MỤC LỤC

HỆ THỐNG ĐỀ THI

ĐỀ SỐ 1

TRƯỜNG THCS LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $Q=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức Q tại $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Cho biểu thức $M=P.Q$. Tìm x để biểu thức M có giá trị lớn nhất.

Bài II (1,5 điểm): *Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình*

Hai đội công nhân làm một công việc. Nếu hai đội làm chung thì hoàn thành sau 20 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì đội một sẽ hoàn thành công việc nhanh hơn đội hai là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì môi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó.

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x+3}+2\sqrt{y-2}=5\\ \frac{4}{x+3}-\sqrt{y-2}=2\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2mx+m^2-1=0$ (m là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m=-3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn hệ thức

$(1+x_1)(2-x_2)+(1+x_2)(2-x_1)=x_1{}^2+x_2{}^2-x_1.x_2-2$

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm K thuộc cung nhỏ AC. Kẻ KH vuông góc AB $(H\in AB)$. Nối AC cắt HK tại I, tia BC cắt đường thẳng HK tại E. Nối AE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F.

a) Chứng minh: Tứ giác $BHFE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $EC.EB=EF.EA$.

c) Cho H là trung điểm OA. Chứng minh $S_{EAB}=5.S_{ECF}$.

Bài V (0,5 điểm): Cho m, n, p là các số thực tuỳ ý thoả mãn $m^2+n^2+p^2\le 14$

Chứng minh rằng: $m+2n-3p\le 14$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 2

TRƯỜNG THCS TRƯNG VƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $N=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{8}{x-4}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4$

1) Tính giá trị biểu thức M tại $x=9$.

2) Chứng minh $N=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{M}{N}$.

Bài II (2,0 điểm): *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

1) Một sàn phòng hội trường X có dạng hình chữ nhật. Nhà trường muốn sửa lại căn phòng cho rộng rãi hơn. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m, phòng hội trường sẽ rộng thêm $90m^2$. Nếu tắng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m, phòng hội trường sẽ rộng thêm $87m^2$. Tính diện tích ban đầu của hội trường.

2) Trái bóng đá tiêu chuẩn dùng trong thi đấu có diện tích bề mặt là $576\pi\ cm^2$. Coi quả bóng có dạng hình cầu, tính thể tích của trái bóng. (Lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải phương trình: $x^4-7x^2+12=0$.

2) Cho phương trình ẩn x: $x^2-(2m-1)x+m-1=0\ (1)$

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=2m^2-m$.

Bài IV (3,5 điểm): Cho tam giác nhọn MNP $(MN<MP)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao MA,NB,PC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng 4 điểm N,C,B,P cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm J của đường tròn đó.

2) Đường thẳng BC và đường thẳng NP cắt nhau tại I. Chứng minh $IB.IC=IN.IP$.

3) Đường thẳng MI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh $\widehat{KMC}=\widehat{KBC}$ và ba điểm K,H,J thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm): Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ thoả mãn $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+c$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 3

TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0; x\neq 4$

1) Tính giá trị biểu thức Q khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Biết $M=\dfrac{P}{Q}$. Tìm các giá trị của x để $M=18$.

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phân xưởng theo kế hoạch cần sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do cải tiến kĩ thuật, mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

2) Cột cờ Lũng Cú là một cột cờ quốc gia nằm ở đỉnh Lũng Cú có độ cao $1470m$ so với mực nước biển ở xã Lũng Cú, huyện Đồng Văn, tỉnh Hà Giang, cách điểm cực bắc của Việt Nam khoảng $3,3km$. Phần thân cột cờ dạng hình trụ có chiều cao $20m$ và đường kính đáy $3,8m$. Hãy tính thể tích phần thân cột cờ dạng hình trụ đó (Lấy $\pi\approx 3,14$, kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3(y-5)+2(x-3)=0\\7(x-4)+3(x+y-1)-14=0\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-(m+5)x+3m+6=0\ (1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật có đường chéo bằng 5.

Bài IV (3,5 điểm): Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD và CE cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh: Tứ giác $AEDC$ nội tiếp.

2) Tiếp tuyến tại C với (O) cắt ED tại M. Chứng minh $\widehat{MDC}=\widehat{MCB}$.

3) Đoạn AM cắt (O) tại F, tia AD cắt (O) tại N, đường thẳng BF cắt đường thẳng EM tại điểm I.

a) Chứng minh: tam giác MFD đồng dạng với tam giác MDA.

b) Chứng minh: ba điểm: N, I, C thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm): a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$

b) Cho a,b là các số thực không âm thoả mãn $x+y=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{3xy}$

Bài VI (Thưởng điểm): Tìm các số thực c sao cho $c+\sqrt{2023}$ và $\frac{2}{c}-\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 4

TRƯỜNG THCS THÁI THỊNH

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+4}{x-4}$ với $x>0; x\neq 4$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị của x thoả mãn $|P|=P$.

Bài II (2,0 điểm):

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

2) Một lon nước ngọt hình trụ có bán kính đáy bằng $2{,}5\ cm$, chiều cao bằng $12\ cm$. Tính thể tích của lon nước ngọt hình trụ đó (Lấy $\pi\approx 3{,}14$)

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+2\sqrt{y}=8\\ \dfrac{11}{x-1}-3\sqrt{y}=2\end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai: $x^2-4x+m-1=0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=x_1x_2+7$

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

1) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp

2) Chứng minh $DA.DE=DB.DC$

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài V (0,5 điểm): Giải phương trình $x^2+6x+2=(2x+2)\sqrt{x^2+5}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 5

TRƯỜNG THCS CHU VĂN AN

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $N=\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức M tại $x=36$

2) Rút gọn biểu thức *B*.

3) Tìm giá trị của x thỏa mãn $M.N=-\sqrt{x}-3$.

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Khi thực hiện, do cải tiến kĩ thuật nên mỗi tuần họ trồng vượt mức 5 ha so với kế hoạch. Vì vậy lâm trường đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

2) Một chiếc nón lá có đường sinh bằng 30 cm, đường kính đáy bằng 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó.

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=\dfrac{7}{2}\\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=2\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng (d) : $y=mx+m+1$

a) Khi $m=2$, không vẽ đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về bên phải của trục tung.

Bài IV (3,0 điểm): Cho ΔABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

1) Chứng minh: Bốn điểm A,M,H,N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: tam giác AMN và tam giác ACB đồng dạng.

3) Đường thẳng NM cắt đường thẳng BC tại P. Chứng minh: $PH^2=PB.PC$.

Bài V (0,5 điểm): Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\dfrac{3}{2}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 6

UBND QUẬN CẦU GIẤY
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ và $Q=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4\sqrt{x}}{x-9}$ với $x\geq 0; x\neq 9$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$

3) Với $P=A.B$, tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $78m$. Nếu giữ nguyên chiều dài và tăng chiều rộng thêm $2m$ thì diện tích mảnh vườn sẽ tăng $48\ m^2$. Xác định chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn.

2) Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình trụ cao $20\ cm$, đường kính đáy $10\ cm$. Tính thể tích của hộp đựng thực phẩm? (Bỏ qua bề dày của vỏ hộp và lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{x+2}-3(y-1)=5\\3\sqrt{x+2}+(y-1)=7\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2mx-3=0$

a) Giải phương trình khi $m=-1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn điều kiện $x_1<x_2$ và $|x_2|-|x_1|=2024$.

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Lấy M nằm giữa hai điểm O và B, kẻ dây CD vuông góc với AB tại M. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AC $E\neq A$ và $E\neq C$, N là giao điểm của BE và CD.

1) Chứng minh $AMNE$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh hai tam giác MNB đồng dạng với tam giác EAB và $AC^2+BE.BN=4R^2$.

3) Kẻ dây DK song song với dây BE. Chứng minh AK vuông góc với CE.

Bài V (0,5 điểm): Cho hai số thực $a,b>0$ và $a+b=\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}+2023.$$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 7

UBND QUẬN BA ĐÌNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Giải phương trình và hệ phương trình sau:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

2) $\begin{cases} 5x - \dfrac{6}{y} = 8 \\ 2x + \dfrac{3}{y} = 5 \end{cases}$

Bài II (2,5 điểm):

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một công ty vận tải dự định dùng một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn cam từ Vĩnh Long ra Hà Nội. Lúc sắp khởi hành, công ty phải điều 4 xe đi làm việc khác. Vì vậy mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn cam nữa mới hết. Hỏi lúc đầu công ty dự định sử dụng bao nhiêu xe để vận chuyển cam từ Vĩnh Long ra Hà Nội, biết khối lượng cam các xe chở là như nhau

2) Một hộp sữa dạng hình trụ có bán kính đáy là 6cm và chiều cao là 15cm. Tính thể tích của hộp sữa đó (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Bài III (2,0 điểm): Cho phương trình: $x^2 - mx - 2 = 0$ (x là ẩn số)

1) Tìm *m* để phương trình có một nghiệm x = 1 và tìm nghiệm còn lại.

2) Tìm giá trị nguyên dương của *m* để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$

Bài IV (3,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao *AD* của tam giác ABC và đường kính AK của (O). Gọi *F* là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AK.

1) Chứng minh tứ giác *ADFC* là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $DF // BK$.

3) Lấy *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Gọi *E* là chân đường vuông góc kẻ từ điểm *B* đến đường thẳng *AK*. Chứng minh $\widehat{MDF} = \widehat{MFD}$ và M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác *DEF*.

Bài V (0,5 điểm): Giải phương trình $x + 2 = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 8

UBND QUẬN NAM TỪ LIÊM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 1$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=49$

2) Chứng minh $A+B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm xong 575 chi tiết máy cùng loại trong một số ngày quy định, mỗi ngày làm được một số lượng chi tiết máy như nhau. Do cải tiến kỹ thuật, thực tế mỗi ngày tổ làm thêm được 4 chi tiết máy cùng loại so với kế hoạch. Vì vậy, tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn một ngày so với quy định. Tính số chi tiết máy mà tổ sản xuất dự định làm trong một ngày.

2) Một hộp sữa ông Thọ hình trụ có chiều cao 8 cm và đường kính đáy 7 cm. Nhà sản xuất đã dán giấy xung quanh hộp sữa để ghi các thông tin về sản phẩm. Hãy tính diện tích giấy cần dùng cho 1 hộp sữa. *(Coi mép giấy dán, các mép của hộp sữa và độ dày của giấy in không đáng kể. Lấy* $\pi \approx 3{,}14$*, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x-5}+3y=16\\ 2\sqrt{x-5}-y=4\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=6x-m+1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1-2x_2=0$

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O), đường kính AB. Dây CD vuông góc với đường kính AB tại H khác O, E là một điểm thuộc cung nhỏ BD (E khác B và D); AE cắt CD tại F.

1) Chứng minh: Tứ giác $BEFH$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: H là trung điểm của CD và $CD^2=4.AH.HB$

3) Đường thẳng đi qua H song song với CE, cắt đường thẳng AE và BE lần lượt tại I và K. Lấy G là trung điểm của đoạn thẳng IK. Chứng minh: $DI\perp AE$ và D, G, E thẳng hàng

Bài V (0,5 điểm): Xét các số thực a, b thỏa mãn $1\le a\le 2$ và $1\le b\le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 9

UBND QUẬN HAI BÀ TRƯNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}$ với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$

3) Tìm x để $A+B=\sqrt{x}$.

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai công nhân cùng làm chung một công việc mất 12 giờ. Nếu người thứ nhất làm trong 10 giờ và người thứ hai làm trong 5 giờ thì được $\dfrac{2}{3}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì hoàn thành công việc trong thời gian bao lâu.

2) Một ống nhựa hình trụ dùng để thoát nước từ mái nhà có chiều dài 3m và đường kính $20cm$. Hỏi diện tích nhựa để làm ống là bao nhiêu mét vuông? *(bỏ qua độ dày của thành ống, lấy* $\pi \approx 3{,}14$*)*.

