MỘT SỐ CÂU HỎI ĐIỂM 10 TRONG BÀI THI CUỐI HỌC KỲ II LỚP 9

Bài 1. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2022 – 2023)
Tìm các số thực dương x và y sao cho

$$xy+88=20\sqrt{(x+3)(y+1)}-2x-4y.$$

Bài 2. (Trường THCS Lương Thế Vinh năm 2022 – 2023)
Cho m, n, p là các số thực tuỳ ý thoả mãn $m^2+n^2+p^2\le 14$

Chứng minh rằng: $m+2n-3p\le 14$.

Bài 3. (Trường THCS Trưng Vương năm 2022 – 2023)
Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ thoả mãn $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+c$.

Bài 4. (Trường THCS Ngô Sĩ Liên năm 2022 – 2023)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$

b) Cho x, y là các số thực không âm thoả mãn $x+y=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{3xy}$.

Bài 5. (Trường THCS Ngô Sĩ Liên năm 2022 – 2023)

Tìm các số thực c sao cho $c+\sqrt{2023}$ và $\frac{2}{c}-\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

Bài 6. (Trường THCS Thái Thịnh năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $x^2+6x+2=(2x+2)\sqrt{x^2+5}$.

Bài 7. (Trường THCS Chu Văn An năm 2022 – 2023)
Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$.

Bài 8. (UBND Quận Cầu Giấy năm 2022 – 2023)

Cho hai số thực $a,b>0$ và $a+b=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}+2023$.

Bài 9. (UBND Quận Ba Đình năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $x+2=\sqrt{x-2}+2\sqrt{x+1}$.

Bài 10. (UBND Quận Nam Từ Liêm năm 2022 – 2023)
Xét các số thực a,b thỏa mãn $1\le a\le 2$ và $1\le b\le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.

Bài 11. (UBND Quận Hai Bà Trưng năm 2022 – 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$, với x thoả mãn $0\le x\le 1$.

Bài 12. (UBND Huyện Thanh Trì năm 2022 – 2023)

Cho $x;y;z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}$.

Bài 13. (Phòng GD & ĐT Quận Long Biên năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}=-x^2+2x-\frac{3}{4}$.

Bài 14. (Phòng GD & ĐT Quận Hà Đông năm 2022 – 2023)

Cho x,y là các số thực thoả mãn $x\ge 2$ và $x+y\ge 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}$.

Bài 15. (UBND Thị xã Sơn Tây năm 2022 – 2023)

Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2023$.

Bài 16. (UBND Quận Bắc Từ Liêm năm 2022 – 2023)

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+z^2}$.

Bài 17. (Trường THCS Lý Thường Kiệt năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$.

Bài 18. (Trường THCS Phương Liệt năm 2022 – 2023)

Cho a,b >0 thỏa mãn $a+b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(a+1)}$.

Bài 19. (Phòng GD & ĐT Huyện Chương Mỹ năm 2022 – 2023)

Cho x,y,z là các số dương thoả mãn $x+y+z=2022$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

Bài 20. (Phòng GD & ĐT Ứng Hoà năm 2022 – 2023)

Cho a,b là các số thực thoả mãn $a^2-ab+b^2=a+b$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2023a+2023b$.

Bài 21. (Phòng GD & ĐT Huyện Gia Lâm năm 2022 – 2023)

Cho $x,y,z>0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam năm 2022 – 2023)

Tìm các số thực dương x và y sao cho $xy+88=20\sqrt{(x+3)(y+1)}-2x-4y$.

Lời giải

Ta có $xy+88=20\sqrt{(x+3)(y+1)}-2x-4y$

$\Leftrightarrow (xy+x+3y+3)-20\sqrt{xy+x+3y+3}+85+x+y=0$

$\Leftrightarrow \left[(xy+x+3y+3)-18\sqrt{xy+x+3y+3}+81\right]+\left[(x+y+4)-2\sqrt{xy+x+3y+3}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy+x+3y+3}-9\right)^2+\dfrac{(x+y+4)^2-4(xy+x+3y+3)}{(x+y+4)+2\sqrt{xy+x+3y+3}}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy+x+3y+3}-9\right)^2+\dfrac{x^2+y^2+4x-4y-2xy+4}{x+y+4+2\sqrt{xy+x+3y+3}}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy+x+3y+3}-9\right)^2+\dfrac{(x-y+2)^2}{x+y+4+2\sqrt{xy+x+3y+3}}=0.$

