

TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN VỀ DẤU HIỆU CHIA HẾT TRONG ĐỀ THI VÀO LỚP 6 CÁC TRƯỜNG CHẤT LƯỢNG CAO

Bài 1. (Đề Nguyễn Tất Thành năm học 2009 – 2010)

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có dạng $\overline{20ab}$ sao cho nó đồng thời chia hết cho 2, 3 và 5.

Bài 2. (Đề Nguyễn Tất Thành năm học 2020 – 2021)

Hiệp hội ASEAN được thành lập năm 1967. Tính đến năm 2015 thì số năm Việt Nam tham gia bằng $\frac{5}{12}$ số năm mà Hiệp hội bắt đầu tổ chức. Hỏi:

- Hỏi năm bao nhiêu thì Việt Nam bắt đầu tham gia hiệp hội?
- Biết năm mà Lào tham gia sau năm Việt Nam nhưng trước năm 2010. Biết tổng số năm mà Lào và Việt Nam tham gia tính đến năm 2015 chia hết cho 3 và 4. Hỏi Lào tham gia vào năm nào?

Bài 3. (Đề Nguyễn Tất Thành năm học 2023 – 2024)

Tìm số tự nhiên bé nhất có dạng $\overline{a1024b}$, biết số đó có 6 chữ số và chia hết cho 45.

Bài 4. (Đề Cầu Giấy năm học 2012 – 2013)

Tìm số có 5 chữ số \overline{abcde} , biết $\overline{abcde} = a \times b \times c \times d \times e \times 45$.

Bài 5. (Đề Cầu Giấy năm học 2013 – 2014)

Có bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 9 mà trong mỗi số, các chữ số đều khác nhau và đều lẻ?

- A. 21. B. 22. C. 24. D. 26.

Bài 6. (Đề Cầu Giấy năm học 2013 – 2014)

Số tự nhiên a lớn nhất có 3 chữ số biết rằng a chia cho 2 dư 1, a chia cho 5 dư 1, a chia cho 7 dư 3 và a chia hết cho 9 là số nào?

- A. 171. B. 981. C. 801. D. 891.

Bài 7. (Đề Cầu Giấy năm học 2019 – 2020)

Nam có một số bi. Biết nếu xếp mỗi hộp 5 viên thì còn dư 3 viên. Nếu xếp mỗi hộp 2 viên hoặc 9 viên thì đủ. Hỏi số bi của Nam biết Nam có nhiều hơn 110 viên bi và ít hơn 250 viên?

Bài 8. (Đề Cầu Giấy năm học 2020 – 2021)

Hai số có hiệu là 1554. Tổng của hai số là $\overline{2x3y}$ chia hết cho 2, 5, 9. Hỏi số lớn là số nào?

Bài 9. (Đề Cầu Giấy năm học 2021 – 2022)

Trong giờ sinh hoạt CLB Toán của trường THCS Cầu Giấy, thầy Tùng lấy 3 hộp bi A, B, C chứa số viên bi lần lượt là: 8; 15; 10 và đưa ra câu đố: “ Với mỗi lượt chơi, người chơi được chọn 2 hộp bi bất kì và lấy từ mỗi hộp 1 viên bi rồi cho số bi đó vào hộp còn lại. Cứ chơi như vậy cho đến khi số bi trong mỗi hộp đúng với yêu cầu của thầy”.

a) Thầy Tùng yêu cầu A; B; C lần lượt là 10; 11; 12. Lượt 1: Công chọn A; B rồi cho vào C được số bi lần lượt là 7; 14; 12. Ta được bảng tính sau:

	Số bi hộp A	Số bi hộp B	Số bi hộp C
Lúc đầu	8	15	10
Sau lượt 1	7	14	12
Sau lượt 2	–	–	–
Sau lượt 3	–	–	–
Sau lượt 4	10	11	12

Em hãy giúp Công hoàn thành các ô trống ở lượt 2 và lượt 3.

b) Thầy Tùng yêu cầu bạn Công sau 4 lượt lấy bi thì phải được 3 hộp, mỗi hộp là 11 viên bi. Tuy nhiên sau nhiều lần thử, bạn Công nhận xét:

“ Sau nhiều lần thử, số bi ở mỗi hộp có số dư khi chia cho 3 là khác nhau”

Hãy chứng minh rằng, điều bạn Công nói là đúng. Từ đó suy ra yêu cầu của thầy Tùng có thực hiện được không? Vì sao?

Bài 10. (Đề Cầu Giấy năm học 2022 – 2023)

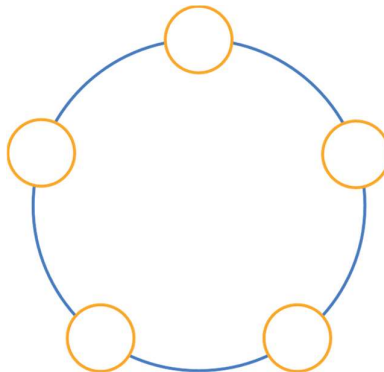
Tổng số học sinh khối 5 của một trường tiểu học là một số có ba chữ số và chữ số hàng trăm là 2. Biết khi xếp học sinh thành 10 hàng thì dư 5 học sinh và xếp thành 9 hàng thì không dư. Hỏi số học sinh khối 5 là bao nhiêu?

Bài 11. (Đề Cầu Giấy năm học 2023 – 2024)

Cho $A = \overline{52xy}$. Biết A chia hết cho 2 và 9; chia 5 dư 4. Tìm A.

Bài 12. (Đề Cầu Giấy năm học 2023 – 2024)

Bạn Hưng viết 5 số tự nhiên khác nhau trên một vòng tròn sao cho không có 2 hoặc 3 số nào ở vị trí liên tiếp nhau có tổng chia hết cho 3.



- a) Hãy tìm 1 bộ 5 số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu đề bài và điền vào hình.
b) Chứng tỏ trong mỗi bộ 5 số thỏa mãn yêu cầu đề bài có ít nhất 1 số chia hết cho 3.

Bài 13. (Đề Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Tìm một số tự nhiên biết rằng số đó chia 5 dư 4, chia 8 dư 4 và hiệu của các thương bằng 426.

Bài 14. (Đề Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Cho số $\overline{ab1}$ chia hết cho 7 và $a + b = 6$. Tìm số đó.

Bài 15. (Đề Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Số N là số có hai chữ số chia hết cho 3. Nếu viết xen số 0 vào giữa hai chữ số đó rồi cộng nó với hai lần chữ số hàng chục của số N ta được số mới gấp 9 lần số N . Tìm số N .

Bài 16. (Đề Amsterdam năm học 2010 – 2011)

Một sân vận động trong dịp WORLD CUP bán được số vé xem là một số tự nhiên có 5 chữ số bằng 45 lần tích các chữ số của nó. Hỏi số vé bán được là bao nhiêu?

Bài 17. (Đề Amsterdam năm học 2011 – 2012)

Cho bốn số tự nhiên bất kỳ a, b, c, d ($a > b > c > d$). Chứng tỏ rằng tích của tất cả các số tự nhiên là hiệu của hai trong bốn số đã cho là một số chia hết cho 12.

Bài 18. (Đề Amsterdam năm học 2013 – 2014)

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 viết được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau.

