

## MỘT SỐ CÂU HỎI ĐIỂM 10 TRONG BÀI THI CUỐI HỌC KỲ II LỚP 6

### Câu 1 (Quận Hai Bà Trưng năm 2022 – 2023).

Với  $n$  là một số nguyên dương,  $n$  **giai thừa** là tích của  $n$  số nguyên dương đầu tiên, kí hiệu là " $n!$ ". Ví dụ  $4! = 1.2.3.4$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2023!} < 1$ .

### Câu 2 (Trường liên cấp tiểu học – THCS Ngôi sao Hà Nội năm 2022 – 2023).

Cho phân số  $A = \frac{2n-3}{n+7}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên  $n$  nhỏ hơn 200 để  $A$  chưa tối giản.

### Câu 3 (Phòng GD & ĐT Quốc Oai năm 2022 – 2023).

Tìm phân số nhỏ nhất có tử và mẫu là số nguyên dương sao cho khi chia nó cho các phân số  $\frac{28}{15}$ ;  $\frac{21}{10}$ ;  $\frac{49}{84}$  ta đều được thương là các số tự nhiên.

### Câu 4 (Trường THCS & THPT Lương Thế Vinh năm 2022 – 2023).

Hãy chứng tỏ rằng  $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}$  không phải là số tự nhiên.

### Câu 5 (Quận Tây Hồ năm 2022 – 2023).

Tính  $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023}}{\frac{2022}{1} + \frac{2021}{2} + \frac{2020}{3} + \dots + \frac{1}{2022}}$ .

### Câu 6 (Trường liên cấp Tiểu học – THCS Ngôi sao Hà Nội năm 2022 – 2023).

Tìm số tự nhiên  $n$  biết:  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+n} = \frac{200}{101}$ .

### Câu 7 (Trường THCS Ngọc Lâm năm 2022 – 2023).

Cho  $A = \frac{12}{(2.4)^2} + \frac{20}{(4.6)^2} + \dots + \frac{388}{(96.98)^2} + \frac{396}{(98.100)^2}$ . Hãy so sánh  $A$  với  $\frac{1}{4}$ .

### Câu 8 (Trường THCS Nguyễn Trường Tộ năm 2022 – 2023).

Cho biểu thức  $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{49.50}$ . Chứng minh rằng  $A < 1$ .

### Câu 9 (Quận Bắc Từ Liêm năm 2022 – 2023).

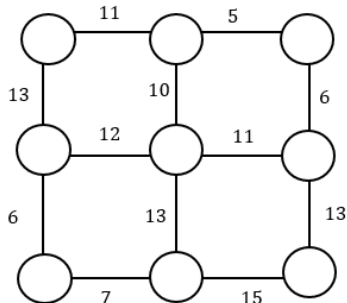
Cho  $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{19}$ . Hãy chứng tỏ rằng  $B > 1$ .

**Câu 10 (Trường THCS Phúc Đồng năm 2022 – 2023).**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2022}{2023}$ .

**Câu 11 (Trường THCS Giảng Võ năm học 2022 – 2023).**

Học sinh vẽ lại hình dưới đây vào bài làm và điền các số 1; 2; 3; ...; 9 vào trong các vòng tròn ở hình bên dưới (mỗi số chỉ dùng 1 lần) sao cho tổng các số tại hai đầu của mỗi đoạn thẳng bằng với số được viết trên đoạn thẳng đó. (Không cần giải thích các điền các số).

**Câu 12 (Trường THCS Ba Đình năm học 2022 – 2023).**

Chứng minh  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{529} < \frac{22}{23}$ .

**Câu 13 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2022 – 2023).**

Tính tỉ số  $\frac{A}{B}$  biết:

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57} \quad \text{và} \quad B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}.$$

**Câu 14 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2022 – 2023).**

Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho biểu thức  $A = \frac{2n}{n-1} - \frac{2}{1-n}$  có giá trị là số nguyên.

**Câu 15 (Trường THCS Nam Trung Yên năm học 2021 – 2022).**

Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  biết  $(x-1).(y+2) = 11$ .

**Câu 16 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2020 – 2021).**

Tính tỉ số  $\frac{A}{B}$  biết:

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57} \quad \text{và} \quad B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}.$$

**Câu 17 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2019 – 2020).**

Cho  $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{160^2}$ . Chứng minh  $\frac{1}{8} < A < \frac{3}{16}$ .

