MỤC LỤC

HỆ THỐNG ĐỀ THI

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 4)

Năm học: 2019 - 2020
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 19/5/2019
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho $A=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x+2}$ và $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{4}{1-2\sqrt{x}}-\dfrac{4x+2\sqrt{x}+3}{4x-1}$ với $x\ge 0, x\ne \dfrac{1}{4}$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm m để có duy nhất một giá trị của x thỏa mãn: $(AB-1)(x+2)=m\left(1-\sqrt{x}\right)+3\sqrt{x}-4$.

Bài II (2,0 điểm). *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Để tiến tới kỉ niệm 30 năm ngày thành lập trường, hội cựu học sinh Lương Thế Vinh đã đăng kí một phòng tại trường để gặp mặt đại diện các khóa. Lúc đầu, phòng có 120 ghế được xếp thành từng dãy có số ghế trên mỗi dãy như nhau. Nhưng thực tế phải xếp thêm một dãy và mỗi dãy thêm hai ghế thì mới đủ chỗ cho 156 cựu học sinh về dự. Hỏi lúc đầu phòng có mấy dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+|x-y|=\dfrac{7}{3}\\ \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}-2|x-y|=-3\end{cases}$

2. Cho Parabol $(p): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=\dfrac{5}{2}$

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho trục Oy chia tam giác OAB thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 3.

Bài IV (3,0 điểm).
1. Một hình trụ có chiều cao gấp ba lần đường kính đáy. Biết thể tích của nó bằng $162\pi\left(cm^3\right)$. Hãy tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.
2. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC, kẻ dây MN bất kì đi qua H với M thuộc cung nhỏ BC và $BM<CM$.
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.
b) Chứng minh: $HM\cdot HN=HB\cdot HC$ và $\widehat{AMN}=\widehat{AON}$.
c) Xác định vị trí của dây MN để AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Bài V (0,5 điểm). Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=6$ và $xy+yz+zx=9$.
Chứng minh rằng: $(x-1)+(y-2)^2+(z-3)^4<88$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)

Năm học: 2020 - 2021
MÔN: TOÁN
Ngày thi: .../.../2020
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{2x-2\sqrt{x}}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x>0;x\ne 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Tìm m để có x thoả mãn $A.B=m$

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Tháng thứ nhất hai đội sản xuất làm được 700 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 10% và đội II làm vượt mức 25% so với tháng thứ nhất, vì vậy cả hai đội đã làm được 830 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi đội làm được bao nhiêu sản phẩm?

2. Một lon nước ngọt hình trụ có thể tích bằng $108\pi\ cm^3$. Biết chiều cao của lon nước ngọt gấp hai lần đường kính đáy. Tính diện tích vật liệu cần dùng để làm một vỏ lon như vậy (bỏ qua diện tích phần ghép nối).

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{4}{x-y}+3\sqrt{y-1}=5\\ \frac{1}{x-y}-2\sqrt{y-1}=-\frac{3}{2}\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(2m-1)x+8$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị m.

b) Tìm m để các khoảng cách từ A và B tới trục Oy có tỉ số bằng 2.

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC Trên tia đối của tia BC lấy điểm A cố định, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại A. Qua điểm M trên đường thẳng d (M khác A) kẻ các tiếp tuyến ME; MF của (O) ($E;F$ là tiếp điểm)

1. Chứng minh năm điểm A,M,E,O,F cùng thuộc một đường tròn

2. EF cắt MO và AC lần lượt tại H và K, MC cắt (O) tại D (D khác C). Chứng minh:

a) $MD.MC=ME^2=MH.MO$

b) AC là phân giác của góc EAF.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK cắt đường tròn đi qua năm điểm A,M,E,O,F tại I. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên d thì đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V (0,5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 2)

Năm học: 2021 - 2022
MÔN: TOÁN
Ngày thi: .../4/2021
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{25\sqrt{x}+6}{x-36}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{6-\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$ và $B=\dfrac{x-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 36$.

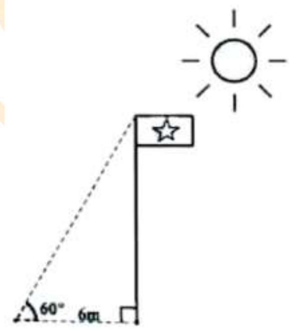
1. Tính giá trị biểu thức B với $x=16$

2. Rút gọn biểu thức A.

3. Cho $T=\sqrt{AB}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Hôm chủ nhật trước, Dũng được bố chở bằng xe máy đi về quê cách nhà 60 km với vận tốc dự định. Trên đường về do có $\dfrac{1}{3}$ quãng đường là đường xấu nên để đảm bảo an toàn, bố bạn đã phải giảm bớt vận tốc đi 10 km/h, do đó đã về tới quê chậm mất 10 phút so với dự kiến. Tính vận tốc dự định của hai bố con bạn.

2. Tìm chiều dài của dây kéo cờ, biết bóng của cột cờ (chiếu bởi ánh sáng mặt trời) dài 6 m và góc nhìn mặt trời là 60°.



Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\dfrac{14}{2y+1}=10 \\ \sqrt{x-1}-\dfrac{5}{2y+1}=\dfrac{23}{7} \end{cases}$.

2. Cho phương trình $x^2-2(m+5)x+2m+9=0$

a) Giải phương trình với $m=10$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1-2\sqrt{x_2}=0$.

Bài IV (3,0 điểm). Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tai H.

a) Chứng minh $AEHF, BCEF$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AM của (O). Chứng minh $BHCM$ là hình bình hành và $AB\cdot AC=AD\cdot AM$

c) Cho BC cố định, A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn, BE cắt (O) tại I, CF cắt (O) tại J. Chứng minh rằng đoạn IJ có độ dài không đổi

Bài V (0,5 điểm). Cho a,b là các số thực làm cho phương trình ẩn x sau có nghiệm:

$$x^2-2(2a-b)x+5a^2-4ab+2b^2-1=0$$

Chứng minh rằng: $a^{2020}+b^{2021}<2$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)

Năm học: 2021 - 2022
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 5/5/2021
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2x-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-4}-\dfrac{5-\sqrt{x}}{x-16}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}$ với $x\ge 0; x\ne 16$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Đặt $P=A.B$. Tìm x biết $\sqrt{2P-1}=P-2$.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông dài $136km$, sau đó chạy ngược dòng $91km$ trên khúc sông đó. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là $4km/h$ và tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là 7 giờ 30 phút.

2. Bạn Linh có một chiếc cốc thuỷ tinh có lòng là một hình trụ có chiều cao $15cm$ và bán kính đáy bằng $2,5cm$ đang đựng $\dfrac{2}{3}$ nước. Linh muốn thả các viên bi ve hình cầu có bán kính $1cm$ vào cốc để trang trí. Hỏi bạn có thể thả thêm vào đó nhiều nhất bao nhiêu viên bi để nước không bị tràn ra khỏi cốc?

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-10x+5y=16\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m+3$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8. Khi đó hãy tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

3. Tìm m để phương trình $x^4+(3m-2)x^2-3m+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính CD của đường tròn $(O;R)$ (C khác A, C khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại các điểm E, F.

a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh bốn điểm C, D, F, E cùng thuộc một đường tròn (I). Gọi K là trung điểm của EF, chứng minh $AK\perp CD$.

c) Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điểu kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để tam giác IEF có diện tích nhỏ nhất.

Bài V (0,5 điểm). Cho các số thực $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)

Năm học: 2022 - 2023
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 7/5/2022
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho các biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ (với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$)

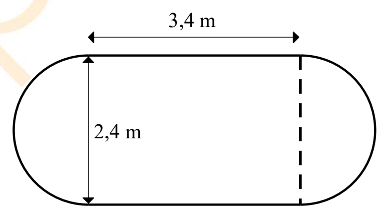
1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Đặt $P=A\cdot B$. Tìm x để $P-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Trên một khúc sông, một canô đi xuôi dòng 60 km, sau đó lại chạy ngược dòng 64 km, biết thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng 30 phút. Tính vận tốc riêng của canô, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

2. Một bồn chứa xăng đạt trên xe có cấu tạo: hai đầu là hai nửa hình cầu có đường kính là $2,4m$, phần thân là một hình trụ có chiều dài $3,4m$. Tính thể tích của bồn chứa xăng. (Lấy $\pi\approx 3,14$)



Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{7}{x}-\sqrt{y+5}=4\\ \dfrac{3}{x}+2\sqrt{y+5}=9\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi $m=4$.

b) Tìm m để (P) và d cắt nhau tại 2 điểm phân biệt cùng nằm bên phải của trục tung sao cho tổng các tung độ của các giao điểm bằng 5.

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O)(AB<AC)$. Các đường cao $AD;BE$; CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt (O) tại K (K khác A).

a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AI. Chứng minh $AB\cdot AC=AD\cdot AI$ và tứ giác $BKIC$ là hình thang cân.

c) Đường tròn đường kính AH cắt .(O). tại $M(M$ khác $A)$. Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ $BC;MP$ cắt BC tại G. Chứng minh HG là phân giác của góc BHC.

Bài V (0,5 điểm). Cho $a,b,c>0$. và thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2\le abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ac}+\dfrac{c}{c^2+ab}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 4)

Năm học: 2022 - 2023

MÔN: TOÁN

Ngày thi: 3/6/2022

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-6}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+6}-\dfrac{9\sqrt{x}+6}{x-36}$ với $x\ge 0; x\ne 9; x\ne 36$

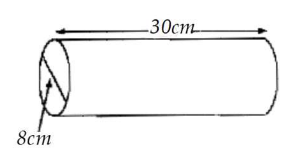
1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$.

3) Đặt $P=A.B$. Tìm giá nguyên của x để P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 500 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, do cải tiến kĩ thuật, tổ 1 làm vượt mức 10%, tổ 2 làm vượt mức 15% so với tháng thứ nhất. Vì vậy, tháng thứ hai cả hai tổ đã làm được 564 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

2) Trục lăn của một cái lăn sơn có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 8cm, chiều dài trục lăn là 30cm. Sau khi lăn được 10 vòng thì trục lăn tạo trên sân phẳng một diện tích là bao nhiêu? *(lấy $\pi \approx 3{,}14$)*



Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{y-3}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{2}{y-3}=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+6$. Tìm tọa độ giao điểm của *(d)* và *(P)*.

3) Tìm m để phương trình $x^4+(2m-3)x^2-2m+2=0$ có bốn nghiệm phân biệt .

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AD. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AC tại E, AD cắt BE tại H.

1) Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi giao điểm của CH với AB là F. Chứng minh F thuộc đường tròn (O) và DA là phân giác của góc EDF.

3) Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với (O) *(M, N là tiếp điểm)*, AO cắt MN tại K, đoạn thẳng AH cắt (O) tại P. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOPK. Chứng minh B, C, I thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm). Với các giá trị của m để phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+9=0$ có nghiệm, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(m+2)(m^2-2m+4)}{m}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)

Năm học: 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 23/4/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0; x\neq 1; x\neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P|>P$.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

1) Quãng đường AB dài 60 km; một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường, người đó giảm vận tốc 5 km/h trên nửa quãng đường còn lại. Vì vậy, người đó đã đến B chậm hơn dự định 1 giờ. Tính vận tốc dự định của người đó.

2) Một cốc trà sữa hình trụ có đường kính đáy là 8 cm. Bạn Đăng bỏ thêm trân châu vào cốc thì thấy trà sữa dâng lên cao thêm 3 cm. Tính thể tích phần trân châu bạn Đăng đã bỏ thêm vào (trân châu chìm hoàn toàn trong trà sữa và không thấm nước; lấy $\pi\approx 3,14$).

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2|x-1|+\dfrac{3}{\sqrt{y+1}}=5 \\ |x-1|-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) với $m=-3$.

b) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 2 .

Bài IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O), đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB>AC$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC(H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB; F thuộc AC).

1) Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh $AE\cdot AB=AF.AC$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

3) Gọi D là giao điểm của EF và $BC; K$ là giao điểm của AD với $(O); I$ là giao điểm của KF và BC. Chứng minh rằng $IH^2=IC\cdot ID$.

Bài V (0,5 điểm). Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+a}+\sqrt{b^2+b}+\sqrt{c^2+c}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 4)

Năm học: 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 21/5/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{11\sqrt{x}+6}{x-4}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Đặt $P=A:B$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $|P+1|<3P$.

Bài II (2,5 điểm). 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Để tham dự đại hội liên đội trường Lương Thế Vinh, bạn Thu phải đi xe đạp từ cơ sở A sang cơ sở I trên quãng đường dài 6 km. Khi từ cơ sở I trở về cơ sở A, bạn vẫn đi theo con đường cũ nhưng đã tăng vận tốc thêm 3 km / h. Biết rằng tổng thời gian đạp xe cả khi đi và khi về của bạn là 54 phút. Tính vận tốc của bạn Thu khi đi từ cơ sở A sang cơ sở I.

2) Một bồn nước hình trụ được làm bằng i-nox có chiều cao $1{,}5m$ và diện tích đáy là $3{,}14\,m^2$ đang chứa một lượng nước bằng $\dfrac{1}{3}$ thể tích của bồn. Bác An muốn xả hết nước đi để cọ sạch bồn nên đã mở vòi nước ở đáy bồn cho nước chảy ra. Nếu mỗi giờ vòi chảy được $3m$ nước thì sau 30 phút bồn cạn hết nước chưa? (bỏ qua bề dày của bồn).

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}-\dfrac{3}{y+1}=-\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{8}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{9}{y+1}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=5x+3m-1$.

a) Khi $m=-1$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên dương.