Bài 19. (Đề Amsterdam năm học 2014 – 2015)

Cho một số tự nhiên có 2014 chữ số. Biết rằng với hai chữ số liên tiếp theo thứ tự đã viết thì tạo thành số có hai chữ số chia hết cho 17 hoặc chia hết cho 23. Nếu chữ số cuối cùng của số đó là chữ số 1 thì chữ số đầu tiên là chữ số nào?

Bài 20. (Đề Amsterdam năm học 2014 – 2015)

Chứng minh rằng nếu có n số tự nhiên có tích bằng n và có tổng bằng 2012 thì n chia hết cho 4.

Bài 21. (Đề Amsterdam năm học 2019 – 2020)

Tìm số nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 5 và tổng các chữ số của số đó bằng 10.

Bài 22. (Đề Amsterdam năm học 2019 – 2020)

Cho dãy số 2, 22, 222, ... Hỏi số thứ 21 của dãy chia 9 dư mấy?

Bài 23. (Đề Amsterdam năm học 2019 – 2020)

Biết $\overline{2a36b}$ chia hết cho 2, 3, 5. Tính tổng các chữ số a có thể nhận?

Bài 24. (Đề Amsterdam năm học 2020 – 2021)

Cho một số được tạo bởi 2020 chữ số 1. Để số đó chia hết cho 9, cần cộng thêm vào số đó ít nhất bao nhiêu đơn vị?

Bài 25. (Đề Amsterdam năm học 2022 – 2023)

Biết số $\overline{2022ab}$ chia hết cho cả 5 và 9 ($b > 0$). Tìm a, b .

Bài 26. (Đề Amsterdam năm học 2022 – 2023)

Có 18 lít nước được đựng trong các chai loại 400ml, 600ml, 1l, mỗi loại có ít nhất 1 chai. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chai loại 600ml.

Bài 27. (Đề Amsterdam năm học 2023 – 2024)

Biết số $\overline{224ab}$ chia hết cho 2; 3 và 5. Tìm $a \times b$.

Bài 28. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2011 – 2012)

Một số khi chia cho 15 dư 13. Khi số đó chia cho 3 thì số dư là bao nhiêu?

Bài 29. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2013 – 2014)

Một người nói: “Tôi sinh sau năm 1976, nhưng trước năm 1984. Cứ bốn năm tôi mới có một lần sinh nhật”. Hỏi người đó sinh ngày nào, tháng nào, năm nào?

Bài 30. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2013 – 2014)

Tìm số A có hai chữ số, biết rằng A chia hết cho 9 và $A + 1$ chia hết cho 11.

Bài 31. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2014 – 2015)

Một số tự nhiên được viết bằng 2014 chữ số 7 liên tiếp thì phải cộng thêm ít nhất bao nhiêu đơn vị để được một số chia hết cho 21.

Bài 32. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2014 – 2015)

Tìm các chữ số a và b biết số $\overline{1a89b}$ đồng thời chia hết cho các số 2; 5 và 9.

Bài 33. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Tìm các chữ số x và y sao cho số $\overline{2x5y}$ chia hết cho các số 2; 5 và 9.

Bài 34. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, biết rằng số đó chia cho 3 dư 2, chia cho 5 dư 4 và chia cho 7 dư 6.

Bài 35. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai số khác nhau trong các số tự nhiên từ 1 đến 20 sao cho tích của chúng chia hết cho 9?

Bài 36. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Biết $A = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$ chia hết cho $B = \overline{100\dots 00}$. Hỏi B có thể có nhiều nhất bao nhiêu chữ số 0?

Bài 37. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2020 – 2021)

Tìm các chữ số x, y để $\overline{27xy}$ chia hết cho 3; 4 và 5.

Bài 38. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2021 – 2022)

Cho $a = \overline{77\dots 7}$ (có 2022 chữ số 7). Hỏi a không chia hết cho số nào sau đây: 7; 77; 232; 63?

Bài 39. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2022 – 2023)

Cho các số: 90; 105; 36; 1990; 115; 2022; 2345; 2011; 1989. Hỏi có bao nhiêu số chia hết cho 5 trong các số trên?

Bài 40. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2023 – 2024)

Tìm các số chia hết cho 2 và 5 trong các số sau:
35; 120; 68; 250; 222.

Bài 41. (Đề Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Cho số $\overline{a123456789b}$ chia hết cho 8 số trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Tìm tất cả các giá trị a, b .

Bài 42. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2020 – 2021)

Tìm x và y sao cho $\overline{4x89y}$ chia hết cho 2; chia 5 dư 1 và chia hết cho 9.

Bài 43. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2021 – 2022)

Cho số có hai chữ số chia hết cho 3. Biết rằng tổng hai chữ số của số đó bằng hai lần hiệu hai chữ số đó. Tìm các số đó.

Bài 44. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2021 – 2022)

Một số tự nhiên được viết bằng 2020 chữ số 7 liền nhau. Hỏi phải cộng thêm vào số đó ít nhất bao nhiêu đơn vị để được số chia hết cho 12?

Bài 45. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2023 – 2024)

Cho số $A = 1617181920212223$. Xóa đi 7 chữ số để được số có 9 chữ số chia hết cho 9. Số nhỏ nhất có thể thu được sau khi xóa là bao nhiêu?

Bài 46. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 1 năm học 2024 – 2025)

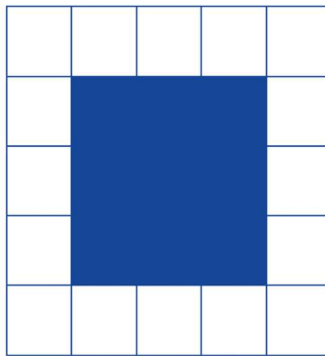
Từ 4 chữ số 0; 1; 2; 3 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3?

Bài 47. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Một cửa hàng có 6 hòm hàng với khối lượng 316 kg, 327 kg, 336 kg, 338 kg, 349 kg và 351 kg. Cửa hàng đó đã bán 5 hòm hàng và còn thừa lại một hòm hàng, trong đó khối lượng hàng bán được trong buổi sáng gấp bốn lần khối lượng hàng bán được trong buổi chiều. Hỏi, hòm hàng còn lại có khối lượng bao nhiêu ki-lô-gam?

Bài 48. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông như hình vẽ bên dưới. Người ta điền các số tự nhiên 1, 2, ..., 16 vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông được điền đúng một số và mỗi số chỉ được dùng đúng một lần, sao cho tổng của tất cả các số ở mỗi hàng và ở mỗi cột là như nhau (có tất cả hai hàng và hai cột). Gọi N là tổng của bốn số được điền vào bốn ô vuông ở góc của bảng. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của N .

**Bài 49. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)**

Một số tự nhiên được gọi là số *palindrome* nếu đọc theo chiều xuôi hay chiều ngược thì đều như nhau (chẳng hạn, 131, 1221, 14841,... là các số *palindrome*). Một số tự nhiên có sáu chữ số \overline{abcdef} được gọi là số thú vị nếu \overline{cd} chia hết cho \overline{ab} và \overline{ef} chia hết cho \overline{cd} (chẳng hạn 124896, 102040,... là các số thú vị). Một số tự nhiên có sáu chữ số được gọi là số *palindrome* thú vị nếu nó vừa là số *palindrome* vừa là số thú vị. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số là số *palindrome* thú vị.