**Câu 18 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2018 – 2019).**

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$ .

**Câu 19 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2018 – 2019).**

Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho biểu thức  $A = \frac{2n}{n-1} - \frac{2}{1-n}$  có giá trị là số nguyên.

**Câu 20 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2017 – 2018).**

Cho  $A = \frac{13}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \frac{19}{45} + \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950}$ .

Chứng minh  $A > \frac{9}{10}$ .



## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

### Câu 1 (Quận Hai Bà Trưng năm 2022 – 2023).

Với  $n$  là một số nguyên dương,  $n$  giai thừa là tích của  $n$  số nguyên dương đầu tiên, kí hiệu là “ $n!$ ”. Ví dụ  $4! = 1.2.3.4$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2023!} < 1$ .

#### Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{1}{5!} < \frac{1}{4.5}$$

.....

$$\frac{1}{2023!} < \frac{1}{2022.2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2023!} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$$

$$\text{Hay } A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$$

$$\Leftrightarrow A < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$\Leftrightarrow A < 1 - \frac{1}{2023} < 1$$

### Câu 2 (Trường liên cấp Tiểu học – THCS Ngôi sao Hà Nội năm 2022 – 2023).

Cho phân số  $A = \frac{2n-3}{n+7}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên  $n$  nhỏ hơn 200 để  $A$  chưa tối giản.

#### Lời giải

Gọi ƯC  $(2n-3, n+7) = d$  ( $d \in \mathbb{Z}^*$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n-3:d \\ n+7:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n-3:d \\ 2(n+7):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n-3:d \\ 2n+14:d \end{cases} \Rightarrow (2n+14) - (2n-3):d \Rightarrow 17:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 17\}$$

Để  $A$  là phân số chưa tối giản thì  $d = \pm 17$

$$\Rightarrow n+7:17 \Rightarrow n = 17k + 10 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì  $n$  là số tự nhiên nhỏ hơn 200 nên  $0 \leq 17k + 10 < 200 \Rightarrow k \in \{0; 1; \dots; 11\}$

Vậy có tất cả 12 giá trị của  $n$  nhỏ hơn 200 thì  $A$  là phân số chưa tối giản.

### Câu 3 (Phòng GD & ĐT Quốc Oai năm 2022 – 2023).

Tìm phân số nhỏ nhất có tử và mẫu là số nguyên dương sao cho khi chia nó cho các phân số

$$\frac{28}{15}; \frac{21}{10}; \frac{49}{84} \text{ ta đều được thương là các số tự nhiên.}$$

#### Lời giải

Gọi phân số cần tìm là  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ;  $(a, b) = 1$

Theo bài ra  $\frac{a}{b}$  chia các phân số  $\frac{28}{15}$ ;  $\frac{21}{10}$ ;  $\frac{49}{84} = \frac{7}{12}$  đều được thương là các số tự nhiên nên:

$$a:28; a:21; a:7 \Rightarrow a \in BC(28, 21, 7) \text{ và } 15:b; 10:b; 12:b \Rightarrow b \in UC(15, 10, 12)$$

Ta có:

$$28 = 2^2 \cdot 7; 21 = 3 \cdot 7; 7 = 7 \Rightarrow BCNN(28, 21, 7) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \Rightarrow a = 84$$

$$15 = 3 \cdot 5; 10 = 2 \cdot 5; 12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow UCLN(15, 10, 12) = 1 \Rightarrow b = 1$$

Mà  $\frac{a}{b}$  nhỏ nhất nên  $\frac{a}{b} = \frac{84}{1}$ .

#### Câu 4 (Trường THCS & THPT Lương Thế Vinh năm 2022 – 2023).

Hãy chứng tỏ rằng  $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}$  không phải là số tự nhiên.

**Lời giải**

Ta có:  $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}\right)$$

$$< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{15}$$

$$< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) < 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3$$

Tương tự:  $T = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17}$

$$> 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2 < T < 3$$

Vậy T không là số tự nhiên.

#### Câu 5 (Quận Tây Hồ năm 2022 – 2023).

Tính  $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023}}{\frac{2022}{1} + \frac{2021}{2} + \frac{2020}{3} + \dots + \frac{1}{2022}}$ .