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B,C; $MB<MC$). Gọi D,E,F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống các đường thẳng BC,CA,AB.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $MDBF, MDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{MDF}=\widehat{ACM}$, từ đó suy ra F,D,E thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Gọi P,Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N xuống các đường thẳng AB,BC. Chứng minh PQ vuông góc với EF.

Bài V (0,5 điểm). Với a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\geq 3 \text{ và } a^3+b^3+c^3\geq a^2+b^2+c^2$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 4)

Năm học: 2019 - 2020
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 19/5/2019
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho $A=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x+2}$ và $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{4}{1-2\sqrt{x}}-\dfrac{4x+2\sqrt{x}+3}{4x-1}$ với $x\ge 0, x\ne \dfrac{1}{4}$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm m để có duy nhất một giá trị của x thỏa mãn: $(AB-1)(x+2)=m\left(1-\sqrt{x}\right)+3\sqrt{x}-4$.

Lời giải

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=25$.

Thay $x=25$ (thỏa điều kiện xác định) vào biểu thức A, ta được:

$$A=\frac{2\sqrt{25}-1}{25+2}=\frac{2.5-1}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

2) Rút gọn biểu thức B.

$$B=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}-\frac{4}{1-2\sqrt{x}}-\frac{4x+2\sqrt{x}+3}{4x-1}$$

$$B=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}+\frac{4}{2\sqrt{x}-1}-\frac{4x+2\sqrt{x}+3}{4x-1}$$

$$B=\frac{3\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{4x-1}+\frac{4\left(2\sqrt{x}+1\right)}{4x-1}-\frac{4x+2\sqrt{x}+3}{4x-1}$$

$$B=\frac{6x-3\sqrt{x}}{4x-1}+\frac{8\sqrt{x}+4}{4x-1}-\frac{4x+2\sqrt{x}+3}{4x-1}$$

$$B=\frac{6x-3\sqrt{x}+8\sqrt{x}+4-4x-2\sqrt{x}-3}{4x-1}$$

$$B=\frac{2x+3\sqrt{x}+1}{4x-1}$$

$$B=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}$$

3) $AB-1=\left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x+2}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}\right)-1=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+2}-1=\dfrac{\sqrt{x}+1-x-2}{x+2}=\dfrac{-x+\sqrt{x}-1}{x+2}$

$$\Rightarrow (AB-1)(x+2)=\left(\frac{-x+\sqrt{x}-1}{x+2}\right)\cdot(x+2)=-x+\sqrt{x}-1$$

$$(AB-1)(x+2)=m\left(1-\sqrt{x}\right)+3\sqrt{x}-4$$

$\Leftrightarrow -x+\sqrt{x}-1=m\left(1-\sqrt{x}\right)+3\sqrt{x}-4 \Leftrightarrow -x+\sqrt{x}-1=m-m\sqrt{x}+3\sqrt{x}-4$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1+m-m\sqrt{x}+3\sqrt{x}-4=0 \Leftrightarrow x+\left(2-m\right)\sqrt{x}+m-3=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-m+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{x}-m+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=m-3\end{array}\right.$

Để có 1 giá trị duy nhất của x thì $\left[\begin{array}{l}m-3<0\\ m-3=1\\ m-3=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<3\\ m=4\\ m=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$

Bài II (2,0 điểm). *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Để tiến tới kỉ niệm 30 năm ngày thành lập trường, hội cựu học sinh Lương Thế Vinh đã đăng kí một phòng tại trường để gặp mặt đại diện các khóa. Lúc đầu, phòng có 120 ghế được xếp thành từng dãy có số ghế trên mỗi dãy như nhau. Nhưng thực tế phải xếp thêm một dãy và mỗi dãy thêm hai ghế thì mới đủ chỗ cho 156 cựu học sinh về dự. Hỏi lúc đầu phòng có mấy dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi số dãy ghế lúc đầu là x (đơn vị: hàng ghế, $x\in\mathbb{N}^*$)

Số dãy ghế lúc sau là: $x+1$ (hàng ghế)

Số ghế trên một dãy lúc đầu là: $\dfrac{120}{x}$ (ghế)

Số ghế trên một dãy lúc sau là: $\dfrac{156}{x+1}$ (ghế)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{120}{x}+2=\dfrac{156}{x+1}$

$$\Rightarrow \frac{120\cdot\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}+\frac{2x\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\frac{156x}{x\left(x+1\right)}$$

$$\Rightarrow 120.\left(x+1\right)+2x\left(x+1\right)=156x \Leftrightarrow 120x+120+2x^2+2x-156x=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-34x+120=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-17x+60=0\ (*)$$

$$\Delta=17^2-4.1.60=289-240=49\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=12$ (nhận); $x_2=5$ (nhận)

Lúc đầu phòng có 12 dãy ghế hoặc 5 dãy ghế.

Nếu phòng có 12 dãy ghế thì mỗi dãy có 10 ghế.

Nếu phòng có 5 dãy ghế thì mỗi dãy có 24 ghế.

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+|x-y|=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}-2|x-y|=-3 \end{cases}$

2. Cho Parabol $(p): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=\dfrac{5}{2}$

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho trục Oy chia tam giác OAB thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 3 .

Lời giải

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+|x-y|=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}-2|x-y|=-3 \end{cases}$, điều kiện: $x>-1$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=a; a>0 \\ |x-y|=b; b\ge 0 \end{cases}$. Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=\dfrac{7}{3} \\ 3a-2b=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b=7 \\ 3a-2b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b=10 \\ a+b=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a+b=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a+2=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ (nhận)

Với $a=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x+1}=3$

$\Leftrightarrow x+1=9 \Leftrightarrow x=8$ (nhận)

Với $x=8; b=2$ ta có: $|8-y|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8-y=2 \\ 8-y=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=6 \\ y=10 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(8;6)$ hoặc $(x;y)=(8;10)$

2a) Khi $m=\dfrac{5}{2}$ thì $(d): y=\dfrac{1}{2}x+3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2=\dfrac{1}{2}x+3 \Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+\dfrac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x(x-2)+\dfrac{3}{2}(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+\dfrac{3}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $x=2 \Rightarrow y=2^2=4$

Với $x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y\left(= -\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là: $A_1(2;4); B_1\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$

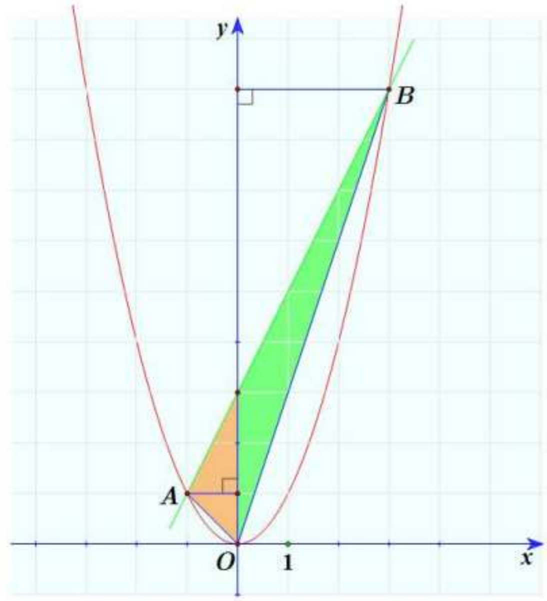
b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$x^2 = (m-2)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - (m-2) - 3 = 0$

$\Delta = (m-2)^2 + 4.3 = (m-2)^2 + 12 > 0$

Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = m-2 \\ x_A \cdot x_B = -3 \end{cases}$



Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trục Oy chia tam giác OAB thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 3 thì: Không mất tính tổng quát, giả sử: $|x_A| = 3|x_B|$

$\Rightarrow x_A = 3x_B$ hoặc $x_A = -3x_B$

Với $x_A = 3x_B \Rightarrow x_A \cdot x_B = 3x_B^2 \Leftrightarrow 3x_B^2 = -3$ (loại)

Với $x_A = -3x_B \Rightarrow x_A \cdot x_B = -3x_B^2 \Leftrightarrow -3x_B^2 = -3$

$\Leftrightarrow x_B^2 = 1 \Leftrightarrow x_B = 1$ hoặc $x_B = -1$

Với $x_B = -1 \Rightarrow x_A = \dfrac{-3}{-1} = 3$. Mà $x_A + x_B = m - 2 \Rightarrow 3 - 1 = m - 2 \Leftrightarrow m = 4$

Với $x_B = 1 \Rightarrow x_A = \dfrac{-3}{1} = -3$. Mà $x_A + x_B = m - 2 \Rightarrow -3 + 1 = m - 2 \Leftrightarrow m = 0$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 4$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trục Oy chia tam giác OAB thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 3.

Bài IV (3,0 điểm).

1. Một hình trục có chiều cao gấp ba lần đường kính đáy. Biết thể tích của nó bằng $162\pi\ (cm^3)$.

Hãy tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

2. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC, kẻ dây MN bất kì đi qua H với M thuộc cung nhỏ BC và $BM < CM$.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $HM \cdot HN = HB \cdot HC$ và $\widehat{AMN} = \widehat{AON}$.

c) Xác định vị trí của dây MN để AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Lời giải

1. Gọi bán kính đáy của hình trụ là: $R(\text{ cm}), R > 0$

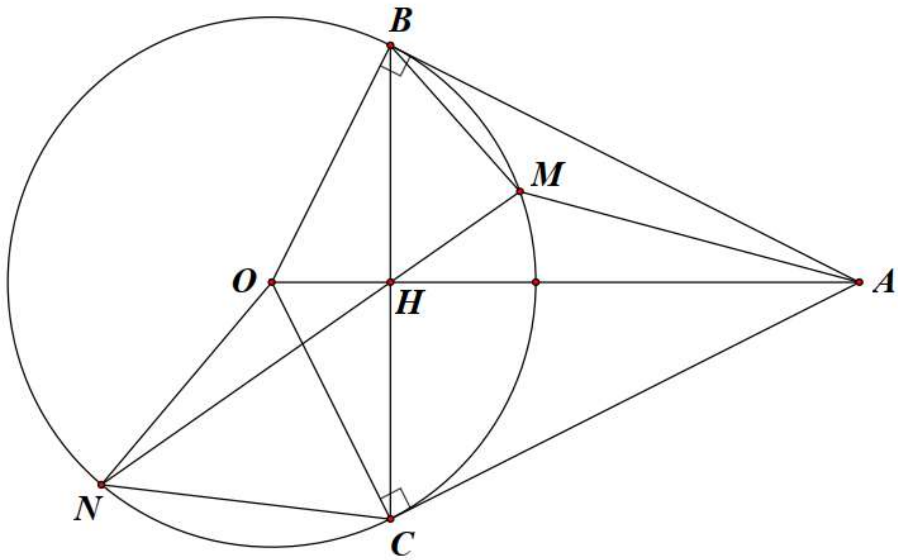
Chiều cao của hình trụ là: $6R(\text{ cm})$

Thể tích hình trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi R^2 6R = 6\pi R^3 = 162\pi$

$\Rightarrow R^3 = \dfrac{162\pi}{6\pi} = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3(\text{ cm})$

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 18 = 126\pi\left(\text{cm}^2\right)$

2.



a) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn nên ta có: $\widehat{ABO} = 90^\circ$; $\widehat{ACO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{ABO}; \widehat{ACO}$ là hai góc đối nhau.

Suy ra tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét ΔMBH và ΔCNH có:

$\widehat{BMH} = \widehat{CNH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$)

$\widehat{BHM} = \widehat{CHN}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó: $\Delta MBH \backsim \Delta CNH\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{HM}{HC} = \dfrac{HB}{HN} \Rightarrow HM \cdot HN = HB.HC$

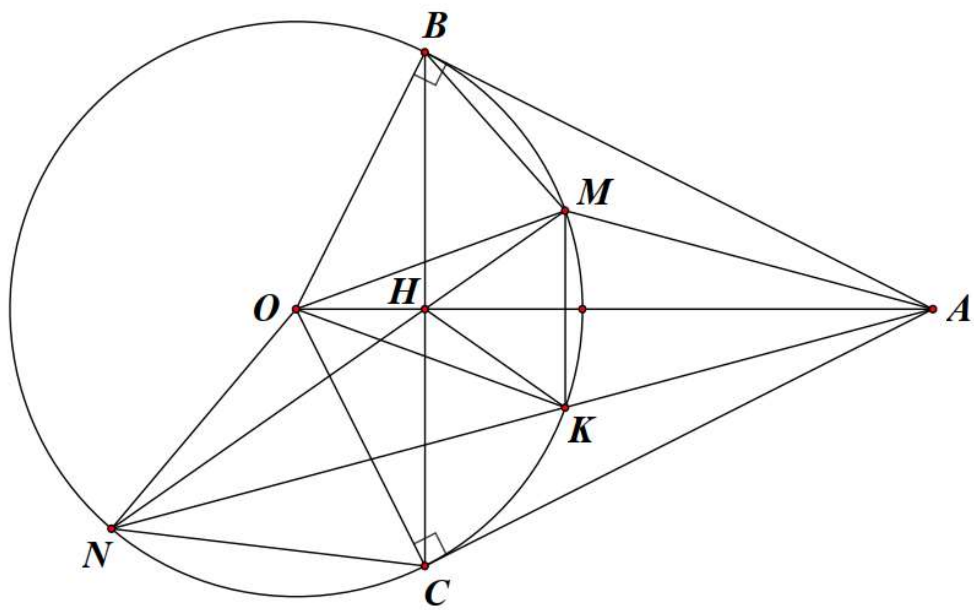
Theo câu a, ta có: tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow HB.HC = HO.HA \Rightarrow HO.HA = HM.HN \Rightarrow \dfrac{HA}{HM} = \dfrac{HN}{HO}$

Xét ΔAMH và ΔNOH có:

$\widehat{MHA} = \widehat{OHN}$ (hai góc đối đỉnh) và $\dfrac{HA}{HM} = \dfrac{HN}{HO}(\text{cmt})$

Do đó: $\Delta AMH \backsim \Delta NOH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{NOH}$ hay $\widehat{AMN} = \widehat{AON}$



c) Gọi K là giao điểm của AN và (O).