Bài 50. (Đề Ngôi Sao Hà Nội - Hoàng Mai Vòng 2, năm học 2024 – 2025)

Viết các số từ 31 đến 93 liên tiếp sao cho được dãy số 313233...9293. Ta cộng ba chữ số liền kề với nhau rồi điền các tổng đó thành một dãy số mới. Cứ như vậy đến khi còn đúng một số có một chữ số duy nhất. Nếu ta cộng các chữ số mà thừa ra hai chữ số thì ta cộng hai chữ số đó lại và lấy xuống dãy mới. Nếu còn 1 chữ số thì ta chuyển số đó xuống dãy mới luôn. Tìm số có một chữ số cuối cùng.

Bài 51. (Đề Marie Curie năm học 2022 – 2023)

Cho ba chữ số 2; 3; 5. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 5 được tạo thành từ ba chữ số trên?

- A. 9 số. B. 7 số. C. 2 số. D. 6 số.

Bài 52. (Đề Marie Curie năm học 2022 – 2023)

Số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 9 là

- A. 9870. B. 9876. C. 9873. D. 9999.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề Nguyễn Tất Thành năm học 2009 – 2010)

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có dạng $\overline{20ab}$ sao cho nó đồng thời chia hết cho 2, 3 và 5.

Lời giải

Để số $\overline{20ab}$ chia hết cho 2 và 5 thì $b = 0$. Ta có số $\overline{20a0}$.

Để số $\overline{20a0}$ chia hết cho 3 thì $2 + 0 + a + 0 = 2 + a$ chia hết cho 3.

Mà số cần tìm nhỏ nhất nên a nhỏ nhất. Do đó $a = 1$.

Vậy số nhỏ nhất cần tìm là 2010.

Bài 2. (Đề Nguyễn Tất Thành năm học 2020 – 2021)

Hiệp hội ASEAN được thành lập năm 1967. Tính đến năm 2015 thì số năm Việt Nam tham gia bằng $\frac{5}{12}$ số năm mà Hiệp hội bắt đầu tổ chức. Hỏi:

- Hỏi năm bao nhiêu thì Việt Nam bắt đầu tham gia hiệp hội?
- Biết năm mà Lào tham gia sau năm Việt Nam nhưng trước năm 2010. Biết tổng số năm mà Lào và Việt Nam tham gia tính đến năm 2015 chia hết cho 3 và 4. Hỏi Lào tham gia vào năm nào?

Lời giải

a) Số năm Việt Nam tham gia là: $(2015 - 1967) \times \frac{5}{12} = 20$ (năm)

Việt Nam tham gia vào năm: $2015 - 20 = 1995$.

b) Tổng số năm mà Lào và Việt Nam tham gia chia hết cho 3 và 4 tức là chia hết cho 12.

Ngoài ra, Lào tham gia sau Việt Nam nhưng trước 2010, tức là tính đến năm 2015 số năm Lào tham gia nhỏ hơn $2015 - 1995 = 20$ năm và lớn hơn $2015 - 2010 = 5$ (năm).

Vì vậy tổng số năm Lào và Việt Nam tham gia tính đến năm 2015 nhỏ hơn $20 + 20 = 40$ năm và lớn hơn $20 + 5 = 25$ năm.

Mà tổng số năm Lào và Việt Nam tham gia là số chia hết cho 12 nên tổng số năm Lào và Việt Nam tham gia là 36 năm.

Vậy Lào tham gia vào ASEAN được: $36 - 20 = 16$ (năm).

Lào tham gia ASEAN vào năm: $2015 - 16 = 1999$.

Đáp số: a) Năm 1995; b) Năm 1999.

Bài 3. (Đề Nguyễn Tất Thành năm học 2023 – 2024)

Tìm số tự nhiên bé nhất có dạng $\overline{a1024b}$, biết số đó có 6 chữ số và chia hết cho 45.

Lời giải

Để số $\overline{a1024b}$ chia hết cho 45 thì $\overline{a1024b}$ chia hết cho 5 và 9.

Để số $\overline{a1024b}$ chia hết cho 5 thì $b = 0$ hoặc $b = 5$.

- Trường hợp 1: $b = 0$. Ta có số $\overline{a10240}$ chia hết cho 9.

Suy ra $a + 1 + 0 + 2 + 4 + 0 = a + 7$ chia hết cho 9. Do đó $a = 2$. Ta có số 210240.

- Trường hợp 2: $b = 5$. Ta có số $\overline{a10245}$ chia hết cho 9.

Suy ra $a + 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = a + 12$ chia hết cho 9. Do đó $a = 6$. Ta có số 610245.

Vậy số cần tìm là 610245.

Bài 4. (Đề Cầu Giấy năm học 2012 – 2013)

Tìm số có 5 chữ số \overline{abcde} , biết $\overline{abcde} = a \times b \times c \times d \times e \times 45$.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcde} = 45 \times a \times b \times c \times d \times e$.

Nếu trong 5 số a, b, c, d, e có một số chẵn thì \overline{abcde} tận cùng là 0, suy ra $e = 0$ (vô lí).

Do đó 5 số a, b, c, d, e đều là các số lẻ. Suy ra $e = 5$.

Khi đó \overline{abcde} chia hết cho 25. Mà $\overline{abcde} = \overline{abc} \times 100 + \overline{de}$ nên \overline{de} chia hết cho 25.

Lại có d là số lẻ nên d chỉ có thể bằng 7.

Ta có $\overline{abc75} = 45 \times a \times b \times c \times 7 \times 5$.

Từ đó ta suy ra $a + b + c + 12$ chia hết cho 9.

Mà $3 \leq a + b + c \leq 27$ và $a + b + c$ phải là số lẻ nên $a + b + c = 15$.

Ta có $15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 7 + 7 = 3 + 3 + 9 = 3 + 5 + 7 = 5 + 5 + 5$.

Thử tất cả trường hợp, ta chỉ thấy trường hợp 3 số 1, 7, 7 thoả mãn.

Vậy $\overline{abcde} = 77175$.

Bài 5. (Đề Cầu Giấy năm học 2013 – 2014)

Có bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 9 mà trong mỗi số, các chữ số đều khác nhau và đều lẻ?

A. 21.

B. 22.

C. 24.

D. 26.

Lời giải

Gọi số có 4 chữ số chia hết cho 9 và các chữ số đều khác nhau và đều lẻ là \overline{abcd} .

Vì \overline{abcd} chia hết cho 9 nên $a + b + c + d$ chia hết cho 9.

Mà a, b, c, d khác nhau và đều lẻ nên $a + b + c + d$ nhỏ nhất bằng $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ và lớn nhất bằng $3 + 5 + 7 + 9 = 24$.

Do đó $a + b + c + d = 18 \Rightarrow a + b + c + d = 1 + 3 + 5 + 9$.

Vậy số số thoả mãn là $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (số).

Chọn C.

Bài 6. (Đề Cầu Giấy năm học 2013 – 2014)

Số tự nhiên a lớn nhất có 3 chữ số biết rằng a chia cho 2 dư 1, a chia cho 5 dư 1, a chia cho 7 dư 3 và a chia hết cho 9 là số nào?

A. 171.

B. 981.

C. 801.

D. 891.

Lời giải

Vì a chia cho 2 dư 1, a chia cho 5 dư 1 nên a có tận cùng là 1.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab1}$.

Vì $\overline{ab1}$ chia hết cho 9 nên $a+b+1$ chia hết cho 9.

Mà $1 \leq a+b \leq 18$ nên $a+b=8$ hoặc $a+b=17$.

