MỘT SỐ CÂU HỎI ĐIỂM 10 TRONG BÀI THI CUỐI HỌC KỲ II LỚP 7

Bài 1. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2022 – 2023)

Cho ba số thực x, y, z khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}$.

Bài 2. (Trường THCS Giảng Võ – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ có $2a$, $a+b$ và c là các số nguyên. Chứng minh $f(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x.

Bài 3. (Trường THCS Lê Ngọc Hân – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $(x-1).f(2x-1)=4xf(x)$ với mọi giá trị thực của x. Chứng minh đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Bài 4. (Trường THCS Hoàng Hoa Thám – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $A(x)=2ax^3+3bx-5cx+4d$ với các hệ số a, b, c, d là các số nguyên. Chứng tỏ không thể đồng thời tồn tại $A(5)=42$ và $A(-7)=67$

Bài 5. (Trường THCS Cầu Giấy – Hà Nội năm 2022 – 2023)

a) Chứng minh đa thức $p(x)$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, biết $xp(x+1)=(x-2)p(x)$.

b) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $n+4$ và $2n+7$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n+69$ chia hết cho 24.

Bài 6. (Trường THCS Nhật Tân – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$.

Bài 7. (Trường THCS Trưng Vương – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho 2022 số nguyên bất kì. Chứng minh luôn có thể chọn ra được một cặp số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 4040.

Bài 8. (Trường THCS Quốc Oai – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $P(x)=x^{2023}-2024.x^{2022}+2024.x^{2021}-2024.x^{2020}+\ldots+2024.x-1$.

Tính $P(2023)$.

Bài 9. (Phòng GD & ĐT Quận Tây Hồ năm 2022 – 2023)

Tìm nghiệm của đa thức $G(x)=x^2+5x+5$.

Bài 10. (HKII - Sở GD & ĐT Bắc Ninh năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $F(x)=ax^2+bx+c$ với a là số nguyên dương và $F(5)-F(4)=2023$. Chứng minh rằng $F(9)-F(2)$ là hợp số

Bài 11. (Đề thi Olympic phòng GD & ĐT Thanh Oai năm 2022 – 2023)
Tìm số tự nhiên m,n sao cho 2^n+3^m+4 là số chính phương

Bài 12. (Đề giao lưu HSG Phòng GD&ĐT Quận Hà Đông – Hà Nội năm 2022 – 2023)
Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$ thì tổng:
$S=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{n^2-1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Bài 13. (Đề giao lưu HSG Phòng GD&ĐT Huyện Thanh Hà – Hải Dương năm 2022 – 2023)
Cho $x;y;z$ không âm thoả mãn $x+3z=2022$ và $x+2y=2023$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Bài 14. (HKII – Phòng GD & ĐT Nam Định năm 2022 – 2023)
Cho $a=2^{2023}-2^{2022}-2^{2021}-...-2-1$. Tính giá trị biểu thức $M=\frac{a^{2023}+2022}{2023^a-2022}$.

Bài 15. (Đề thi HSG Phòng GD & ĐT Hương Khê – Hà Tĩnh năm 2022 – 2023)
a) Cho x, y, z thỏa mãn: $3x=2y; 5y=4z$. Tính: $P=\frac{2x+3y+4z}{3x+4y-5z}$.

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

Bài 16. (Đề thi HSG Phòng GD & ĐT Thọ Xuân – Thanh Hoá năm 2022 – 2023)
Chứng minh rằng: $\frac{1}{65}<\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+...+\frac{1}{2023^3}<\frac{1}{40}$

Bài 17. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2021 – 2022)
Cho đa thức $f(x)=ax+b$. Biết $|f(1)|\le 1$, $|f(-1)|\le 1$.
Chứng minh rằng $|f(2)|\le 2$.

Bài 18. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2020 – 2021)
Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn
$$\frac{9}{xy}-\frac{1}{y}=2+\frac{3}{x}.$$

Bài 19. (Đề thi Olympic Phòng GD &ĐT Quốc Oai năm 2020 – 2021)
Tìm tất cả các số $\overline{abc}$ có ba chữ số khác nhau sao cho $3a+5b=8c$.