Vì x, y là các số dương nên $x+y+4+2\sqrt{xy+x+3y+3}>0.$

Do đó $\left(\sqrt{xy+x+3y+3}-9\right)^2+\dfrac{(x-y+2)^2}{x+y+4+2\sqrt{xy+x+3y+3}}\geq 0.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{xy+x+3y+3}-9=0\\ x-y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ xy+x+3y+3=81\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ x(x+2)+x+3(x+2)+3-81=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ x^2+6x-72=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ x=6\ (\text{do } x>0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=8\end{cases}.$

Vậy $(x;y)=(6;8)$.

Bài 2. (Trường THCS Lương Thế Vinh năm 2022 – 2023)

Cho m, n, p là các số thực tuỳ ý thoả mãn $m^2+n^2+p^2\leq 14$.

Chứng minh rằng: $m+2n-3p\leq 14$.

Lời giải

Đặt $A=m+2n-3p$

$\Rightarrow -2A=-2m-4n+6p$

$=(m^2-2m+1)+(n^2-4n+4)+(p^2+6m+9)-(m^2+n^2+p^2)-14$

$=(m-1)^2+(n-2)^2+(p+3)^2-28\geq -28$

$\Rightarrow A\leq 14$

Dấu "=" xảy ra khi $m=1;\ n=2;\ p=-3$

Vậy $m+2n-3p\leq 14$ khi $m=1;\ n=2;\ p=-3$.

Bài 3. (Trường THCS Trưng Vương năm 2022 – 2023)

Cho các số thực $a,b,c \ge 1$ thoả mãn $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+c$.

Lời giải

Ta có $A^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=18 \Rightarrow A \le 3\sqrt{2}$

Vậy GTLN của $A=3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=\sqrt{2}$.

Vì $a,b,c \ge 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab+1 \ge a+b$

Tương tự $bc+1 \ge b+c$ và $ca+1 \ge c+a$

Nên $2(a+b+c) \le ab+bc+ca+3$

Hay $4A \le 2(ab+bc+ca)+6=(a+b+c)^2=A^2$

Mà $A>0 \Rightarrow A \ge 4$

Vật GTNN của $A=4$ khi $a=b=1, c=2$.

Bài 4. (Trường THCS Ngô Sĩ Liên năm 2022 – 2023)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$

b) Cho x, y là các số thực không âm thoả mãn $x+y=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{3xy}$.

Lời giải

a) $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=2 \end{cases}$

Đặt $A=x^2+y^2$; $B=xy$ $(A \ge 0)$. Suy ra hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} A+B=3 \\ A^2-2B^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ A^2-2B^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ (3-B)^2-2B^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ -B^2-6B+7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ (B+7)(1-B)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ \left[\begin{array}{l} B=-7 \\ B=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases} (tm) \text{ hoặc } \begin{cases} A=10 \\ B=-7 \end{cases} (tm)$$

TH1: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ y=1 \\ x=-1;\ y=1 \end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=-4 \\ xy=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=-4 \\ xy=-7 \end{cases}$ (loại)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) \in \{(1;1);(-1;-1)\}$.

b) $x+y=2 \Leftrightarrow (x+y)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4-2xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$

$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2$

Ta có $H\sqrt{3}=\sqrt{3(x^2+xy+y^2)}+3\sqrt{xy}$

$$H\sqrt{3} \leq \frac{3+x^2+xy+y^2}{2}+3\left(\frac{1+xy}{2}\right)=\frac{6+x^2+y^2+4xy}{2}=\frac{6+(x+y)^2+2xy}{2} \leq \frac{6+4+2}{2}=6$$

$\Rightarrow H \leq 3\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Vậy GTLN của $P=3\sqrt{2}$ khi $x=y=1$.