Trường hợp 1: $a+b=17$. Khi đó $a=8, b=9$ hoặc $a=9, b=8$.

Ta có hai số là 891 và 981. Cả hai số này đều không chia 7 dư 3 nên loại.

Trường hợp 2: $a+b=8$, để số đã cho lớn nhất thì $a=8, b=0$.

Thử lại thấy số 801 chia 7 dư 3 nên thỏa mãn.

Chọn C.**Bài 7. (Đề Cầu Giấy năm học 2019 – 2020)**

Nam có một số bi. Biết nếu xếp mỗi hộp 5 viên thì còn dư 3 viên. Nếu xếp mỗi hộp 2 viên hoặc 9 viên thì đủ. Hỏi số bi của Nam biết Nam có nhiều hơn 110 viên bi và ít hơn 250 viên?

Lời giải

Vì nếu xếp mỗi hộp 2 viên hoặc 9 viên thì đủ nên số viên bi là số chia hết cho 2 và chia hết cho 9.

Lại có nếu xếp mỗi hộp 5 viên bi thì còn dư 3 viên nên số bi là số chia 5 dư 3.

Số bi chia hết cho 2 và chia 5 dư 3 nên có tận cùng là 8.

Do đó số bi là số có dạng $\overline{ab8}$. Khi đó $a+b$ chia 9 dư 1.

Mà $110 < \overline{ab8} < 250$ nên $a=1$ thì $b=9$ là trường hợp duy nhất thỏa mãn.

Vậy số bi của Nam là 198 viên bi.

Bài 8. (Đề Cầu Giấy năm học 2020 – 2021)

Hai số có hiệu là 1554. Tổng của hai số là $\overline{2x3y}$ chia hết cho 2, 5, 9. Hỏi số lớn là số nào?

Lời giải

Vì $\overline{2x3y}$ chia hết cho 2, 5, 9 nên tìm được $y=0; x=4$.

Số lớn là $(2430+1554):2=1992$.

Bài 9. (Đề Cầu Giấy năm học 2021 – 2022)

Trong giờ sinh hoạt CLB Toán của trường THCS Cầu Giấy, thầy Tùng lấy 3 hộp bi A, B, C chứa số viên bi lần lượt là: 8; 15; 10 và đưa ra câu đố: “ Với mỗi lượt chơi, người chơi được chọn 2 hộp bi bất kì và lấy từ mỗi hộp 1 viên bi rồi cho số bi đó vào hộp còn lại. Cứ chơi như vậy cho đến khi số bi trong mỗi hộp đúng với yêu cầu của thầy”.

a) Thầy Tùng yêu cầu A; B; C lần lượt là 10; 11; 12. Lượt 1: Công chọn A; B rồi cho vào C được số bi lần lượt là 7; 14; 12. Ta được bảng tính sau:

	Số bi hộp A	Số bi hộp B	Số bi hộp C
Lúc đầu	8	15	10
Sau lượt 1	7	14	12
Sau lượt 2	–	–	–
Sau lượt 3	–	–	–
Sau lượt 4	10	11	12

Em hãy giúp Công hoàn thành các ô trống ở lượt 2 và lượt 3.

b) Thầy Tùng yêu cầu bạn Công sau 4 lượt lấy bi thì phải được 3 hộp, mỗi hộp là 11 viên bi. Tuy nhiên sau nhiều lần thử, bạn Công nhận xét:

“Sau nhiều lần thử, số bi ở mỗi hộp có số dư khi chia cho 3 là khác nhau”

Hãy chứng minh rằng, điều bạn Công nói là đúng. Từ đó suy ra yêu cầu của thầy Tùng có thực hiện được không? Vì sao?

Lời giải

a) Ta có bảng

	Hộp A	Hộp B	Hộp C
Ban đầu	8	15	10
Lượt 1	7	14	12
Lượt 2	9	13	11
Lượt 3	8	12	13
Lượt 4	10	11	12

Hoặc

	Hộp A	Hộp B	Hộp C
Ban đầu	8	15	10
Lượt 1	7	14	12
Lượt 2	9	13	11
Lượt 3	11	12	10
Lượt 4	10	11	12

b) Nhận xét: số bi ban đầu ở hộp A là số chia 3 dư 2, ở hộp B là số chia hết cho 3, ở hộp C là số chia 3 dư 1 do đó ban đầu số bi ở mỗi hộp khi chia cho 3 có số dư khác nhau.

Giả sử nhận xét của Công là sai, tức là tại một lượt chơi nào đó số bi ở 3 hộp khi chia cho 3 có số dư bằng nhau.

Trường hợp 1: Số bi cả 3 hộp khi chia cho 3 đều dư 0. Khi đó, trước khi xảy ra lượt chơi này thì 2 hộp bị lấy 1 bi ra có số bi chia 3 dư 1, hộp được cho vào 2 bi có số bi chia 3 dư 1. Tức là cả 3 hộp đều có số bi chia 3 dư 1.

Trường hợp 2: Số bi cả 3 hộp khi chia cho 3 đều dư 1. Khi đó, trước khi xảy ra lượt chơi này thì 2 hộp bị lấy 1 bi ra có số bi chia 3 dư 2, hộp được cho vào 2 bi có số bi chia 3 dư 2. Tức là cả 3 hộp đều có số bi chia 3 dư 2.

Trường hợp 3: Số bi cả 3 hộp khi chia cho 3 đều dư 2. Khi đó, trước khi xảy ra lượt chơi này thì 2 hộp bị lấy 1 bi ra có số bi chia hết cho 3, hộp được cho vào 2 bi có số bi chia hết cho 3. Tức là cả 3 hộp đều có số bi chia hết cho 3.

Từ 3 trường hợp trên, ta thấy rằng để số bi tại 1 lượt chơi nào đó của mỗi hộp đều có cùng số dư khi chia cho 3 thì số bi trước lượt chơi đó ở mỗi hộp cũng phải chia 3 có cùng số dư. Điều này mâu thuẫn với nhận xét bên trên.

Suy ra điều ta giả sử sai, tức là nhận xét của Công đúng.

Vậy không thể thực hiện được yêu cầu của thầy giáo để số bi ở mỗi hộp bằng 11.

Bài 10. (Đề Cầu Giấy năm học 2022 – 2023)

Tổng số học sinh khối 5 của một trường tiểu học là một số có ba chữ số và chữ số hàng trăm là 2. Biết khi xếp học sinh thành 10 hàng thì dư 5 học sinh và xếp thành 9 hàng thì không dư. Hỏi số học sinh khối 5 là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số học sinh của khối 5 là $\overline{2ab}$ (a, b là các chữ số).

Vì khi xếp học sinh thành 10 hàng thì dư 5 học sinh nên số học sinh là số chia 10 dư 5.

Do đó $b = 5$.

Khi đó, số học sinh là $\overline{2a5}$.

Vì số học sinh khi xếp thành 9 hàng thì không dư nên số học sinh là số chia hết cho 9

$\Rightarrow \overline{2a5}$ chia hết cho 9 $\Rightarrow (2 + a + 5)$ chia hết cho 9.

Hay $(a + 7)$ chia hết cho 9 $\Rightarrow a = 2$.

Vậy khối 5 có 225 học sinh.

Bài 11. (Đề Cầu Giấy năm học 2023 – 2024)

Cho $A = \overline{52xy}$. Biết A chia hết cho 2 và 9; chia 5 dư 4. Tìm A.