Bài 20. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2019 – 2020)
Viết số 2020 thành tổng của các số tự nhiên liên tiếp. Hỏi có thể viết được bao nhiêu cách?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2022 – 2023)

Cho ba số thực x, y, z khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0 \Rightarrow yz+xz+xy=0.$

Do đó:

$$P=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}$$

$$P=\frac{yz}{x^2+yz-xy-xz}+\frac{zx}{y^2+zx-xy-yz}+\frac{xy}{z^2+xy-yz-xz}$$

$$P=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}-\frac{xz}{(y-z)(x-y)}+\frac{xy}{(x-z)(y-z)}$$

$$P=\frac{yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y)}{(x-y)(y-z)(x-z)}$$

$$P=\frac{yz(y-z)-x^2z+xz^2+x^2y-xy^2}{(x-y)(y-z)(x-z)}$$

$$P=\frac{yz(y-z)+x^2(y-z)-x(y^2-z^2)}{(x-y)(y-z)(x-z)}$$

$$P=\frac{yz(y-z)+x^2(y-z)-x(y^2-yz+yz-z^2)}{(x-y)(y-z)(x-z)}$$

$$P=\frac{yz(y-z)+x^2(y-z)-x(y-z)(y+z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}$$

$$P=\frac{(y-z)(yz+x^2-xy-xz)}{(x-y)(y-z)(x-z)}$$

$$P=\frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=1$$

Vậy $P=1$.

Bài 2. (Trường THCS Giảng Võ – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ có $2a$, $a+b$ và c là các số nguyên. Chứng minh $f(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x.

Lời giải

Ta có $2f(x)=2ax^2+2(a+b)x+2c-2ax$

Nhận thấy $2f(x)$ là một số nguyên chẵn với mọi x nguyên và $2a$, $a+b$, c là các số nguyên

Suy ra $f(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x.

Bài 3. (Trường THCS Lê Ngọc Hân – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $(x-1).f(2x-1)=4xf(x)$ với mọi giá trị thực của x. Chứng minh đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải

Thay $x=1$ vào $(x-1).f(2x-1)=4xf(x)$ ta có

$(1-1).f(2.1-1)=4.1.f(1)\Rightarrow 0=4f(1)\Rightarrow f(1)=0$

Vậy $x=1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$

Thay $x=0$ vào $(x-1).f(2x-1)=4xf(x)$ ta có

$(0-1).f(2.0-1)=4.0.f(0)\Rightarrow -f(-1)=0\Rightarrow f(-1)=0$

Vậy $x=-1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$

Suy ra $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là $x=1$ và $x=-1$

Bài 4. (Trường THCS Hoàng Hoa Thám – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $A(x)=2ax^3+3bx^2-5cx+4d$ với các hệ số a, b, c, d là các số nguyên. Chứng tỏ không thể đồng thời tồn tại $A(5)=42$ và $A(-7)=67$

Lời giải

$A(5)=2a.5^3+3b.5^2-5c.5+4d=250a+75b-25c+4d=42$

$\Rightarrow 75b-25c$ là số chẵn $\Rightarrow b$ và c cùng tính chẵn lẻ

$A(-7)=2a(-7)^3+3b.(-7)^2-5c.(-7)+4d=-686a+147b+35c+4d=-67$

$\Rightarrow 147b+35c$ là số lẻ $\Rightarrow b$ và c khác tính chẵn lẻ

Suy ra mâu thuẫn

Vậy $A(5)=42$ và $A(-7)=67$ không đồng thời tồn tại.

Bài 5. (Trường THCS Cầu Giấy – Hà Nội năm 2022 – 2023)

a) Chứng minh đa thức $p(x)$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, biết $xp(x+1)=(x-2)p(x)$.

b) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $n+4$ và $2n+7$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n+69$ chia hết cho 24.

Lời giải

a) Xét $x=0\Rightarrow 0.p(0+1)=(0-2).p(0)\Rightarrow -2p(0)=0\Rightarrow p(0)=0$

$\Rightarrow x=0$ là một nghiệm của $p(x)$

Xét $x=2\Rightarrow 2.p(2+1)=(2-2).p(2)\Rightarrow 2p(3)=0\Rightarrow p(3)=0$

$\Rightarrow x=3$ là một nghiệm của $p(x)$

Vậy đa thức $p(x)$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

b) Đặt $n+4=a^2$; $2n+7=b^2$ với $a, b\in\mathbb{N}$.