Bài III (1,5 điểm): Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $\left(P\right): y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y=2x+m$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ khi $m=3$.

b) Tìm m để $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $\left(2x_1+x_2\right)^2=9$.

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn $\left(O\right)$ và dây BC cố định không qua tâm. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC (A khác B, C), điểm I là điểm chính giữa trên cung nhỏ BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh:

1) Bốn điểm A, H, I, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Tam giác IHK là tam giác cân và $\widehat{HIK}=\widehat{BIC}$.

3) Khi A thay đổi trên cung lớn BC thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V (0,5 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$, với x thoả mãn $0\le x\le 1$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 10

UBND HUYỆN THANH TRÌ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\dfrac{4}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9}+\dfrac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0; x\ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức $P=A.B$

3) Tìm các giá trị của x thỏa mãn $x-1=\left(\sqrt{x}+3\right).P+2\sqrt{x+3}$

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một đội xe theo kế hoạch phải chuyển xong 200 tấn than trong một thời gian quy định, mỗi ngày chuyển được một khối lượng than như nhau. Nhờ bổ sung thêm xe, thực tế mỗi ngày đội chuyển thêm được 5 tấn so với kế hoạch. Vì vậy chẳng những đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày so với quy định mà còn chuyển vượt mức kế hoạch 25 tấn. Tính khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong một ngày theo kế hoạch.

2) Một hộp sữa hình trụ có bán kính đáy là 3,5 cm và chiều cao là 8 cm. Người ta dùng giấy làm bao bì xung quanh hộp sữa (trừ hai đáy). Tính diện tích giấy để làm bao bì (lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2}{|2y-1|}=3\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-1=0\ (1)$

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\dfrac{1}{{x_1}^2}+\dfrac{1}{{x_2}^2}=1$

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C. Kẻ MH vuông góc với BC (H thuộc BC).

1) Chứng minh tứ giác $BOMH$ nội tiếp được đường tròn.

2) Gọi E là giao điểm của MB và OH. Chứng minh HO là tia phân giác của $\widehat{MHB}$ và $ME.MH=BE.HC$

3) Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K. Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm): Cho $x;y;z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh: $\dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{z^2}{1+x}\ge\dfrac{3}{2}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ SỐ 1

TRƯỜNG THCS LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $Q=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức Q tại $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Cho biểu thức $M=P.Q$. Tìm x để biểu thức M có giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức Q ta có $Q=\frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{9}+1}=\frac{3+3}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Vậy với $x=9$ thì $Q=\frac{3}{2}$

2) $P=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}-1+x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$

3) $M=P.Q=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+2+1}{\sqrt{x}+2}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

Ta có $\sqrt{x}\ge 0\,\forall x\in x\ge 0; x\ne 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2}\le \frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\le \frac{3}{2}\Leftrightarrow M\le \frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ (thoả mãn)

Vậy GTLN của $M=\frac{3}{2}$ khi $x=0$.

Bài II (1,5 điểm): *Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình*

Hai đội công nhân làm một công việc. Nếu hai đội làm chung thì hoàn thành sau 20 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì đội một sẽ hoàn thành công việc nhanh hơn đội hai là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì môi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó.

Lời giải

Gọi thời gian đội một làm riêng hoàn thành công việc là x (ngày; $x > 20$)

thời gian đội một làm riêng hoàn thành công việc là y (ngày ; $y > 20$)

Trong 1 ngày, đội một làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 ngày, đội hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 ngày, cả hai đội làm được $\frac{1}{20}$ (công việc)

Ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$ (1)

Vì nếu mỗi đội làm riêng thì đội một sẽ hoàn thành công việc nhanh hơn đội hai là 9 ngày

Ta có phương trình $y-x=9$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\\ y-x=9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20}\\ y=x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{20(x+9)+20x}{20x(x+9)}=\frac{x(x+9)}{20x(x+9)}\\ y=x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20(x+9)+20x=x(x+9)\\ y=x+9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-31x-180=0\\ y=x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-36)(x+5)=0\\ y=x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=36\ \ (tm)\\ x=-5\ \ (ktm)\end{array}\right.\\ y=x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=36\\ y=45\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy thời gian đội một làm riêng hoàn thành công việc là 36 ngày

thời gian đội hai làm riêng hoàn thành công việc là 45 ngày.

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x+3}+2\sqrt{y-2}=5\\ \frac{4}{x+3}-\sqrt{y-2}=2\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2mx+m^2-1=0$ (m là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m=-3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn hệ thức

$(1+x_1)(2-x_2)+(1+x_2)(2-x_1)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-x_1.x_2-2$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq -3$; $y \geq 2$

$\begin{cases}\dfrac{1}{x+3}+2\sqrt{y-2}=5\\ \dfrac{4}{x+3}-\sqrt{y-2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x+3}+2\sqrt{y-2}=5\\ \dfrac{8}{x+3}-2\sqrt{y-2}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{9}{x+3}=9\\ \dfrac{8}{x+3}-2\sqrt{y-2}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3=1\\ \dfrac{8}{1}-2\sqrt{y-2}=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ 2\sqrt{y-2}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ \sqrt{y-2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y-2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=6\end{cases} (tm)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(-2;6)$

2a) Với $m=-3$ phương trình (1) trở thành $x^2+6x+8=0$

$\Delta=6^2-4.1.8=4>0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-6+\sqrt{4}}{2.1}=-2$; $x_2=\dfrac{-6-\sqrt{4}}{2.1}=-4$

Vậy với $m=-3$ thì tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2;-4\}$

2b) $x^2-2mx+m^2-1=0$ (1)

$\Delta_{(1)}=(-2m)^2-4(m^2-1)=4>0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1.x_2=m^2-1\end{cases}$

Theo đề bài ta có $(1+x_1)(2-x_2)+(1+x_2)(2-x_1)=x_1{}^2+x_2{}^2-x_1.x_2-2$

$\Leftrightarrow 2-x_2+2x_1-x_1x_2+2-x_1+2x_2-x_1x_2=x_1{}^2+x_2{}^2-x_1.x_2-2$

$\Leftrightarrow 4+x_1+x_2-2x_1x_2=x_1{}^2+x_2{}^2-x_1.x_2-2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-x_1.x_2-6=0$

$\Rightarrow 4m^2-2m-(m^2-1)-6=0$

$\Leftrightarrow 3m^2-2m-5=0 \Leftrightarrow (m+1)(3m-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$

Vậy $m\in\left\{-1;\dfrac{5}{3}\right\}$ thoả mãn đề bài.

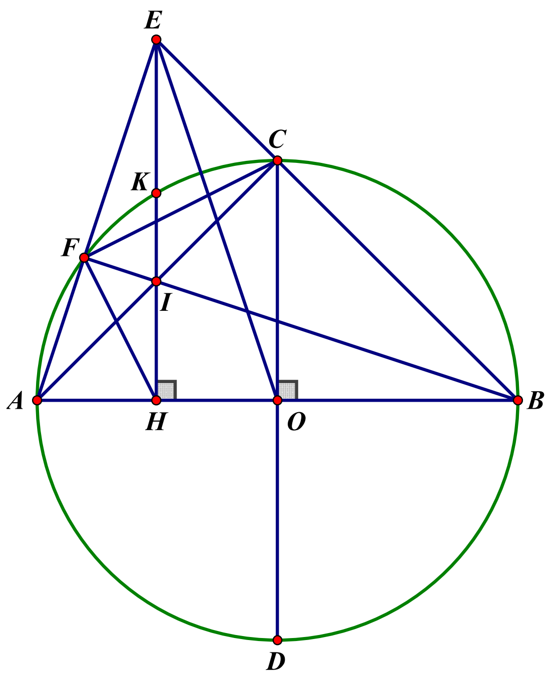
Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm K thuộc cung nhỏ AC. Kẻ KH vuông góc AB $(H\in AB)$. Nối AC cắt HK tại I, tia BC cắt đường thẳng HK tại E. Nối AE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F.

a) Chứng minh: Tứ giác $BHFE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $EC.EB=EF.EA$.

c) Cho H là trung điểm OA. Chứng minh $S_{EAB}=5.S_{ECF}$.

Lời giải



1) Ta có $F \in (O;R)$ đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{EFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có $EH \perp AB \Rightarrow \widehat{EHB} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BHFE$ có $\widehat{EFB} = \widehat{EHB} = 90^\circ$

Mà hai đỉnh F, H kề nhau cùng nhìn canh EB

Suy ra tứ giác $BHFE$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Ta có $C \in (O;R)$ đường kính $AB \Rightarrow \widehat{ACE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔECA và ΔEFB có

$\widehat{AEB}$ chung và $\widehat{ECA} = \widehat{EFB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \Delta ECA \backsim \Delta EFB\,(g.g) \Rightarrow \frac{EC}{EF} = \frac{EA}{EB} \Leftrightarrow EC.EB = EF.EA$$

c) Ta có H là trung điểm OA nên $OH = \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{OB}{OH} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{OB}{BH} = \frac{2}{3}$

Xét ΔBEH có $CO // EH$ (cùng vuông góc với AB)

$$\Rightarrow \frac{CO}{EH} = \frac{OB}{BH} = \frac{2}{3} \Rightarrow EH = CO : \frac{2}{3} = \frac{3R}{2}$$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác AEH vuông tại H ta có

$$AE^2 = EH^2 + AH^2 = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}R^2$$

Xét ΔAEO có EH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

$\Rightarrow \Delta AEO$ cân tại $E \Rightarrow EA = EO$

Dễ dàng chứng minh F, I, B thẳng hàng

Ta có $\begin{cases} \widehat{EAI} = \widehat{AIH} - \widehat{AEH} = \widehat{IAH} - \widehat{AEH} = 45^\circ - \widehat{AEH} \\ \widehat{OEC} = \widehat{HEB} - \widehat{OEH} = \widehat{HEB} - \widehat{AEH} = 45^\circ - \widehat{AEH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{OEC}$

Lại có $\widehat{AEI} = \widehat{OEH}$; $\widehat{COE} = \widehat{OEH}$ (2 góc so le trong) $\Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{EOC}$

Khi đó $\Delta AEI = \Delta EOC$ $(g.c.g) \Rightarrow AI = EC$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta AIH \backsim \Delta ABC$ $(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AI = \frac{AB.AH}{AC} = \frac{2R.\frac{R}{2}}{R\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow AI^2 = \frac{R^2}{2}$$

Chứng minh $\Delta ECF \backsim \Delta EAB$ $(c.g.c)$

$$\Rightarrow \frac{S_{ECF}}{S_{EAB}} = \left(\frac{EC}{AE}\right)^2 = \left(\frac{AI}{AE}\right)^2 = \frac{\frac{R^2}{2}}{\frac{5R^2}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{EAB} = 5.S_{ECF}$$

Bài V (0,5 điểm): Cho m, n, p là các số thực tuỳ ý thoả mãn $m^2 + n^2 + p^2 \le 14$

Chứng minh rằng: $m + 2n - 3p \le 14$.

Lời giải

Đặt $A = m + 2n - 3p$

$\Rightarrow -2A = -2m - 4n + 6p$

$= (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 4n + 4) + (p^2 + 6m + 9) - (m^2 + n^2 + p^2) - 14$

$= (m-1)^2 + (n-2)^2 + (p+3)^2 - 28 \ge -28$

$\Rightarrow A \le 14$

Dấu "=" xảy ra khi $m = 1; n = 2; p = -3$

Vậy $m + 2n - 3p \le 14$ khi $m = 1; n = 2; p = -3$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 2

TRƯỜNG THCS TRƯNG VƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $M=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $N=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{8}{x-4}$ với $x\ge 0;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị biểu thức M tại $x=9$.

2) Chứng minh $N=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{M}{N}$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức M ta có $M=\frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-2}=\frac{3+1}{3-2}=\frac{4}{1}=4$

Vậy với $x=9$ thì $M=4$.