Lời giải

Vì A chia hết cho 2 và chia 5 dư 4 nên $y = 4$.

Ta có số $A = \overline{52x4}$.

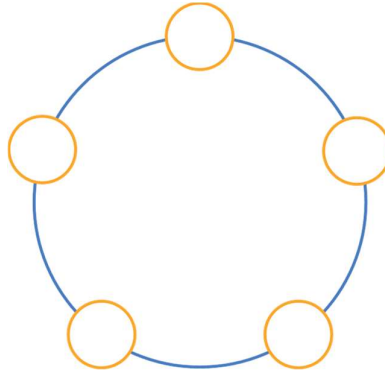
Vì $A = \overline{52x4}$ chia hết cho 9 nên $5 + 2 + x + 4 = 11 + x$ chia hết cho 9.

Suy ra $x = 7$.

Vậy $A = 5274$.

Bài 12. (Đề Cầu Giấy năm học 2023 – 2024)

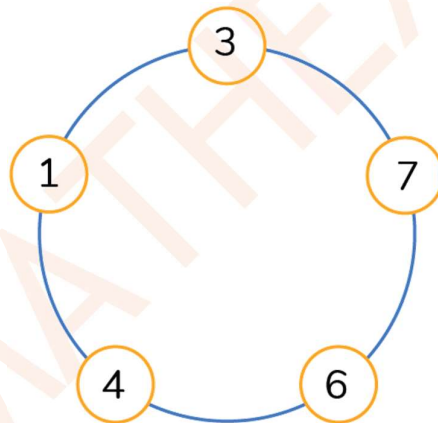
Bạn Hưng viết 5 số tự nhiên khác nhau trên một vòng tròn sao cho không có 2 hoặc 3 số nào ở vị trí liên tiếp nhau có tổng chia hết cho 3.



- a) Hãy tìm 1 bộ 5 số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu đề bài và điền vào hình.
b) Chứng tỏ trong mỗi bộ 5 số thỏa mãn yêu cầu đề bài có ít nhất 1 số chia hết cho 3.

Lời giải

- a) Bộ 5 số thỏa mãn yêu cầu như hình vẽ



- b) Giả sử cả 5 số đều không chia hết cho 3, khi đó các số này chia 3 dư 1 hoặc chia 3 dư 2.
- Xét số a chia 3 dư 1. Khi đó để tổng 2 số liên tiếp (có chứa số a) không chia hết cho 3 thì hai số đứng cạnh a phải chia 3 dư 1. Do đó, ta có 3 số liên tiếp cùng chia 3 dư 1, tức là tổng 3 số này chia hết cho 3 (vô lí)
- Lập luận tương tự với số chia 3 dư 2, ta thấy vô lí.
Vậy trong 5 số luôn có ít nhất 1 số phải chia hết cho 3.

Bài 13. (Đề Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Tìm một số tự nhiên biết rằng số đó chia 5 dư 4, chia 8 dư 4 và hiệu của các thương bằng 426.

Lời giải

Thương trong phép chia cho 5 là: $426 : (8 - 5) \times 8 = 1136$.

Số cần tìm là: $1136 \times 4 = 5684$.

Bài 14. (Đề Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Cho số $\overline{ab1}$ chia hết cho 7 và $a + b = 6$. Tìm số đó.

Lời giải

Ta có:

$$\overline{ab1} = 100 \times a + 10 \times b + 1 = 90 \times a + 10 \times a + 10 \times b + 1 = 90 \times a + 10 \times (a + b) + 1.$$

$$\text{Mà } a + b = 6 \text{ nên } \overline{ab1} = 90 \times a + 61 = 91 \times a + 61 - a.$$

Vì $\overline{ab1}$ chia hết cho 7 nên $61 - a$ chia hết cho 7 (do $91 \times a$ chia hết cho 7).

$$\text{Do đó } a = 5 \Rightarrow b = 1.$$

Vậy số cần tìm là 511.

Bài 15. (Đề Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Số N là số có hai chữ số chia hết cho 3. Nếu viết xen số 0 vào giữa hai chữ số đó rồi cộng nó với hai lần chữ số hàng chục của số N ta được số mới gấp 9 lần số N . Tìm số N .

Lời giải

Gọi số N là \overline{ab} .

$$\text{Theo bài ra, ta có } \overline{a0b} + 2 \times a = 9 \times \overline{ab} \Rightarrow 100 \times a + b + 2 \times a = 90 \times a + 9 \times b$$

$$\Rightarrow 12 \times a = 8 \times b \Rightarrow 3 \times a = 2 \times b.$$

Do đó b phải chia hết cho 3.

$$\text{Mà } \overline{ab} \text{ chia hết cho 3 nên } a \text{ cũng chia hết cho 3} \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 6.$$

Vậy $N = 69$.

Bài 16. (Đề Amsterdam năm học 2010 – 2011)

Một sân vận động trong dịp WORLD CUP bán được số vé xem là một số tự nhiên có 5 chữ số bằng 45 lần tích các chữ số của nó. Hỏi số vé bán được là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số có 5 chữ số đề bài cho là \overline{abcde} (a, b, c, d, e là các chữ số và a khác 0).

$$\text{Theo bài ra, ta có: } \overline{abcde} = 45 \times a \times b \times c \times d \times e.$$

Nếu trong 5 số a, b, c, d, e có một số chẵn thì \overline{abcde} tận cùng là 0, suy ra $e = 0$ (vô lí).

Do đó 5 số a, b, c, d, e đều là các số lẻ. Suy ra $e = 5$.

Khi đó \overline{abcde} chia hết cho 25. Mà $\overline{abcde} = \overline{abc} \times 100 + \overline{de}$ nên \overline{de} chia hết cho 25.

Lại có d là số lẻ nên d chỉ có thể bằng 7.

$$\text{Ta có } \overline{abc75} = 45 \times a \times b \times c \times 7 \times 5.$$

Từ đó ta suy ra $a + b + c + 12$ chia hết cho 9.

Mà $3 \leq a + b + c \leq 27$ và $a + b + c$ phải là số lẻ nên $a + b + c = 15$.

Ta có: $15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 7 + 7 = 3 + 3 + 9 = 3 + 5 + 7 = 5 + 5 + 5$.

Thử tất cả trường hợp, ta chỉ thấy trường hợp 3 số 1, 7, 7 thoả mãn.

Khi đó $\overline{abcde} = 77175$.

Bài 17 (Đề Amsterdam năm học 2011 – 2012)

Cho bốn số tự nhiên bất kỳ a, b, c, d ($a > b > c > d$). Chứng tỏ rằng tích của tất cả các số tự nhiên là hiệu của hai trong bốn số đã cho là một số chia hết cho 12.

Lời giải

Xét tích: $(a - b) \times (a - c) \times (a - d) \times (b - c) \times (b - d) \times (c - d)$.

Trong 4 số a, b, c, d có hai cặp số cùng tính chẵn lẻ.

Hiệu hai cặp đó đều là số chẵn, tích trên chia hết cho 4.

Mỗi số tự nhiên chia 3 có 3 kiểu dư: dư 0, 1, 2. Có 4 số suy ra có ít nhất 2 số có cùng kiểu dư suy ra hiệu của chúng chia hết cho 3 suy ra tích trên chia hết cho 3.

Tích vừa chia hết cho 3 vừa chia hết cho 4 nên chia hết cho 12.

