MỘT SỐ CÂU HỎI ĐIỂM 10 TRONG BÀI THI CUỐI HỌC KỲ II LỚP 8

Bài 1. (HK2 – THCS Phúc Đồng – Hà Nội 2022- 2023)

Cho hai số thực $x,\ y$ là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge \frac{2}{1+xy}$.

Bài 2. (HK2 – THCS Hoàng Hoa Thám – Hà Nội 2022- 2023)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$.

Chứng minh $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$.

Bài 3. (HK2 – THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm – Hà Nội 2022- 2023)

Cho $a,\,b>0$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c.$

Bài 4. (HK2 – THCS Amsterdam - Hà Nội 2022 – 2023)

Xét các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b=4-c$ và $a+3b=3+c$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+2b+3c.$

Bài 5. (HK2 – THCS Giảng Võ – Hà Nội 2022- 2023)

Cho a,b,c là ba số dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$\frac{a}{9b^2+1}+\frac{b}{9c^2+1}+\frac{c}{9a^2+1}\ge \frac{1}{2}$.

Bài 6. (HK2 – THCS Đông Xuân – Sóc Sơn 2022- 2023)

Giải phương trình sau: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2=72$.

Bài 7. (HK2 – Sở GD&ĐT Bắc Giang 2022- 2023)

Cho $x>1; y>1$ và $x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5(2x+y)+4\left(\frac{8}{x-1}+\frac{3}{y-1}\right)$.

Bài 8. (HK2 – THCS Bát Tràng – Hải Phòng 2022- 2023)

a) Cho $a,b\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $(a+b)\ge 4ab$

b) Cho hai số dương a,b có $a+b=1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}.$$

Bài 9. (HK2 – Phòng GD & ĐT Hoàng Mai – Nghệ An 2022- 2023)

Cho 3 số dương a, b, c thoả mãn abc = 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1.$$

Bài 10. (HK2 – THCS Kim Ngọc – Vĩnh Phúc 2022- 2023)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện :

$a+b+c+ab+bc+ca=6abc$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$.

Bài 11. (HK2 – THCS Thạch Hà – Hà Tĩnh 2022- 2023)

Cho các số a, b dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\ge\frac{4}{3}$.

Bài 12. (HK2 – THCS Cầu Diễn – Hà Nội 2021- 2022)

Cho $x>1$; $y>1$ và $x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=3x+4y+\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{9}{y-1}$.

Câu 13. (HK2 – Quận Tây Hồ - Hà Nội 2021- 2022)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Bài 14. (HK2 – Trường THCS Giảng Võ – Hà Nội 2021-2022)

Cho hai số a,b thoả mãn $a+b\neq 0$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+\left(\dfrac{ab+1}{a+b}\right)^2\geq 2$.

Bài 15. (HK2 – Trường THCS Nguyễn Du – Hà Nội 2021-2022).

Cho $x\geq 1; y\geq 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\geq\dfrac{2}{1+xy}$.

Bài 16. (HK2 – Trường THCS Nghĩa Tân – Hà Nội 2021-2022).

Cho phương trình $m=\dfrac{2x+1}{x-m}$ với m là tham số.

Tìm các số nguyên m để phương trình có nghiệm duy nhất là số nguyên.

Bài 17. (HK2 – Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam – Hà Nội 2021-2022).

Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=2022$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+bc-ca$.

Bài 18. (HK2 – Trường THCS&THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội 2021-2022)

Cho các số dương x, y, z Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\geq x+y+z$.

Bài 19. (HK2 – Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh 2021-2022)

Giải phương trình $|x-1|+|x-2|+|x-3|=-x^2+4x-2$.

Bài 20. (HK2 – Phòng Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh 2021-2022)

Cho $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (HK2 – THCS Phúc Đồng – Hà Nội 2022- 2023)

Cho hai số thực x, y là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy}$ (1)

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+xy)(1+y^2)}\geq 0$ (2)

Vì $x\geq 1;\ y\geq 2\Rightarrow xy\geq 1\Rightarrow xy-1\geq 0$

Suy ra bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) đúng.
Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Bài 2. (HK2 – THCS Hoàng Hoa Thám – Hà Nội 2022- 2023)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$.

Chứng minh $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3$.

Lời giải:

Theo bài ra: $a+b+c+ab+bc+ca=6abc\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=6$

Ta có: $3.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-1\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2$

$+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-3$

$\Rightarrow 3.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-3=2.6-3=9$

$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3\ (dpcm)$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 3. (HK2 – THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm – Hà Nội 2022 - 2023)

Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$.

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức Co-si, ta có: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2a;\ \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2c;\ \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\geq 2a$

$\Rightarrow 2\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\right)\ge 2(a+b+c)\ (dpcm)$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 4. (HK2 – THCS Amsterdam - Hà Nội 2022 – 2023)

Xét các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b=4-c$ và $a+3b=3+c$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+2b+3c$.