**Lời giải**

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023}}{\frac{2022}{1} + \frac{2021}{2} + \frac{2020}{3} + \dots + \frac{1}{2022}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{2022}{1} + \frac{2021}{2} + \frac{2020}{3} + \dots + \frac{1}{2022} \\ &= \left(1 + \frac{2021}{2}\right) + \left(1 + \frac{2020}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2022}\right) + 1 \\ &= \frac{2023}{2} + \frac{2023}{3} + \dots + \frac{2023}{2022} + \frac{2023}{2023} \\ &= 2023 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023}\right) \end{aligned}$$

Vậy  $A = \frac{1}{2023}$ .

### Câu 6 (Trường liên cấp Tiểu học – THCS Ngôi sao Hà Nội năm 2022 – 2023).

Tìm số tự nhiên  $n$  biết:  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+n} = \frac{200}{101}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Suy ra:  $1+2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2}$ ;  $1+2+3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$

$1+2+3+4 = \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2}$ ; ...;  $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = 1 + \frac{1}{\frac{2 \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3 \cdot 4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n \cdot (n+1)} = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right)$$

$$= 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{2}{2} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

Lại có:  $\frac{200}{101} = \frac{2 \cdot 100}{100+1}$

Vậy  $n = 100$ .

**Câu 7 (Trường THCS Ngọc Lâm năm 2022 – 2023).**

Cho  $A = \frac{12}{(2.4)^2} + \frac{20}{(4.6)^2} + \dots + \frac{388}{(96.98)^2} + \frac{396}{(98.100)^2}$ . Hãy so sánh A với  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{12}{(2.4)^2} = \frac{4^2 - 2^2}{2^2 \cdot 4^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}$$

$$\frac{20}{(4.6)^2} = \frac{6^2 - 4^2}{4^2 \cdot 6^2} = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2}$$

.....

$$\text{Suy ra } A = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{98^2} - \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{100^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{4}.$$

**Câu 8 (Trường THCS Nguyễn Trường Tộ năm 2022 – 2023).**

Cho biểu thức  $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{49.50}$ . Chứng minh rằng  $A < 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{49.50}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25}\right)$$

$$A = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} < \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \dots + \frac{1}{26} = \frac{25}{26} < 1.$$

**Câu 9 (Quận Bắc Từ Liêm năm 2022 – 2023).**

Cho  $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{19}$ . Hãy chứng tỏ rằng  $B > 1$ .

**Lời giải**

$$B = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{19}$$

$$B = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19}\right)$$

$$B > \frac{1}{4} + \frac{5}{9} + \frac{10}{19} > \frac{1}{4} + \frac{5}{10} + \frac{10}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 1 > 1$$

Vậy  $B > 1$  (đpcm).

**Câu 10 (Trường THCS Phúc Đồng năm 2022 – 2023).**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2022}{2023}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2022}{2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2022}{2023}$$

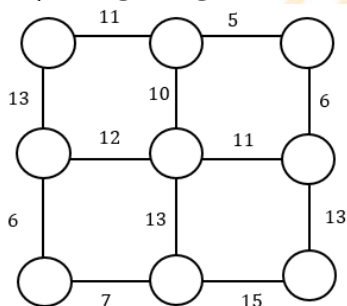
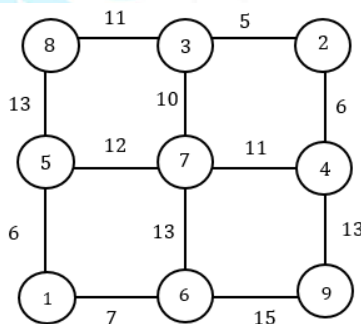
$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{2022}{2023} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{2022}{2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2023} \Rightarrow x+1 = 2023 \Rightarrow x = 2022$$

Vậy  $x = 2022$ .

**Câu 11 (Trường THCS Giảng Võ năm học 2022 – 2023).**

Học sinh vẽ lại hình dưới đây vào bài làm và điền các số 1; 2; 3; ...; 9 vào trong các vòng tròn ở hình bên dưới (mỗi số chỉ dùng 1 lần) sao cho tổng các số tại hai đầu của mỗi đoạn thẳng bằng với số được viết trên đoạn thẳng đó. (Không cần giải thích các điền các số).