Có $2n+7$ lẻ nên $b^2=2n+7$ là số chính phương lẻ

Do đó $2(n+3)=b^2-1\equiv 0\ (\text{mod } 8)\Rightarrow n+3$ chẵn $\Rightarrow n$ lẻ

$\Rightarrow a^2=n+4$ là số chính phương lẻ $\Rightarrow n+3=a^2-1 \vdots 8$

Mặt khác $a^2+b^2=3n+11\equiv 2\ (\text{mod } 3)\Rightarrow a^2\equiv b^2\equiv 1\ (\text{mod } 3)$

$\Rightarrow b^2-a^2=n+3\equiv 0\ (\text{mod } 3)\Rightarrow n+3\vdots 3$

Từ đó suy ra $n+3\vdots 24\Rightarrow 2023n+69=2016n+48+7(n+3)\vdots 24$.

Bài 6. (Trường THCS Nhật Tân – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{b+c-a}{a}=\dfrac{c+a-b}{b}$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)$.

Lời giải:

Vì a, b, c là các số thực dương nên $a+b+c>0$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

Khi đó: $\begin{cases}\dfrac{a+b-c}{c}=1\\ \dfrac{b+c-a}{a}=1\\ \dfrac{c+a-b}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2c\\ b+c=2a\\ c+a=2b\end{cases}\Rightarrow a=b=c$

Suy ra: $M=\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)=\left(1+\dfrac{b}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{c}\right)=2.2.2=8$

Vậy $M=8$.

Bài 7. (Trường THCS Trưng Vương – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho 2022 số nguyên bất kì. Chứng minh luôn có thể chọn ra được một cặp số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 4040.

Lời giải:

Lấy một số chia cho 4040 sẽ có 4040 trường hợp về số dư: 0; 1; 2; 3;...; 4038; 4039

Chia các số dư này thành các nhóm như sau: $\{0\}$, $\{1;\ 4039\}$, $\{2;\ 4038\}$, $\{3;\ 4037\}$,...., $\{2020\}$

Khi đó ta có tất cả 2021 nhóm

Ta lấy 2022 số nguyên bất kì đem chia cho 4040, các số dư sẽ được phân vào các nhóm đó

Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất 1 nhóm có từ 2 số trở lên, ta giả sử đó là nhóm $\{2;\ 4038\}$

Nếu hai số đó chia cho 4040 có cùng số dư là 2 hoặc 4038, suy ra hiệu của hai số đó chia hết cho 4040 (đpcm).

Nếu hai số đó chia cho 4040 khác số dư, khi đó một số dư 2 và một số dư 4028, suy ra tổng của hai số đó chia hết cho 4040 (đpcm).

Bài 8. (Trường THCS Quốc Oai – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $P(x)=x^{2023}-2024.x^{2022}+2024.x^{2021}-2024.x^{2020}+...+2024.x-1$.

Tính $P(2023)$.

Lời giải:

Với $x=2023 \Rightarrow 2024=x+1$

Ta có: $P(2023)=x^{2023}-(x+1).x^{2022}+(x+1).x^{2021}-(x+1).x^{2020}+...+(x+1).x-1$

$$P(2023)=x^{2023}-x^{2023}-x^{2022}+x^{2022}+x^{2021}-x^{2021}-x^{2020}+....+x^2+x-1$$

$$P(2023)=x-1=2023-1=2022$$

Vậy $P(2023)=2022$.

Bài 9. (Phòng GD & ĐT Quận Tây Hồ năm 2022 – 2023)

Tìm nghiệm của đa thức $G(x)=x^2+5x+5$.