Lời giải

Từ $\begin{cases}a+b=4-c\\a+3b=3+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4-a-b\\2a+4b=7\end{cases}$.

Ta có $P=a+2b+3c=a+2b+3(4-a-b)=-2a-b+12=-7+4b-b+12=5+3b$.

Vì $b\ge 0$ nên $P\ge 5$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=0\Rightarrow a=\dfrac{7}{2};\ c=\dfrac{1}{2}$.

Lại có $2a+4b=7\Leftrightarrow 4b\le 7\Leftrightarrow b\le\dfrac{7}{4}\Rightarrow P=5+3b\le 5+3.\dfrac{7}{4}=\dfrac{41}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=\dfrac{7}{4}\Rightarrow a=0;\ c=\dfrac{9}{4}$.

Vậy GTNN của $P=5$ khi $a=\dfrac{7}{2};\ b=0;\ c=\dfrac{1}{2}$.

GTLN của $P=\dfrac{41}{4}$ khi $a=0;\ b=\dfrac{7}{4};\ c=\dfrac{9}{4}$.

Bài 5. (HK2 – THCS Giảng Võ – Hà Nội 2022- 2023)

Cho a,b,c là ba số dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{9b^2+1}+\frac{b}{9c^2+1}+\frac{c}{9a^2+1}\ge\frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có $\dfrac{a}{9b^2+1}=\dfrac{a(9b^2+1)-9ab^2}{9b^2+1}=a-\dfrac{9ab^2}{9b^2+1}$

Vì $a,b,c>0$, Áp dụng BĐT Cô si ta có

$9b^2+1\ge 6b\Rightarrow\dfrac{9ab^2}{9b^2+1}\le\dfrac{9ab^2}{6b}=\dfrac{3ab}{2}\Rightarrow\dfrac{a}{9b^2+1}=a-\dfrac{9ab^2}{9b^2+1}\ge a-\dfrac{3ab}{2}$

Tương tự $\dfrac{b}{9c^2+1}\ge b-\dfrac{3bc}{2}$ và $\dfrac{c}{9a^2+1}\ge c-\dfrac{3ca}{2}$

Cộng ba vế ta được $\dfrac{a}{9b^2+1}+\dfrac{b}{9c^2+1}+\dfrac{c}{9a^2+1}\ge(a+b+c)-\dfrac{3}{2}(ab+bc+ca)$

Vì $ab+bc+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ nên

$\dfrac{a}{9b^2+1}+\dfrac{b}{9c^2+1}+\dfrac{c}{9a^2+1}\ge(a+b+c)-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=1-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{3}.1=\dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 6. (HK2 – THCS Đông Xuân – Sóc Sơn 2022- 2023)

Giải phương trình sau: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2=72$.

Lời giải

Đặt $6x+7=t$

Ta có: $(t+1)(t-1)t^2=72$

$\Leftrightarrow (t^2-1)t^2=72 \Leftrightarrow t^4-t^2-72=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t^2+8)=0$

Mà $t^2+8>0 \Rightarrow t=\pm 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3} \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{5}{3}, x=-\frac{2}{3}$.

Bài 7. (HK2 – Sở GD&ĐT Bắc Giang 2022- 2023)

Cho $x>1; y>1$ và $x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5(2x+y)+4\left(\frac{8}{x-1}+\frac{3}{y-1}\right)$.

Lời giải

$$P=5(2x+y)+4\left(\frac{8}{x-1}+\frac{3}{y-1}\right)$$

$$=10x+5y+\frac{32}{x-1}+\frac{12}{y-1}$$

$$=\left[8(x-1)+\frac{32}{x-1}\right]+\left[3(y-1)+\frac{12}{y-1}\right]+2(x+y)+11$$

Áp dụng BĐT Cosi ta có $8(x-1)+\frac{32}{x-1}\ge 2\sqrt{8(x-1).\frac{32}{x-1}}=32$

$3(y-1)+\frac{12}{y-1}\ge 2\sqrt{3(y-1).\frac{12}{y-1}}=12$

$\Rightarrow P\ge 32+12+2.6+11=67$

Dấu "=" xảy ra khi $x=3$ và $y=3$

Vậy GTNN của $P=67$ khi $x=y=3$.