Ta có $H^2=x^2+xy+y^2+3xy+2\sqrt{3xy(x^2+xy+y^2)}$

$$H^2=x^2+4xy+y^2+2\sqrt{3xy(x^2+xy+y^2)}$$

$$\geq x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=4$$

$\Rightarrow H \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0;\ y=2$ hoặc $x=2;\ y=0$

Vậy GTNN của $H=2$ khi $x=0;\ y=2$ hoặc $x=2;\ y=0$.

Bài 5. (Trường THCS Ngô Sĩ Liên năm 2022 – 2023)

Tìm các số thực c sao cho $c+\sqrt{2023}$ và $\frac{2}{c}-\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên

Lời giải

Giả sử $c+\sqrt{2023}=x\ (x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow c=x-\sqrt{2023}$

$$\Rightarrow \frac{2}{c}-\sqrt{2023}=\frac{2}{x-\sqrt{2023}}-\sqrt{2023}=\frac{2(x+\sqrt{2023})}{x^2-2023}-\sqrt{2023}=\frac{2x}{x^2-2023}+\left(\frac{2}{x^2-2023}-1\right).\sqrt{2023}$$

Vì $\frac{2}{c}-\sqrt{2023} \in \mathbb{Z}$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} \frac{2x}{x^2-2023} \in \mathbb{Z} \\ \frac{2}{x^2-2023}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 45 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=45-\sqrt{2023} \\ c=-45-\sqrt{2023} \end{array}\right.$

Bài 6. (Trường THCS Thái Thịnh năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $x^2+6x+2=(2x+2)\sqrt{x^2+5}$.

Lời giải

$$x^2+6x+2=(2x+2)\sqrt{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow x^2+5+6x-3-(2x+2)\sqrt{x^2+5}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+5+3(2x-1)-(2x-1)\sqrt{x^2+5}-3\sqrt{x^2+5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+5}-2x+1\right)\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+5}=2x-1\\ \sqrt{x^2+5}=3\end{array}\right.$$

Giải ra ta được $x=2$ hoặc $x=-2$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\{-2;2\}$.

Bài 7. (Trường THCS Chu Văn An năm 2022 – 2023)

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$

Tương tự $1+b^2=(b+a)(b+c)$; $1+c^2=(c+a)(c+b)$

Ta có $\dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}$

$$\frac{2b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{2b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}\le\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}$$

$$\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{2c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\le\frac{c}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{2b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 8. (UBND Quận Cầu Giấy năm 2022 – 2023)

Cho hai số thực $a, b > 0$ và $a + b = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 2023$.

Lời giải

$P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 2023 = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 4(a+b) + 2018 = \left(\frac{4}{a} + 4a\right) + \left(\frac{1}{4a} + 4b\right) + 2018$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có

$P \ge 2\sqrt{\frac{4}{a}.4a} + 2\sqrt{\frac{1}{4b}.4b} + 2018 = 2028$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1;\ b = \frac{1}{4}$

Vậy GTNN của $P = 2028$ khi $a = 1;\ b = \frac{1}{4}$.

Bài 9. (UBND Quận Ba Đình năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $x + 2 = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 2$

Phương trình trở thành $2x + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x-2} + 1 + (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\ (tmdk)$

Vậy tập nghiệm của PT là $S = \{3\}$

Bài 10. (UBND Quận Nam Từ Liêm năm 2022 – 2023)

Xét các số thực a, b thỏa mãn $1 \le a \le 2$ và $1 \le b \le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a+b}{a^2 - ab + b^2}$.

Lời giải

Vì $1 \le a \le 2$ và $1 \le b \le 2$ nên:

$$\begin{cases} (a-1)(a-2) \le 0 \\ (b-1)(b-2) \le 0 \\ (a-2)(b-2) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \le 3a - 2 \\ b^2 \le 3b - 2 \\ -ab \le 4 - 2a - 2b \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - ab \le a + b.$$

Do $a^2 + b^2 - ab = (a-b)^2 + ab > 0$ nên $\frac{a+b}{a^2 + b^2 - ab} \ge 1$ hay $P \ge 1$.

Ta thấy $P=1\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(a-2)=0\\(b-1)(b-2)=0\\(a-2)(b-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow(a,b)\in\{(1;2);(2;1);(2;2)\}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $(a,b)\in\{(1;2);(2;1);(2;2)\}$.