Lời giải:

$$G(x)=x^2+5x+5=x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{5}{4}=x\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

Xét $G(x)=0 \Rightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}=\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2=\left(-\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$

Trường hợp 1: $x+\frac{5}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{5}-5}{2}$

Trường hợp 2: $x+\frac{5}{2}=-\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{\sqrt{5}+5}{2}$

Vậy nghiệm của đa thức G(x) là: $x\in\left\{\frac{\sqrt{5}-5}{2};-\frac{\sqrt{5}+5}{2}\right\}$

Bài 10. (HKII - Sở GD & ĐT Bắc Ninh năm 2022 – 2023)

Cho đa thức $F(x)=ax^2+bx+c$ với a là số nguyên dương và $F(5)-F(4)=2023$. Chứng minh rằng $F(9)-F(2)$ là hợp số

Lời giải

Xét đa thức $F(x)=ax^2+bx+c$, ta có

$F(5)=25a+5b+c$, $F(4)=16a+4b+c$

$\Rightarrow F(5)-F(4)=9a+b$

Mà $F(5)-F(4)=2023 \Rightarrow 9a+b=2023$

Lại có $F(9)=81a+9b+c, F(2)=4a+2b+c$

$\Rightarrow F(9)-F(2)=77a+7b$

$\Rightarrow F(9)-F(2)=7(9a+b)+14a=7.2023+14a$

$\Rightarrow F(9)-F(2)=7(2023+2a)\vdots 7$ (do $7\vdots 7, 2023+2a\in\mathbb{N}^*$ với a nguyên dương)

mà $F(9)-F(2)>7$ (do $2023+2a>2023$ với a nguyên dương)

Do đó $F(9)-F(2)$ là hợp số.

Bài 11. (Đề thi Olympic phòng GD & ĐT Thanh Oai năm 2022 – 2023)

Tìm số tự nhiên $\mathrm{m,n}$ sao cho 2^n+3^m+4 là số chính phương

Lời giải

Đặt $\mathrm{A}=2^n+3^m+4$. Xét các trường hợp sau:

TH 1: $\mathrm{n}=0$ thì $A=3^m+5$

Nếu $\mathrm{m}=0$: loại

Nếu $\mathrm{m}\ge 1$ thì $A=3^m+5$ chia 3 dư 2: A không phải số chính phương: loại

TH2: $\mathrm{n}=1$ thì $A=3^m+6$

Nếu $\mathrm{m}=0$: loại

Nếu $\mathrm{m}=1$ thì $A=3^m+6=9$: thỏa mãn

Nếu $m\ge 2$; giả sử 3^m+6 là số chính phương thì $3^m+6=x^2$, suy ra x chia hết cho 3 nên x^2 chia hết cho 9 mà VT không chia hết cho 9: vô lý, loại

TH3: $n=2$ xét tương tự TH1 tìm được $m=0$

TH4: $\mathrm{n}\ge 3$ thì $2^n+4\vdots 4$,

Nếu m lẻ: chứng minh được 3^m chia 4 dư 3 nên A chia 4 dư 3: A không là số chính phương (loại).

Nếu m chẵn: đặt $\mathrm{m}=2\mathrm{p}$ thì $A=2^n+9^p+4$, chứng minh A chia 8 dư 5, nên A không là số chính phương

Vậy $(m;n)\in\{(1;1);(0;2)\}$

Bài 12. (Đề giao lưu HSG Phòng GD&ĐT Quận Hà Đông – Hà Nội năm 2022 – 2023)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$ thì tổng:

$S=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Lời giải

$$S=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$S=\frac{2^2-1}{2^2}+\frac{3^2-1}{3^2}+\frac{16-1}{4^2}+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$S=1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+1-\frac{1}{4^2}+\ldots+1-\frac{1}{n^2}$$

$$S=n-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$

Xét $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1)n}$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$$

Vì $n\geq 2\Rightarrow 0<A<1$

Suy ra S không là số nguyên với mọi $n\geq 2$

Bài 13. (Đề giao lưu HSG Phòng GD&ĐT Huyện Thanh Hà – Hải Dương năm 2022 – 2023)

Cho $x;y;z$ không âm thoả mãn $x+3z=2022$ và $x+2y=2023$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Lời giải

Ta có: $x+3z+x+2y=2022+2023\Rightarrow 2(x+y+z)+z=4045$

Vì $z\geq 0\Rightarrow 2(x+y+z)\leq 4045$

Suy ra $P\leq \frac{4045}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $z=0; x=2022; y=\frac{1}{2}$.

