UBND QUẬN CẦU GIẤY
TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: .../2/2023
Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $1+3\sqrt{x}=4x+\sqrt{2+x}$.

2) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a\left(a^2+b+c\right)=b\left(b^2+c+a\right)=c\left(c^2+a+b\right)=1$. Chứng minh: Trong 3 số a,b,c có ít nhất 2 số bằng nhau.

Câu II. (2,5 điểm)

1) Giả sử a,b là các số nguyên dương để $a+2b, b+2a$ đều là số chính phương. Chứng minh $7a^2+8ab+9b^2$ chia hết cho 9.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để 5^n-1 có thể viết thành dạng tích của một số chẵn các số nguyên liên tiếp.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên thỏa mãn $P(2021)\cdot P(2022)=2023$. Hỏi đa thức $P(x)$ có nghiệm nguyên hay không?

2) Với a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $0\le a,b,c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+b+c}{abc+1}+\sqrt[3]{abc}$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn không cân $(AB<AC)$ các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Lấy các điểm P,Q trên BE,CF sao cho $EFPQ$ là hình bình bình hành có giao 2 đường chéo là H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DPQ cắt lại BE,CF lần lượt tại $K,L\left(K\ne P, L\ne Q\right)$ đường thẳng AD cắt EF tại I, gọi M là trung điểm của AC.

a. Chứng minh: $\dfrac{HI}{HD}=\dfrac{FI}{FD}$ và 4 điểm D,M,E,F nằm trên một đường tròn.

b. Gọi G là giao điểm của PQ với AD, N là giao điểm của DM với HC. Chứng minh: $KL \parallel BC$ và các tam giác PDG, LDN. đồng dạng.

c. Chứng minh: M,K,L thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm) Trong 100 số lẻ đầu tiên 1,3,5,7,9,...,199 hãy tìm số tự nhiên k. bé nhất sao cho khi chọn k số tùy ý trong số 100 số trên bao giờ cũng có 2 số mà một trong 2 số đó là bội của số còn lại.

------------------------------- HẾT -------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ

Câu I. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $1+3\sqrt{x}=4x+\sqrt{2+x}$.

2) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a\left(a^2+b+c\right)=b\left(b^2+c+a\right)=c\left(c^2+a+b\right)=1$. Chứng minh: Trong 3 số a,b,c có ít nhất 2 số bằng nhau.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\ge 0$, phương trình tương đương với $(1-4x)+3\sqrt{x}-\sqrt{2+x}=0$

Hay $(1-4x)\left(1-\dfrac{2}{3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}}\right)=0$.

TH1: $4x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (TMĐK)

TH2: $1-\dfrac{2}{3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}}\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=2\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+2x}=1-5x$

$$\begin{cases} x\le \dfrac{1}{5} \\ 16x^2-28x+1=0 \end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{8}$$

Kết hợp với ĐKXĐ: tập nghiệm phương trình là $S=\left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right\}$

2) Với các số thục a,b và c là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$a\left(a^2+b+c\right)=b\left(b^2+c+a\right)=c\left(c^2+a+b\right)=1$. Chúng minh: Trong 3 số a,b,c có ít nhất 2 số bằng nhau.

Giả sử trong 3 số a,b,c không có 2 số nào bằng nhau. Từ giả thiết ta suy ra

$a\left(a^2+b+c\right)-b\left(b^2+c+a\right)=0\Rightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+c\right)=0$ mà $a\ne b$ nên $a^2+ab+b^2+c=0$ (1)

Tương tự ta cũng có: $b^2+bc+c^2+a=0(2)$

Lấy (1)-(2) ta được: $a^2-c^2+ab-bc+c-a=0$

$\Rightarrow (a-c)(a+b+c-1)=0\Rightarrow a+b+c=1$

Thay $a+b=1-c$ vào $c\left(c^2+a+b\right)=1$ ta có:

$c\left(c^2+1-c\right)=1\Rightarrow c^3-c^2+c-1=0\Rightarrow (c-1)\left(c^2+1\right)=0\Rightarrow c=1$ nên $a+b=0\Rightarrow a=-b$ thay trở lại ta có: $a\left(a^2-a+1\right)=b\left(b^2-b+1\right)=1\Rightarrow a=b=1$.

Vậy điều giả sử ban đầu sai suy ra trong 3 số a,b,c có ít nhất 2 số bằng nhau.

Câu II. (2,5 điểm)

1) Giả sử a,b là các số nguyên dương để $a+2b,b+2a$ đều là số chính phương. Chứng minh $7a^2+8ab+9b^2$ chia hết cho 9.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để 5^n-1 có thể viết thành dạng tích của một số chẵn các số nguyên liên tiếp.

