; z \ge 2$ thỏa mãn $4xyz = 9(x+y+z)+27$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \dfrac{\sqrt{y^2-4}}{y} + \dfrac{\sqrt{z^2-4}}{z}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{5}Q = \frac{\sqrt{5(x-2)(x+2)}}{x} + \frac{\sqrt{5(y-2)(y+2)}}{y} + \frac{\sqrt{5(z-2)(z+2)}}{z}$$

$$\le \frac{5(x-2)+x+2}{2x} + \frac{5(y-2)+y+2}{2y} + \frac{5(z-2)+z+2}{2z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}Q \le \frac{6x-8}{2x} + \frac{6y-8}{2y} + \frac{6z-8}{2z} = 9 - 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Từ $4xyz = 9(x+y+z)+27 \Leftrightarrow 4 = 9\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\right) + \dfrac{27}{xyz} \le 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^3$.

Đặt $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = t$. Ta có $t^3+3t^2-4 \ge 0 \Leftrightarrow t^3-t^2+4t^2-4t+4t-4 \ge 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 1$.

Suy ra $\sqrt{5}Q \le 9 - 4.1 = 5 \Leftrightarrow Q \le \sqrt{5}$.

Vậy $MaxQ=\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x,\,y,\,z\ge 2\\ 4xyz=9\left(x+y+z\right)+27\\ 5\left(x-2\right)=x+2;\,5\left(y-2\right)=y+2;\,5\left(z-2\right)=z+2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=3.$

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm học 2023 – 2024)

Xét các số thực dương $a,\,b,\,c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}$.

Lời giải

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}\right).F\ge\left(a+b+c\right)^2$.

Đặt $Q=a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}$

$\Rightarrow Q^2=\left[\sqrt{a}\sqrt{a^3+9ac}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+9ac}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+9ab}\right]^2\le\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right).$

Ta lại có $a^3+b^3+c^3=\left(a+b+c\right)^3-3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\le\left(a+b+c\right)^3-24abc$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right)\le\left(a+b+c\right)\left[\left(a+b+c\right)^3+3abc\right].$

Mặt khác $3abc\le\frac{\left(a+b+c\right)^3}{9}\Rightarrow\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right)\le\frac{10\left(a+b+c\right)^4}{9}$

$\Rightarrow Q\le\frac{\sqrt{10}\left(a+b+c\right)^2}{3}.$

Suy ra $F\ge\frac{3\sqrt{10}}{10}.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c.$

Vậy $\min F=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ khi $a=b=c.$

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2023 – 2024)

Cho $x\ge 1,\,0<y\le 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+x}.$

Lời giải

Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh $\frac{1}{y+1}\ge\frac{x}{x^2+1}$ (1) và $\frac{1}{x+1}\ge\frac{y}{y^2+x}$ (2).

Ta có: $(1)\Leftrightarrow xy+x-x^2-y\le 0\Leftrightarrow y\left(x-1\right)+x\left(1-x\right)\le 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(y-x\right)\le 0.$ (3)

Bất đẳng thức (3) đúng vì $x\ge 1,\,0<y\le 1.$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1,\,0<y\le 1.$

Ta cũng có: $(2) \Leftrightarrow xy+y-y^2-x \le 0 \Leftrightarrow y(x-y)-(x-y) \le 0 \Leftrightarrow (x-y)(y-1) \le 0.\quad (4)$

Bất đẳng thức (4) đúng vì $x \ge 1,\ 0<y \le 1.$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=1.$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức (1) và (2) ta được $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+y}+\dfrac{y}{y^2+x}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=1.$

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc.$

a) Chứng minh $a+b+c \ge 9.$

b) Chứng minh $a+b+c \ge 4\left(\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\right)+5.$

Lời giải

a) Ta có $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1.$

Cách 1: Khi đó $a+b+c=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}=9.$

Cách 2: $a+b+c=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=3+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} \ge 3+2+2+2=9.$

b) Ta có $a+b+c=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{(a+b)^2}{ab}+\dfrac{(b+c)^2}{bc}+\dfrac{(c+a)^2}{ca}-3$

$$\ge \frac{4(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}-3=\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}+5=4\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)+5.$$

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Sơn La năm học 2023 – 2024)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz.$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{z^2}}{z} \le xyz.$

Lời giải

Từ $x+y+z=zyz \Rightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=1.$

Lại có: $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)}.$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{ab} \le \dfrac{1}{2}(a+b),$ ta có: $\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \le \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{2z}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=z.$

Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2z}\right)$; $\frac{1+\sqrt{z^2}}{z} \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)$.