2) $N=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{8}{x-4}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+2\left(\sqrt{x}-2\right)+8}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x+2\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4+8}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\frac{x+4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=\frac{M}{N}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

Ta có $\sqrt{x}+2\ge 2\forall x\ge 0,\, x\ne 4\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\ge\frac{1}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ (tmđk)

Vậy GTNN của $P=\frac{1}{2}$ khi $x=0$.

Bài II (2,0 điểm): *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

1) Một sàn phòng hội trường X có dạng hình chữ nhật. Nhà trường muốn sửa lại căn phòng cho rộng rãi hơn. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m, phòng hội trường sẽ rộng thêm $90m^2$. Nếu tắng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m, phòng hội trường sẽ rộng thêm $87m^2$. Tính diện tích ban đầu của hội trường.

2) Trái bóng đá tiêu chuẩn dùng trong thi đấu có diện tích bề mặt là $576\pi\ cm^2$. Coi quả bóng có dạng hình cầu, tính thể tích của trái bóng. (Lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Lời giải

Gọi chiều dài phòng hội trường trước khi sửa là x $(m\ ;\ x > 0)$

Chiều rộng phòng hội trường trước khi sửa là y $(m\ ;\ 0 < y < x)$

Diện tích phòng hội trường cũ là $xy\ (m^2)$

Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m

+ Chiều dài mới là $x + 2\ (m)$

+ Chiều rộng mới là $y + 3\ (m)$

Khi đó diện tích hội trường tăng thêm $90m^2$ nên ta có phương trình

$(x+2)(y+3) = xy + 90 \Leftrightarrow 3x + 2y = 84$

Nếu tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m, khi đó

+ Chiều dài mới là $x + 3\ (m)$

+ Chiều rộng mới là $y + 2\ (m)$

Khi đó diện tích hội trường tăng thêm $87m^2$ nên ta có phương trình

$(x+3)(y+2) = xy + 87 \Leftrightarrow 2x + 3y = 81$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 84 \\ 2x + 3y = 81 \end{cases}$

Giải phương trình tìm được $x = 18\ ;\ y = 15$ (thoả mãn)

Vậy diện tích hội trường lúc đầu là $18.15 = 270\ m^2$

2) Diện tích bề mặt trái bóng là $S = 4\pi R^2 = 576\pi \Rightarrow R = 12\ (cm)$

Khi đó thể tích của trái bóng là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 2304\pi \approx 7234{,}56\ (cm^3)$

Vậy thể tích của trái bóng xấp xỉ $7234{,}56\ cm^3$.

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải phương trình: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

2) Cho phương trình ẩn x: $x^2 - (2m-1)x + m - 1 = 0\ (1)$

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1\ ;\ x_2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^3 + x_2^3 = 2m^2 - m$.

Lời giải

1) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Đặt $t = x^2\ (t \geq 0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 7t + 12 = 0$ (1)

$\Delta_t = (-7)^2 - 4.1.12 = 1 > 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = \dfrac{7+\sqrt{1}}{2.1} = 4$; $t_2 = \dfrac{7-1}{2.1} = 3$ (thoả mãn)

Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Với $t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; -2; 2\right\}$.

2) $x^2 - (2m-1)x + m - 1 = 0$ (1)

a) $\Delta = \left[-(2m-1)\right]^2 - 4(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 5 = 4(m-1)^2 + 1 > 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^3 + x_2^3 = 2m^2 - m$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1.x_2 + x_2^2) = 2m^2 - m$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = 2m^2 - m$

$\Leftrightarrow (2m-1)\left[(2m-1)^2 - 3(m-1)\right] - (2m^2 - m) = 0$

$\Leftrightarrow (2m-1)(4m^2 - 7m + 4) - m(2m-1) = 0$

$\Leftrightarrow (2m-1)(4m^2 - 8m + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 4(2m-1)(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{2} \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy $m \in \left\{\dfrac{1}{2}; 1\right\}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

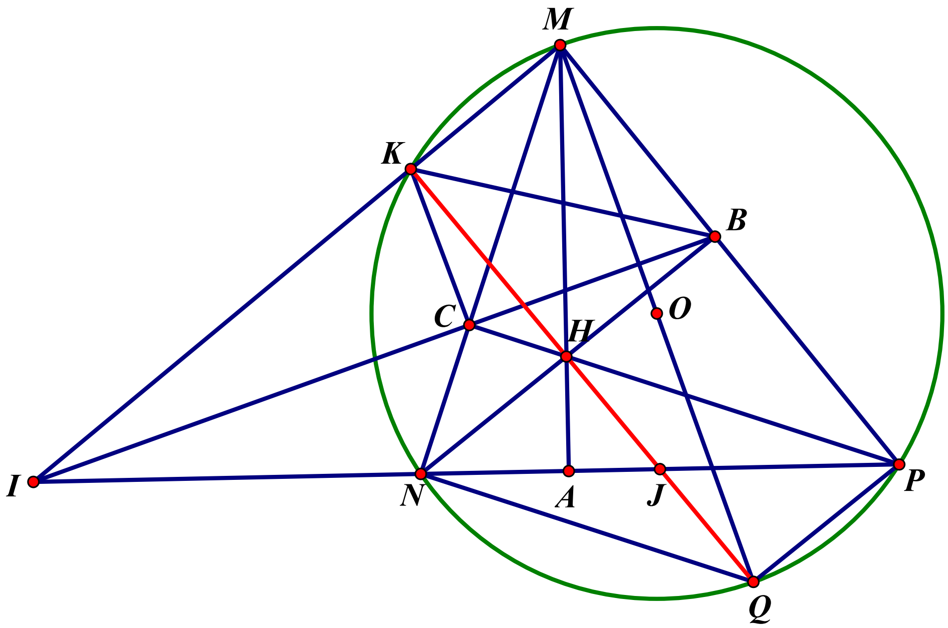
Bài IV (3,5 điểm): Cho tam giác nhọn MNP $(MN < MP)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao MA, NB, PC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm J của đường tròn đó.

2) Đường thẳng BC và đường thẳng NP cắt nhau tại I. Chứng minh $IB.IC = IN.IP$.

3) Đường thẳng MI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh $\widehat{KMC} = \widehat{KBC}$ và ba điểm K, H, J thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì $NB \perp MP \Rightarrow \widehat{NBP} = 90° \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính NP.

$PC \perp MN \Rightarrow \widehat{PCN} = 90° \Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính NP.

Suy ra N,C,B,P thuộc đường tròn $\left(I;\dfrac{NP}{2}\right)$ với I là trung điểm NP.

b) Vì $NCBP$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ICN} = \widehat{IPB}$

Xét ΔICN và ΔIPB có $\widehat{CIN}$ chung và $\widehat{ICN} = \widehat{IPB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ICN \backsim \Delta IPB \ (\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{IC}{IP} = \dfrac{IN}{IB} \Leftrightarrow IB.IC = IN.IP \ (1)$

c) Vì $\Delta KMPN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IKN} = \widehat{IPM}$

$\Rightarrow \Delta IKN \backsim \Delta IPM \ (\text{g.g}) \Rightarrow IK.IM = IN.IP \ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IB.IC = IK.IM$

$\Rightarrow \Delta IKC \backsim \Delta IBM \ (\text{g.g}) \Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{IBM}$

$\Rightarrow CKMB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KBC}$ (Đpcm)

Kẻ đường kính $MQ \Rightarrow \widehat{QKM} = \widehat{QPM} = \widehat{QNM} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Khi đó $NH // QP \ (\perp MP)$; $PH // QN \ (\perp MN)$

Suy ra $NHPQ$ là hình bình hành (dhnb)

Mà J là trung điểm $NP \Rightarrow J$ là trung điểm HQ

$\Rightarrow H,J,Q$ thẳng hàng (3)

Dễ dàng chứng minh được $MCHB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow M,K,C,H,B$ nội tiếp đường tròn đường kính MH

$\Rightarrow \widehat{MKH} = 90° \Rightarrow HK \perp MK$

Lại có $\widehat{MKQ} = 90^\circ$ $(cmt) \Rightarrow QK \perp MK$

Suy ra K, H, Q thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow K, H, J$ thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm): Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + b + c$.

Lời giải

Ta có $A^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 18 \Rightarrow A \leq 3\sqrt{2}$

Vậy GTLN của $A = 3\sqrt{2}$ khi $a = b = c = \sqrt{2}$.

Vì $a,b,c \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$

Tương tự $bc + 1 \geq b + c$ và $ca + 1 \geq c + a$

Nên $2(a + b + c) \leq ab + bc + ca + 3$

Hay $4A \leq 2(ab + bc + ca) + 6 = (a + b + c)^2 = A^2$

Mà $A > 0 \Rightarrow A \geq 4$

Vật GTNN của $A = 4$ khi $a = b = 1, c = 2$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 3

TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $P=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\frac{8\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0;\, x\ne 4$

1) Tính giá trị biểu thức Q khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Biết $M=\frac{P}{Q}$. Tìm các giá trị của x để $M=18$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức Q ta có $Q=\frac{1}{\sqrt{9}+2}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$

Vậy với $x=9$ thì $Q=\frac{1}{5}$

2) $P=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\frac{8\sqrt{x}}{x-4}=\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+8\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{3x-6\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}+8\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\frac{2x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2x}{x-4}$

3) $M=\frac{P}{Q}=\frac{2x}{x-4}:\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{2x}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{1}=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$

Để $M=18\Leftrightarrow\frac{2x}{\sqrt{x}-2}=18\Leftrightarrow 2x=18\left(\sqrt{x}-2\right)\Leftrightarrow 2x-18\sqrt{x}+36=0\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=6\\ \sqrt{x}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=36\\ x=9\end{array}\right.$ (thoả mãn)

Vậy $x\in\left\{36;9\right\}$.

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phân xưởng theo kế hoạch cần sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do cải tiến kĩ thuật, mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

2) Cột cờ Lũng Cú là một cột cờ quốc gia nằm ở đỉnh Lũng Cú có độ cao $1470m$ so với mực nước biển ở xã Lũng Cú, huyện Đồng Văn, tỉnh Hà Giang, cách điểm cực bắc của Việt Nam khoảng $3,3km$.

Phần thân cột cờ dạng hình trụ có chiều cao $20m$ và đường kính đáy $3,8m$. Hãy tính thể tích phần thân cột cờ dạng hình trụ đó (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).

Lời giải

Gọi số sản phẩm mỗi ngày mà phân xưởng phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm; $x \in \mathbb{N}^*; x < 1100$)

Theo kế hoạch, thời gian hoàn thành sản phẩm là: $\frac{1100}{x}$ (ngày)

Số sản phẩm thực tế mà phân xưởng làm mỗi ngày là $x+5$ (sản phẩm)

Thời gian hoàn thành sản phẩm trên thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày)

Vì phân xưởng đã hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình

$$\frac{1100}{x} - \frac{1100}{x+5} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1100(x+5)}{x(x+5)} - \frac{1100x}{x(x+5)} = \frac{2x(x+5)}{x(x+5)}$$
$$\Leftrightarrow 1100(x+5) - 1100x = 2x(x+5)$$
$$\Leftrightarrow 1100x + 5500 - 1100x - 5500 = 2x^2 + 10x$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 5500 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-50)(x+55) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ (thoả mãn) hoặc } x = -55 \text{ (loại)}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải làm 50 sản phẩm.

2) Bán kính đáy cột cờ là $3,8 : 2 = 1,9\ (m)$

Thể tích cột cờ là $h.\pi R^2 = 20.\pi.1,9^2 = 72,2\pi \approx 226,7\ (m^3)$

Vậy thể tích phần thân cột cờ xấp xỉ $226,7\ m^3$

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(y-5)+2(x-3)=0 \\ 7(x-4)+3(x+y-1)-14=0 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0\ (1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật có đường chéo bằng 5.