Lời giải

1) Đặt $a+2b=m^2, 2a+b=n^2$ suy ra $3(a+b)=m^2+n^2$ suy ra $m^2+n^2 \vdots 3$.

Vì một sô chính phương khi chia cho 3 chỉ có thê dư 0 hoặc 1 . Suy ra m,n đêu phải chia hết cho 3

Suy ra $3(a+b)=m^2+n^2 \vdots 9$ suy ra $a+b \vdots 3$ ta cũng có: $a-b=n^2-m^2 \vdots 3$.

Để ý rằng: $m^2=a+2b=a+b+b \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3$, tương tự $a \vdots 3$ vậy: $7a^2+8ab+9b^2 \vdots 9$.

2) Với n nguyên dương thì $5^n-1>0$ và không chia hết cho 5 nên 5^n-1 không thể viết thành tích của nhiều hơn 5 số nguyên liên tiếp (vì tích của nhiều hơn 5 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 5)

TH1: $5^n-1=m(m+1)$ với $m \in Z$ hay $5^n=m(m+1)+1$. Ta có vế trái chia hết cho 5 , còn vế phải không chia hết cho 5 với $m \in \{5k;5k+1;5k+2;5k+3;5k+4\},(k \in Z, k \geq 1)$

TH 2: $5^n-1=m(m+1)(m+2)(m+3)$ hay

$5^n=m(m+1)(m+2)(m+3)+1 \Rightarrow 5^n=(m^2+3m)(m^2+3m+2)+1$

$=(m^2+3m+1)^2$ do đó n chẵn và m^2+3m+1 là lũy thừa của 5 hay $m^2+3m+1=5^k, k=\frac{n}{2}$. Từ đó tính được: $m=\frac{-3 \pm \sqrt{5(1+4.5^{k-1})}}{2}$ suy ra $5(1+4.5^{k-1})$ phải là số chính phương.

Nếu $k>1$ thì $5(1+4.5^{k-1})$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không thế là số chính phương.

Nếu $k=1$ thì $m=1, n=2$ khi đó ta có: $5^2-1=1.2.3.4$

Kết luận: $n=2$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên thỏa mãn $P(2021) \cdot P(2022)=2023$. Hỏi đa thức $P(x)$ có nghiệm nguyên hay không?

2) Với a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $0 \leq a,b,c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a+b+c}{abc+1}+\sqrt[3]{abc}$.

Lời giải

1) Giả sử $P(x)$ có nghiệm nguyên $x=\alpha$ suy ra $P(x)=(x-\alpha) \cdot Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên

Ta có $P(2021)=(2021-\alpha) \cdot Q(2021), P(2022)=(2022-\alpha) \cdot Q(2022)$ dẫn đến

$P(2021) \cdot P(2022)=(2021-\alpha)(2022-\alpha) \cdot Q(2021) \cdot Q(2022)$

Vì $(2021-\alpha)(2022-\alpha)$ là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên $(2021-\alpha)(2022-\alpha) \vdots 2$ dẫn đến

$P(2021) \cdot P(2022)=(2021-\alpha)(2022-\alpha) \cdot Q(2021) \cdot Q(2022) \vdots 2$

Theo giả thiết: $P(2021).P(2022)=2023 \,/\!\!\!\vdots\, 2$. Vậy điều giả sứ sai, suy ra $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

2) Từ giả thiết ta có: $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow a+b\le ab+1 \Rightarrow a+b-ab\le 1$, mặt khác $(ab-1)(c-1)\ge 0 \Rightarrow ab+c\le abc+1$ cộng 2 bất đẳng thức cùng chiều ta có: $a+b+c\le abc+2$.

Từ đó ta có: $P\le \dfrac{abc+2}{abc+1}+\sqrt[3]{abc}$. Đặt $t=\sqrt[3]{abc}\Rightarrow 0\le t\le 1$, ta chứng minh:

$\dfrac{t^3+2}{t^3+1}+t\le \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (1-t)(2t^3-t^2-t+1)\ge 0$

Chú ý rằng: $1-t\ge 0$ và $2t^3-t^2-t+1=t^3+(t-1)^2(t+1)\ge 0$ nên $(1-t)(2t^3-t^2-t+1)\ge 0$ đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $a=b=c=1$. Vậy GTLN của P bằng 1 tại $a=b=c=1$