Xét tứ giác $OMAN$ có $\widehat{AMN}=\widehat{AON}$ (cmt)

Mà hai đỉnh $M;O$ kề nhau cùng nhìn cạnh AN

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMAN$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh $\Delta ABK \backsim \Delta ANB \Rightarrow AK.AN = AB^2$ (1)

Xét ΔOBA vuông tại B có $BH \perp OA \Rightarrow AH \cdot AO = AB^2$ (Hệ thức lượng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AK.AN = AH.AO$

Suy ra tứ giác $OHKN$ là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{AHK}=\widehat{ONK}$ (3)

Vì $OK=ON=R$ nên ΔOKN cân tại $O \Rightarrow \widehat{ONK}=\widehat{OKN}$ (4)

Vì tứ giác $OHKN$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{OHN}=\widehat{OKN}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ON}$) (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $\widehat{AHK}=\widehat{OHN}$

Mà $\widehat{OHN}=\widehat{AHM}$ (Hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{AHK}=\widehat{AHM}$

Vì tứ giác $OMAN$ là tứ giác nội tiếp nên ta có: $\widehat{MNA}=\widehat{MOA}$ (hai góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AM}$)

Vì tứ giác $OHKN$ là tứ giác nội tiếp nên ta có: $\widehat{HNK}=\widehat{HOK}$ (hai góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{HK}$)

$\Rightarrow \widehat{MOH}=\widehat{HOK} \Rightarrow OH$ là phân giác của $\widehat{MOK}$

ΔOMK cân tại O có OH là phân giác của $\widehat{MOK}$ nên $OH \perp MK$

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn thẳng MK $\Rightarrow AM = AK$

$\Rightarrow \Delta AMK$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{OAM}=\widehat{OAK}$

Mà $\widehat{OAB}=\widehat{OAC}$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{MAB}=\widehat{NAC}$

Để AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN thì $\widehat{MAB}=\widehat{MNA} \Rightarrow \widehat{MNA}=\widehat{NAC}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AC // MN$.

Vậy khi MN đi qua H và song song với AC thì AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN

Bài V (0,5 điểm). Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=6$ và $xy+yz+zx=9$.
Chứng minh rằng: $(x-1)+(y-2)^2+(z-3)^4<88$.

Lời giải

$xy+yz+zx=9 \Rightarrow xy+z(x+y)=9 \Rightarrow xy=9-z(x+y)=9-z(6-z)$

Ta cũng có: $(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (6-z)^2 \ge 4\left[9-z(6-z)\right] \Leftrightarrow 36-12z+z^2 \ge 4\left[9-6z+z^2\right]$

$\Leftrightarrow 36-12z+z^2 \ge 36-24z+4z^2 \Leftrightarrow 3z^2-12z \le 0 \Leftrightarrow 3z(z-4) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le z \le 4$

Vì vai trò của x, y, z như nhau, nên ta có: $0 \le x; y; z \le 4$

Từ đó, ta có: $x-1 \le 3$

$-2 \le y-2 \le 2$ suy ra: $(y-2)^2 \le 4$

$-3 \le z-3 \le 1$ suy ra: $(z-3)^4 \le 81$

Khi đó: $(x-1)+(y-2)^2+(z-3)^4 \le 88$

Dấu "=" xảy ra khi $x=4; y=0; z=0$ hoặc $x=4; y=4; z=0$ (không thỏa điều kiện bài toán)

Vậy $(x-1)+(y-2)^2+(z-3)^4<88$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)
Năm học: 2020 - 2021
MÔN: TOÁN
Ngày thi: .../.../2020
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x>0;x\neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Tìm m để có x thoả mãn $A.B=m$

Lời giải

1) Ta có $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{3}=\left|\sqrt{3}+1\right|-\sqrt{3}=1$

Thay $x=1$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{1}-3}{\sqrt{1}}=-2$

Vậy với $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ thì $A=-2$

2) $B=\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}=\dfrac{2x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

3) $A.B=m\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=m\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}=m\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=m\left(\sqrt{x}+2\right)\Leftrightarrow (1-m)\sqrt{x}=2m+3$

+) Với $m=1\Rightarrow 0=2.1+3\Leftrightarrow 0=5$ (vô lý)

+) Với $m\neq 1\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{2m+3}{1-m}$ (1)

Vì $x>0\,;\,x\neq 4\Rightarrow \sqrt{x}>0\,;\,\sqrt{x}\neq 2$

Để PT (1) có nghiệm thì $\begin{cases}\dfrac{2m+3}{1-m}>0\\ \dfrac{2m+3}{1-m}\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m+3>0\\1-m>0\end{cases}\\ \begin{cases}2m+3<0\\1-m<0\end{cases}\end{array}\right.\\ 2m+3\neq 2(1-m)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-\dfrac{3}{2}<m<1\\ \begin{cases}m<\dfrac{-3}{2}\\ m>1\end{cases}(vl)\end{array}\right.\\ m\neq -\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Vậy $-\dfrac{3}{2}<m<1$ và $m\neq -\dfrac{1}{4}$ thì $A.B=m$ có nghiệm

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Tháng thứ nhất hai đội sản xuất làm được 700 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 10% và đội II làm vượt mức 25% so với tháng thứ nhất, vì vậy cả hai đội đã làm được 830 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi đội làm được bao nhiêu sản phẩm?

2. Một lon nước ngọt hình trụ có thể tích bằng $108\pi\ cm^3$. Biết chiều cao của lon nước ngọt gấp hai lần đường kính đáy. Tính diện tích vật liệu cần dùng để làm một vỏ lon như vậy (bỏ qua diện tích phần ghép nối).

Lời giải

1. Gọi số sản phẩm đội I làm trong tháng thứ nhất là x (sản phẩm) $\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$

Số sản phẩm đội II làm trong tháng thứ nhất là y (sản phẩm) $\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$

Vì trong tháng thứ nhất hai đội làm được 700 sản phẩm

Nên ta có phương trình $x+y=700$ (1)

Số sản phẩm đội I làm trong tháng thứ hai là $x+10\%x=1,1x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm đội II làm trong tháng thứ hai là $y+25\%y=1,25y$ (sản phẩm)

Vì trong tháng thứ hai cả hai đội đã làm được 830 sản phẩm

Nên ta có phương trình $1,1x+1,25y=830$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=700\\1,1x+1,25y=830\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1,1x+1,1y=770\\1,1x+1,25y=830\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,15y=60\\x+y=700\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=400\\x=300\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy trong tháng thứ nhất đội I làm được 300 sản phẩm ; đội II làm được 400 sản phẩm.

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{4}{x-y}+3\sqrt{y-1}=5\\\dfrac{1}{x-y}-2\sqrt{y-1}=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(2m-1)x+8$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị m.

b) Tìm m để các khoảng cách từ A và B tới trục Oy có tỉ số bằng 2.

Lời giải

1. Điều kiện $x\neq y$; $y\geq 1$

Đặt $a=\dfrac{1}{x-y}$; $b=\sqrt{y-1}$ $(b\geq 0)$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+3b=5\\a-2b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+3b=5\\4a-8b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11b=11\\4a-8b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (thoả mãn)

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=2\\ y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(4;2)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=(2m-1)x+8 \Leftrightarrow x^2-(2m-1)x-8=0$ (1)

Ta có $ac=-8<0$. Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị m.

b) Giả sử giao điểm của (d) và (P) có toạ độ là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ với $x_1<x_2$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1 \ (1)\\ x_1x_2=-8 \ (2)\end{cases}$

Để khoảng cách từ A và B tới trục $.Oy$. có tỉ số bằng 2 $\Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_2|}=2 \Leftrightarrow |x_1|=2|x_2|$

Vì x_1 ; x_2 là hai nghiệm trái dấu nên $x_1<0<x_2$

Khi đó $|x_1|=2|x_2| \Leftrightarrow -x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_2=-x_1-x_2 \Leftrightarrow x_2=1-2m$

$\Rightarrow x_1=-2x_2=-2(1-2m)=4m-2$

Thay $x_1=4m-2$ và $x_2=1-2m$ vào (2) ta được $(4m-2)(1-2m)=-8$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2m-1=2\\ 2m-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy $m\in\left\{\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC Trên tia đối của tia BC lấy điểm A cố định, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại A. Qua điểm M trên đường thẳng d (M khác A) kẻ các tiếp tuyến ME; MF của (O) (E; F là tiếp điểm)

1. Chứng minh năm điểm A, M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn

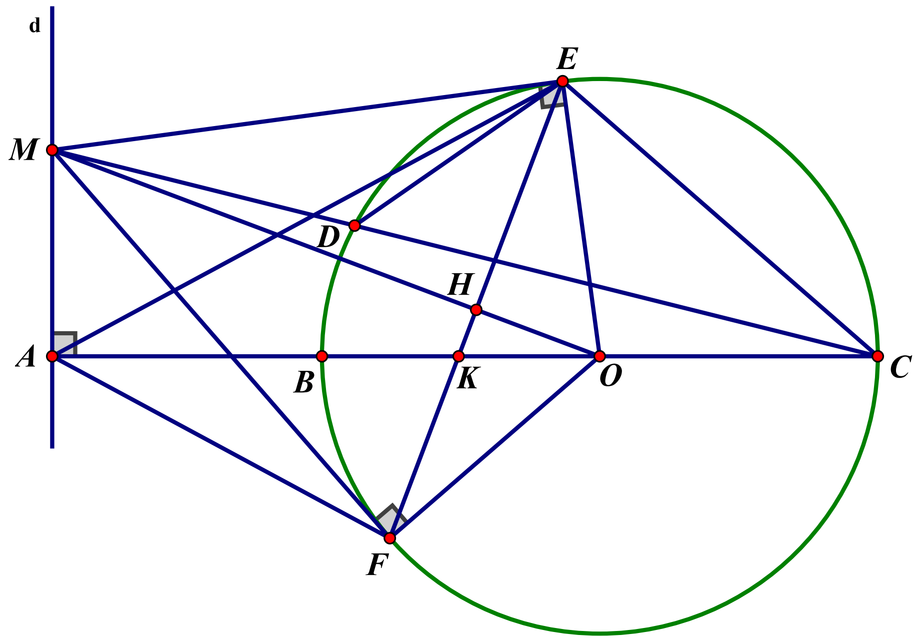
2. EF cắt MO và AC lần lượt tại H và K, MC cắt (O) tại D (D khác C). Chứng minh:

a) $MD.MC=ME^2=MH.MO$

b) AC là phân giác của góc EAF.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK cắt đường tròn đi qua năm điểm A, M, E, O, F tại I. chứng minh rằng khi M di chuyển trên d thì đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định.

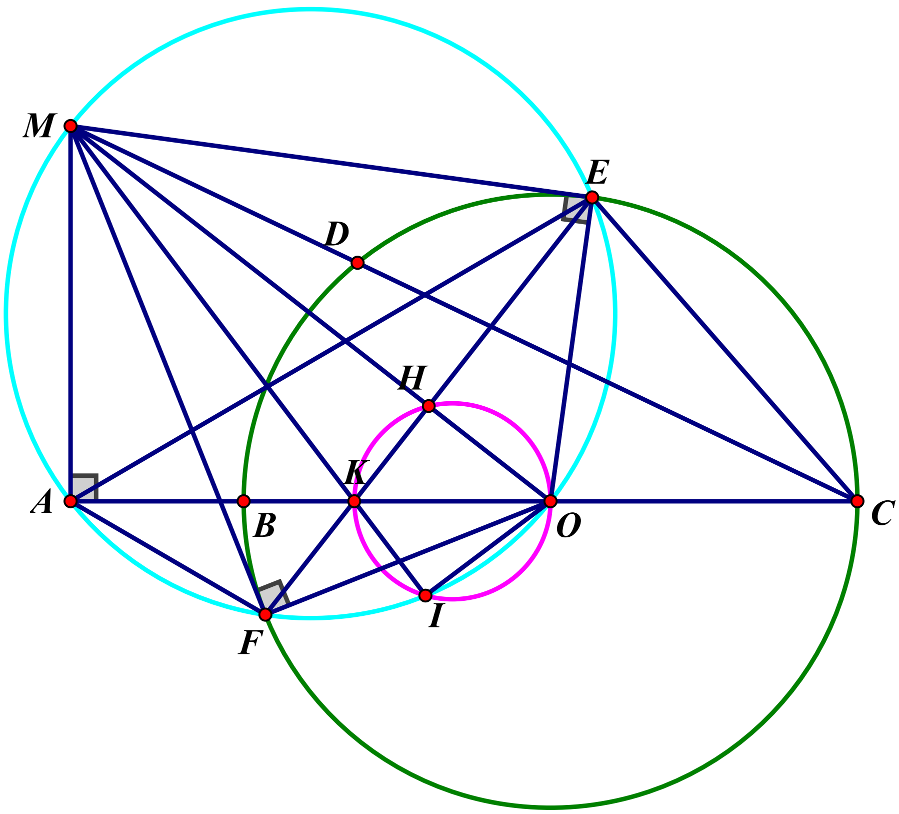
Lời giải



1) Ta có ME, MF là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{MFO} = 90°$