Lời giải

1) $\begin{cases} 3(y-5)+2(x-3)=0 \\ 7(x-4)+3(x+y-1)-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=21 \\ 10x+3y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=21 \\ 8x=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+9=21 \\ x=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=12 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(3;6)$.

2) $x^2-(m+5)x+3m+6=0\ (1)$

a) $\Delta=\left[-(m+5)\right]^2-4(3m+6)=m^2-2m+1=(m-1)^2$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow(m-1)^2>0\Leftrightarrow m-1\neq0\Leftrightarrow m\neq1$

Vậy với $m\neq1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m+5\\x_1x_2=3m+6\end{cases}$

Để x_1,x_2 là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật có đường chéo bằng 5

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\\{x_1}^2+{x_2}^2=5^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+5>0\\3m+6>0\\(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-5\\m>-2\\(m+5)^2-2(3m+6)=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m^2+4m-12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\(m-2)(m+6)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\(m-2)(m+6)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m=2\ \ (tm)\\m=-6\ (ktm)\end{cases}\Leftrightarrow m=2$$

Vậy $m=2$ thoả mãn bài toán.

Bài IV (3,5 điểm): Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD và CE cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh: Tứ giác $AEDC$ nội tiếp.

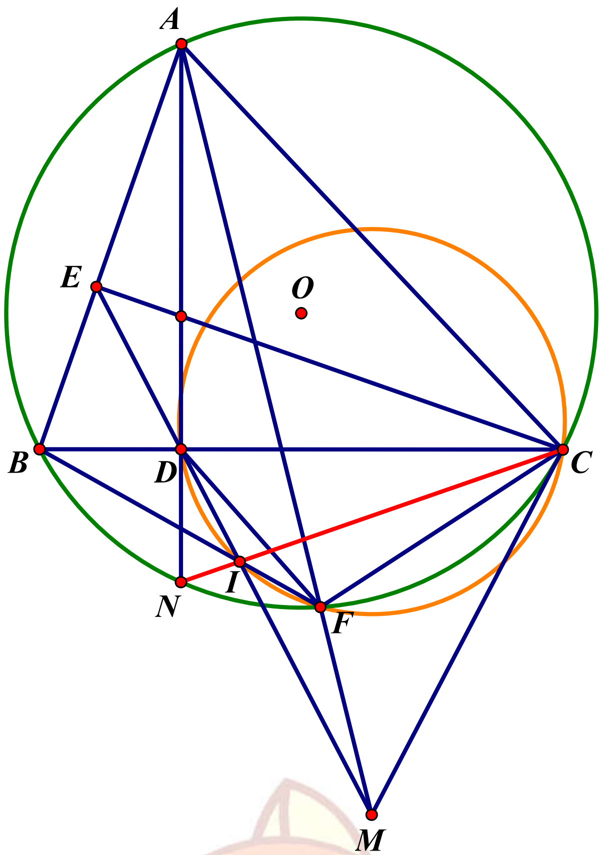
2) Tiếp tuyến tại C với (O) cắt ED tại M. Chứng minh $\widehat{MDC}=\widehat{MCB}$.

3) Đoạn AM cắt (O) tại F, tia AD cắt (O) tại N, đường thẳng BF cắt đường thẳng EM tại điểm I.

a) Chứng minh: tam giác MFD đồng dạng với tam giác MDA.

b) Chứng minh: ba điểm : N,I,C thẳng hàng.

Lời giải



1) Ta có $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ$

$CE \perp AB \Rightarrow \widehat{AEC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEDC$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 90^\circ$

Mà hai đỉnh D, C kề nhau cùng nhìn canh AC

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEDC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Vì $AEDC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BDE} = \widehat{EAC}$

Lại có $\widehat{BDE} = \widehat{MDC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{BAC}$

Xét (O) có $\widehat{BAC} = \widehat{MCD} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MCB}$ (đpcm)

3a) Vì $\widehat{MDC} = \widehat{MCD} \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại $M \Rightarrow MC = MD$

Chứng minh $\Delta MFC \backsim \Delta MCA$ $(g.g) \Rightarrow MC^2 = MF.MA$

Suy ra $MD^2 = MF.MA$

Khi đó $\Delta MFD \backsim \Delta MDA$ $(c.g.c)$

3b) Ta có $\widehat{EDC} + \widehat{EAC} = 180^\circ$ (Tứ giác $AEDC$ nội tiếp)

$\widehat{BFC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (Tứ giác $ABFC$ nội tiếp)

Mà $\widehat{EDC} = \widehat{BDI}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BDI}=\widehat{IFC} \Rightarrow DIFC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ICF}=\widehat{IDF}$

Ta lại có $\Delta MFD \backsim \Delta MDA\ (cmt) \Rightarrow \widehat{MDF}=\widehat{MAD}$

Mà $\widehat{MAD}=\widehat{NCF}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{NF}$

$\Rightarrow \widehat{NCF}=\widehat{ICF}$

Vậy N, I, C thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm):

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$

b) Cho x, y là các số thực không âm thoả mãn $x+y=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{3xy}$

Lời giải

a) $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=2 \end{cases}$

Đặt $A=x^2+y^2$; $B=xy$ $(A\ge 0)$. Suy ra hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} A+B=3 \\ A^2-2B^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ A^2-2B^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ (3-B)^2-2B^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ -B^2-6B+7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ (B+7)(1-B)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ \left[\begin{array}{l} B=-7 \\ B=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases} (tm) \text{ hoặc } \begin{cases} A=10 \\ B=-7 \end{cases} (tm)$$

TH1: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ y=1 \\ x=-1;\ y=1 \end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=-4 \\ xy=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=-4 \\ xy=-7 \end{cases}$ (loại)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1);(-1;-1)\}$

b) $x+y=2 \Leftrightarrow (x+y)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4-2xy\ge 2xy \Leftrightarrow xy\le 1$

$2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2$

Ta có $H\sqrt{3}=\sqrt{3\left(x^2+xy+y^2\right)}+3\sqrt{xy}$

$$H\sqrt{3}\le \frac{3+x^2+xy+y^2}{2}+3\left(\frac{1+xy}{2}\right)=\frac{6+x^2+y^2+4xy}{2}=\frac{6+(x+y)^2+2xy}{2}\le\frac{6+4+2}{2}=6$$

$\Rightarrow H \le 3\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 1$.

Vậy GTLN của $P = 3\sqrt{2}$ khi $x = y = 1$.

Ta có $H^2 = x^2 + xy + y^2 + 3xy + 2\sqrt{3xy\left(x^2 + xy + y^2\right)}$

$$H^2 = x^2 + 4xy + y^2 + 2\sqrt{3xy\left(x^2 + xy + y^2\right)}$$
$$\ge x^2 + 2xy + y^2 = \left(x + y\right)^2 = 4$$

$\Rightarrow H \ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0; y = 2$ hoặc $x = 2; y = 0$

Vậy GTNN của $H = 2$ khi $x = 0; y = 2$ hoặc $x = 2; y = 0$

Bài VI (Thưởng điểm): Tìm các số thực c sao cho $c + \sqrt{2023}$ và $\dfrac{2}{c} - \sqrt{2023}$ đều là các số nguyên

Lời giải

Giả sử $c + \sqrt{2023} = x\ \left(x \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow c = x - \sqrt{2023}$

$$\Rightarrow \frac{2}{c} - \sqrt{2023} = \frac{2}{x - \sqrt{2023}} - \sqrt{2023} = \frac{2\left(x + \sqrt{2023}\right)}{x^2 - 2023} - \sqrt{2023} = \frac{2x}{x^2 - 2023} + \left(\frac{2}{x^2 - 2023} - 1\right).\sqrt{2023}$$

Vì $\dfrac{2}{c} - \sqrt{2023} \in \mathbb{Z}$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2 - 2023} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2}{x^2 - 2023} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 45 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 45 - \sqrt{2023} \\ c = -45 - \sqrt{2023} \end{array}\right.$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 4

TRƯỜNG THCS THÁI THỊNH

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+4}{x-4}$ với $x>0;x\neq 4$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức *B*.

3) Cho $P=A.B.$ Tìm giá trị của x thoả mãn $\left|P\right|=P.$

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}}=\dfrac{3+4}{3}=\dfrac{7}{3}$

2) $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-2\right)+x+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$

Để $\left|P\right|=P\Leftrightarrow P\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}\geq 0$

Vì $\sqrt{x}\geq 0\,\forall x\in x>0;\,x\neq 4\Rightarrow\sqrt{x}+4>0$

$\Rightarrow\sqrt{x}-2>0\Leftrightarrow x>4$

Kết hợp ĐKXĐ ta có $x>4$.

Vậy $x>4$ thì $\left|P\right|=P.$

Bài II (2,0 điểm):

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

2) Một lon nước ngọt hình trụ có bán kính đáy bằng $2,5\text{ cm}$, chiều cao bằng $12\text{ cm}.$ Tính thể tích của lon nước ngọt hình trụ đó (Lấy $\pi\approx 3,14$)

Lời giải

1) Gọi số sản phẩm số sản phẩm phân xưởng làm trong 1 ngày theo dự định là x (sản phẩm) $\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$

Số sản phẩm phân xưởng đó làm trong 1 ngày theo thực tế là $x+5$ (sản phẩm)

Thời gian để làm được 1100 sản phẩm theo dự định là $\frac{1100}{x}$ (ngày)

Thời gian để làm được 1100 sản phẩm theo thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày)

Vì phân xưởng hoàn thành trước kế hoạch 2 ngày ta có: $\frac{1100}{x}-\frac{1100}{x+5}=2$

$\Leftrightarrow \frac{1100(x+5)}{x(x+5)}-\frac{1100x}{x(x+5)}=2 \Rightarrow 1100(x+5)-1100x=2x(x+5) \Leftrightarrow x^2+5x-2750=0$

Giải PT ta được $x=50(TM); x=-55$ (Loại)

Vậy theo dự định mỗi ngày phân xưởng làm được 50 sản phẩm

2) Thể tích của lon nước ngọt hình trụ là $V=\pi r^2 h=\pi \cdot 2,5^2 \cdot 12=75\pi \approx 75.3,14 \approx 235,5\left(\text{ cm}^3\right)$

Vậy thể tích của lon nước ngọt hình trụ khoảng $235,5\text{ cm}^3$

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{x-1}+2\sqrt{y}=8 \\ \frac{11}{x-1}-3\sqrt{y}=2 \end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai: $x^2-4x+m-1=0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=x_1x_2+7$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 1; y \geq 0$

Đặt $a=\frac{1}{x-1}$; $b=\sqrt{y}$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$\begin{cases} 2a+2b=8 \\ 11a-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+6b=24 \\ 22a-6b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28a=28 \\ 22a-6b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{x-1}=1 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=9 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;9)$

2) $x^2-4x+m-1=0$ (1)

$\Delta'=(-2)^2-(m-1)=5-m$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 5-m>0 \Leftrightarrow m<5$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Theo đề bài $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2-7=0 \Rightarrow 4^2-3(m-1)-7=0 \Leftrightarrow m=4$ (thoả mãn)

Vậy $m=4$ thoả mãn đề bài.