Suy ra $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{z^2}}{z} \le 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Ta chứng minh: $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le xyz.$ $\quad (1)$

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le xyz$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx) \le (xyz)^2$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx) \le (x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tây Ninh năm học 2023 – 2024)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \ge 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right)$.

Lời giải

Ta có: $M=\left(\frac{5}{2}a+\frac{10}{a}\right)+\left(3b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{7}{2}c+\frac{14}{c}\right)+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c$

$\Rightarrow M \ge 2\sqrt{25}+2\sqrt{36}+2\sqrt{49}+\frac{2}{3}\cdot 6=40$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

Vậy $M_{Min}=40$ khi $a=b=c=2$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2023 – 2024)

Cho 3 số thực dương x, y, z thoả mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}-x^2-28y^2-28z^2.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z};$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}=\frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} \le \frac{1}{4}.\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x};$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}}=\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{1}{4}.\frac{z}{z+y}+\frac{z}{z+x}.$$

Suy ra $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le 1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.\qquad(1)$

Ta có: $x^2+28y^2+28z^2=\frac{1}{2}(x-7y)^2+\frac{1}{2}(x-7z)^2+\frac{7}{2}(y-z)^2+7\ge 7.\qquad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $P\le\frac{9}{4}-7=-\frac{19}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{7\sqrt{15}}{15}$; $y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{-19}{4}$ khi $x=\frac{7\sqrt{15}}{15}$; $y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 trường chuyên Quốc Học Huế năm học 2023 – 2024)

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $4a^2+b^2=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{4a}{2+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{2024}{2a+b}$.

Lời giải

Ta có $4a^2+b^2\ge 4ab\Leftrightarrow 2\left(4a^2+b^2\right)\ge(2a+b)^2\Leftrightarrow 4\ge(2a+b)^2\Leftrightarrow 2a+b\le 2\Leftrightarrow a+\frac{b}{2}\le 1$.

Đặt $x=a$; $y=\frac{b}{2}$, ta có $x+y\le 1$.

Khi đó $\frac{1}{2}T=\frac{a}{1+\frac{b}{2}}+\frac{b}{2(1+a)}+\frac{506}{a+\frac{b}{2}}=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{506}{x+y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

- $\frac{x}{1+y}+\frac{4}{9}x(1+y)\ge\frac{4}{3}x\Leftrightarrow\frac{x}{1+y}\ge\frac{8}{9}x-\frac{4}{9}xy$.
- $\frac{y}{1+x}+\frac{4}{9}y(1+x)\ge\frac{4}{3}y\Leftrightarrow\frac{y}{1+x}\ge\frac{8}{9}y-\frac{4}{9}xy$.

Suy ra $\frac{1}{2}T\ge\frac{8}{9}(x+y)-\frac{8}{9}xy+\frac{506}{x+y}\ge\frac{8}{9}(x+y)+\frac{8}{9(x+y)}+\frac{4546}{9(x+y)}-\frac{8}{9}xy$

$$\ge\frac{8}{9}.2+\frac{4546}{9}-\frac{8}{9}.\frac{1}{4}=\frac{1520}{3}.$$

Do đó $T\ge\frac{3040}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$ hay $a=\frac{1}{2}$; $b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{3040}{3}$ đạt được khi $a=\frac{1}{2}$; $b=1$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2023 – 2024)

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1,\ y>1$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \ge 2.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}.$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có: $x=(x-1)+1 \ge 2\sqrt{(x-1).1}=2\sqrt{x-1}.$

Vậy $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \ge 2$ với mọi số thực $x>1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=1 \Leftrightarrow x=2.$

b) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}.\frac{y^2}{x-1}}=2.\frac{x}{\sqrt{x-1}}.\frac{y}{\sqrt{y-1}} \ge 2.2.2=8.$$

Vậy $\min T=8$ khi $x=y=2.$

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm học 2023 – 2024)