Xét tứ giác $MEOF$ có $\widehat{MEO} + \widehat{MFO} = 90° + 90° = 180°$
Mà hai góc này đối nhau
Suy ra $MEOF$ là tứ giác nội tiếp (1)
Lại có $d \perp BA \Rightarrow \widehat{MAO} = 90°$
Xét tứ giác $MAFO$ có $\widehat{MAO} = \widehat{MFO} = 90°$
Mà hai đỉnh A, F kề nhau cùng nhìn cạnh MO
Suy ra $MAFO$ là tứ giác nội tiếp (2)
Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, M, E, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính MO

2a) Xét (O) có $\widehat{MED} = \widehat{MCE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DE}$)
Xét ΔMED và ΔMCE có $\widehat{EMD}$ chung và $\widehat{MED} = \widehat{MCE}$ (cmt)
$\Rightarrow \Delta MED \backsim \Delta MED\ (g.g) \Rightarrow ME^2 = MD.MC$ (3)
Vì ME, MF là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow ME = MF$ (tính chất)
Mà $OE = OF \Rightarrow MO$ là đường trung trực của $EF \Rightarrow EH \perp MO$
Xét ΔMEO vuông tại E có $EH \perp MO \Rightarrow ME^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng) (4)
Từ (3) và (4) $\Rightarrow MD.MC = ME^2 = MH.MO$
b) Tứ giác $AMEO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EMO}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EO}$)
Tứ giác $AMOF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{OMF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{OF}$)
Mà $\widehat{EMO} = \widehat{FMO}$ (do ME, MF là tiếp tuyến của (O))
$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{FAO} \Rightarrow AC$ là phân giác $\widehat{EAF}$



3) Chứng minh $\Delta OHK \backsim \Delta OAM\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OA}=\dfrac{OK}{OM} \Rightarrow OK.OA=OH.OM=OE^2 \Rightarrow OK=\dfrac{OE^2}{OA}$ (không đổi)

Suy ra điểm K cố định

Ta có tứ giác $OHKI$ nội tiếp đường tròn đường kính OK

$\Rightarrow \widehat{OHK}+\widehat{OIK}=180° \Rightarrow \widehat{OIK}=90° \Rightarrow KI\perp OI$

Lại có tứ giác $OMAI$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow \widehat{MAO}=\widehat{MAI}=90° \Rightarrow AI\perp OI$

Suy ra M,K,I thẳng hàng

Vậy MI luôn đi qua K cố định

Bài V (0,5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}$$

Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Đặt $a=\sqrt{2+x}\ ;\ b=\sqrt{2-x}\ \ (a\ge 0\ ;\ b\ge 0)$

$\Rightarrow a^2+b^2=4 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab=4 \Leftrightarrow ab=\dfrac{(a+b)^2}{2}-2$

Ta có $(a+b)^2=4+2\sqrt{(2+x)(2-x)}\ge 4\ \forall -2\le x\le 2$

$\Rightarrow a+b\ge 2$

Lại có $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}=2\sqrt{2}$

Khi đó $P=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}=a+b-ab=a+b-\dfrac{(a+b)^2}{2}+2$

Xét $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+2$ với $2\le x\le 2\sqrt{2}$

Xét $x_1;x_2$ với $2\le x_1<x_2\le 2\sqrt{2}$, ta có:

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1-\frac{x_1^2}{2}-x_2+\frac{x_2^2}{2}=(x_1-x_2)-\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=1-\frac{1}{2}(x_1+x_2)<0 \text{ với } 2\le x_1<x_2\le 2\sqrt{2}$$

Hay $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ luôn nghịch biến trên đoạn $x\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ hay:

$$f(2)\ge f(x)\ge f\left(2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 2\ge f(x)\ge 2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow 2\ge P\ge 2\sqrt{2}-2$$

Vậy min $P=2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow a+b=2\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-2$

Max $P=2\Leftrightarrow a+b=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=0$

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 2)

Năm học: 2021 - 2022
MÔN: TOÁN
Ngày thi: .../4/2021
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{25\sqrt{x}+6}{x-36}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{6-\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$ và $B=\dfrac{x-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 36$.

1. Tính giá trị biểu thức B với $x=16$

2. Rút gọn biểu thức A.

3. Cho $T=\sqrt{AB}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T

Lời giải

1) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta được $B=\dfrac{x-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{16-6.4}{4-1}=\dfrac{-8}{3}$

Vậy khi $x=16$ thì $B=\dfrac{-8}{3}$

2) Với $x\ge 0; x\ne 36$. Ta có:

$$A=\frac{25\sqrt{x}+6}{x-36}-\frac{\sqrt{x}-1}{6-\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}==\frac{25\sqrt{x}+6+\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+6\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)}{\left(\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}+6\right)}$$

$$=\frac{25\sqrt{x}+6+x+5\sqrt{x}-6+2x-12\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}+6\right)}=\frac{3x+18\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}+6\right)}=\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+6\right)}{\left(\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}+6\right)}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}$$

3) Ta có: $A\cdot B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}\cdot\dfrac{x-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}\cdot\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{3x}{\sqrt{x}-1}$ ĐK $\sqrt{AB}$ là $\left[\begin{array}{l}x=0\\x>1; x\ne 36\end{array}\right.$.

Với $x=0\Rightarrow T=\sqrt{AB}=0$.

Với $x>1; x\ne 36\Rightarrow T=\sqrt{AB}=0$.

$$AB=\frac{3x}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x-3+3}{\sqrt{x}-1}=\frac{3\left(x-1\right)+3}{\sqrt{x}-1}=3\left(\sqrt{x}+1\right)+\frac{3}{\sqrt{x}-1}=3\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{3}{\sqrt{x}-1}+6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với 2 số dương ta được: $3\left(\sqrt{x}-1\right)+\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}\ge 2\sqrt{3\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}}=6$

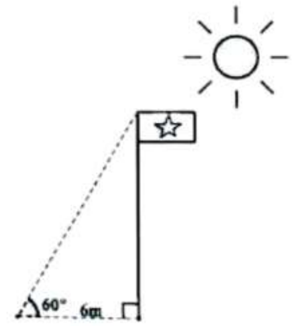
$$\Rightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{3}{\sqrt{x}-1}+6\ge 12\Rightarrow T=\sqrt{AB}\ge\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Dấu = xảy ra khi $3\left(\sqrt{x}-1\right)=\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=1\\\sqrt{x}-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4(\text{tm})\\x=0(\text{ktm})\end{array}\right.$

$\Rightarrow T\ge 2\sqrt{3}\Leftrightarrow x=4$.

Kết hợp hai trường hợp ta có $\text{Min}T=0\Leftrightarrow x=0$

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Hôm chủ nhật trước, Dũng được bố chở bằng xe máy đi về quê cách nhà $60\,km$ với vận tốc dự định. Trên đường về do có $\frac{1}{3}$ quãng đường là đường xấu nên để đảm bảo an toàn, bố bạn đã phải giảm bớt vận tốc đi $10\,km/h$, do đó đã về tới quê chậm mất 10 phút so với dự kiến. Tính vận tốc dự định của hai bố con bạn.
2. Tìm chiều dài của dây kéo cờ, biết bóng của cột cờ (chiếu bởi ánh sáng mặt trời) dài 6 m và góc nhìn mặt trời là $60°$.



Lời giải

1) Gọi vận tốc dự định của hau bố con bạn là x $(km/h, x > 10)$.

Chiều dài quãng đường là 60 km, thời gian dự định đi hết quãng đường là $\frac{60}{x}$ (giờ).

Chiều dài quãng đường xấu là: $\frac{60}{3} = 20\,km$,

Vận tốc xe đi trên quãng đường xấu là $x - 10\,km/h$ với

Thời gian xe đi trên quãng đường xấu là $\frac{20}{x-10}$ giờ.

Chiều dài quãng đường đi với vận tốc dự định là $40\,km$ với thời gian là: $\frac{40}{x}$ giờ.

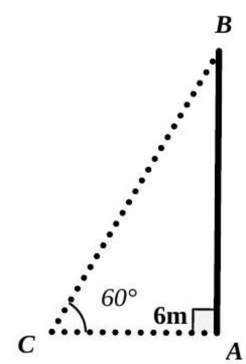
Vì hai bố con bạn về quê chậm 10 phút $= \frac{1}{6}$ giờ so với dự kiến nên ta có phương trình:

$$\frac{20}{x-10} + \frac{40}{x} = \frac{60}{x} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{20}{x-10} - \frac{20}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{20x - 20x + 200}{x^2 - 10x} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 1200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40\,(tmdk) \\ x = -30\,(loai) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc dự định của hai bố con bạn là $40\,km/h$.

2) Đánh dấu các điểm như hình vẽ.



Chiều dài của dây kéo cờ là độ dài đoạn AB.

Ta có: $AB = AC\ \tan\widehat{C} = 6\cdot\tan 60° = 6\sqrt{3} \approx 10,4\,(m)$

Vậy chiều dài dây kéo cờ là $\approx 10,4$ m.

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \dfrac{14}{2y+1} = 10 \\ \sqrt{x-1} - \dfrac{5}{2y+1} = \dfrac{23}{7} \end{cases}$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+5)x + 2m + 9 = 0$

a) Giải phương trình với $m = 10$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 - 2\sqrt{x_2} = 0$.

Lời giải

1) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ne -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \dfrac{14}{2y+1} = 10 \\ \sqrt{x-1} - \dfrac{5}{2y+1} = \dfrac{23}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \dfrac{14}{2y+1} = 10 \\ 2\sqrt{x-1} - \dfrac{10}{2y+1} = \dfrac{46}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{24}{2y+1} = \dfrac{24}{7} \\ \sqrt{x-1} - \dfrac{5}{2y+1} = \dfrac{23}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+1 = 7 \\ \sqrt{x-1} - \dfrac{5}{2y+1} = \dfrac{23}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \sqrt{x-1} - \dfrac{5}{7} = \dfrac{23}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \sqrt{x-1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 17 \end{cases}$$ (thỏa mãn điều kiện).

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+5)x + 2m + 9 = 0$ (1).

a) Khi $m = 10$ phương trình trở thành: $x^2 - 30x + 29 = 0$.

Ta có $a = 1; b = -30; c = 29$. Vì $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 1; x = \dfrac{c}{a} = 29$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi $\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow (m+5)^2 - 2m - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 > 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne -4$.

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 10 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 9 \end{cases}$.

Ta có $x_1 - 2\sqrt{x_2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2\sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1^2 = 4x_2$ (với $x_1 \ge 0$)

$\Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1}{4}x_1^2$ thay vào hệ thức Vi-et ta được : $\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{4}x_1^2 = 2m + 10 \\ \dfrac{1}{4}x_1^3 = 2m + 9 (2) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{4}x_1^3 - \dfrac{1}{4}x_1^2 - x_1 = -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}x_1^3 - \dfrac{1}{4}x_1^2 - x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 (L) \\ x_1 = 2 (N) \\ x_1 = 1 (N) \end{array}\right.$.

Thay $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right.$ vào (2) ta được $\left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{35}{8} \\ m = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

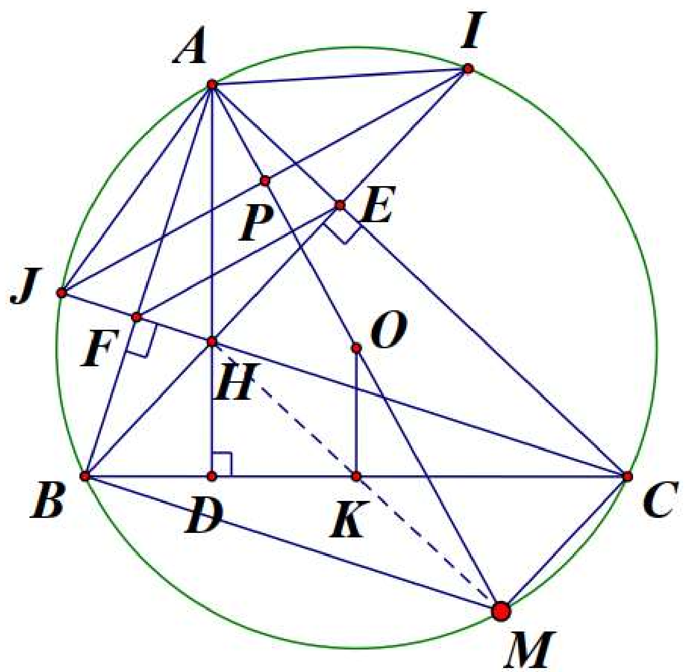
Bài IV (3,0 điểm). Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF. cắt nhau tai H.

a) Chứng minh $AEHF, BCEF$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AM của (O). Chứng minh $BHCM$ là hình bình hành và $AB \cdot AC = AD \cdot AM$

c) Cho BC cố định, A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn, BE cắt (O) tại I, CF cắt (O) tại J. Chứng minh rằng đoạn IJ có độ dài không đổi

Lời giải



a) Xét ΔABC có ba đường cao AD, BE, CF nên $BE \perp AC; CF \perp AB; AD \perp BC$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = 90^\circ; \widehat{BEC} = 90^\circ$ khi đó ta có hai đỉnh kề E, F cùng nhìn cạnh BC dưới cùng góc 90° nên suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Xét đường tròn (O) có đường kính AM nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Ta có: $AB \perp BM; AB \perp CF \Rightarrow BM // CF$ hay $BM // CH$

Ta có: $AC \perp CM; AC \perp BE \Rightarrow CM // BE$ hay $BH // CM$

Từ đó suy ra tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABD} = \widehat{AMC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Xét ΔBDA và ΔMCA có $\widehat{ABD} = \widehat{AMC}; \widehat{ADB} = \widehat{ACM} = 90^\circ$ suy ra $\Delta BDA \backsim \Delta MCA$(g.g)

Suy ra: $\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AM$.

c) Gọi K là trung điểm của BC mà tứ giác $BHCM$ là hình bình hành nên suy ra K là trung điểm của HM

Xét ΔAHM có O là trung điểm AM và K là trung điểm của HM nên suy ra OK là đường trung bình của ΔAHM nên $AH = 2OK$. Vì (O) và dây BC cố định nên O, H cố định suy ra OH không đổi, từ đó suy ra AH cũng không đổi.