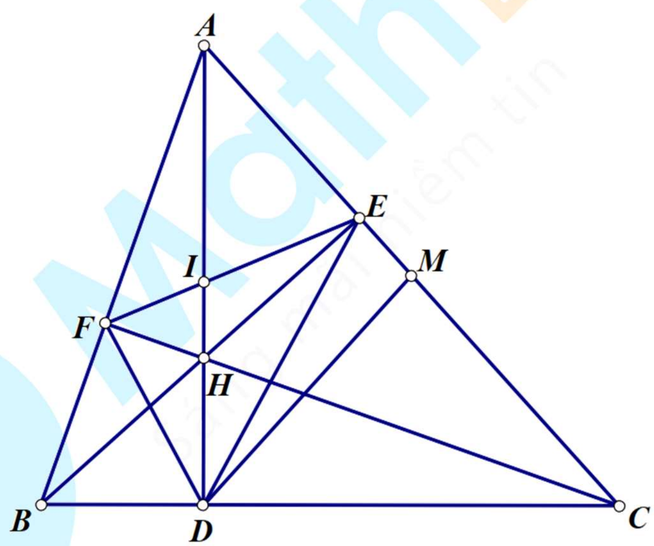
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn không cân $(AB<AC)$ các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Lấy các điểm P,Q trên BE,CF sao cho $EFPQ$ là hình bình bình hành có giao 2 đường chéo là H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DPQ cắt lại BE,CF lần lượt tại $K,L\,(K\ne P, L\ne Q)$ đường thẳng AD cắt EF tại I, gọi M là trung điểm của AC.

a. Chứng minh: $\dfrac{HI}{HD}=\dfrac{FI}{FD}$ và 4 điểm D,M,E,F nằm trên một đường tròn.

b. Gọi G là giao điểm của PQ với AD,N là giao điểm của DM với HC. Chứng minh: $KL\parallel BC$ và các tam giác PDG,LDN. đồng dạng.

c. Chứng minh: M,K,L thẳng hàng.

Lời giải

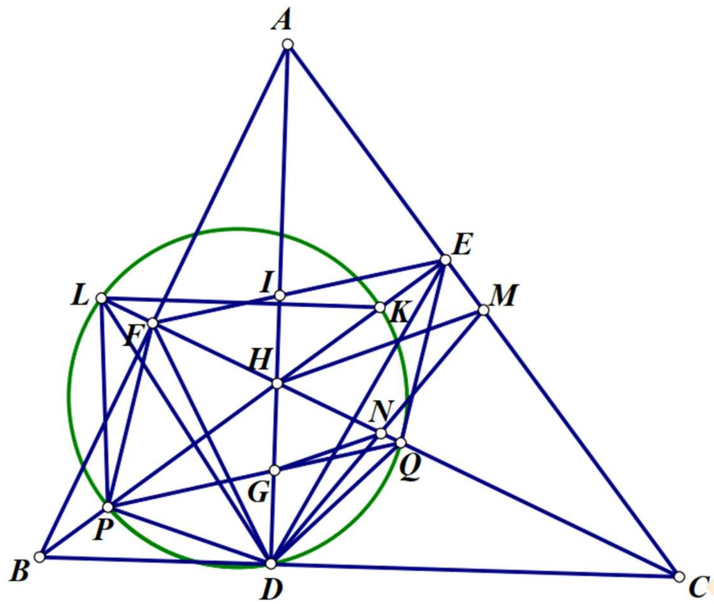


a) Chứng minh: $BFEC$ nội tiếp để suy ra $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$, tương tự $AFDC$ nội tiếp nên $\widehat{BFD}=\widehat{ACB}$ từ đó suy ra $\widehat{DFC}=\widehat{EFC}$ nên FC là tia phân giác của $\widehat{EFD}$. Theo tính chất phân giác ta có: $\dfrac{IH}{DH}=\dfrac{FI}{FD}$.

Từ chứng minh ở trên ta có:

$\widehat{DFE}=2\widehat{CFE}=2\widehat{EBC}=2\left(90^\circ-\widehat{ACB}\right)=180^\circ-2\widehat{ACB}=180^\circ-\widehat{AMD}$

suy ra $\widehat{DFE}+\widehat{EMD}=180^\circ$ hay $DMEF$ nội tiếp.



b) Vì $PQKL$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KLQ} = \widehat{KPQ}$, mặt khác $EFPQ$ là hình bình hành nên $\widehat{QPE} = \widehat{PEF}$ (2 góc so le trong),

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{PEF} = \widehat{BEF} = \widehat{BCF}$.