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5.$

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\dfrac{1}{2z+1} \ge \dfrac{2}{3}.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+1}{2x+1}+\dfrac{y+1}{2y+1}+\dfrac{2z+3}{4z+2}.$

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có $\sqrt{(2x+1)(2y+1)}=5-2z.$

Từ đó kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwwarz, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{5-2z}+\frac{1}{2z+1} \ge \frac{4}{5-2z+2z+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chẳng hạn $x=y=z=1$.

b) Ta thấy rằng $P=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(2x+1)}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(2y+1)}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2z+1}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2y+1}\right)+\dfrac{1}{2z+1}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và sử dụng kết quả ở ý (a) ta được

$$P \ge \frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{1}{2z+1} \ge \frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1.$

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2023 – 2024)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}$.

Lời giải

Đặt $P=\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}=\left(\dfrac{1}{9}.\sqrt{x^2+9}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)+\dfrac{8}{9}.\sqrt{x^2+9}.$

Suy ra $P\ge 2.\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{9}.3=\dfrac{10}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P=\dfrac{10}{3}$ khi $x=0$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2023 – 2024)

a) Cho ba số thực dương $a,\ b,\ c$ thoả mãn $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

b) Cho ba số thực không âm $a,\ b,\ c$ thoả mãn $ab+bc+ca+abc\le 4$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Lời giải

a) Ta có: $P=\dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}}+\sqrt{\frac{2b}{b+a}.\frac{b}{2(b+c)}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}.\frac{c}{2(c+b)}}.$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}+\frac{2b}{b+a}+\frac{b}{2(b+c)}+\frac{2c}{c+a}+\frac{c}{2(c+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a+b}\right)+\left(\frac{2a}{a+c}+\frac{2a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\dfrac{7\sqrt{15}}{15};\ b=c=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Vậy P đạt GTLN là $\dfrac{9}{4}$ khi $a=\dfrac{7\sqrt{15}}{15};\ b=c=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

b) Ta có $ab+bc+ca+abc\le 4$

$\Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8\le(ab+2a+2b+4)+(bc+2b+2c+4)+(ca+2c+2a+4)$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)\le(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$

$\Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} \Leftrightarrow \frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2} \ge 2$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{a+2}\right)+\left(1-\frac{2}{b+2}\right)+\left(1-\frac{2}{c+2}\right) \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \ge \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$1 \ge \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=\frac{a^2}{a^2+2a}+\frac{b^2}{b^2+2b}+\frac{c^2}{c^2+2c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)}$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 \le (a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca$ (điều phải chứng minh).

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c=1.$

Bài 39. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên (vòng 1) năm học 2023 – 2024)

Với a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1.$ Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right) > 4.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) > 4(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \Leftrightarrow 3a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) < 4.$$

Mà $ab+bc+ca=1$ nên $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 < (ab+bc+ca)^2=1$ và $a^2b^2c^2 \le \frac{(ab+bc+ca)^3}{27}=\frac{1}{27}.$

Suy ra $3a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) < \frac{1}{9}+2 < 4.$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 40. (Đề thi vào 10 trường chuyên Khoa học tự nhiên (vòng 2) năm học 2023 – 2024)

Với x,y,z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{x^{14}-x^6+3}{x^2y^2+zx+zy}+\frac{y^{14}-y^6+3}{y^2z^2+xy+xz}+\frac{z^{14}-z^6+3}{z^2x^2+yz+yx}$$

Lời giải

Ta có $3(x^{14}-x^6+3)=(3x^{14}+4)-3x^6+5 \ge 7x^6-3x^6+5=4x^6+5.$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$4x^6+5=(x^6+x^6+1)+(x^6+x^6+1)+3 \ge 3(x^4+x^4+1) \ge 3(x^4+2x^2).$$

Suy ra $M \ge \sum \frac{x^4}{x^2y^2+xz+yz}+2\sum \frac{x^2}{x^2y^2+xz+yz}.$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu, ta có:

$$M \geq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+2(x+y+z)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\left(xy+yz+zx\right)} \geq \frac{3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+6\left(xy+yz+zx\right)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\left(xy+yz+zx\right)}=3.$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 3 khi $x=y=z=1.$