Xét đường tròn (O) có hai dây cung BM và JC song song với nhau nên $\overset{\frown}{JB} = \overset{\frown}{CM}$ suy ra $JM = BC$; hai dây cung BI và CM song song với nhau nên $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CI}$ suy ra $MI = BC$.

Từ đó suy ra: $\overset{\frown}{MI} = \overset{\frown}{JM}$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{JAM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{JM}$ (góc nội tiếp chắn cung JM); $\widehat{IAM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{IM}$ (góc nội tiếp chắn cung IM) mà . $\overset{\frown}{MI} = \overset{\frown}{JM}$. nên suy ra $\widehat{JAM} = \widehat{IAM}$

Ngoài ra vì $JM = BC$ mà sđ $\overset{\frown}{BC}$ không đổi nên sđ $\overset{\frown}{JM}$ không đổi hay $\widehat{JAM}$ không đổi

Xét đường tròn (O) có $\widehat{JAB} = \widehat{JCB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{JB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung JB) mà $BAD = JCB$ (cùng phụ ABC) suy ra $\widehat{JAB} = \widehat{DAB}$.

Xét ΔAJH có AF vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên suy ra ΔAJH cân tại A nên $AJ = AH$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{IAC} = \widehat{IBC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{IC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{IC}$) mà $\widehat{IBC} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$) suy ra $\widehat{IAC} = \widehat{DAC}$.

Xét ΔAIH có AE vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên suy ra ΔAIH cân tại A nên $AI = AH$

Vậy suy ra $AI = AJ = AH$ nên ΔAIJ cân tại A; ngoài ra ta có AH không đổi nên AI, AJ không đổi.

Xét ΔAIJ cân tại A có AM là đường phân giác nên AM đồng thời là đường cao, đường trung tuyến từ đó suy ra $AM \perp IJ$ tại P (P là giao điểm của AM và IJ) và $IJ = 2JP$

Xét ΔAPJ vuông tại P có $\sin \widehat{JAP} = \frac{JP}{AJ}$ mà JAM không đổi và AJ không đổi nên suy ra PJ không đổi hay IJ không đổi.

Bài V (0,5 điểm). Cho a,b là các số thực làm cho phương trình ẩn x sau có nghiệm:

$$x^2 - 2(2a-b)x + 5a^2 - 4ab + 2b^2 - 1 = 0$$

Chứng minh rằng: $a^{2020} + b^{2021} < 2$

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (2a-b)^2 - (5a^2 - 4ab + 2b^2 - 1)$

$\Delta' = 4a^2 - 4ab + b^2 - 5a^2 + 4ab - 2b^2 + 1$

$\Delta' = -a^2 - b^2 + 1$

Để phương trình ẩn x có nghiệm $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \le 1 \Rightarrow a, b \in [-1;1]$.

Với $a, b \in [-1;1]$ thì $a^{2020} \le a^2; b^{2021} \le b^2$

$\Rightarrow a^{2020} + b^{2021} \le a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^{2020} + b^{2021} < 2$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)

Năm học: 2021 - 2022
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 5/5/2021
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2x-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-4}-\dfrac{5-\sqrt{x}}{x-16}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}$ với $x\ge 0;x\ne 16$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$. 2. Rút gọn biểu thức B.

3. Đặt $P=A.B$. Tìm x biết $\sqrt{2P-1}=P-2$.

Lời giải

1. Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{2.9-8\sqrt{9}}{\sqrt{9}+5}=\dfrac{-3}{4}$

Vậy với $x=9$ thì $A=-\dfrac{3}{4}$

2. $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-4}-\dfrac{5-\sqrt{x}}{x-16}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+4\right)-\left(5-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}$

$=\dfrac{3\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}.\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3}{\sqrt{x}-4}$

3. $P=A.B=\dfrac{2x-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}.\dfrac{3}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{\sqrt{x}+5}.\dfrac{3}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$

$\sqrt{2P-1}=P-2\Rightarrow\begin{cases}P\ge 2\\2P-1=\left(P-2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 2\\P^2-6P+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 2\\\left(P-5\right)\left(P-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 2\\P=5\ (tm)\\P=1\ (ktm)\end{cases}$

Suy ra $P=5\Rightarrow\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}=5\Rightarrow 6\sqrt{x}=5\sqrt{x}+25\Leftrightarrow\sqrt{x}=25\Leftrightarrow x=625$ (tm)

Vậy $x=625$ thoả mãn yêu cầu đề bài

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông dài $136km$, sau đó chạy ngược dòng $91km$ trên khúc sông đó. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là $4km/h$ và tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là 7 giờ 30 phút.

2. Bạn Linh có một chiếc cốc thuỷ tinh có lòng là một hình trụ có chiều cao $15cm$ và bán kính đáy bằng $2,5cm$ đang đựng $\dfrac{2}{3}$ nước. Linh muốn thả các viên bi ve hình cầu có bán kính $1cm$ vào cốc để trang trí. Hỏi bạn có thể thả thêm vào đó nhiều nhất bao nhiêu viên bi để nước không bị tràn ra khỏi cốc?

Lời giải

1) Gọi vận tốc riêng của Ca nô là x (km/h) $(x>4)$

Vận tốc của ca nô đi xuôi dòng là $x+4\ (km/h)$

Thời gian canô đi xuôi dòng là $\frac{136}{x+4}$ (giờ)

Vận tốc của canô đi ngược dòng là $x-4\ (km/h)$

Thời gian canô đi ngược dòng là $\frac{91}{x-4}$ (giờ)

Vì tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là 7 giờ 30 phút. $=\frac{15}{2}$ giờ

nên ta có phương trình

$$\frac{136}{x+4}+\frac{91}{x-4}=\frac{15}{2}$$

Giải phương trình trên tìm được $x=30$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc riêng của canô là $30\ km/h$

2) Thể tích cốc nước hình trụ là $2\pi Rh=2\pi\ .\ 2,5\ .\ 15=75\pi\ \left(cm^3\right)$

Thể tích nước trong cốc là $75\pi.\frac{2}{3}=50\pi\ \left(cm^3\right)$

Thể tích phần còn lại là $75\pi-50\pi=25\pi\ \left(cm^3\right)$

Thể tích viên bi là $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.1^3=\frac{4}{3}\pi\ \left(cm^3\right)$

Số viên bi nhiều nhất có thể thả vào cốc nước là $25\pi:\frac{4}{3}\pi=18,75\approx 18$ (viên)

Vậy bạn Linh có thể thả nhiều nhất 18 viên bi

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-10x+5y=16\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m+3$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8. Khi đó hãy tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

3. Tìm m để phương trình $x^4+(3m-2)x^2-3m+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Lời giải

1) Điều kiện: $x>1$

$\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-10x+5y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-5(2x-y)=16\end{cases}$. Đặt $a=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\ (a>0)\ ;\ b=2x-y$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5a+b=2 \\ a-5b=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25a+5b=10 \\ a-5b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26a=26 \\ a-5b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$ (thoả mãn)

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy HPT có nghiệm là $(x;y)=(2;7)$

2) Vì (d) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8 nên (d) đi qua $(0;8)$

Thay $x=0$; $y=8$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có

$8=2.0+m+3 \Rightarrow m=5$

Vậy với $m=5 \Rightarrow (d): y=2x+8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=2x+8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Với $x=4 \Rightarrow y=16$

Với $x=-2 \Rightarrow y=4$

Vậy với $m=5$ thì toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $(4;16)$ và $(-2;4)$

3) $x^4+(3m-2)x^2-3m+1=0$ (1)

Đặt $t=x^2$ $(t \geq 0) \Rightarrow t^2+(3m-2)t-3m+1=0$ (*)

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt đều dương

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1t_2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3m-2)^2-4(-3m+1)>0 \\ 2-3m>0 \\ -3m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2-4(-3m+1)>0 \\ 2-3m>0 \\ -3m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2>0 \\ m<\dfrac{2}{3} \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $m<\dfrac{1}{3}$ và $m \neq 0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

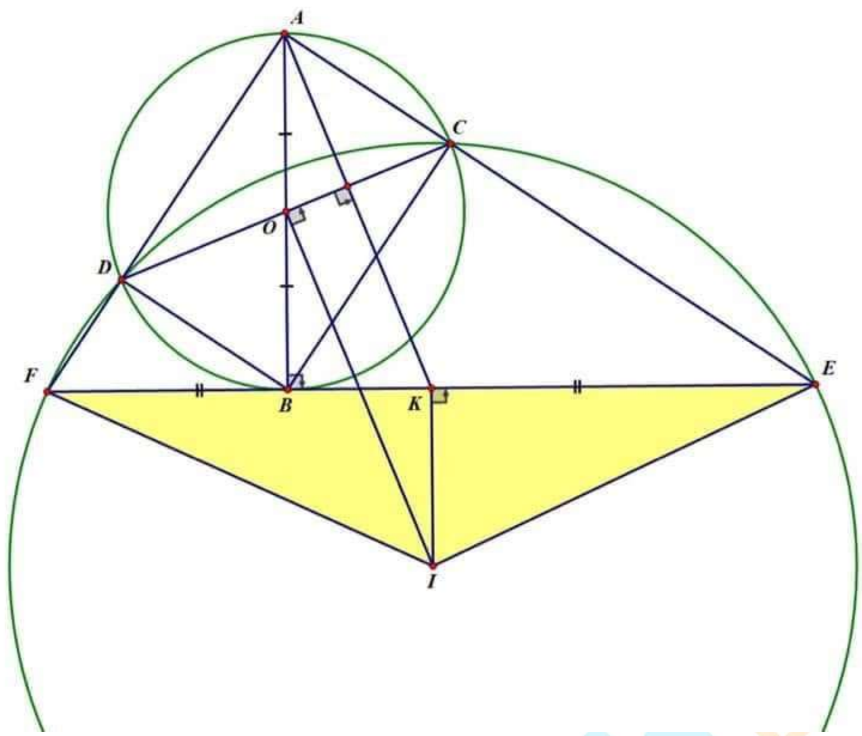
Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính CD của đường tròn $(O;R)$ (C khác A, C khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại các điểm E, F.

a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh bốn điểm C, D, F, E cùng thuộc một đường tròn (I). Gọi K là trung điểm của EF, chứng minh $AK \perp CD$.

c) Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để tam giác IEF có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



a) Ta có $A \in (O)$ đường kính $DC \Rightarrow \widehat{DAC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$B \in (O)$ đường kính $DC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$C \in (O)$ đường kính $AB \Rightarrow \widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $ACBD$ có $\widehat{DAC} = \widehat{ACB} = \widehat{DBC} = 90°$

Suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật

b) +) Chứng minh C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn:

Xét ΔABF có $BD \perp AF \Rightarrow AD \cdot AF = AB^2$ (Hệ thức lượng)

Xét ΔABE có $BC \perp AE \Rightarrow AC \cdot AE = AB^2$ (Hệ thức lượng)

Chứng minh $\Delta ACD \backsim \Delta AFE \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AEF} \Rightarrow$ tứ giác $CDFE$ nội tiếp

+) Chứng minh $AK \perp CD$

K là trung điểm của EF

$\Rightarrow AK$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông AEF

$\Rightarrow AK = KE \Rightarrow$ tam giác AKE cân tại $E \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KEA}$

Lai có $\widehat{ACD} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{KEA} + \widehat{AFE} = 90° \Rightarrow \widehat{KAE} + \widehat{ACD} = 90° \Rightarrow AK \perp CD$

c) Tìm vị trí của CD để diện tích tam giác IEF nhỏ nhất

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của hai đường trung trực của EF và CD

Chứng minh tứ giác $AOIK$ là hình bình hành $\Rightarrow IK = AO = R$ không đổi

$S_{IEF} = \dfrac{EF \cdot IK}{2}$ mà IK không đổi $\Rightarrow S_{IEF}\min \Leftrightarrow EF\min$

$EF = EB + BF \geq 2\sqrt{EB \cdot FB} = 2\sqrt{AB^2} = 2 \cdot AB = 4R$

Vậy S_{IEF} min $= \dfrac{4R \cdot R}{2} = 2R^2 \Leftrightarrow BE = BF \Leftrightarrow B \equiv K$ hay B là trung điểm của EF

$\Rightarrow C, D$ là trung điểm của AE, EF hay $CD \perp AB$

Bài V (0,5 điểm). Cho các số thực $a,b,c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = (a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

Lời giải

Chứng minh B Đ.T phụ: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$

Ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 3 + \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) + \left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Áp dụng B.Đ.T $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$ và $xy + yz + zx \leq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca} \Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

$$ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow \frac{7}{ab+bc+ca} \geq \frac{21}{(a+b+c)^2}$$

$$P \geq (a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca}\right)$$

$$P \geq (a+b+c)^2\left[\frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{7}{ab+bc+ca}\right] \geq (a+b+c)^2\left[\frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{21}{(a+b+c)^2}\right] = 30$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)

Năm học: 2022 - 2023
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 7/5/2022
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho các biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ (với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$)

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Đặt $P=A\cdot B$. Tìm x để $P-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$.