Bài 18. (Đề Amsterdam năm học 2013 – 2014)

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 viết được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau.

Lời giải

Gọi số cần lập là \overline{abc} (a, b, c là các chữ số, a khác 0).

Vì \overline{abc} là số chẵn nên $c = 2$ hoặc $c = 4$.

Do đó c có 2 cách chọn.

Khi đó b có 4 cách chọn và a có 3 cách chọn.

Vậy số số lập được là $2 \times 3 \times 4 = 24$ (số).

Bài 19. (Đề Amsterdam năm học 2014 – 2015)

Cho một số tự nhiên có 2014 chữ số. Biết rằng với hai chữ số liên tiếp theo thứ tự đã viết thì tạo thành số có hai chữ số chia hết cho 17 hoặc chia hết cho 23. Nếu chữ số cuối cùng của số đó là chữ số 1 thì chữ số đầu tiên là chữ số nào?

Lời giải

Các số có hai chữ số chia hết cho 17 gồm 17, 34, 51, 68, 85; các số có hai chữ số chia hết cho 23 gồm có 23, 46, 69, 92.

Để ý các chữ số cuối cùng của các số trên đôi một khác nhau, do đó, nếu biết chữ số cuối cùng thì xác định được duy nhất chữ số đứng trước nó.

Vì chữ số cuối cùng là 1 nên chữ số trước nó là chữ số 5. Đứng trước chữ số 5 là chữ số 8.

Lập luận tương tự ta có số tự nhiên đã cho dạng $\overline{...6923469234692346851}$. Như vậy, trừ ba chữ số cuối là 851, các chữ số trong số đã cho lặp theo chu kỳ 69234.

Vậy chữ số đầu tiên là 6.

Bài 20. (Đề Amsterdam năm học 2014 – 2015)

Chứng minh rằng nếu có n số tự nhiên có tích bằng n và có tổng bằng 2012 thì n chia hết cho 4.

Lời giải

Xét tính chẵn lẻ của n . Nếu n là số lẻ thì tích n số tự nhiên bằng n lẻ nên tất cả n số đều là các số lẻ. Do đó tổng của n là số lẻ, khác 2012. Nếu n là số chẵn thì suy ra ít nhất một trong n số phải là số chẵn. Xét các trường hợp sau

- Nếu trong n số chỉ có đúng một số chẵn thì $n-1$ số còn lại đều là số lẻ. Tổng của $n-1$ số lẻ là một số lẻ, kết hợp với số chẵn duy nhất thì tổng của n số đã cho là một số lẻ và không thể bằng 2012 (loại khả năng này).
- Nếu có ít nhất hai số chẵn trong n số thì tích của hai số này phải chia hết cho 4. Theo giả thiết, tích của n số tự nhiên bằng n nên suy ra n chia hết cho 4.

Bài 21. (Đề Amsterdam năm học 2019 – 2020)

Tìm số nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 5 và tổng các chữ số của số đó bằng 10.

Lời giải

Để số đó nhỏ nhất và chia hết cho 5 thì số đó phải có dạng $\overline{1a0}$ hoặc $\overline{1a5}$.

Trường hợp $\overline{1a0}$, ta có số 190.

Trường hợp $\overline{1a5}$, ta có số 145.

Vậy số nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 5 và tổng các chữ số của số đó bằng 10 là 145.

Bài 22. (Đề Amsterdam năm học 2019 – 2020)

Cho dãy số 2, 22, 222, ... Hỏi số thứ 21 của dãy chia 9 dư mấy?

Lời giải

Số thứ 21 của dãy gồm 21 chữ số 2 nên tổng các chữ số của số này là $21 \times 2 = 42$.

Vì 42 chia 9 dư 6 nên số thứ 21 của dãy chia 9 dư 6.

Bài 23. (Đề Amsterdam năm học 2019 – 2020)

Biết $\overline{2a36b}$ chia hết cho 2, 3, 5. Tính tổng các chữ số a có thể nhận?

Lời giải

Để $\overline{2a36b}$ chia hết cho 2 và 5 thì $b = 0$. Ta có số $\overline{2a360}$.

Để số $\overline{2a360}$ chia hết cho 3 thì $2 + a + 3 + 6 + 0 = 11 + a$ chia hết cho 3.

Suy ra $a = 1, a = 4, a = 7$.

Vậy tổng các chữ số a có thể nhận là $1 + 4 + 7 = 12$.

Bài 24. (Đề Amsterdam năm học 2020 – 2021)

Cho một số được tạo bởi 2020 chữ số 1. Để số đó chia hết cho 9, cần cộng thêm vào số đó ít nhất bao nhiêu đơn vị?

Lời giải

Vì số đã cho được tạo bởi 2020 chữ số 1 nên tổng các chữ số của số đó là 2020.

Mà 2020 chia 9 dư 4 nên ta cần cộng thêm vào số đó ít nhất 5 đơn vị để được số chia hết cho 9.

Bài 25. (Đề Amsterdam năm học 2022 – 2023)

Biết số $\overline{2022ab}$ chia hết cho cả 5 và 9 ($b > 0$). Tìm a, b .

Lời giải

Vì số $\overline{2022ab}$ chia hết cho 5 và $b > 0$ nên $b = 5$.

Ta có số $\overline{2022a5}$.

Vì số $\overline{2022a5}$ chia hết cho 9 nên $(2+0+2+2+a+5)$ chia hết cho 9.

Hay $(a+11)$ chia hết cho 9, suy ra $a = 7$.

Vậy $a = 7, b = 5$.

Bài 26. (Đề Amsterdam năm học 2022 – 2023)

Có 18 lít nước được đựng trong các chai loại 400ml, 600ml, 1l, mỗi loại có ít nhất 1 chai. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chai loại 600ml.

Lời giải

Để số chai loại 600ml là nhiều nhất thì số chai loại 400ml và 1l phải ít nhất.

Vì tổng số lít nước trong tất cả các chai là 18 lít là số chia hết cho 3, tổng số lít nước có trong chai loại 600ml cũng là số chia hết cho 3 nên tổng số lít nước có trong các chai loại 400ml và 1l phải chia hết cho 3. (1)

Theo bài ra, mỗi loại có ít nhất 1 chai nên tổng số lít nước trong chai 400ml và 1l phải lớn hơn hoặc bằng 1400ml. (2)

Kết hợp (1) và (2), suy ra tổng số nước trong chai loại 400ml và 1l ít nhất là 1800ml.

Vậy số chai loại 600ml nhiều nhất là: $(18000 - 1800) : 600 = 27$ (chai).

Bài 27. (Đề Amsterdam năm học 2023 – 2024)

Biết số $\overline{224ab}$ chia hết cho 2; 3 và 5. Tìm $a \times b$.

Lời giải

Vì số $\overline{224ab}$ chia hết cho 2 và 5 nên $b = 0$.

Do đó $a \times b = a \times 0 = 0$.

Bài 28. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2011 – 2012)

Một số khi chia cho 15 dư 13. Khi số đó chia cho 3 thì số dư là bao nhiêu?

Lời giải

Vì 13 chia 3 dư 1 nên số đó chia 3 dư 1.

Bài 29. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2013 – 2014)

Một người nói: “Tôi sinh sau năm 1976, nhưng trước năm 1984. Cứ bốn năm tôi mới có một lần sinh nhật”. Hỏi người đó sinh ngày nào, tháng nào, năm nào?