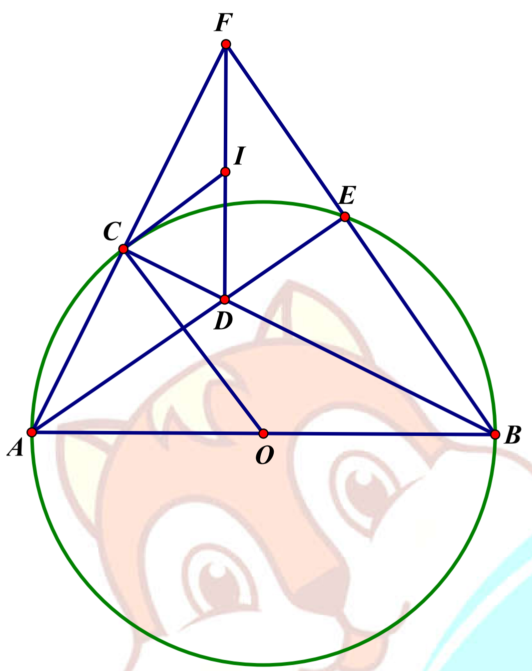
Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

1) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp

2) Chứng minh $DA.DE=DB.DC$

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Lời giải



1) Ta có $E\in(O) \Rightarrow \widehat{AEB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{DEF}=90^\circ$

$F\in(O) \Rightarrow \widehat{AFB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{DCF}=90^\circ$

Xét tứ giác $FCDE$ có $\widehat{DEF}+\widehat{DCF}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra tứ giác $FCDE$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Xét (O) có $\widehat{CAD}=\widehat{EBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

Xét ΔACD và ΔBED có $\widehat{CAD}=\widehat{EBD}$ (cmt); $\widehat{CDA}=\widehat{EDB}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BED$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DC}{DE} \Leftrightarrow DA.DE=DB.DC$

3) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE \Rightarrow I$ là trung điểm FD

Dễ dàng chứng minh D là trực tâm $\Delta FAB \Rightarrow FD\perp AB$

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{CAB}$) (1)

Xét ΔCFD vuông tại C có CI là trung tuyến

$\Rightarrow CI = IF = ID \Rightarrow \Delta IFC$ cân tại I và ΔICD cân tại I

$\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ mà $\widehat{ICF} + \widehat{ICD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ICD} + \widehat{IFC} = 90^\circ$ (2)

Lại có $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ (vì ΔOBC cân tại O) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{ICD} + \widehat{OCB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OCI} = 90^\circ$

$\Rightarrow CI$ là tiếp tuyến của (O) tại C

Bài V (0,5 điểm): Giải phương trình $x^2 + 6x + 2 = (2x+2)\sqrt{x^2+5}$.

Lời giải

$$x^2 + 6x + 2 = (2x+2)\sqrt{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 + 6x - 3 - (2x+2)\sqrt{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 + 3(2x-1) - (2x-1)\sqrt{x^2+5} - 3\sqrt{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+5} - 2x + 1\right)\left(\sqrt{x^2+5} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+5} = 2x-1 \\ \sqrt{x^2+5} = 3 \end{array}\right.$$

Giải ra ta được $x = 2$ hoặc $x = -2$

Vậy PT có tập nghiệm là $S = \{-2; 2\}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 5

TRƯỜNG THCS CHU VĂN AN

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $N=\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức M tại $x=36$

2) Rút gọn biểu thức *B*.

3) Tìm giá trị của x thỏa mãn $M.N=-\sqrt{x}-3$.

Lời giải

1) Thay $x=36$ (tmđk) vào biểu thức M ta có $M=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}+1}=\dfrac{6}{6+1}=\dfrac{6}{7}$

Vậy $M=\dfrac{6}{7}$ khi $x=36$

2) $N=\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)=\left[1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}\right].\left[1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}\right]=\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)=1-x$

3)

$M.N=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.(1-x)=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+1}=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow\sqrt{x}.\left(1-\sqrt{x}\right)=-\sqrt{x}-3$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}-x=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0$

Vì $\sqrt{x}+1>0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (tmđk)

Vậy $x=9$ thoả mãn đề bài.

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Khi thực hiện, do cải tiến kĩ thuật nên mỗi tuần họ trồng vượt mức 5 ha so với kế hoạch. Vì vậy lâm trường đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

2) Một chiếc nón lá có đường sinh bằng $30\ cm$, đường kính đáy bằng $40\ cm$. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó.

Lời giải

1) Gọi số ha rừng lâm trường dự định trồng trong mỗi tuần là x $(ha; x>0)$

Thời gian trồng rừng theo theo kế hoạch là: $\dfrac{75}{x}$ (tuần)

Thời gian trồng rừng trên thực tế là: $\dfrac{80}{x+5}$ (tuần)

Vì thực tế hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần nên ta có phương trình $\frac{75}{x}-\frac{80}{x+5}=1$

$\Leftrightarrow x^2+10x-375=0 \Leftrightarrow (x-15)(x+25)=0 \Leftrightarrow x=15$ (thoả mãn) hoặc $x=-25$ (loại)

Vậy số ha rừng lâm trường dự định trồng trong một tuần là 15 ha.

2) Bán kính đáy của hình nón là $r=40:2=20$ cm

Diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi rl=\pi\cdot 20.30=600\pi\left(cm^2\right)$

Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón nên diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó là: $600\pi\cdot 2=1200\pi\ \left(cm^2\right)$

Vậy diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó là $1200\pi\ cm^2$

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-1}=\frac{7}{2}\\ \frac{3}{x-1}-\frac{2}{y-1}=2\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng (d) : $y=mx+m+1$

a) Khi $m=2$, không vẽ đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về bên phải của trục tung.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\neq 1$; $y\neq 1$

$$\begin{cases}\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-1}=\frac{7}{2}\\ \frac{3}{x-1}-\frac{2}{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{x-1}+\frac{6}{y-1}=7\\ \frac{9}{x-1}-\frac{6}{y-1}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{13}{x-1}=13\\ \frac{3}{x-1}-\frac{2}{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\ 3-\frac{2}{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\ y-1=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}(tm)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;3)$

2a) Thay $m=2$ vào $y=2x+m+1\Rightarrow y=2x+3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có

$$x^2=2x+3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Với $x=-1\Rightarrow y=1$

Với $x=3\Rightarrow y=9$

Vậy với $m=2$, giao điểm của (d) và (P) là $A(-1;1)$ và $B(3;9)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có

$x^2=mx+m+1\Leftrightarrow x^2-mx-m-1=0$ (1)

$\Delta = (-m)^2 - 4(-m-1) = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về bên phải của trục tung $\Leftrightarrow x_1 > 0\,;\, x_2 > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn điều kiện đề bài

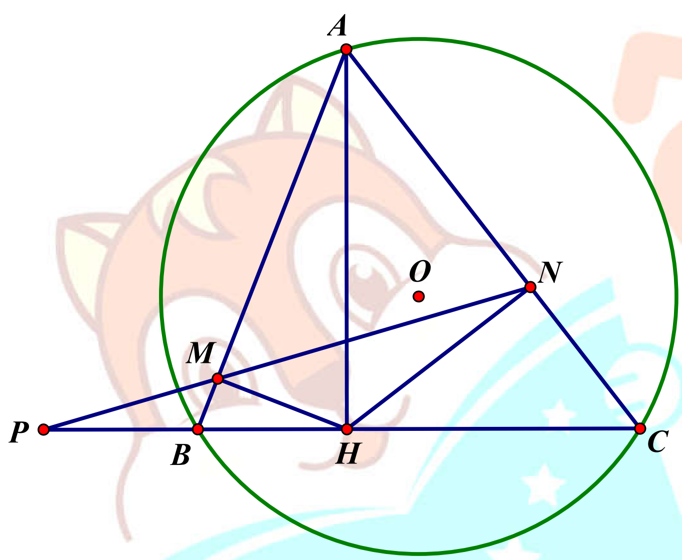
Bài IV (3,0 điểm): Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

1) Chứng minh: Bốn điểm A,M,H,N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: tam giác AMN và tam giác ACB đồng dạng.

3) Đường thẳng NM cắt đường thẳng BC tại P. Chứng minh: $PH^2 = PB.PC$.

Lời giải



1) Ta có $HM \perp AB \Rightarrow \widehat{AMH} = 90°$; $\widehat{ANH} = 90°$

Xét tứ giác $AMHN$ có $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 90° + 90° = 180°$

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp hay bốn điểm A,M,H,N cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

2) Xét ΔAHB vuông tại H có HM là đường cao

$\Rightarrow AH^2 = AM.AB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

Xét ΔAHC vuông tại H có HN là đường cao

$\Rightarrow AH^2 = AN.AC$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM.AB = AN.AC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$

Xét ΔAMN và ΔACB có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$ (cmt) và $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB$ $(c.g.c)$

3) Vì $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{AMN} = \widehat{PMB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{PCN}$

Xét ΔPMB và ΔPCN có $\widehat{CPN}$ chung và $\widehat{PMB} = \widehat{PCN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta PMB \backsim \Delta PCN\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{PM}{PC} = \dfrac{PB}{PN} \Leftrightarrow PM.PN = PB.PC$ (3)

Vì $\widehat{PMH} = 90^\circ + \widehat{PMB}$

$\widehat{PHN} = 90^\circ + \widehat{AHN} = 90^\circ + \widehat{PCN}$ (cùng phụ $\widehat{HAN}$)

Mà $\widehat{PMB} = \widehat{PCN}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{PMH} = \widehat{PHN}$

Xét ΔPMH và ΔPHN có

$\widehat{MPB}$ chung và $\widehat{PMH} = \widehat{PHN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta PMH \backsim \Delta PHN\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{PM}{PH} = \dfrac{PH}{PN} \Leftrightarrow PH^2 = PM.PN$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow PH^2 = PB.PC$

Bài V (0,5 điểm): Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a+b)(a+c)$

Tương tự $1 + b^2 = (b+a)(b+c)$; $1 + c^2 = (c+a)(c+b)$

Ta có $\dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+c}$

$\dfrac{2b}{\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{2b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \le \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{b}{b+c}$

$\dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}} = \dfrac{2c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \le \dfrac{c}{a+b} + \dfrac{c}{b+c}$

$\Rightarrow \dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{2b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{a+b}{a+b} + \dfrac{b+c}{b+c} + \dfrac{c+a}{c+a} = 3$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 6

UBND QUẬN CẦU GIẤY

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4\sqrt{x}}{x-9}$ với $x\geq 0;\, x\neq 9$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$

3) Với $P=A.B$, tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}-3}{\sqrt{16}+2}=\dfrac{4-3}{4+2}=\dfrac{1}{6}$

Vậy $A=\dfrac{1}{6}$ khi $x=16$.

2) $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4\sqrt{x}}{x-9}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}+3\right)-2\left(\sqrt{x}-3\right)+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}+9-2\sqrt{x}+6+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$

$=\dfrac{5\sqrt{x}+15}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{5\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}.\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{5}{\sqrt{x}+2}$

Vì $x\geq 0\Rightarrow \sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{x}+2\geq 2\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}\leq \dfrac{5}{2}\Rightarrow 0<\dfrac{5}{\sqrt{x}+2}\leq \dfrac{5}{2}$

Suy ra $0<P\leq \dfrac{5}{2}$. Mà $P\in \mathbb{Z}\Rightarrow P\in \left\{1;2\right\}$

Với $P=1\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}=1\Leftrightarrow \sqrt{x}+2=5\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (loại)

Với $P=2\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}=2\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}+2\right)=5\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+4=5\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (thoả mãn)

Vậy $x=\dfrac{1}{4}$ thì P nguyên.

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $78m$. Nếu giữ nguyên chiều dài và tăng chiều rộng thêm $2m$ thì diện tích mảnh vườn sẽ tăng $48\ m^2$. Xác định chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn.

2) Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình trụ cao $20\ cm$, đường kính đáy $10\ cm$. Tính thể tích của hộp đựng thực phẩm? (Bỏ qua bề dày của vỏ hộp và lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x và y (m) (Điều kiện: $x > y > 0$)

Biết mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $78m$ nên ta có phương trình

$(x+y).2 = 78 \quad (1)$

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu là $xy\ (m^2)$

Chiều rộng của mảnh vườn sau khi tăng 2m là $y+2\ (m)$

Giữ nguyên chiều dài và tăng chiều rộng thêm 2m thì diện tích mảnh vườn hình chữ nhật là $x(y+2)\ (m^2)$

Vì diện tích mảnh vườn tăng $48\ m^2$ nên ta có phương trình: $x(y+2) - xy = 48\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y).2 = 78\\ x(y+2) - xy = 48\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=39\\ xy+2x-xy=48\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=39\\ x=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=15\\ x=24\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là 24m và 15m.