Bài 8. (HK2 – THCS Bát Tràng – Hải Phòng 2022- 2023)

a) Cho $a,b\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $(a+b)\ge 4ab$.

b) Cho hai số dương a,b có $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}.$$

Lời giải

a) Ta có: $(a-b)^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\ge 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab$

-Dấu " =" xảy ra khi $a=b$.

b) Ta có $(a+b)^2 \ge 4ab$ (câu a)

Vì a, b dương nên suy ra : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}(*)$

Áp dụng bất đẳng thức: Với a, b > 0 ta có

$$\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}\ge\frac{4}{1+3ab+a^2+1+3ab+b^2}=\frac{4}{(a+b)^2+4ab+2}$$

Mà : $a+b=1$ nên $\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}\ge\frac{4}{2+1^2+4ab}$ (1)

+) Lại có: $(a-b)^2\ge 0\forall a,b \Rightarrow a^2+b^2+2ab\ge 4ab\forall a,b\Rightarrow ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\forall a,b$

$\Rightarrow ab\le\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow ab\le\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}\ge 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A=1$ khi $a=b=0,5$.

Bài 9. (HK2 – Phòng GD & ĐT Hoàng Mai – Nghệ An 2022- 2023)

Cho 3 số dương a, b, c thoả mãn abc = 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1.$$

Lời giải

Với a,b > 0 Ta có BĐT: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$ (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow(a+b)(a^2+b^2-ab-ab)\ge 0$

$\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$ đúng với mọi a,b dương

Áp dụng BĐT (*) ta có : $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b)+abc$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}$ (1)

CMTT: $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)}(2)$; $\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{ca(a+b+c)}$ (3)

Cộng (1); (2); (3) ta được VT $\le\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}=1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 10. (HK2 – THCS Kim Ngọc – Vĩnh Phúc 2022- 2023)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện :

$a+b+c+ab+bc+ca=6abc$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$.

Lời giải

Ta có: $a+b+c+ab+bc+ca=6abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=6\ (1)$

Đặt $\frac{1}{a}=x;\quad \frac{1}{b}=y;\quad \frac{1}{c}=z$

Khi đó (1) trở thành: x + y + z + xy + yz + zx = 6

Ta cần chứng minh: $x^2+y^2+z^2 \geq 3$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $x^2+1 \geq 2x$; $y^2+1 \geq 2y$; $z^2+1 \geq 2z$

Cộng vế theo vế của 3 BĐT trên ta được

$x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(x+y+z) \qquad (2)$

Mặt khác, theo BĐT Cô-si ta có:

$x^2+y^2 \geq 2xy$; $y^2+z^2 \geq 2yz$; $z^2+x^2 \geq 2zx$

Cộng vế theo vế của 3 BĐT trên ta được

$2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+zx) \qquad (3)$

Lấy (2) + (3) ta được

$$3(x^2+y^2+z^2)+3 \geq 2(x+y+z+xy+yz+zx) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq \frac{2.6-3}{3}=3$$

Vậy $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3$.

Bài 11. (HK2 – THCS Thạch Hà – Hà Tĩnh 2022- 2023)

Cho các số a, b dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \geq 2+2=4 \text{ (đpcm)}$$

Suy ra $(a+1+b+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{a+b+2}=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a+1=b+1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 12. (HK2 – THCS Cầu Diễn – Hà Nội 2021- 2022)

Cho $x>1$; $y>1$ và $x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=3x+4y+\frac{5}{x-1}+\frac{9}{y-1}$.

Lời giải

Ta có: $S=3x+4y+\frac{5}{x-1}+\frac{9}{y-1}=\frac{5(x-1)}{4}+\frac{5}{x-1}+\frac{9(y-1)}{4}+\frac{9}{y-1}+\frac{7}{4}(x+y)+\frac{7}{2}$

$$\geq 2\sqrt{\frac{5(x-1)}{4}.\frac{5}{x-1}}+2\sqrt{\frac{9(y-1)}{4}.\frac{9}{y-1}}+\frac{7}{4}.6+\frac{7}{2}=5+9+\frac{21}{2}+\frac{7}{2}=28$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 3$.

Vậy GTNN của S=28 khi $x = y = 3$.

Câu 13. (HK2 – Quận Tây Hồ - Hà Nội 2021- 2022)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương $(a+b)$ và 2 ta có

$$(a+b)+2\ge 2\sqrt{(a+b).2} \Leftrightarrow \sqrt{a+b}\le \frac{a+b+2}{2\sqrt{2}}$$

Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{b+c}\le \dfrac{b+c+2}{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{c+a}\le \dfrac{c+a+2}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le \frac{2(a+b+c)+6}{2\sqrt{2}}=\frac{2.3+6}{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy GTLN của $P=3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 14. (HK2 – Trường THCS Giảng Võ – Hà Nội 2021-2022)

Cho hai số a,b thoả mãn $a+b\ne 0$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+\left(\dfrac{ab+1}{a+b}\right)^2\ge 2$.