Bài 11. (UBND Quận Hai Bà Trưng năm 2022 – 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$, với x thoả mãn $0\le x\le 1$.

Lời giải

Vì $0\le x\le 1\Rightarrow x^2\le x\Rightarrow 1-x^2\ge 1-x$

$A=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}\ge\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\ge\sqrt{1-x+x}=1$

Vậy GTNN của $A=1$ khi $x=0$ hoặc $x=1$.

Bài 12. (UBND Huyện Thanh Trì năm 2022 – 2023)

Cho $x;y;z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{4}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y}.\frac{1+y}{4}}=x\\ \frac{y^2}{1+z}+\frac{1+z}{4}\ge 2\sqrt{\frac{y^2}{1+z}.\frac{1+z}{4}}=y\\ \frac{z^2}{1+x}+\frac{1+x}{4}\ge 2\sqrt{\frac{z^2}{1+x}.\frac{1+x}{4}}=z\end{cases}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được:

$$\left(\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{4}\right)+\left(\frac{y^2}{1+z}+\frac{1+z}{4}\right)+\left(\frac{z^2}{1+x}+\frac{1+x}{4}\right)\ge(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge-\frac{3}{4}-\frac{x+y+z}{4}+(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3(x+y+z)}{4}-\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}.3.\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}$.

Bài 13. (Phòng GD & ĐT Quận Long Biên năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}=-x^2+2x-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Xét phương trình: $\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}=-x^2+2x-\frac{3}{4}$. ĐKXĐ: $x\ge\frac{1}{4}$.

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{2x-\frac{1}{2}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{2x-\frac{1}{2}}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}\right)=0 \text{ (do } \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{2x-\frac{1}{2}}+1> \text{ với mọi } x\ge\frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{2x-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x^2-2x+\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(TM)\\ x=\frac{3}{2}(TM)\end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Bài 14. (Phòng GD & ĐT Quận Hà Đông năm 2022 – 2023)

Cho x,y là các số thực thoả mãn $x\ge 2$ và $x+y\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}$.

Lời giải

$$P=(x-2)^2+(y-1)^2+4x+2y+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}-5$$

$$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y-1)^2+2\left(x+y-6+\frac{9}{x+y}\right)+2\left(x-4+\frac{4}{x}\right)-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)+15$$

$$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y-1)^2+\frac{2(x+y-3)^2}{x+y}+\frac{2(x-2)^2}{x}-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)+15$$

$$\Rightarrow P\ge-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)\ge-\left(\frac{7}{2}+\frac{17}{3}\right)+15=\frac{35}{6}$$

Vậy GTNN của $P=\frac{35}{6}\cdot$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=2;y=1$ (thoả mãn điều kiện).

Bài 15. (UBND Thị xã Sơn Tây năm 2022 – 2023)

Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2023$.

Lời giải

$$P=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2023=\left(4x^2-4x+1\right)+\left(x+\frac{1}{4x}\right)+2022=(2x-1)^2+\left(x+\frac{1}{4x}\right)+2022$$

Do $x>0$ nên $\frac{1}{4x}>0$. Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương x và $\frac{1}{4x}$ ta được:

$x+\frac{1}{4x}\ge 1\Rightarrow A\ge 2023$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy $A_{\min}=2023$ khi $x=\frac{1}{2}$.

Bài 16. (UBND Quận Bắc Từ Liêm năm 2022 – 2023)

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+z^2}$.

Lời giải

Có $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$

Tương tự có $\sqrt{y^2+z^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)$; $\sqrt{x^2+z^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(x+z)$

$P\ge\sqrt{2}(x+y+z)\ge 6\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y+z=6\\ x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2$

Vậy GTNN của $P=6\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Bài 17. (Trường THCS Lý Thường Kiệt năm 2022 – 2023)

Giải phương trình $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x-\frac{1}{x}\ge 0;2x-\frac{5}{x}\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}.(*)$

Ta biến đổi như sau: $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}\Leftrightarrow x-\frac{4}{x}+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0$

$$\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}\right)^2-\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{2x-\frac{5}{x}}=\sqrt{x-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow 2x-\frac{5}{x}=x-\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$$

Thế $x=2$ vào điều kiện $(*)$ được $2-\frac{1}{2}>0;4-\frac{5}{2}>0$, vậy thỏa mãn

Thế $x=-2$ vào điều kiện $(*)$ được $-2+\frac{1}{2}<0;-4+\frac{5}{2}<0$, vậy không thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình $S=\{2\}$.