2) Ta có $h = 20cm;\ d = 10cm \Rightarrow R = 5cm$

Thể tích hộp đựng thực phẩm là $V = \pi R^2 h \approx 20.5^2.3{,}14 \approx 1570\ (cm^3)$

Vậy thể tích hộp đựng đó khoảng $1570\ cm^3$

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{x+2} - 3(y-1) = 5\\ 3\sqrt{x+2} + (y-1) = 7\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 3 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = -1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 < x_2$ và $|x_2| - |x_1| = 2024$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \geq -2$

Đặt $a=\sqrt{x+2}\ \left(a\ge 0\right)$ và $b=y-1$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a-3b=5\\3a+b=7\end{cases}$

$\begin{cases}4a-3b=5\\3a+b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-3b=5\\9a+3b=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13a=26\\3a+b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\6+b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ (thoả mãn)

Suy ra $\begin{cases}\sqrt{x+2}=2\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=4\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

2) $x^2-2mx-3=0$ (1)

a) Với $m=-1$ phương trình trở thành $x^2+2x-3=0$

$\Delta=2^2-4.1.\left(-3\right)=16>0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2.1}=1$; $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2.1}=-3$

Vậy với $m=-1$ phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{1;-3\right\}$

b) Ta có $\Delta_{(1)}'=\left(-m\right)^2-1.\left(-3\right)=m^2+3>0$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=-3\end{cases}$

Vì $x_1x_2=-3<0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu

Mà $x_1<x_2\Rightarrow x_1<0<x_2$

Do đó $\left|x_2\right|-\left|x_1\right|=x_2-\left(-x_1\right)=x_2+x_1$

$\Rightarrow x_1+x_2=2024\Rightarrow 2m=2024\Leftrightarrow m=1012$

Vậy $m=1012$ thoả mãn đề bài

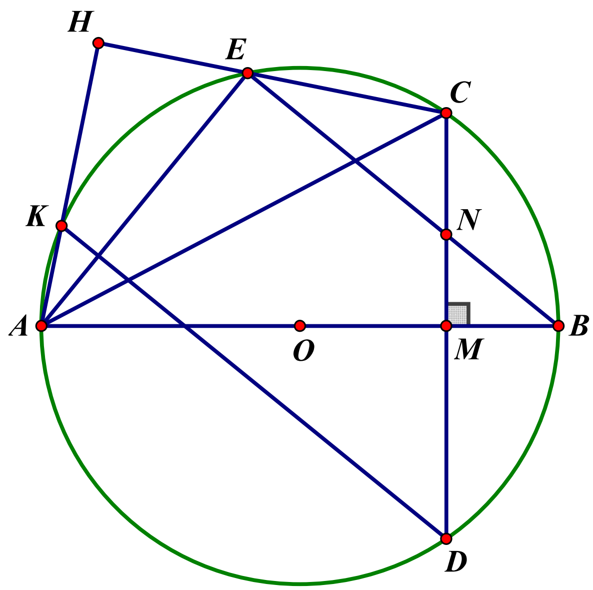
Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính $AB=2R$. Lấy M nằm giữa hai điểm O và B, kẻ dây CD vuông góc với AB tại M. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AC $E\neq A$ và $E\neq C$, N là giao điểm của BE và CD.

1) Chứng minh $AMNE$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh hai tam giác MNB đồng dạng với tam giác EAB và $AC^2+BE.BN=4R^2$.

3) Kẻ dây DK song song với dây BE. Chứng minh AK vuông góc với CE.

Lời giải



1) Ta có E thuộc (O) đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AEB} = 90°$

Lại có $CD \perp AB$ tại $M \Rightarrow \widehat{NMA} = 90°$

Xét tứ giác $AMNE$ có $\widehat{AEN} + \widehat{AMN} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra $AMNE$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Xét ΔMNB và ΔEAB có

$\widehat{NMB} = \widehat{AEB} = 90°$; $\widehat{ABE}$ chung

$\Rightarrow \Delta MNB \backsim \Delta EAB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{EB} = \dfrac{NB}{AB} \Rightarrow BE.BN = MB.AB$

Ta có C thuộc (O) đường kính $AB \Rightarrow \widehat{ACB} = 90°$

Xét ΔACB vuông tại C có CM là đường cao

$\Rightarrow AC^2 = AM.AB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Suy ra $AC^2 + BE.BN = AM.AB + MB.AB = AB(AM + MB) = AB^2 = 4R^2$

Vậy $AC^2 + BE.BN = 4R^2$

3) Gọi H là giao điểm của AK và CE

Xét (O) có $KD // BE \Rightarrow \overset{\frown}{KE} = \overset{\frown}{BD}$ (định lý)

Vì $AB \perp CD$ tại M nên B là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CD}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{KE}$

Lại có $\widehat{HAC} = \widehat{KAC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{KC} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{KE} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{BC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right)$

$\widehat{EAB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{EB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{BC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{EAB}$

Xét (O) có $\widehat{HCA} = \widehat{EBA} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

Mà $\widehat{EBA} + \widehat{EAB} = 90°$ (tam giác ABE vuông tại E)

Suy ra $\widehat{HCA} + \widehat{HAC} = 90° \Rightarrow \widehat{AHC} = 90°$

$\Rightarrow AK \perp CE$ tại H

Bài V (0,5 điểm): Cho hai số thực $a, b > 0$ và $a + b = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 2023.$

Lời giải

$P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 2023 = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 4(a+b) + 2018 = \left(\frac{4}{a} + 4a\right) + \left(\frac{1}{4a} + 4b\right) + 2018$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có

$P \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.4a} + 2\sqrt{\frac{1}{4b}.4b} + 2018 = 2028$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1;\ b = \frac{1}{4}$

Vậy GTNN của $P = 2028$ khi $a = 1;\ b = \frac{1}{4}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 7

UBND QUẬN BA ĐÌNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II
Năm học 2022 – 2023
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Giải phương trình và hệ phương trình sau:

1) $x^2-3x+2=0$

2) $\begin{cases} 5x-\dfrac{6}{y}=8 \\ 2x+\dfrac{3}{y}=5 \end{cases}$

Lời giải

1) $x^2-3x+2=0$

Ta có $a=1$; $b=-3$; $c=2$

$\Delta=(-3)^2-4.1.2=1>0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow x_1=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2}=1$; $x_2=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}=2$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;2\}$

2) Điều kiện: $y\neq 0$

Đặt $\dfrac{1}{y}=b$. Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} 5x-6b=8 \\ 2x+3b=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-6b=8 \\ 4x+6b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=18 \\ 4x+6b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 8+6b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x=2 \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;3)$

Bài II (2,5 điểm):

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một công ty vận tải dự định dùng một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn cam từ Vĩnh Long ra Hà Nội. Lúc sắp khởi hành, công ty phải điều 4 xe đi làm việc khác. Vì vậy mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn cam nữa mới hết. Hỏi lúc đầu công ty dự định sử dụng bao nhiêu xe để vận chuyển cam từ Vĩnh Long ra Hà Nội, biết khối lượng cam các xe chở là như nhau

2) Một hộp sữa dạng hình trụ có bán kính đáy là 6cm và chiều cao là 15cm. Tính thể tích của hộp sữa đó (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Lời giải

Gọi số xe lúc đầu công ty dự định sử dụng là: x (xe) (với $x \in \mathbb{N}^*$; $x > 4$)

Số cam mỗi xe công ty dự định vận chuyển là: $\frac{60}{x}$ (tấn)

Sau khi điều đi 4 xe, số xe còn lại mà công ty sử dụng vận chuyển là: x – 4 (xe)

Số cam mỗi xe của công ty thực tế vận chuyển là: $\frac{60}{x-4}$ (tấn)

Theo đề bài, mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn cam nữa mới hết, nên ta có phương trình:

$\frac{60}{x-4} - \frac{60}{x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{120x - 120(x-4)}{2x(x-4)} = \frac{x(x-4)}{2x(x-4)}$

$\Leftrightarrow 120x - 120(x-4) = x(x-4)$

$\Leftrightarrow 120x - 120x + 480 = x^2 - 4x$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 480 = 0$

$\Leftrightarrow (x-24)(x+20) = 0$

$\Leftrightarrow x = 24$ (thoả mãn) hoặc $x = -20$ (loại)

Vậy theo kế hoạch công ty phải sử dụng 24 xe để vận chuyển số cam từ Vĩnh Long ra Hà Nội.

Bài III (2,0 điểm): Cho phương trình: $x^2 - mx - 2 = 0$ (x là ẩn số)

1) Tìm *m* để phương trình có một nghiệm x = 1 và tìm nghiệm còn lại.

2) Tìm giá trị nguyên dương của *m* để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$

Lời giải

1) Thay $x = 1$ vào phương trình ta có $1^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1$

Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1x_2 = -2$

Vì $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -2$

Vậy với $m = -1$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -2$

2) $x^2 - mx - 2 = 0$

$\Delta = (-m)^2 - 4.(-2) = m^2 + 8 > 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$

Để $x_1^2+x_2^2=20 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=20$

$\Rightarrow m^2-2(-2)=20 \Leftrightarrow m^2=16 \Leftrightarrow m=\pm 4$

Mà m cần tìm là số nguyên dương nên $m=4$

Vậy $m=4$ thoả mãn đề bài

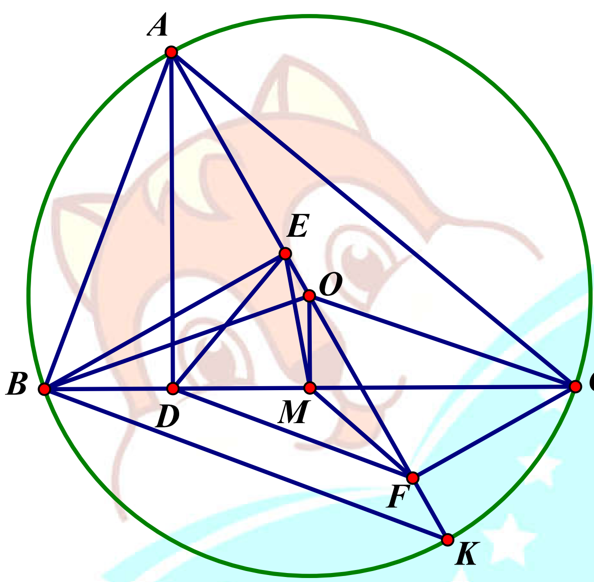
Bài IV (3,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AD của tam giác ABC và đường kính AK của (O). Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AK.

1) Chứng minh tứ giác $ADFC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $DF // BK$.

3) Lấy M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ điểm B đến đường thẳng AK. Chứng minh $\widehat{MDF}=\widehat{MFD}$ và M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF.