**Lời giải**



**Câu 12 (Trường THCS Ba Đình năm học 2022 – 2023).**

Chứng minh  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{529} < \frac{22}{23}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{529} &= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{23.23} \\ &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{22.23} \\ &< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{22} - \frac{1}{23} \\ &< 1 - \frac{1}{23} = \frac{22}{23}. \end{aligned}$$

**Câu 13 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2022 – 2023).**

Cho 2 số  $A = \frac{1+2+2^2+\dots+2^{2023}}{1+2+2^2+\dots+2^{2022}}$  và  $B = \frac{1+3+3^2+\dots+3^{2023}}{1+3+3^2+\dots+3^{2022}}$ .

Chứng minh rằng  $A < B$ .

**Lời giải****Xét biểu thức A:**

+) Phần tử số:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } C &= 1+2+2^2+\dots+2^{2023} \Rightarrow 2C = 2+2^2+2^3+\dots+2^{2024} \\ \Rightarrow 2C - C &= (2+2^2+2^3+\dots+2^{2024}) - (1+2+2^2+\dots+2^{2023}) \\ \Rightarrow C &= 2^{2024} - 1 \end{aligned}$$

+) Phần mẫu số:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } D &= 1+2+2^2+\dots+2^{2022} \Rightarrow 2D = 2+2^2+2^3+\dots+2^{2023} \\ \Rightarrow D &= 2D - D = (2+2^2+2^3+\dots+2^{2023}) - (1+2+2^2+\dots+2^{2022}) = 2^{2023} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{C}{D} = \frac{2^{2024} - 1}{2^{2023} - 1}.$$

**Xét biểu thức B:**

+) Phần tử số:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } E &= 1+3+3^2+\dots+3^{2023} \Rightarrow 3E = 3+3^2+3^3+\dots+3^{2024} \\ \Rightarrow 3E - E &= (3+3^2+3^3+\dots+3^{2024}) - (1+3+3^2+\dots+3^{2023}) \\ \Rightarrow 2E &= 3^{2024} - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \frac{3^{2024} - 1}{2}$$

+) Phần mẫu số:

$$\text{Đặt } F = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2022} \Rightarrow 3F = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2023}$$

$$\Rightarrow 3F - F = (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2023}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2022})$$

$$\Rightarrow 2F = 3^{2023} - 1$$

$$\Rightarrow F = \frac{3^{2023} - 1}{2}$$

$$\text{Do đó } B = \frac{E}{F} = \frac{3^{2024} - 1}{3^{2023} - 1}.$$

$$\text{Xét } A - 1 = \frac{2^{2024} - 1}{2^{2023} - 1} - 1 = \frac{2^{2024} - 2^{2023}}{2^{2023} - 1} = \frac{2^{2023}}{2^{2023} - 1} = 1 + \frac{1}{2^{2023} - 1} < 2$$

$$B - 1 = \frac{3^{2024} - 1}{3^{2023} - 1} - 1 = \frac{3^{2024} - 3^{2023}}{3^{2023} - 1} = \frac{2 \cdot 3^{2023}}{3^{2023} - 1} > 2$$

$$\Rightarrow A - 1 < B - 1 \Rightarrow A < B$$

Vậy  $A < B$ .

#### Câu 14 (Trường THCS Lê Ngọc Hân năm học 2021 - 2022).

Tìm các số nguyên  $n$  để biểu thức sau có giá trị là số nguyên:

$$A = \frac{2n-1}{3-n}.$$

**Lời giải**

Đk:  $n \neq 3$

$$A = \frac{2n-1}{3-n} = -\frac{2n-1}{n-3} = -\frac{2n-6+5}{n-3} = -\left(2 + \frac{5}{n-3}\right)$$

Để  $A$  mang giá trị nguyên thì  $(n-3) \in U(5)$ .

$$\Rightarrow (n-3) \in \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-2; 2; 4; 8\}.$$

#### Câu 15 (Trường THCS Nam Trung Yên năm học 2021 - 2022).

Tìm  $x; y \in \mathbb{Z}$  biết  $(x-1) \cdot (y+2) = 11$ .