Lời giải

1. Thay $x=25$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{2\sqrt{25}}{\sqrt{25}-2}=\dfrac{2.5}{5-2}=\dfrac{10}{3}$

Vậy với $x=25$ thì $A=\dfrac{10}{3}$

2. $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)+3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x}-\sqrt{x}-1+3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

3. ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$

$P=A\cdot B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Để $P-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}-1\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{16\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}+1\right)^2-8\left(\sqrt{x}+1\right)}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{-x+6\sqrt{x}-9}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}\ge 0$

Vì $8\left(\sqrt{x}+1\right)>0$ nên $-x+6\sqrt{x}-9\ge 0\Leftrightarrow -\left(\sqrt{x}-3\right)^2\ge 0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2\le 0$

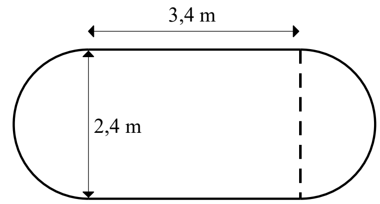
$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (thoả mãn)

Vậy $x=9$

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Trên một khúc sông, một canô đi xuôi dòng 60 km, sau đó lại chạy ngược dòng 64 km, biết thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng 30 phút. Tính vận tốc riêng của canô, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

2. Một bồn chứa xăng đạt trên xe có cấu tạo: hai đầu là hai nửa hình cầu có đường kính là $2,4m$, phần thân là một hình trụ có chiều dài $3,4m$. Tính thể tích của bồn chứa xăng. (Lấy $\pi \approx 3,14$)



Lời giải

1) Gọi vận tốc riêng của Ca nô là x(km/h) $(x>4)$

Vận tốc của ca nô đi xuôi dòng là $x+4\ (km/h)$

Thời gian canô đi xuôi dòng là $\dfrac{60}{x+4}$ (giờ)

Vận tốc của canô đi ngược dòng là $x-4\ (km/h)$

Thời gian canô đi ngược dòng là $\dfrac{64}{x-4}$ (giờ)

Vì thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng 30 phút $=\dfrac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{64}{x-4}-\frac{60}{x+4}=\frac{1}{2}$$

Giải phương trình trên tìm được $x=36$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc riêng của canô là $36\ km/h$

2) Bán kính của nửa hình cầu là $2,4:2=1,2\ (m)$

Thể tích hai nửa hình cầu là $2.\dfrac{4}{3}\pi R^3 \approx 2\ .\ \dfrac{4}{3}\ .\ 3,14\ .\ 1,2^3 = 14,47\ (m^3)$

Thể tích phần thân có dạng hình trụ là $\pi R^2.h \approx 3,14\ .\ 1,2^2\ .\ 3,4 \approx 15,37\ (m^3)$

Thể tích của bồn chứa xăng là $14,47+15,37=29,84\ (m^3)$

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{7}{x}-\sqrt{y+5}=4 \\ \dfrac{3}{x}+2\sqrt{y+5}=9 \end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi $m=4$.

b) Tìm m để (P) và d cắt nhau tại 2 điểm phân biệt cùng nằm bên phải của trục tung sao cho tổng các tung độ của các giao điểm bằng 5.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\neq 0;\ y\geq -5$

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$; $b=\sqrt{y+5}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 7a-b=4 \\ 3a+2b=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 14a-2b=8 \\ 3a+2b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17a=17 \\ 3a+2b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ \sqrt{y+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y+5=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;-2)$

2a) Với $m=4$ thì $d: y=4x-3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) ta có

$x^2=4x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Với $x=3 \Rightarrow y=9$

Với $x=1 \Rightarrow y=1$

Vậy với $m=4$ thì giao điểm của d và (P) là $(3;9)$ và $(1;1)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) ta có

$x^2=mx-m+1 \Leftrightarrow x^2-mx+m-1=0$ (1)

Ta có $\Delta=(-m)^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta>0 \Rightarrow (m-2)^2>0 \Rightarrow m-2\neq 0 \Rightarrow m\neq 2$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Để (P) và d cắt nhau tại 2 điểm phân biệt cùng nằm bên phải của trục tung sao cho tổng các tung độ của các giao điểm bằng 5 thì $\begin{cases} x_1\ ;\ x_2>0 \\ y_1+y_2=5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \\ y_1+y_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m-1>0 \\ x_1^2+x_2^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m^2-2(m-1)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m^2-2m-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m-3)(m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m=3\ (tm) \\ m=-1\ (ktm) \end{cases}$

Vậy $m=3$ thoả mãn điều kiện

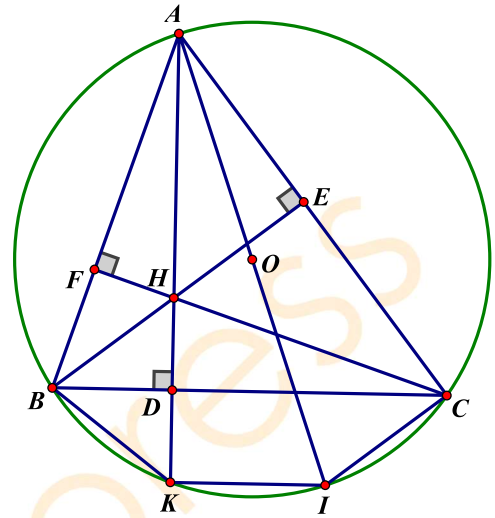
Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O)(AB<AC)$. Các đường cao $AD;BE$; CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt (O) tại K (K khác A).

a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AI. Chứng minh $AB\cdot AC=AD\cdot AI$ và tứ giác $BKIC$ là hình thang cân.

c) Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại $M(M$ khác $A)$. Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ $BC; MP$ cắt BC tại G. Chứng minh HG là phân giác của góc BHC.

Lời giải



a) Vì $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{HDB} = 90°$

$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{HFB} = 90°$

Xét tứ giác $BFHD$ có $\widehat{HDB} + \widehat{HFB} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Suy ra $BFHD$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

b) Xét (O) có $\widehat{ACI} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABD} = \widehat{AIC}$ (góc nội tiếp chắn cung AC)

Xét ΔABD và ΔAIC có

$\widehat{ADB} = \widehat{ACI} = 90°$ và $\widehat{ABD} = \widehat{AIC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AIC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AI$ (đpcm)

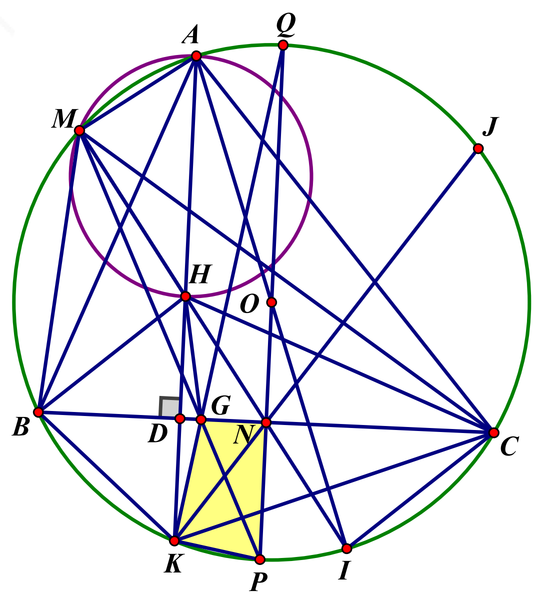
Vì $\Delta ABD \backsim \Delta AIC\ (cmt) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAI}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BK}$ = sđ $\overset{\frown}{CI}$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BK}$ + sđ $\overset{\frown}{KI}$ = sđ $\overset{\frown}{CI}$ + sđ $\overset{\frown}{KI}$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BI}$ = sđ $\overset{\frown}{CK}$. Suy ra $\widehat{BCI} = \widehat{CBK}$ (1)

Lại có $\widehat{AKI} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AK \perp KI$

Mà $AK \perp BC \Rightarrow BC // KI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BKIC$ là hình thang cân



c) $\widehat{AMH} = 90° : \widehat{AMI} = 90° \Rightarrow M, H, I$ thẳng hàng.

P là điểm chính giữa cung BC nên $OP \perp BC$ tại N là trung điểm BC.

Chứng minh $BHCI$ là hình bình hành nên N là trung điểm HI

$\Rightarrow M, H, N, I$ thẳng hàng.

KN cắt (O) tại J. $\Delta KNB = \Delta INC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KNB} = \widehat{INC} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BK}$ + sđ $\overset{\frown}{JC}$ = sđ $\overset{\frown}{CI}$ + sđ $\overset{\frown}{MB}$

Mà $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{CI}$ (Do $BK = CI$ do $BCIK$ là hình thang cân)

$\Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CJ}$

$\Rightarrow \widehat{NGP} = \widehat{NKP}\left(sđ\ \overset{\frown}{CP} + sđ\ \overset{\frown}{JC} = sđ\ \overset{\frown}{CP} + sđ\ \overset{\frown}{MB}\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $GKPN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PKG} = 90°$. KG cắt (O) tại Q nên PQ là đường kính.

$PQ \perp BC$ nên Q là điểm chính giữa cung lớn BC nên $\overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{CQ}$ (3)

Ta có: $\widehat{HBD} = \widehat{KAC} = \widehat{KBC}$ nên ΔHBK có BD là đường cao cũng là phân giác nên cân tại B

$\Rightarrow BC$ cũng là trung trực $HK \Rightarrow H$ đối xứng với K qua BC

$\Rightarrow \widehat{GHB} = \widehat{GKB}; \widehat{GHC} = \widehat{GKC}$ (tính chất đối xứng) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{GHB} = \widehat{GHC} \Rightarrow dpcm$

Bài V (0,5 điểm). Cho $a,b,c>0$. và thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2 \le abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{a^2+bc} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{bc}\right)$

Do đó $P=\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{bc}+\frac{1}{b}+\frac{b}{ca}+\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac}{abc}\right)$

$\le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2}{abc}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} \le \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=3$

Vậy GTLN của $P=\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=3$

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 4)
Năm học: 2022 - 2023
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 3/6/2022
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-6}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+6}-\dfrac{9\sqrt{x}+6}{x-36}$ với $x\geq 0; x\neq 9; x\neq 36$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$.

3) Đặt $P=A.B$. Tìm giá nguyên của x để P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có: $A=\dfrac{\sqrt{16}+6}{\sqrt{16}-3}=\dfrac{4+6}{4-3}=10$

Vậy với $x=16$ thì $A=10$

2) $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-6}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+6}-\dfrac{9\sqrt{x}+6}{x-36}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+6\right)-2\left(\sqrt{x}-6\right)-\left(9\sqrt{x}+6\right)}{\left(\sqrt{x}+6\right)\left(\sqrt{x}-6\right)}$

$B=\dfrac{x+6\sqrt{x}-\sqrt{x}-6-2\sqrt{x}+12-9\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+6\right)\left(\sqrt{x}-6\right)}=\dfrac{x-6\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+6\right)\left(\sqrt{x}-6\right)}$

$B=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)}{\left(\sqrt{x}+6\right)\left(\sqrt{x}-6\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$

3) ĐKXĐ: $x\geq 0; x\neq 9; x\neq 36$

$P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}=1+\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}$

Để $P\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-3\in\{1;-1;3;-3\}$

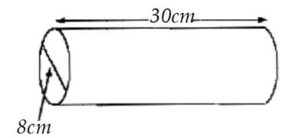
Ta có bảng sau

$\sqrt{x}-3$	-3	-1	1	3
x	0	4	16	36 (loại, vì $x\neq 36$)
P	-2	-8	10	

Vậy với $x=4$ thì P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 500 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, do cải tiến kĩ thuật, tổ 1 làm vượt mức 10%, tổ 2 làm vượt mức 15% so với tháng thứ nhất. Vì vậy, tháng thứ hai cả hai tổ đã làm được 564 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

2) Trục lăn của một cái lăn sơn có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 8cm, chiều dài trục lăn là 30cm. Sau khi lăn được 10 vòng thì trục lăn tạo trên sân phẳng một diện tích là bao nhiêu? *(lấy $\pi \approx 3,14$)*



Lời giải

1) Gọi số sản phẩm tổ 1 làm được trong tháng thứ nhất là x (sản phẩm, $x \in \mathbb{N}^*, x < 500$)

Gọi số sản phẩm tổ 2 làm được trong tháng thứ nhất là y(sản phẩm, $y \in \mathbb{N}^*, y < 500$)

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 500 sản phẩm, nên ta có phương trình: $x + y = 500\ (1)$

Sang tháng thứ hai tổ 1 vượt mức 10% nên làm được $x + 10\%x = 1,1x$ (sản phẩm),

tổ 2 vượt mức 15% nên làm được $y + 15\%y = 1,15y$ (sản phẩm).

Vì tháng thứ hai cả hai tổ đã làm được 564 sản phẩm nên ta có PT:

$$1,1x + 1,15y = 564 \Leftrightarrow 22x + 23y = 11280\,(2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 500 \\ 22x + 23y = 11280 \end{cases}$

Giải hệ phương trình, tìm được nghiệm : $\begin{cases} x = 220 \\ y = 280 \end{cases}$ (tmđk)

Vậy trong tháng thứ nhất, tổ 1 làm được 220 sản phẩm; tổ 2 làm được 280 sản phẩm.

2) Diện tích xung quanh của con lăn: $S = 2\pi.r.h = 2\pi.4.30 = 240\pi\,(cm^2)$

Diện tích được tạo bởi trục lăn sau khi lăn 10 lần trên sân phẳng là

$240\pi.10 = 2400\pi\,(cm^2) \approx 7536\,(cm^2)$

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{y-3} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} - \dfrac{2}{y-3} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 6$. Tìm tọa độ giao điểm của *(d)* và *(P).*

3) Tìm m để phương trình $x^4 + (2m-3)x^2 - 2m + 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt .

Lời giải

1) Điều kiện: $x > -2; y \neq 3$

Đặt $a = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\left(a > 0\right);\ b = \dfrac{1}{y-3}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a + b = \dfrac{5}{2} \\ a - 2b = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Tìm được $a = \dfrac{1}{2}$; $b = 1$. Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y-3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 2 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (2;4)$

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$$x^2 = x+6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 9$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 4$

Vậy giao điểm của (d) và (P) là $(3;9)$ và $(-2;4)$

3) $x^4 + (2m-3)x^2 - 2m + 2 = 0$ (1)

Đặt : $t = x^2$; $t \geq 0$, PT đã cho trở thành: $t^2 + (2m-3)t - 2m + 2 = 0$ (2)

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

Mà $a+b+c = 1 + 2m - 3 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow$ PT (2) có 2 nghiệm $t_1 = 1$; $t_2 = -2m+2$

Do đó $\begin{cases} -2m+2 \neq 1 \\ -2m+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ m < 1 \end{cases}$. Vậy với $m < 1$ và $m \neq \dfrac{1}{2}$ thì PT (1) có 4 nghiệm phân biệt

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AD. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AC tại E, AD cắt BE tại H.

1) Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi giao điểm của CH với AB là F. Chứng minh F thuộc đường tròn (O) và DA là phân giác của góc EDF.

3) Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với (O) *(M, N là tiếp điểm)*, AO cắt MN tại K, đoạn thẳng AH cắt (O) tại P. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOPK. Chứng minh B, C, I thẳng hàng.

Lời giải

1) Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$AD \perp BC \Rightarrow \widehat{HDC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $HDCE$ có $\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

Vậy $HDCE$ là tứ giác nội tiếp

2) Hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H là trực tâm tam giác nên $CH \perp AB$ tại F

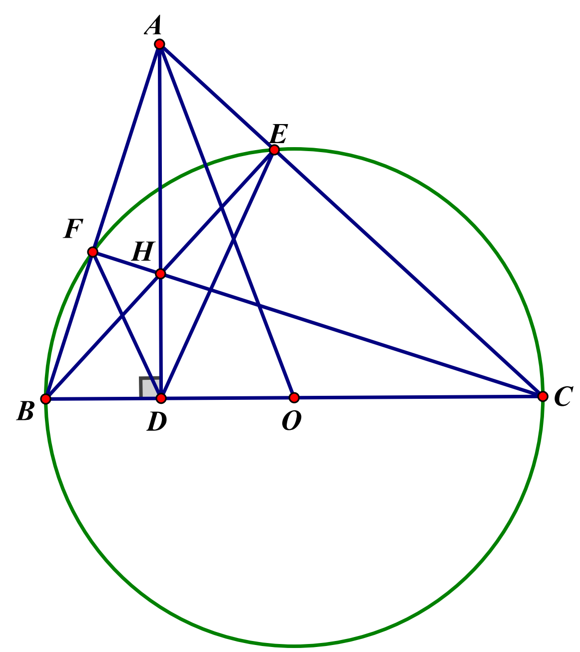
Vì góc $\widehat{BFC} = 90^\circ$ nên $F \in (O)$

Chứng minh $BDHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{FBH}$

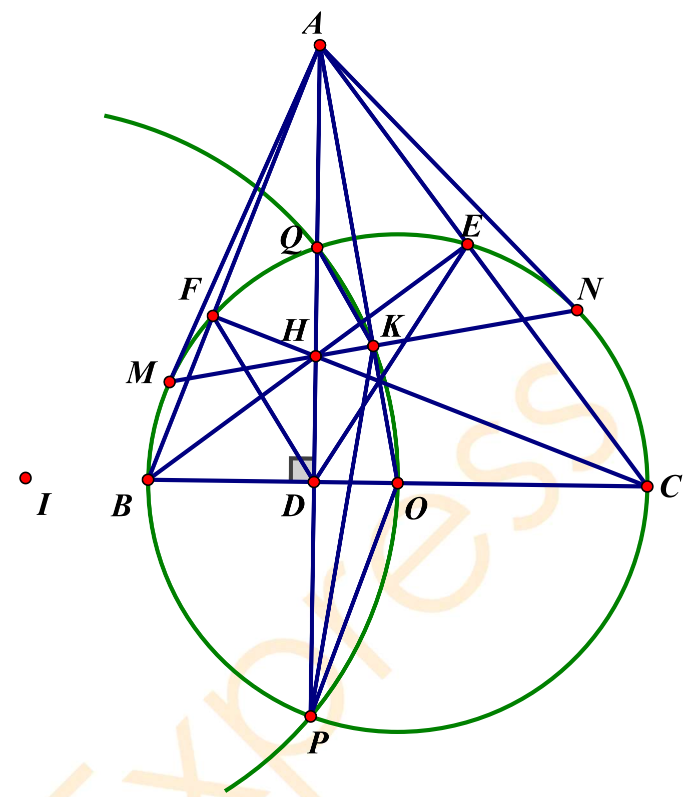
Vì $CDHE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EDH} = \widehat{ECH}$

Lại có $\widehat{FBH} = \widehat{ECH}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{EDH}$. Suy ra DA là phân giác của $\widehat{EDF}$



3) Gọi giao điểm thứ hai của AH với (O) là Q
Chứng minh được $OKQP$ là tứ giác nội tiếp
Suy ra I nằm trên đường trung trực của PQ
Xét (O) có đường kính BC vuông góc với PQ
$\Rightarrow BC$ là đường trung trực của PQ
Vậy B, C, I thẳng hàng.



Bài V (0,5 điểm). Với các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 9 = 0$ có nghiệm, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(m+2)(m^2 - 2m + 4)}{m}$

Lời giải

$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 9 = 0$ (1)

$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 9) = 2m - 8$

Để (1) có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Rightarrow m \geq 4$

Ta có $P = \dfrac{m^3 + 8}{m} = m^2 + \dfrac{8}{m} = (m^2 - 8m + 16) + \left(\dfrac{m}{2} + \dfrac{8}{m}\right) + \dfrac{15}{2}m - 16$

Tìm được GTNN của P bằng 18 khi $m = 4$

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 3)
Năm học: 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 23/4/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0; x\ne 1; x\ne 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$. 2. Rút gọn biểu thức B.

3. Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P|>P$.

Lời giải

1. Thay $x=49$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{49}+1}{\sqrt{49}}=\dfrac{8}{7}$

Vậy với $x=49$ thì $A=\dfrac{8}{7}$

2. $B=\dfrac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{3x-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$=\dfrac{3x-(x-1)+(x-4)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{3x-3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

3. ĐKXĐ: $x>0; x\ne 1; x\ne 4$

$P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}:\dfrac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$

Để $|P|>P$ thì $P<0\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}<0$

Vì $3\sqrt{x}>0\,\forall x>0; x\ne 1; x\ne 4$

$\Rightarrow \sqrt{x}-2<0\Rightarrow \sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

Kết hợp ĐKXĐ ta có $0<x<4$ và $x\ne 1$

Mà x là số nguyên nhỏ nhất nên $x=2$

Vậy $x=2$ thoả mãn bài toán.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

1) Quãng đường AB dài 60 km; một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường, người đó giảm vận tốc $5\,km/h$ trên nửa quãng đường còn lại. Vì vậy, người đó đã đến B chậm hơn dự định 1 giờ. Tính vận tốc dự định của người đó.

2) Một cốc trà sữa hình trụ có đường kính đáy là $8cm$. Bạn Đăng bỏ thêm trân châu vào cốc thì thấy trà sữa dâng lên cao thêm $3cm$. Tính thể tích phần trân châu bạn Đăng đã bỏ thêm vào (trân châu chìm hoàn toàn trong trà sữa và không thấm nước; lấy $\pi\approx 3,14$).

Lời giải

1) Gọi vận tốc dự định của người đó là $x\ \left(km/h\right)\ \left(x>5\right)$

Thời gian dự định người đó đi từ A đến B là $\frac{60}{x}$ (giờ)

Trên thực tế, thời gian người đó đi được nửa quãng đường đầu là $\frac{30}{x}$ (giờ)

Vận tốc thực tế của người đó đi trên nửa quãng đường còn lại là $x-5$ (km/h)

Thời gian thực tế của người đó đi trên nửa quãng đường còn lại là $\frac{30}{x-5}$ (giờ)

Vì người đó đế B chậm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình

$\frac{30}{x}+\frac{30}{x-5}=\frac{60}{x}+1$

Giải phương trình trên tìm được $x=15$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc dự định của người đó là 15 $\left(km/h\right)$

2) Bán kính đáy của cốc trà sữa là $8:2=4\left(cm\right)$

Thể tích nước tăng lên là thể tích phần trân châu được bỏ thêm

Thể tích phần trân châu là $\pi.R^2.h\approx 3{,}14\ .\ 4^2\ .\ 3\approx 150{,}72\left(cm^3\right)$

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left|x-1\right|+\dfrac{3}{\sqrt{y+1}}=5 \\ \left|x-1\right|-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

2) Cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right):y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\left(d\right)$ và parabol $\left(P\right)$ với $m=-3$.

b) Tìm giá trị của m để $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 2 .

Lời giải

1) Điều kiện: $y>-1$

Đặt $a=\left|x-1\right|\ \left(a\ge 0\right);b=\frac{1}{\sqrt{y+1}}\ \left(b>0\right)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a+3b=5 \\ a-b=\dfrac{5}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ (tm)

Khi đó $\begin{cases} \left|x-1\right|=2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \\ \sqrt{y+1}=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y+1=9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.\left(tm\right) \\ y=8 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left\{\left(3;8\right);\left(-1;8\right)\right\}$

2a) Với $m=-3$ thì $\left(d\right):y=3x-2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ ta có

$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P)là $(2;4)$ và $(1;1)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$

$\Delta = (-m)^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 2 thì $|x_1| + |x_2| = 2$

$\Rightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 4 \Leftrightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2|x_1x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 4$

$\Rightarrow m^2 - 2(m-1) + 2|m-1| = 4 \Rightarrow 2|m-1| = -m^2 + 2m + 2 \quad \left(1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}\right)$

$TH1: 2(m-1) = -m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = 2$ (loại) hoặc $m = -2$ (thoả mãn)

$TH1: 2(m-1) = m^2 - 2m - 2 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 4$ (loại) hoặc $m = 0$ (thoả mãn)

Vậy $m \in \{0;-2\}$ thoả mãn đề bài

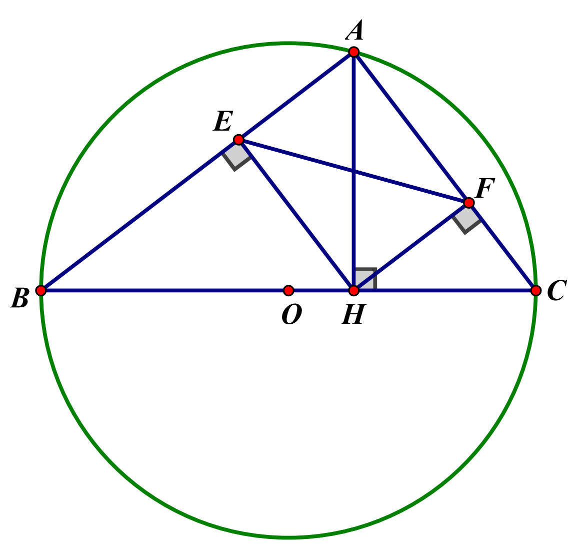
Bài IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O), đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB > AC$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC(H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB; F thuộc AC).

1) Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh $AE \cdot AB = AF.AC$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

3) Gọi D là giao điểm của EF và BC;K là giao điểm của AD với (O);I là giao điểm của KF và BC. Chứng minh rằng $IH^2 = IC \cdot ID$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BAC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$HE \perp AB \Rightarrow \widehat{AEH} = 90°$; $HF \perp AC \Rightarrow \widehat{AFC} = 90°$

Xét tứ giác $AEHF$ có

$\widehat{EAF} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90°$

$\Rightarrow AEHF$ là hình chữ nhật (dhnb)

b) Xét ΔAHB có $HE \perp AB$

$\Rightarrow AH^2 = AE.AB$ (Hệ thức lượng)

Xét ΔAHC có $HF \perp AC$

$\Rightarrow AH = AF.AC$ (Hệ thức lượng)

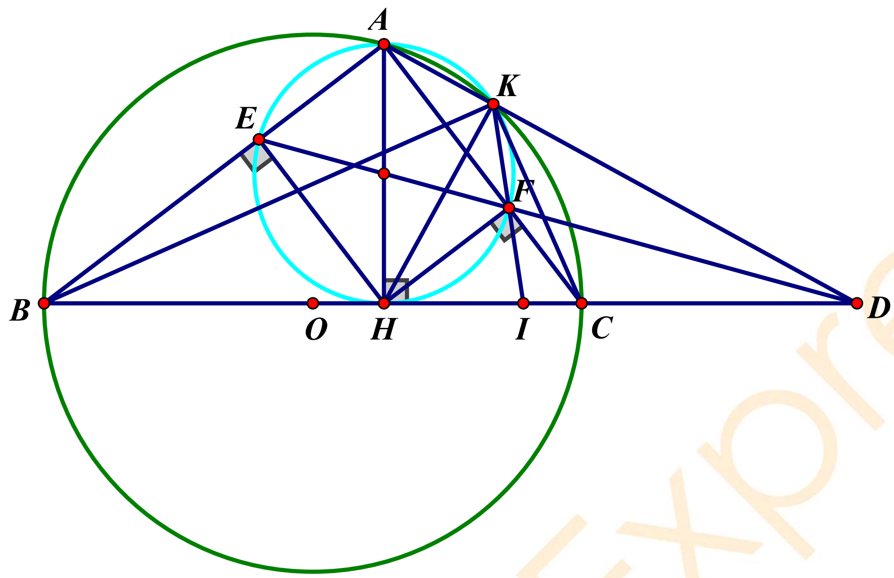
Từ đó $AE.AB = AF.AC \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB}$

Xét ΔAEF và ΔACB có $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$ và $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (góc – góc) $\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ACB}$

Suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp

c)



Vì $BEFC$ nội tiếp nên $DF.DE=DC.DB$

$AKCB$ nội tiếp nên $DK.DA=DC.DB$

$\Rightarrow DK.DA=DF.DE \Rightarrow AKFE$ là tứ giác nội tiếp

Khi đó chứng minh được 5 điểm A,K,F,H,E cùng nội tiếp đường tròn đường kính AH

Do đó $AKFH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKH}=\widehat{AFH}=90° \Rightarrow \widehat{KHI}=90°-\widehat{KHA}=\widehat{KAH}=\widehat{HFI}$

Xét ΔHKI và ΔFHI có $\widehat{KHI}=\widehat{HFI}$ (cmt) và $\widehat{FIH}$ chung

$\Rightarrow \Delta HKI \backsim \Delta FHI$ (góc - góc) $\Rightarrow IH^2=IK.IF$ (1)

Lại chứng minh được $\widehat{FKD}=\widehat{AHF}=90°-\widehat{FHC}=\widehat{FCH}$ (do $AKFH$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow KFCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow IF.IK=IC.ID$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH^2=IC.ID$

Bài V (0,5 điểm). Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+a}+\sqrt{b^2+b}+\sqrt{c^2+c}$.

Lời giải

* GTLN

Ta có $\sqrt{10}.\sqrt{a^2+a}=\sqrt{10a(a+1)}\le\frac{10a+a+1}{2}=\frac{11a+1}{2}$

Tương tự $\sqrt{10}\sqrt{b^2+b}\le\frac{11b+1}{2}$; $\sqrt{10}\sqrt{c^2+c}\le\frac{11c+1}{2}$

Cộng cả ba vế ta được $\sqrt{10}\left(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{b^2+b}+\sqrt{c^2+c}\right)\le\frac{11(a+b+c)+3}{2}=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow P_{\max} \le \dfrac{\sqrt{10}}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{9}$

* GTNN

Ta có $a + b + c = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 0 < 3(a + b + c) = 1 \Rightarrow 0 < 3a \le 1$

Suy ra $3a(3a - 1) \le 0 \Leftrightarrow 3a \ge 9a^2 \Rightarrow \sqrt{3a^2 + 3a} \ge \sqrt{3a^2 + 9a^2} = \sqrt{12a^2}$

Khi đó $\sqrt{3a^2 + 3a} + \sqrt{3b^2 + 3b} + \sqrt{3c^2 + 3c} \ge \sqrt{12a^2} + \sqrt{12b^2} + \sqrt{12c^2} = \sqrt{12}(a + b + c) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow P_{\min} = \dfrac{2}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $(a;b;c) = (1;0;0)$ và các hoán vị

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 (LẦN 4)

Năm học: 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 21/5/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{11\sqrt{x}+6}{x-4}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{3}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0; x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$. 2) Chứng minh $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Đặt $P=A:B$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $|P+1|<3P$.

Lời giải

1) Thay $x=25$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\frac{1-\sqrt{25}}{\sqrt{25}-2}=\frac{1-5}{5-2}=-4$

Vậy với $x=25$ thì $A=-4$

2) $B=\frac{11\sqrt{x}+6}{x-4}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{3}{\sqrt{x}-2}=\frac{11\sqrt{x}+6+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-3\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\frac{11\sqrt{x}+6+2x-4\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2x+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=A:B=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}:\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow P+1=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+1=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}>0\ \forall\ x>0;\ x\neq 4\Rightarrow |P+1|=P+1$

Theo đề bài $|P+1|<3P\Rightarrow P+1<3P\Leftrightarrow P>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1>0\Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}>0\Rightarrow 1-2\sqrt{x}>0$ (do $\sqrt{x}>0$)

$\Rightarrow \sqrt{x}<\frac{1}{2}\Rightarrow x<\frac{1}{4}$. Kết hợp ĐKXĐ ta có $0<x<\frac{1}{4}$

Vậy $0<x<\frac{1}{4}$ thoả mãn đề bài

Bài II (2,5 điểm). 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Để tham dự đại hội liên đội trường Lương Thế Vinh, bạn Thu phải đi xe đạp từ cơ sở A sang cơ sở I trên quãng đường dài 6 km. Khi từ cơ sở I trở về cơ sở A, bạn vẫn đi theo con đường cũ nhưng đã tăng vận tốc thêm 3 km / h. Biết rằng tổng thời gian đạp xe cả khi đi và khi về của bạn là 54 phút. Tính vận tốc của bạn Thu khi đi từ cơ sở A sang cơ sở I.

2) Một bồn nước hình trụ được làm bằng i-nox có chiều cao $1,5m$ và diện tích đáy là $3,14\,m^2$ đang chứa một lượng nước bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của bồn. Bác An muốn xả hết nước đi để cọ sạch bồn nên đã mở vòi nước ở đáy bồn cho nước chảy ra. Nếu mỗi giờ vòi chảy được $3m$ nước thì sau 30 phút bồn cạn hết nước chưa? (bỏ qua bề dày của bồn).

Lời giải

1) Gọi vận tốc của Thu khi đi từ cơ sở A sang cơ sở I là x (km/h) $(x>0)$

Thời gian Thu đi từ cơ sở A đến cơ sở I là $\frac{6}{x}$ (giờ)

Vận tốc khi Thu đi từ cơ sở I về cơ sở A là $x+3$ (km/h)

Thời gian Thu đi từ cơ sở I về cơ sở A là $\frac{6}{x+3}$ (giờ)

Tổng thời gian Thu đi từ cơ sở A đến cơ sở I rồi quay về là 54 phút $=\frac{9}{10}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+3}=\frac{9}{10}$$

Giải phương trình trên tìm được $x=12$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc của Thu đi từ cơ sở A sang cơ sở I là $12\,km/h$

2) Thể tích bồn nước hình trụ là $V=S.h=3,14.1,5=4,71\left(m^3\right)$

Thể tích nước trong bồn là $\frac{1}{3}.4,71=1,57\left(m^3\right)$

Thời gian để bồn xả hết nước là $1,57:3\approx 0,52$ (giờ) $\approx 31,4$ phút >30 phút

Vậy sau 30 phút xả thì bồn chưa cạn hết nước

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x-5}}-\frac{3}{y+1}=-\frac{1}{4}\\ \frac{8}{\sqrt{x-5}}+\frac{9}{y+1}=\frac{7}{2}\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=5x+3m-1$.

a) Khi $m=-1$, tìm tọa độ giao diểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên dương.

Lời giải

1) Điều kiện: $x>5$; $y\neq -1$

Đặt $a=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ $(a>0)$; $b=\frac{1}{y+1}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}a-3b=-\frac{1}{4}\\ 8a+9b=\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{6}\end{cases}$ (tm)

Khi đó $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-5}=4\\ y+1=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-5=16\\ y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=21\\ y=5\end{cases}$ (thoả mãn)

2a) Với $m=-1 \Rightarrow (d): y=5x-4$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$$x^2=5x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\Rightarrow y=16\\ x=1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$$

Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $(4;16)$ và $(1;1)$

2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=5x+3m-1 \Leftrightarrow x^2-5x-3m+1=0$

$\Delta=(-5)^2-4(-3m+1)=12m+21$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=5\\ x_1x_2=-3m+1\end{cases}$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}21+12m>0\\ 5>0\\ -3m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-\dfrac{7}{4}\\ m<\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}<m<\dfrac{1}{3}$$

Do $\begin{cases}x_1+x_2=5\\ x_1;x_2\in\mathbb{Z}^+\end{cases} \Rightarrow x_1;x_2\in\{1;2;3;4\}$

Ta có bảng sau

x_1	1	2	3	4
x_2	4	3	2	1
$-3m+1=x_1x_2$	4	6	6	4
m	-1 (thoả mãn)	$-\dfrac{5}{3}$ (thoả mãn)	$-\dfrac{5}{3}$ (thoả mãn)	-1 (thoả mãn)

Vậy $m\in\left\{-1;-\dfrac{5}{3}\right\}$

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B,C; $MB<MC$). Gọi D,E,F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống các đường thẳng BC,CA,AB.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $MDBF, MDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{MDF}=\widehat{ACM}$, từ đó suy ra F,D,E thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Gọi P,Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N xuống các đường thẳng AB,BC. Chứng minh PQ vuông góc với EF.

Lời giải

a) Ta có $MD \perp BC$; $ME \perp AC$; $MF \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{MFB} = \widehat{MEC} = \widehat{MDC} = 90°$

Xét tứ giác $MDBF$ có $\widehat{MDB} + \widehat{MFB} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow MDBF$ là tứ giác nội tiếp

Xét tứ giác $MDEC$ có

$\widehat{MDC} = \widehat{MEC} = 90°$

Mà hai đỉnh D, E kề nhau cùng nhìn cạnh MC

$\Rightarrow MDEC$ là tứ giác nội tiếp

b) Vì $MDBF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MDF} = \widehat{MBF}$

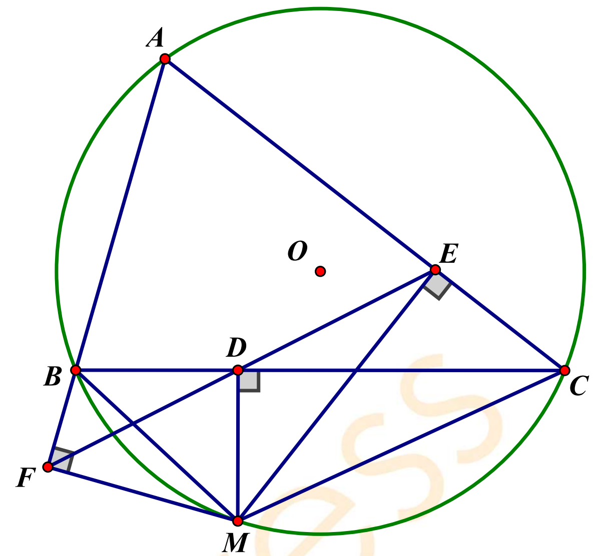
Lại có $\widehat{ACM} = \widehat{MBF}$ (Tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{ACM}$

$MDEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MCE} + \widehat{MDE} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MDF} + \widehat{MDE} = 180°$

Suy ra F, D, E thẳng hàng.



c) Ta có $NP \perp AB$; $NQ \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{NPB} = \widehat{NQB} = 90°$

Xét tứ giác $NPBQ$ có $\widehat{NPB} + \widehat{NQB} = 180°$

$\Rightarrow NPBQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQN} = \widehat{PBN}$ (1)

Lại có $\widehat{NBM} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{PBN} = 180° - \widehat{NBM} - \widehat{MBF} = 180° - 90° - \widehat{MBF}$

$= 90° - \widehat{MBF} = \widehat{FMB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PQN} = \widehat{PBN} = \widehat{FMB}$

Ta có $MDBF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FMB} = \widehat{FDB}$

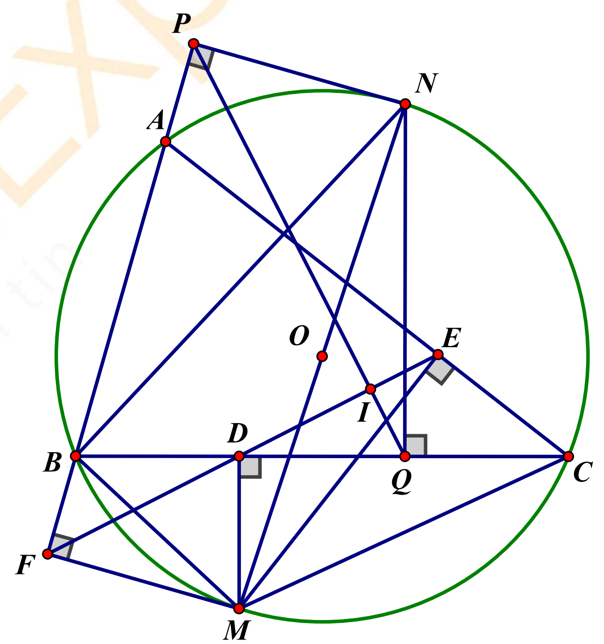
Mà $\widehat{FDB} = \widehat{EDQ}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{PQN} = \widehat{EDQ}$

Gọi I là giao điểm của EF với PQ

Ta có $\widehat{IDQ} + \widehat{IQD} = \widehat{EDQ} + \widehat{IQD} = \widehat{PQN} + \widehat{IQD} = \widehat{BQN} = 90°$

$\Rightarrow PQ \perp EF$ tại I



Bài V (0,5 điểm). Với a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \text{ và } a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwartza có

$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2 + 1 - 3 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 6 - 3 = 3$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ta có $a^3 + a \geq 2a^2$; $b^3 + b \geq 2b^2$; $c^3 + c \geq 2c^2$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+(a+b+c)\geq 2(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3\geq (a^2+b^2+c^2)+3$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3\geq a^2+b^2+c^2$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

------------------------------ HẾT ------------------------------