Lời giải

Vì cứ 4 năm người đó mới có 1 lần sinh nhật nên người này sinh vào đúng năm nhuận và là ngày 29 tháng 2.

Năm nhuận là năm chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 100 hoặc là năm chia hết cho 400. Trong các năm từ 1977 đến 1983 chỉ có năm 1980 là năm nhuận.

Vậy người đó sinh ngày 29 tháng 2 năm 1980.

Bài 30. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2013 – 2014)

Tìm số A có hai chữ số, biết rằng A chia hết cho 9 và $A + 1$ chia hết cho 11.

Lời giải

Các số hai chữ số chia hết cho 9 là 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99.

Vì $A + 1$ chia hết cho 11 nên $A = 54$.

Bài 31. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2014 – 2015)

Một số tự nhiên được viết bằng 2014 chữ số 7 liên tiếp thì phải cộng thêm ít nhất bao nhiêu đơn vị để được một số chia hết cho 21.

Lời giải

Tổng các chữ số của số đó là $7 \times 2014 = 14098$.

Vì 14098 chia 3 dư 1 nên số viết bằng 2014 chữ số 7 liên tiếp chia 3 dư 1.

Để tổng của số viết bằng 2014 chữ số 7 liên tiếp và số cộng thêm là một số chia hết cho 21 thì tổng đó phải chia hết cho 3 và chia hết cho 7. Mà số viết bằng 2014 chữ số 7 liên tiếp chia hết cho 7 và chia 3 dư 1 nên muốn tổng này chia hết cho 21 thì số cộng thêm phải chia hết cho 7 và chia 3 dư 2.

Số chia hết cho 7 và chia 3 dư 2 nhỏ nhất là số 14.

Vậy cần cộng thêm vào ít nhất 14 đơn vị để được số chia hết cho 21.

Bài 32. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2014 – 2015)

Tìm các chữ số a và b biết số $\overline{1a89b}$ đồng thời chia hết cho các số 2; 5 và 9.

Lời giải

Để số $\overline{1a89b}$ chia hết cho 2 và 5 thì $b = 0$. Ta có số $\overline{1a890}$.

Để số $\overline{1a890}$ chia hết cho 9 thì $1+a+8+9+0 = a+18$ chia hết cho 9. Suy ra $a=0$ hoặc $a=9$.

Bài 33. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Tìm các chữ số x và y sao cho số $\overline{2x5y}$ chia hết cho các số 2; 5 và 9.

Lời giải

Để số $\overline{2x5y}$ chia hết cho 2 và 5 thì $y=0$. Ta có số $\overline{2x50}$.

Để số $\overline{2x50}$ chia hết cho 9 thì $2+x+5+0 = x+7$ chia hết cho 9. Suy ra $x=2$.

Bài 34. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, biết rằng số đó chia cho 3 dư 2, chia cho 5 dư 4 và chia cho 7 dư 6.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} (a, b, c là các chữ số và a khác 0). Để số đó lớn nhất thì ta chọn $a=9$.

Vì số đó chia 5 dư 4 nên $c=4$ hoặc $c=9$.

Trường hợp 1: Số cần lập là $\overline{9b4}$. Số này chia 3 dư 2 nên $9+b+4 = b+13$ chia 3 dư 2.

Do đó $b=1, b=4, b=7$. Khi đó, ta có các số là 914; 944; 974.

Trong ba số này chỉ có số 944 chia 7 dư 6 nên ta chọn 944.

Trường hợp 2: Số cần lập là $\overline{9b9}$. Số này chia 3 dư 2 nên $9+b+9 = b+18$ chia 3 dư 2.

Do đó $b=2, b=5, b=8$. Khi đó, ta có các số là 929; 959; 989.

Trong ba số này không có số nào chia 7 dư 6 nên loại.

Vậy số lớn nhất tìm được là 944.

Bài 35. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai số khác nhau trong các số tự nhiên từ 1 đến 20 sao cho tích của chúng chia hết cho 9?

Lời giải

Từ 1 đến 20 có 20 số.

Từ 1 đến 20 có 2 số chia hết cho 9 là 9 và 18. Khi lấy 2 số này, nhân với một số bất kì trong các số còn lại ta luôn được một tích chia hết cho 9.

Do đó số cách chọn hai số trong trường hợp này là $19+18=37$ (cách).

Từ 1 đến 20 có 4 số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 là 3, 6, 12, 15. Tích của hai số bất kì chọn ra từ 4 số này là một số chia hết cho 9.

Do đó số cách chọn hai số trong trường hợp này là $4 \times 3 : 2 = 6$ (cách).

Vậy số cách chọn thoả mãn bài toán là $37+6=43$ (cách).

Bài 36. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2019 – 2020)

Biết $A = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$ chia hết cho $B = \overline{100\dots 00}$. Hỏi B có thể có nhiều nhất bao nhiêu chữ số 0?

Lời giải

Số chữ số 0 nhiều nhất trong số B chính bằng số chữ số 0 tận cùng của số A .

Trong tích A có 4 thừa số là 25; 50; 75; 100 mỗi thừa số này khi nhân với một số chẵn sẽ cho số có tận cùng bằng 2 chữ số 0.

Trong tích A có 8 thừa số là 10; 20; 30; 40; 60; 70; 80; 90 mỗi thừa số này khi nhân với một số bất kì sẽ cho số có tận cùng bằng 1 chữ số 0.

Trong tích A có 8 thừa số là 5; 15; 35; 45; 55; 65; 85; 95 mỗi thừa số này khi nhân với một số chẵn sẽ cho số có tận cùng bằng 1 chữ số 0.

Vì trong tích A số số chẵn luôn nhiều hơn các số liệt kê ở trên nên tích A có số chữ số 0 tận cùng là $4 \times 2 + 8 + 8 = 24$ (chữ số 0).

Vậy số B có thể có nhiều nhất 24 chữ số 0.

Bài 37. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2020 – 2021)

Tìm các chữ số x, y để $\overline{27xy}$ chia hết cho 3; 4 và 5.

Lời giải

Để số $\overline{27xy}$ chia hết cho 4 và 5 thì $y = 0$. Ta có số $\overline{27x0}$.

Để số $\overline{27x0}$ chia hết cho 3 thì $2 + 7 + x + 0 = 9 + x$ chia hết cho 3.

Suy ra $x = 0; x = 3; x = 6; x = 9$. Khi đó ta có các số là 2700; 2730; 2760; 2790.

Trong 4 số này chỉ có 2 số là 2700 và 2760 chia hết cho 4.

Vậy $x = 0, y = 0$ hoặc $x = 6, y = 0$.

Bài 38. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2021 – 2022)

Cho $a = \overline{77\dots 7}$ (có 2022 chữ số 7). Hỏi a không chia hết cho số nào sau đây: 7; 77; 232; 63?

Lời giải

Vì các chữ số của số a đều là 7 nên a chia hết cho 7.

Vì a là số có 2022 chữ số đều bằng 7 nên tổng các số đứng ở vị trí lẻ bằng tổng các số đứng ở vị trí chẵn. Do đó a chia hết cho 11. Suy ra a chia hết cho 77.

Vì a là số lẻ mà 232 là số chẵn nên a không chia hết cho 232.

Vì tổng các chữ số của a là $2022 \times 7 = 14154$ không chia hết cho 9 nên a không chia hết cho 9.

Do đó a không chia hết cho 63.