Lời giải

Giả sử: $a^2+b^2+\left(\dfrac{ab+1}{a+b}\right)^2\ge 2 \Rightarrow (a^2+b^2)(a+b)^2+(ab+1)^2\ge 2(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2\left[(a+b)^2-2ab\right]+(ab+1)^2-2(a+b)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^4-2ab(a+b)^2-2(a+b)^2+(ab+1)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^4-2(a+b)^2(ab+1)+(ab+1)^2\ge 0$$

$\Leftrightarrow \left[(a+b)^2-ab-1\right]^2\ge 0$ (luôn đúng $\forall a,b$) (đpcm).

Bài 15. (HK2 – Trường THCS Nguyễn Du – Hà Nội 2021-2022).

Cho $x\ge 1; y\ge 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\ge \dfrac{2}{1+xy}$.

Lời giải

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge \frac{2}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{1+xy}\left[\frac{-x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{1+xy}.\frac{-x(1+y^2)+y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{1+xy}.\frac{-x-xy^2+y+\text{yx}^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{1+xy}.\frac{-(x-y)+xy(x-y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$$

Vì $x\ge 1; y\ge 1\Rightarrow$ dpcm.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Bài 16. (HK2 – Trường THCS Nghĩa Tân – Hà Nội 2021-2022). Cho phương trình $m=\dfrac{2x+1}{x-m}$ với m là tham số. Tìm các số nguyên m để phương trình có nghiệm duy nhất là số nguyên.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ne m$

$m=\dfrac{2x+1}{x-m}\Rightarrow m(x-m)=2x+1\Leftrightarrow mx-m^2=2x+1\Leftrightarrow (m-2)x=m^2+1$

TH1: $m=2\Rightarrow 0=5$ (vô lý) (loại)

TH2: $m\ne 2\Rightarrow x=\dfrac{m^2+1}{m-2}=m+2+\dfrac{5}{m-2}$

Để x nguyên thì $\dfrac{5}{m-2}$ nguyên $\Leftrightarrow m-2\in$ Ư $(5)=\{\pm1;\pm5\}$

Ta có bảng sau

$m-2$	-5	5	-1	1
m	-3	7	1	3
x	-2	10	-2	10

Vậy với $m\in\{-3;7;1;3\}$ thì PT $m=\dfrac{2x+1}{x-m}$ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

Bài 17. (HK2 – Trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam – Hà Nội 2021-2022).

Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=2022$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+bc-ca$.

Lời giải

* $P=ab+bc-ca=b(a+c)-ca\le b(a+c)\le\dfrac{(a+b+c)^2}{4}=\dfrac{2022^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=a+c \\ ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c=1011 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} c=0 \\ a=b=1011 \end{cases}$

Vậy GTLN của $P=\dfrac{2022^2}{4}$ khi $\begin{cases} a=0 \\ b=c=1011 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} c=0 \\ a=b=1011 \end{cases}$

* $P=ab+bc-ca=b(a+c)-ca\ge -ac\ge -\dfrac{(a+c)^2}{4}\ge -\dfrac{(a+b+c)^2}{4}=-\dfrac{2022^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=c=1011 \end{cases}$

Vậy GTNN của $P=-\dfrac{2022^2}{4}$ khi $\begin{cases} b=0 \\ a=c=1011 \end{cases}$

Bài 18. (HK2 – Trường THCS&THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội 2021-2022)

Cho các số dương x, y, z Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge x+y+z$.

Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge x+y+z$.

Lời giải

Ta có x, y, z là các số dương nên:

$x^2+y^2\ge 2xy \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y}+y\ge 2x \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y}\ge 2x-y$ (1)

$y^2+z^2\ge 2yz \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{z}+z\ge 2y \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{z}\ge 2y-z$ (2)

$z^2+x^2\ge 2zx \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{x}+x\ge 2z \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{x}\ge 2z-x$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge x+y+z$ (dpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

Bài 19. (HK2 – Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh 2021-2022)

Giải phương trình $|x-1|+|x-2|+|x-3|=-x^2+4x-2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất $|A|\ge A$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A\ge 0$.

Ta có $|x-1|\ge x-1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$

$|x-3|=|3-x|\ge 3-x$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 3$.

$|x-2|\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2$

Khi đó $|x-1|+|x-2|+|x-3|\ge x-1+3-x=2$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 1\le x\le 3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Ta có $VP = -x^2 + 4x - 2 = -(x-2)^2 + 2 \le 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Mà $VT = VP \Rightarrow x = 2$.

Bài 20. (HK2 – Phòng Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh 2021-2022)

Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2}$.

Lời giải

Ta có : $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow 4a^2 - 5ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a - b = 0 \\ a - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4a \\ b = a \end{array}\right.$$

Mà $2a > b > 0$ nên $a = b$

Khi đó $A = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2} = \dfrac{a^2}{4a^2 - a^2} = \dfrac{1}{3}$.