Lời giải



1) Ta có $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADC}=90^\circ$; $AF \perp AK \Rightarrow \widehat{AFC}=90^\circ$

Xét tứ giác $ADFC$ có $\widehat{ADC}=\widehat{AFC}=90^\circ$

Mà $D; F$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Ta có $ADFC$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{FAC}=\widehat{CDF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$)

Mà $\widehat{CAK}=\widehat{CBK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$)

$\Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{MBK}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow DF // BK$

3) Chứng minh $OM \perp BC$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFO} = \widehat{MCO}$ (1)

Vì $ADFC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{DCA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DFM} = \widehat{OCA}$

Vì ΔOAC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

Lại có tứ giác $ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{MDF}$

$\Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{MFD} \Rightarrow \Delta MDF$ cân tại $M \Rightarrow MD = MF$ (3)

Chứng minh tứ giác $BEOM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{OBM}$

Vì ΔOBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCM}$

Vì tứ giác $OMFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OFM} \Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OFM}$

$\Rightarrow \Delta MEF$ cân tại $M \Rightarrow ME = MF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow ME = MF = MD$

Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

Bài V (0,5 điểm): Giải phương trình $x+2=\sqrt{x-2}+2\sqrt{x+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 2$

Phương trình trở thành $2x+4=2\sqrt{x-2}+4\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow x-2-\sqrt{x-2}+1+(x+1)-4\sqrt{x+1}+4=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \ (\text{tmdk})$

Vậy tập nghiệm của PT là $S=\{3\}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 8

UBND QUẬN NAM TỪ LIÊM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 1$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=49$

2) Chứng minh $A+B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

Lời giải

1) Thay $x=49$ (tmdk) vào biểu thức A ta được: $A=\dfrac{49-3}{\sqrt{49}-1}=\dfrac{46}{6}=\dfrac{23}{3}$

Vậy với $x=49$ thì $A=\dfrac{23}{3}$x=25

2) $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{x-4+\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm xong 575 chi tiết máy cùng loại trong một số ngày quy định, mỗi ngày làm được một số lượng chi tiết máy như nhau. Do cải tiến kỹ thuật, thực tế mỗi ngày tổ làm thêm được 4 chi tiết máy cùng loại so với kế hoạch. Vì vậy, tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn một ngày so với quy định. Tính số chi tiết máy mà tổ sản xuất dự định làm trong một ngày.

2) Một hộp sữa ông Thọ hình trụ có chiều cao 8 cm và đường kính đáy 7 cm. Nhà sản xuất đã dán giấy xung quanh hộp sữa để ghi các thông tin về sản phẩm. Hãy tính diện tích giấy cần dùng cho 1 hộp sữa. *(Coi mép giấy dán, các mép của hộp sữa và độ dày của giấy in không đáng kể. Lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*

Lời giải

Gọi số chi tiết máy mà tổ sản xuất dự định làm trong một ngày là x (chi tiết máy; $x\in \mathbb{N}^*$)

Theo kế hoạch thời gian hoàn thành công việc là $\dfrac{575}{x}$ (ngày)

Số chi tiết máy tổ sản xuất làm trong 1 ngày theo thực tế là: $x+4$ (chi tiết máy)

Thời gian hoàn thành công việc trên thực tế là $\dfrac{575}{x+4}$ (ngày)

Vì tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày so với quy định ta có phương trình:

$$\frac{575}{x}-\frac{575}{x+4}=1$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 2300 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-46)(x+50) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 46(TM) \\ x = -50(KTM) \end{array}\right.$$

Vậy số chi tiết máy mà tổ sản xuất dự định làm trong 1 ngày là 46 (chi tiết máy)

2) Bán kính đáy của hộp sữa là: $7:2 = 3,5\ (cm)$

Diện tích phần giấy dán vỏ hộp sữa cần dùng chính là diện tích xung quanh của hộp sữa và bằng:

$S_{xq} = 2\pi Rh \approx 2.3,14.3,5.8 \approx 176\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần giấy cần dùng khoảng 176 cm^2.

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-5} + 3y = 16 \\ 2\sqrt{x-5} - y = 4 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 6x - m + 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 - 2x_2 = 0$

Lời giải

1) Điều kiện: $x \geq 5$

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} + 3y = 16 \\ 2\sqrt{x-5} - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-5} + 6y = 32 \\ 2\sqrt{x-5} - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 28 \\ 2\sqrt{x-5} - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 2\sqrt{x-5} - 4 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ \sqrt{x-5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x - 5 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 21 \end{cases} (tm)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(21;4)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có:

$x^2 - 6x + m - 1 = 0$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow 36 - 4(m-1) > 0 \Leftrightarrow 9 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow m - 1 < 9 \Leftrightarrow m < 10$

Vậy $m < 10$ là giá trị cần tìm

b) Theo hệ thức Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (2) \\ x_1x_2 = m - 1 & (3) \end{cases}$

Xét $x_1 - 2x_2 = 0 \quad (4)$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = 6 \\ x_1 = 6 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 4 \end{cases}$

Thay x_1, x_2 vào (3), ta được: $m-1=2.4 \Rightarrow m-1=8 \Rightarrow m=9$ (TMĐK)

Vậy $m=9$ là giá trị cần tìm.

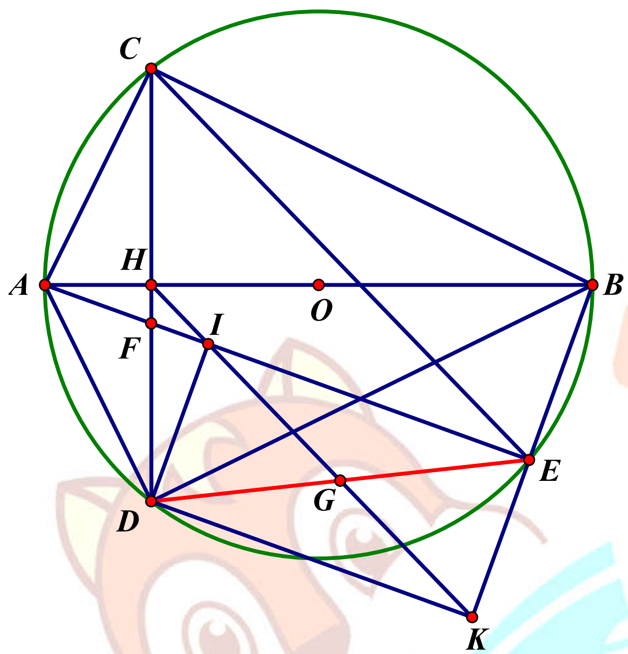
Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O), đường kính AB. Dây CD vuông góc với đường kính AB tại H khác O, E là một điểm thuộc cung nhỏ BD (E khác B và D); AE cắt CD tại F.

1) Chứng minh: Tứ giác $BEFH$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: H là trung điểm của CD và $CD^2=4.AH.HB$

3) Đường thẳng đi qua H song song với CE, cắt đường thẳng AE và BE lần lượt tại I và K. Lấy G là trung điểm của đoạn thẳng IK. Chứng minh: $DI \perp AE$ và D,G,E thẳng hàng

Lời giải



1) Xét (O) đường kính AB có $\widehat{AEB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BEF}=90^\circ$

$CD \perp AB$ tại H $\Rightarrow \widehat{BHF}=90^\circ$

Xét tứ giác $BEFH$ có: $\widehat{BHF}+\widehat{BEF}=180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEFH$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Xét (O) có: AB là đường kính, $AB \perp CD$ tại H

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $CD \Rightarrow CH=HD=\dfrac{CD}{2}$ (quan hệ đường kính, dây cung).

Xét (O) có: $\widehat{ACB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔABC vuông tại C, có CH là đường cao

$\Rightarrow CH^2=AH.HB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \left(\dfrac{CD}{2}\right)^2=AH.HB \Rightarrow CD^2=4AH.AB$

3) * $HI // CE \Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DCE}$ (2 góc so le trong)

Xét (O) có: $\widehat{DAE} = \widehat{DCE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DAI}$

Xét tứ giác $DAHI$ có: $\widehat{DHI} = \widehat{DAI}$

Mà H, A là 2 đỉnh kề nhau cũng nhìn cạnh DI

$\Rightarrow$Tứ giác $AHID$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AID}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Mà $\widehat{AHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ$

$\Rightarrow DI \perp AE$

* Xét (O) có $\widehat{DBE} = \widehat{DAE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\widehat{DAE} = \widehat{DAI} = \widehat{DHI}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DBE}$ Hay $\widehat{DHK} = \widehat{DBK}$

$\Rightarrow$Tứ giác $DHBK$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{DHB} = \widehat{DKB} = 180^\circ$. Mà $\widehat{DHB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DKB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DKE} = 90^\circ$

Xét tứ giác $DIEK$ có: $\widehat{DIE} = \widehat{IEK} = \widehat{DKE} = 90^O$

$\Rightarrow$Tứ giác $DIEK$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow IK$ và DE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mà G là trung điểm của IK .

$\Rightarrow$ G là trung điểm của DE.

$\Rightarrow$G, D, E thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm): Xét các số thực a,b thỏa mãn $1 \le a \le 2$ và $1 \le b \le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a+b}{a^2 - ab + b^2}$.

Lời giải

Vì $1 \le a \le 2$ và $1 \le b \le 2$ nên :

$$\begin{cases}(a-1)(a-2) \le 0\\(b-1)(b-2) \le 0\\(a-2)(b-2) \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2 \le 3a-2\\b^2 \le 3b-2\\-ab \le 4-2a-2b\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2-ab \le a+b.$$

Do $a^2+b^2-ab = (a-b)^2 + ab > 0$ nên $\dfrac{a+b}{a^2+b^2-ab} \ge 1$ hay $P \ge 1$.

Ta thấy $P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(a-2)=0\\(b-1)(b-2)=0\\(a-2)(b-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(1;2);(2;1);(2;2)\}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $(a,b) \in \{(1;2);(2;1);(2;2)\}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 9

UBND QUẬN HAI BÀ TRƯNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-1)(3-\sqrt{x})}$ với

$x\ge 0;\, x\ne 1;\, x\ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.

2) Chứng minh $B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$

3) Tìm x để $A+B=\sqrt{x}$.

Lời giải

1) Thay $x=4$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\frac{\sqrt{4}-3}{\sqrt{4}-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1$

Vậy với $x=4$ thì $A=-1$

2) $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-1)(3-\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x-9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}$

$=\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$

3) $A+B=\sqrt{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ \sqrt{x}-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (tm)\\ x=9 & (ktm)\end{array}\right.$

Vậy $x=0$ thoả mãn đề bài.

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai công nhân cùng làm chung một công việc mất 12 giờ. Nếu người thứ nhất làm trong 10 giờ và người thứ hai làm trong 5 giờ thì được $\frac{2}{3}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì hoàn thành công việc trong thời gian bao lâu.

2) Một ống nhựa hình trụ dùng để thoát nước từ mái nhà có chiều dài 3m và đường kính 20cm. Hỏi diện tích nhựa để làm ống là bao nhiêu mét vuông? *(bỏ qua độ dày của thành ống, lấy* $\pi\approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc là x (giờ) $(x>0)$

Thời gian để người thứ hai hoàn thành công việc là y (giờ) $(y>0)$

Trong 1 giờ, người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{12}$ công việc. Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ (1)

Trong 10 giờ, người thứ nhất làm được $\frac{10}{x}$ (công việc)

Trong 5 giờ, người thứ nhất làm được $\frac{5}{y}$ (công việc)

Vì người thứ nhất làm trong 10 giờ và người thứ hai làm trong 5 giờ thì được $\frac{2}{3}$ công việc nên ta có phương trình $\frac{10}{x}+\frac{5}{y}=\frac{2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{10}{x}+\frac{5}{y}=\frac{2}{3}\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta tìm được $x=20; y=30$ (thoả mãn)

Vậy thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc một mình là 20 giờ

thời gian để người thứ hai hoàn thành công việc một mình là 30 giờ

2) Đổi $20\,cm=0,2\,m$

Bán kính đáy của ống là $0,2:2=0,1\ m$.

Diện tích nhựa để làm ống chính là diện tích xung quanh của hình trụ

$S=2\pi Rh\approx 2.3,14.0,1.3\approx 1,884\ m^2$

Vậy diện tích nhựa để làm ống khoảng $1,884\ m^2$

Bài III (1,5 điểm): Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m$.

1) Tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=3$.

2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $(2x_1+x_2)^2=9$.

Lời giải

1) Với $m=3\Rightarrow(d): y=2x+3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 9$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1$

Vậy giao điểm của (d) và (P) là $(3;9)$ và $(-1;1)$.