Bài 14. (HKII – Phòng GD & ĐT Nam Định năm 2022 – 2023)

Cho $a=2^{2023}-2^{2022}-2^{2021}-...-2-1$. Tính giá trị biểu thức $M=\frac{a^{2023}+2022}{2023^a-2022}$.

Lời giải

$a=2^{2023}-2^{2022}-2^{2021}-...-2-1.$

$2a=2^{2024}-2^{2023}-2^{2022}-...-2^2-2$

$\Rightarrow 2a-a=\left(2^{2024}-2^{2023}-2^{2022}-...-4-2\right)-\left(2^{2023}-2^{2022}-2^{2021}-...-2-1\right)$

$\Rightarrow a=2^{2024}-2.2^{2023}+1=1$

$M=\frac{1^{2023}+2022}{2023^1-2022}=\frac{1+2022}{2023-2022}=2023$

Bài 15. (Đề thi HSG Phòng GD & ĐT Hương Khê – Hà Tĩnh năm 2022 – 2023)

a) Cho x, y, z thỏa mãn: $3x=2y; 5y=4z$. Tính: $P=\frac{2x+3y+4z}{3x+4y-5z}$.

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

a) Ta có $3x=2y; 5y=4z\Rightarrow \frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{15}=\frac{2x+3y+4z}{8.2+12.3+15.4}=\frac{3x+4y-5z}{8.3+12.4-15.5}\Rightarrow\frac{2x+3y+4z}{112}=\frac{3x+4y-5z}{-3}$$

$P=\dfrac{2x+3y+4z}{3x+4y-5z}=-\dfrac{112}{3}$

b) a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có :

$a+b>c \Rightarrow c(a+b)>c^2 \Leftrightarrow ca+bc>c^2$.

Tương tự : $ab+ac>a^2$; $ba+bc>b^2$

Do đó: $ca+bc+ab+ac+ba+bc>c^2+a^2+b^2$

Hay: $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

Bài 16. (Đề thi HSG Phòng GD & ĐT Thọ Xuân – Thanh Hoá năm 2022 – 2023)

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{65}<\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{1}{7^3}+\ldots+\dfrac{1}{2023^3}<\dfrac{1}{40}$

Lời giải

Đặt $A=\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{1}{7^3}+\ldots+\dfrac{1}{2023^3}$

*) Với $n>1$, ta có $0<(n-1)n(n+1)=n^3-n<n^3 \Rightarrow \dfrac{1}{n^3}<\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$

Do đó: $A=\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{1}{7^3}+\ldots+\dfrac{1}{2023^3}<\dfrac{1}{4.5.6}+\dfrac{1}{5.6.7}+\ldots+\dfrac{1}{2022.2023.2024}=B$

Ta có $\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$ nên

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots+\frac{1}{2022.2023.2024}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\ldots+\frac{1}{2022.2023}-\frac{1}{2023.2024}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{2023.2024}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4.5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2023.2024}\\&=\frac{1}{40}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2023.2024}<\frac{1}{40}\end{aligned}$$

Vậy $A<B<\dfrac{1}{40}$

*) Với $n>1$, ta có $\dfrac{1}{n^3}>\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Do đó: $A>\dfrac{1}{5.6.7}+\dfrac{1}{6.7.8}+\dfrac{1}{2023.2024.2025}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\frac{1}{6.7}-\frac{1}{7.8}+\ldots+\frac{1}{2022.2023}-\frac{1}{2023.2024}+\frac{1}{2023.2024}-\frac{1}{2024.2025}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{2024.2025}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5.6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2024.2025}$$

$$=\frac{1}{60}-\frac{1}{2.2024.2025}>\frac{1}{60}-\frac{1}{780}=\frac{13-1}{780}=\frac{1}{65}$$

Vậy $A>\frac{1}{65}$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 17. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2021 – 2022)

Cho đa thức $f(x)=ax+b$. Biết $|f(1)|\le 1$, $|f(-1)|\le 1$.

Chứng minh rằng $|f(2)|\le 2$.