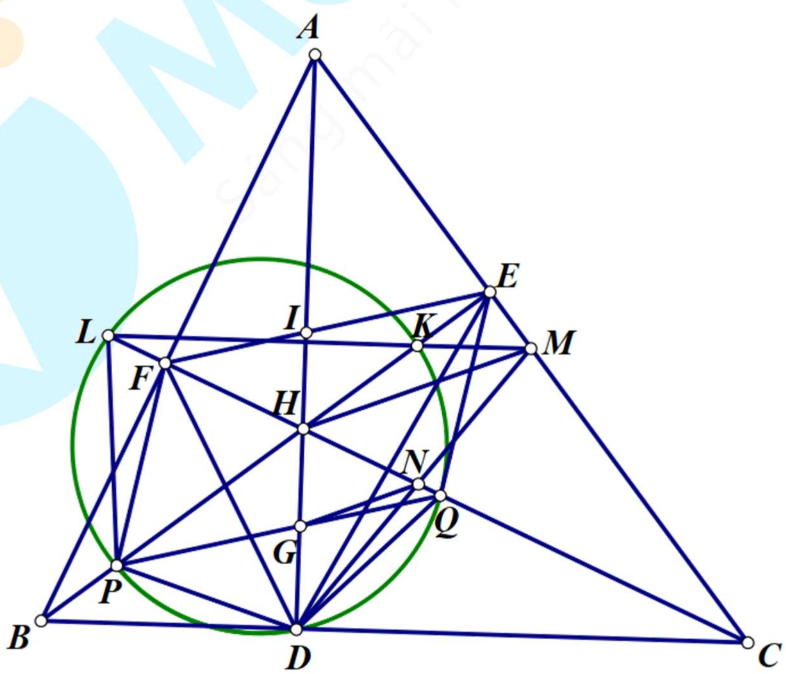
Từ đó ta có: $\widehat{KLQ} = \widehat{BCF}$ suy ra $KL // BC$.

Ta có $\widehat{PDH} = \widehat{PDL} + \widehat{LDH} = \widehat{PKL} + \widehat{LDH}$ mà $KL // BC$ và $MA = MD = MC$ nên

$\widehat{PKL} = \widehat{KBC} = \widehat{DAC} = \widehat{MDA}$ dẫn đến

$\widehat{PDH} = \widehat{MDA} + \widehat{LDH} = \widehat{LDM}$

Ta có: $\widehat{DPG} = \widehat{DPQ} = \widehat{DLQ} = \widehat{DLN}, \widehat{PDH} = \widehat{LDN}$ nên $\Delta PDG \backsim \Delta LDN$ (g.g).



c) Ta có: $EFDM$ nội tiếp nên $\widehat{DFE}=\widehat{DMC}$, ngoài ra ta cũng có: $\widehat{FDA}=\widehat{FCA}$ nên $\Delta DFI \backsim \Delta CMN$ (g.g)

dẫn đến $\dfrac{DF}{CM}=\dfrac{FI}{MN}$ hay $\dfrac{DF}{FI}=\dfrac{CM}{MN}$

Thay $CM=DM, \dfrac{DF}{FI}=\dfrac{HD}{HI}$ ta có: $\dfrac{HD}{HI}=\dfrac{DM}{MN}$ hay $\dfrac{DH}{DM}=\dfrac{HI}{MN}$,

Ta có: $HI=HG$ thay vào ta được: $\dfrac{DH}{DM}=\dfrac{HG}{MN}$ hay $\dfrac{DH}{HG}=\dfrac{DM}{MN}$ suy ra $GN // HM$.

Vì $\dfrac{DH}{DM}=\dfrac{DG}{DN}=\dfrac{PD}{LD}$ suy ra $\Delta PDH \backsim \Delta LDM$ (c.g.c) suy ra $\widehat{DLM}=\widehat{DPH}=\widehat{DPK}=\widehat{DLK}$ hay L,K,M thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm) Trong 100 số lẻ đầu tiên 1,3,5,7,9,...,199 hãy tìm số tự nhiên k. bé nhất sao cho khi chọn k số tùy ý trong số 100 số trên bao giờ cũng có 2 số mà một trong 2 số đó là bội của số còn lại.

Lời giải

Biểu diễn các số đã cho thành dạng: $m.3^n$ với m,n là các số tự nhiên $n \ge 0$, m không chia hết cho 3 và $1 \le m \le 199$

Ta thấy trong 100 số lẻ trên có đúng 33 số chia hết cho 3 nên m chỉ nhận 1 trong 67 giá trị khác nhau.

Theo nguyên lý Dirichlet nếu ta chọn ra 68 số trong 100 số lẻ trên thì chắc chắn có ít nhất 2 số nhận cùng 1 giá trị m là $m\cdot 3^p, m\cdot 3^q$ suy ra số lớn sẽ chia hết cho số bé.

Bây giờ ta chứng minh: $k=68$ là nhỏ nhất. Thật vậy ta chỉ cần chọn 67 sô lẻ từ 67 đến 199 . Nếu như có 2 số a,b mà a chia hết cho b thì $a \ge 3b$ vì a,b đều là số lẻ. Nên $201=3.67 \le 3b \le a \le 199$ điều này vô lý. Vậy $k=68$ là giá trị bé nhất.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------