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \quad (1)$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-m) = 4m + 4$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$

Theo đề bài $(2x_1 + x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_1)^2 = 9 \Leftrightarrow (2 + x_1)^2 = 9$

TH1: $2 + x_1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1x_2 = -m \Leftrightarrow m = -1$ (không thoả mãn)

TH2: $2 + x_1 = -3 \Leftrightarrow x_1 = -5 \Rightarrow x_2 = 7 \Rightarrow x_1x_2 = -m \Leftrightarrow m = 35$ (thoả mãn)

Vậy $m = 35$ thoả mãn đề bài.

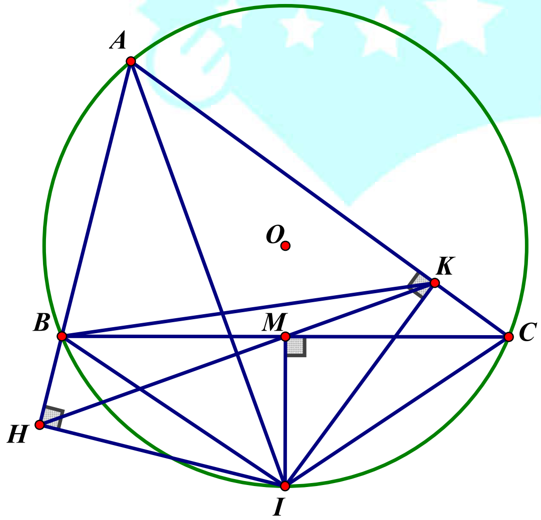
Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC (A khác B, C), điểm I là điểm chính giữa trên cung nhỏ BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh:

1) Bốn điểm A, H, I, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Tam giác IHK là tam giác cân và $\widehat{HIK} = \widehat{BIC}$.

3) Khi A thay đổi trên cung lớn BC thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



1) Ta có $IH \perp AB \Rightarrow \widehat{IHA} = 90° \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính AI. (1)

Ta có $IK \perp AC \Rightarrow \widehat{AKI} = 90° \Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính AI. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4$ điểm A, H, I, K cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

2) Ta có I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{IC} \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAC}$

Xét ΔIAH và ΔIAK có

$\widehat{IHA} = \widehat{IKA} = 90°$; AI chung ; $\widehat{IAH} = \widehat{IAK}$

$\Rightarrow \Delta IAH = \Delta IAK$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow IH = IK \Rightarrow \Delta IHK$ cân tại I

Ta có $AHIK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HAK} + \widehat{HIK} = 180°$

$ABIC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BIC} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{HIK} = \widehat{BAC}$

3) Gọi M là giao điểm của HK và BC

Vì $\widehat{HKI} = \widehat{BCI} \left(= \widehat{BAI}\right) \Rightarrow MKCI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{IKC} = 90° \Rightarrow IM \perp BC$

Ta có ΔIBC cân tại I, $IM \perp BC \Rightarrow M$ là trung điểm BC

Do dây BC cố định nên M cố định

Vậy HK luôn đi qua điểm M cố định khi A thay đổi trên cung lớn BC

Bài V (0,5 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x}$, với x thoả mãn $0 \le x \le 1$.

Lời giải

Vì $0 \le x \le 1 \Rightarrow x^2 \le x \Rightarrow 1 - x^2 \ge 1 - x$

$A = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x} \ge \sqrt{1 - x} + \sqrt{x} \ge \sqrt{1 - x + x} = 1$

Vậy GTNN của $A = 1$ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 10

UBND HUYỆN THANH TRÌ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ II

Năm học 2022 – 2023

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\dfrac{4}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9}+\dfrac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức $P=A.B$

3) Tìm các giá trị của x thỏa mãn $x-1=\left(\sqrt{x}+3\right).P+2\sqrt{x+3}$

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có: $A=\dfrac{\sqrt{16}-3}{\sqrt{16}+5}=\dfrac{4-3}{4+5}=\dfrac{1}{9}$

Vậy $A=\dfrac{1}{9}$ với $x=16$

2) $B=\dfrac{4}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9}+\dfrac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=\dfrac{4\left(\sqrt{x}-3\right)+2x-\sqrt{x}-13-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$=\dfrac{4\sqrt{x}-12+2x-\sqrt{x}-13-x-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{x-25}{x-9}$

$P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}.\dfrac{x-25}{x-9}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}.\dfrac{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$

3) $x-1=\left(\sqrt{x}+3\right).P+2\sqrt{x+3}\quad\left(x\ge 0;\ x\ne 9\right)$

$\Leftrightarrow x-1=\left(\sqrt{x}+3\right).\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}+2\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x}-5+2\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+4-2\sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x}+8-4\sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow\left(x+3-4\sqrt{x+3}+4\right)+\left(x-2\sqrt{x}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0$

Vì $\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2 \geq 0$; $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2 = 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-2=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy $x=1$

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một đội xe theo kế hoạch phải chuyển xong 200 tấn than trong một thời gian quy định, mỗi ngày chuyển được một khối lượng than như nhau. Nhờ bổ sung thêm xe, thực tế mỗi ngày đội chuyển thêm được 5 tấn so với kế hoạch. Vì vậy chẳng những đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày so với quy định mà còn chuyển vượt mức kế hoạch 25 tấn. Tính khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong một ngày theo kế hoạch.

2) Một hộp sữa hình trụ có bán kính đáy là 3,5 cm và chiều cao là 8 cm. Người ta dùng giấy làm bao bì xung quanh hộp sữa (trừ hai đáy). Tính diện tích giấy để làm bao bì (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong 1 ngày theo kế hoạch là x (tấn; $0<x<200$)

Thời gian đội xe vận chuyển theo kế hoạch là $\dfrac{200}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày chuyển được $x+5$ (tấn)

Thời gian đội xe vận chuyển theo thực tế là $\dfrac{225}{x+5}$ (ngày)

Vì đội đã hoàn thành sớm 1 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình: $\dfrac{225}{x+5}+1=\dfrac{200}{x}$

Giải phương trình tìm được $x=20$ (thoả mãn)

Vậy khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong một ngày theo kế hoạch là 20 tấn.

2) Diện tích xung quanh của hộp sữa là diện tích giấy để làm bao bì

Diện tích giấy để làm bao bì là $2\pi rh \approx 2.\ 3{,}14\ .\ 3{,}5\ .\ 8 \approx 175{,}84\ \left(cm^2\right)$

Vậy diện tích giấy để làm bao bì khoảng $175{,}84\ cm^2$

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2}{|2y-1|}=3 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-1=0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\dfrac{1}{{x_1}^2}+\dfrac{1}{{x_2}^2}=1$

Lời giải

1) Điều kiện $x \geq 0$; $x \neq 9$; $y \neq \frac{1}{2}$

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$; $b = \frac{1}{|2y-1|}$. Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a+b=5 \\ a+2b=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a+2b=10 \\ a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=7 \\ a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}-3}=1 \\ \frac{1}{|2y-1|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3=1 \\ |2y-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=4 \\ \left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(16;1)$ và $(16;0)$

2) $x^2-(m+1)x+m-1=0 \ (1)$

a) $\Delta = [-(m+1)]^2-4(m-1)=m^2-2m+5=(m-1)^2+4>0$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$

b) Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Theo đề bài $\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=1$ (ĐK: x_1 , $x_2 \neq 0 \Rightarrow m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$)

$\Leftrightarrow \frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{{x_1}^2.{x_2}^2}=1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(x_1x_2)^2$

$\Rightarrow (m+1)^2-2(m-1)=(m-1)^2 \Leftrightarrow m=-1$ (thoả mãn)

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm

Bài IV (3,5 điểm): Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C. Kẻ MH vuông góc với BC (H thuộc BC).

1) Chứng minh tứ giác $BOMH$ nội tiếp được đường tròn.

2) Gọi E là giao điểm của MB và OH. Chứng minh HO là tia phân giác của $\widehat{MHB}$ và $ME.MH = BE.HC$

3) Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K. Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.

Lời giải

a) Xét (O) có các đường kính AB, MN vuông góc với nhau

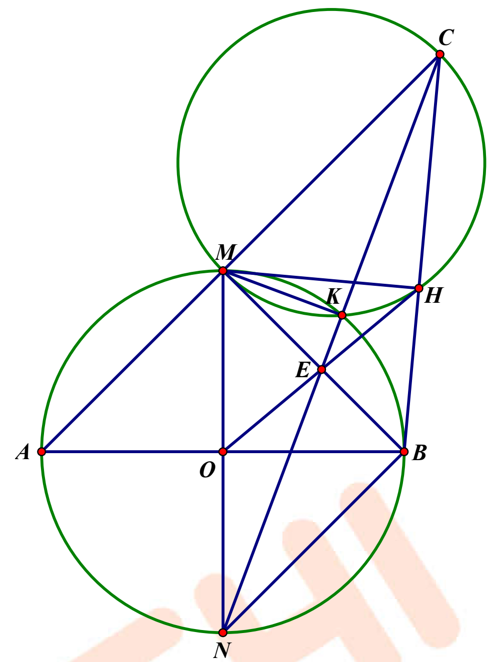
$\Rightarrow \widehat{MOB} = 90^\circ$

Ta có $MH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{MHB} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BOMH$ có $\widehat{MOB} + \widehat{MHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

Vậy tứ giác $BOMH$ nội tiếp.



b) Ta có $OM = OB$ mà $\widehat{MOB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta MOB$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OBM} = 45^\circ$

Vì $BOMH$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{OHB} = \widehat{OMB} = 45^\circ \\ \widehat{OHM} = \widehat{OBM} = 45 \end{cases} \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OHM} = 45^\circ$$

$\Rightarrow HO$ là tia phân giác của $\widehat{MHB}$

Xét ΔMHB có HE là phân giác $\Rightarrow \dfrac{ME}{EB} = \dfrac{MH}{HB}$ (tc)

Xét (O) có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ$

Xét ΔBMC có $MH \perp BC \Rightarrow MH^2 = HB.HC$ (htl trong tam giác vuông) $\Rightarrow \dfrac{MH}{HB} = \dfrac{HC}{MH}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{EB} = \dfrac{HC}{MH} \Rightarrow ME.MH = BE.HC$

c) Xét ΔMHC và ΔBHM có $\widehat{CMH} = \widehat{MBH}$ (cùng phụ với $\widehat{HMB}$) và $\widehat{MHC} = \widehat{BHM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta BHM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MC}{BM} = \dfrac{MH}{BH}$ mà $\dfrac{MH}{BH} = \dfrac{EM}{EB} \Rightarrow \dfrac{MC}{BM} = \dfrac{EM}{EB}$

Mà $MB = BN$ (do $AMBN$ là hình vuông) $\Rightarrow \dfrac{MC}{BN} = \dfrac{EM}{EB}$

Xét ΔMEC và ΔBEN ta có $\widehat{MCE} = \widehat{NBE} = 90^\circ$ và $\dfrac{MC}{BN} = \dfrac{EM}{EB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MEC \backsim \Delta BEN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{BEN}$

Mà $\widehat{MEC} + \widehat{CEB} = 180^\circ$ (do M, E, B thẳng hàng) $\Rightarrow \widehat{BEN} + \widehat{CEB} = 180^\circ \Rightarrow C, E, N$ thẳng hàng (*)

Xét (O) có $\widehat{MKN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có $MKHC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MKC} = \widehat{MHC} = 90^\circ \Rightarrow N, K, C$ thẳng hàng (**)

Từ (*) và (**) suy ra 4 điểm C, K, E, N thẳng hàng hay C, K, E thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm): Cho $x;y;z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y}.\frac{1+y}{4}} = x \\ \frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{1+z}.\frac{1+z}{4}} = y \\ \frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{1+x}.\frac{1+x}{4}} = z \end{cases}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được:

$$\left(\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4}\right) + \left(\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4}\right) + \left(\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4}\right) \geq (x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq -\frac{3}{4} - \frac{x+y+z}{4} + (x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3(x+y+z)}{4} - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.3.\sqrt[3]{xyz} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$

---------------------------- HẾT ----------------------------