Bài 18. (Trường THCS Phương Liệt năm 2022 – 2023)

Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(a+1)}$.

Lời giải

$\sqrt{2}P=\sqrt{2a(b+1)}+\sqrt{2b(a+1)}$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai số không âm

$\sqrt{2a(b+1)}\le\frac{2a+b+1}{2};\sqrt{2b(a+1)}\le\frac{2b+a+1}{2}$

$\Rightarrow\sqrt{2}P\le\frac{3(a+b)+2}{2}\le\frac{3.2+2}{2}=4$

$\Rightarrow P\le 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2a=b+1\\2b=a+1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Vậy GTLN của $P=2\sqrt{2}$ khi $a=b=1$.

Bài 19. (Phòng GD & ĐT Huyện Chương Mỹ năm 2022 – 2023)

Cho x,y,z là các số dương thoả mãn $x+y+z=2022$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy}{\sqrt{2022z+xy}}+\frac{yz}{\sqrt{2022x+yz}}+\frac{zx}{\sqrt{2022y+zx}}.$$

Lời giải

Ta có $2022z+xy=(x+y+z)z+xy=z^2+zy+zx+xy=(z+x)(z+y)$

Tương tự $2022x+yz=(x+y)(x+z)$; $2022y+xz=(y+x)(y+z)$

Khi đó $\frac{xy}{\sqrt{2022z+xy}}=\frac{xy}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z+x}+\frac{xy}{z+y}\right)$

Tương tự $\frac{yz}{\sqrt{2022x+yz}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)$ và $\frac{zx}{\sqrt{2022y+zx}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y+x}+\frac{zx}{y+z}\right)$

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z+x} + \frac{xy}{z+y} + \frac{yz}{x+y} + \frac{yz}{x+z} + \frac{zx}{y+x} + \frac{zx}{y+z} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{xy+yz}{z+z} + \frac{xy+zx}{z+y} + \frac{zx+yz}{y+x} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y+x+z\right) = 1011$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 674$

Vật GTLN của $P = 1011$ khi $x = y = z = 674$.

Bài 20. (Phòng GD & ĐT Ứng Hoà năm 2022 – 2023)

Cho a, b là các số thực thoả mãn $a^2 - ab + b^2 = a + b$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2023a + 2023b$.

Lời giải

Ta có $(a-b)^2 \ge 0 \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab \Leftrightarrow ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4} \forall a,b \in \mathbb{R}$

Khi đó, $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab \ge (a+b)^2 - 3\dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{(a+b)^2}{4}$

Đặt: $t = a + b \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a + b \ge \dfrac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow t \ge \dfrac{t^2}{4} \Leftrightarrow t\left(t-4\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 4$

Ta có: $P = 2023a + 2023b = 2023\left(a+b\right) = 2023t$

Từ điều kiện $0 \le t \le 4 \Rightarrow 0 \le 2023t \le 2023.4 \Leftrightarrow 0 \le P \le 8092$

Vậy $P_{\min} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$

$P_{\max} = 8092 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$

Bài 21. (Phòng GD & ĐT Huyện Gia Lâm năm 2022 – 2023)

Cho $x, y, z > 0$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2x+y+z} + \dfrac{1}{x+2y+z} + \dfrac{1}{x+y+2z} \le 1$.

Lời giải

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}; \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{4}{y+z} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} \ge \frac{16}{x+2y} \Rightarrow \frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{2x+y+z} \le \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \right); \dfrac{1}{x+y+2z} \le \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} \right)$

Cộng vế với vế suy ra: $\dfrac{1}{2x+y+z} + \dfrac{1}{x+2y+z} + \dfrac{1}{x+y+2z} \le \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{4}{z} \right) = 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{3}{4}$.