Lời giải

Ta có $f(1)=a+b$; $f(-1)=-a+b$

$\Rightarrow 2a=f(1)-f(-1)$; $2b=f(1)+f(-1)$

Thay vào $f(x)$ ta được $f(x)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}x+\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

$$\Rightarrow f(x)=f(1).\frac{x+1}{2}+f(-1).\frac{1-x}{2}$$

Khi đó ta có

$$|f(x)|\le\left|f(1).\frac{x+1}{2}\right|+\left|f(-1).\frac{1-x}{2}\right|$$

$$=|f(1)|.\left|\frac{x+1}{2}\right|+|f(-1)|.\left|\frac{1-x}{2}\right|$$

$$\le\left|\frac{x+1}{2}\right|+\left|\frac{1-x}{2}\right|$$

Suy ra $|f(2)|\le\left|\dfrac{2+1}{2}\right|+\left|\dfrac{1-2}{2}\right|=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$

Dấu "=" xảy ra khi $-1\le x\le 1$

Vậy $|f(2)|\le 2$

Bài 18. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2020 – 2021)

Tìm tất cả các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\dfrac{9}{xy}-\dfrac{1}{y}=2+\dfrac{3}{x}$.

Lời giải

$$\frac{9}{xy}-\frac{1}{y}=2+\frac{3}{x}\Rightarrow 2xy+3y+x=9\Rightarrow y(2x+3)+x=9\Rightarrow 2y(2x+3)+2x+3=21\Rightarrow(2x+3)(2y+1)=21$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $2x+3;\ 2y+1 \in Ư(21) = \{1;3;7;21\}$

Ta có bảng sau

$2x+3$	1	3	7	21
$2y+1$	21	7	3	1
x	-1	0	2	9
y	10	3	1	0
	Loại	Loại	Thoả mãn	Loại

Vậy $(x;y)=(2;1)$

Bài 19. (Đề thi Olympic Phòng GD &ĐT Quốc Oai năm 2020 – 2021)

Tìm tất cả các số $\overline{abc}$ có ba chữ số khác nhau sao cho $3a+5b=8c$.

Lời giải

Từ $3a+5b=8c \Rightarrow 3a-3b+8b=8c \Rightarrow 3(a-b)=8c-8b$

Hay $3(a-b)=8(c-b) \Rightarrow 3(a-b)\vdots 8$ mà $(3,8)=1$ nên $a-b\vdots 8$

Do $0<a\le 9; 0\le b\le 9 \Rightarrow -9\le a-b\le 9$; $a-b\ne 0$

$\Rightarrow a-b\in\{-8;8\}$

Nếu $a-b=-8 \Rightarrow a=1; b=9 \Rightarrow 8c=3.1+5.9=48 \Rightarrow c=6$

Nếu $a-b=8 \Rightarrow a=8$; $b=0$ hoặc $a=9$; $b=1$

+) $a=8$; $b=0 \Rightarrow 8c=8.3+0=48 \Rightarrow c=3$

+) $a=9$; $b=1 \Rightarrow 8c=9.3+5.1=32 \Rightarrow c=4$

Vậy: Các số $\overline{abc}$ cần tìm là 196 ; 803 ; 914.

Bài 20. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2019 – 2020)

Viết số 2020 thành tổng của các số tự nhiên liên tiếp. Hỏi có thể viết được bao nhiêu cách?

Lời giải

Giả sử $2020=k+k+1+k+2+...+k+n$ (với k và n là các số tự nhiên)

Theo công thức tính tổng dãy số cách đều ta có

$$2020=\frac{(2k+n)(n+1)}{2} \Rightarrow (2k+n)(n+1)=4040$$

$\Rightarrow 2k+n$ và $n+1\in Ư(4040)=\{1;2;4;5;8;10;20;40;101;202;404;505;808;1010;2020;4040\}$

Nhận xét: $2k+n>n+1$. Ta có bảng sau

$n+1$	1	2	4	5	8	10	20	40
$2k+n$	4040	2020	1010	808	505	404	202	101
n	0	1	3	4	7	9	19	39
k	2020	$\frac{2019}{2}$	$\frac{1007}{2}$	402	249	$\frac{395}{2}$	$\frac{183}{2}$	31
	Loại	Loại	Loại	T/m	T/m	Loại	Loại	T/m

Vậy có 3 cách để viết 2020 thành tổng của các số tự nhiên liên tiếp.