**Lời giải**

$x - 1$	-11	-1	1	11
$x$	-10	0	2	12
$y + 2$	-1	-11	11	1
$y$	-3	-13	9	-1

Vậy  $(x; y) \in \{(-10; -3); (0; -13); (2; 9); (12; -1)\}$

**Câu 16 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2020 – 2021).**

Tính tỉ số  $\frac{A}{B}$  biết:

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57} \quad \text{và} \quad B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}.$$

**Lời giải**

Ta có:

$$* A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}.$$

$$\frac{1}{5}A = \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57}.$$

$$\frac{1}{5}A = \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{57}.$$

$$\frac{1}{5}A = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \Rightarrow A = 5 \cdot \left( \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)$$

$$* B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}.$$

$$\frac{1}{2}B = \frac{7}{38.31} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{46.43} + \frac{11}{46.57}.$$

$$\frac{1}{2}B = \frac{1}{31} - \frac{1}{38} + \frac{1}{38} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{46} + \frac{1}{46} - \frac{1}{57}.$$

$$\frac{1}{2}B = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \Rightarrow B = 2 \cdot \left( \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)$$

$$\text{Do đó } \frac{A}{B} = \frac{5 \cdot \left( \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)}{2 \cdot \left( \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{5}{2}.$$

**Câu 17 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2019 – 2020).**

Cho  $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{160^2}$ . Chứng minh  $\frac{1}{8} < A < \frac{3}{16}$ .

**Lời giải**

$$A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{160^2} = \frac{1}{2^2} \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{80^2} \right)$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{80^2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}B$$

Ta có:

$$B > \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{80.81}$$

$$\Rightarrow B > \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{80} - \frac{1}{81}$$

$$\Rightarrow B > \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81}$$

$$\Rightarrow B > \frac{7}{12} - \frac{1}{81} > \frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow \frac{1}{8} < A < \frac{3}{16}.$$

Lại có:

$$B < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{79.80}$$

$$\Rightarrow B < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{79} - \frac{1}{80}$$

$$\Rightarrow B < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{80} = \frac{3}{4} - \frac{1}{80} < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \quad (2)$$

**Câu 18 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2018 – 2019).**

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{37}{50} < \frac{3}{4}$$

$$\text{Nên } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4} \quad (\text{đpcm}).$$

**Câu 19 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2018 – 2019).**

Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho biểu thức  $A = \frac{2n}{n-1} - \frac{2}{1-n}$  có giá trị là số nguyên.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{2n}{n-1} - \frac{2}{1-n} = \frac{2n+2}{n-1} = \frac{2(n-1)+4}{n-1} = 2 + \frac{4}{n-1}$$

$$\text{Để } A \text{ có giá trị nguyên thì } \frac{4}{n-1} \text{ có giá trị nguyên} \Rightarrow 4 : n-1 \Rightarrow n-1 \in U(4)$$

$$\Rightarrow n-1 \in \{-4; -1; 1; 4\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 2; 5\}$$

Thay các giá trị của  $n$  vào  $A$  thấy đều thỏa mãn

$$\text{Vậy } n \in \{-3; 0; 2; 5\} \text{ thì } A = \frac{2n}{n-1} - \frac{2}{1-n} \text{ có giá trị là số nguyên.}$$

**Câu 20 (Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam năm 2017 – 2018).**

$$\text{Cho } A = \frac{13}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \frac{19}{45} + \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950}.$$

Chứng minh  $A > \frac{9}{10}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{38}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \frac{19}{45} + \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950} \\ &= \frac{38}{25} + 2 \cdot \left( \frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \frac{13}{42} - \frac{15}{56} + \frac{17}{72} - \frac{19}{90} + \dots + \frac{197}{9702} - \frac{199}{9900} \right) \\ &= \frac{38}{25} + 2 \cdot \left( \frac{9}{4.5} - \frac{11}{5.6} + \frac{13}{6.7} - \frac{15}{7.8} + \dots + \frac{197}{98.99} - \frac{199}{99.100} \right) \\ &= \frac{38}{25} + 2 \cdot \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{38}{25} + 2 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{100} \right) = \frac{38}{25} + 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{38}{25} + \frac{12}{25} = \frac{50}{25} = 2 > \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Vậy  $A > \frac{9}{10}$ .