Vậy a không chia hết cho 232 và 63.

Bài 39. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2022 – 2023)

Cho các số: 90; 105; 36; 1990; 115; 2022; 2345; 2011; 1989. Hỏi có bao nhiêu số chia hết cho 5 trong các số trên?

Lời giải

Có 5 số chia hết cho 5 là: 90; 105; 1990; 115; 2345.

Bài 40. (Đề Lương Thế Vinh năm học 2023 – 2024)

Tìm các số chia hết cho 2 và 5 trong các số sau:

35; 120; 68; 250; 222.

Lời giải

Các số chia hết cho 2 và 5 có chữ số tận cùng là 0 nên các số cần tìm là:

120 và 250.

Bài 41. (Đề Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Cho số $\overline{a123456789b}$ chia hết cho 8 số trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Tìm tất cả các giá trị a, b.

Lời giải

Giả sử, $\overline{a123456789b}$ là số chia hết cho 5 suy ra $b = 0$ hoặc $b = 5$.

+ Nếu $b = 0$, ta được số $\overline{a1234567890}$ suy ra $\overline{a1234567890}$ không chia hết cho 4 và không chia hết cho 8.

→ Mâu thuẫn với giả thiết $\overline{a123456789b}$ chia hết cho 8 số trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

+ Nếu $b = 5$, ta được số $\overline{a1234567895}$ suy ra $\overline{a1234567895}$ không chia hết các số 2, 4, 6, 8

→ Mâu thuẫn với giả thiết $\overline{a123456789b}$ chia hết cho 8 số trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Do đó, $\overline{a123456789b}$ là một số không chia hết cho 5.

Hay $\overline{a123456789b}$ chia hết cho các số 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Vì $\overline{a123456789b}$ chia hết cho 8 nên $\overline{89b}$ chia hết $c \overline{a1234567896}$ ho 8, suy ra $\overline{9b}$ chia hết cho 8.

Do đó $b = 6$.

Khi đó, ta được số $\overline{a1234567896}$ cũng chia hết cho các số 2, 4.

Để chia hết cho 3, 9 ta cần tìm a để $\overline{a1234567896}$ chia hết cho 9.

→ $(a + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 6)$ chia hết cho 9

→ $(a + 51)$ chia hết cho 9

→ $a = 3$.

Với $a = 3, b = 6$ ta được số 31234567896 chia hết cho cả 6 và 7 (thỏa mãn).

Vậy $a = 3; b = 6$.

Bài 42. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2020 – 2021)

Tìm x và y sao cho $\overline{4x89y}$ chia hết cho 2; chia 5 dư 1 và chia hết cho 9.

Lời giải

Bài toán về dấu hiệu chia hết, chia có dư.

$\overline{4x89y}$ chia hết cho 2 nên y là số chẵn, $\overline{4x89y}$ chia 5 dư 1 nên $y = 1$ hoặc 6.

Vậy $y = 6$.

$\overline{4x896}$ chia hết cho 9 nên $4 + x + 8 + 9 + 6 = 27 + x$ chia hết cho 9

→ $x = 0$ hoặc 9.

Vậy $x = 0$ và $y = 6$ hoặc $x = 9$ và $y = 6$.

Bài 43. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2021 – 2022)

Cho số có hai chữ số chia hết cho 3. Biết rằng tổng hai chữ số của số đó bằng hai lần hiệu hai chữ số đó. Tìm các số đó.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{ab} ($a, b < 10, a$ khác 0)

Ta có: $a + b = 2 \times (a - b) \rightarrow 3 \times b = a$

+) Chọn $b = 1 \rightarrow a = 3$ (loại vì $1 + 3 = 4$ không chia hết cho 3)

+) Chọn $b = 2 \rightarrow a = 6$ (loại vì $2 + 6 = 8$ không chia hết cho 3)

+) Chọn $b = 3 \rightarrow a = 9$ (thỏa mãn vì $3 + 9 = 12$ chia hết cho 3)

Vậy ta được số: 39 hoặc 93.

Bài 44. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2021 – 2022)

Một số tự nhiên được viết bằng 2020 chữ số 7 liền nhau. Hỏi phải cộng thêm vào số đó ít nhất bao nhiêu đơn vị để được số chia hết cho 12?

Lời giải

Gọi số phải cộng thêm là m .

Kết quả sau khi cộng thêm chia hết cho 12 tức là chia hết cho 3 và 4.

Số ban đầu chia 4 dư 1 nên khi cộng thêm m được kết quả chia hết cho 4 thì m chia 4 dư 3.

Số ban đầu chia 3 dư 1 nên khi cộng thêm m được kết quả chia hết cho 3 thì m chia 3 dư 2.

Vậy ta cần tìm số bé nhất vừa chia 4 dư 3, vừa chia 3 dư 2. Đó là 11.

Bài 45. (Đề thi mẫu Archimedes năm học 2023 – 2024)

Cho số $A = 1617181920212223$. Xóa đi 7 chữ số để được số có 9 chữ số chia hết cho 9. Số nhỏ nhất có thể thu được sau khi xóa là bao nhiêu?

Lời giải

Để số thu được là số nhỏ nhất có 9 chữ số chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của số đó phải nhỏ nhất.

Trường hợp 1: Tổng các chữ số của số đó bằng 9 (loại vì không tồn tại số thỏa mãn).

Trường hợp 2: Tổng các chữ số của số đó bằng 18.

Trường hợp này, ta thấy số nhỏ nhất lập được là: 111190122.

Vậy số nhỏ nhất có thể thu được sau khi xóa là: 111190122.

Bài 46. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 1 năm học 2024 – 2025)

Từ 4 chữ số 0; 1; 2; 3 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3?

Lời giải

Nhận xét: Một số chia hết cho 3 nếu tổng các chữ số của số đó chia hết cho 3.

Từ 4 chữ số đã cho có 2 bộ gồm 3 chữ số có tổng các chữ số chia hết cho 3 là: (0; 1; 2) và (1; 2; 3).

- Từ bộ 3 chữ số (0; 1; 2), khi lập số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3:

Có 2 cách chọn chữ số hàng trăm (khác 0), 2 cách chọn chữ số hàng chục (khác chữ số hàng trăm) và 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị (khác chữ số hàng trăm và hàng chục).

→ Lập được $2 \times 2 \times 1 = 4$ (số).

- Từ bộ 3 chữ số (1; 2; 3), khi lập số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3:

Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm, 2 cách chọn chữ số hàng chục (khác chữ số hàng trăm) và 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị (khác chữ số hàng trăm và hàng chục).

→ Lập được $3 \times 2 \times 1 = 6$ (số).

Vậy lập được tất cả số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$4 + 6 = 10 \text{ (số).}$$

Bài 47. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Một cửa hàng có 6 hòm hàng với khối lượng 316 kg, 327 kg, 336 kg, 338 kg, 349 kg và 351 kg.

Cửa hàng đó đã bán 5 hòm hàng và còn thừa lại một hòm hàng, trong đó khối lượng hàng bán

được trong buổi sáng gấp bốn lần khối lượng hàng bán được trong buổi chiều. Hỏi, hôm hàng còn lại có khối lượng bao nhiêu ki-lô-gam?

Lời giải

Vì khối lượng hàng bán được trong buổi sáng gấp bốn lần khối lượng hàng bán được trong buổi chiều nên tổng khối lượng hàng đã bán được gấp năm lần khối lượng hàng bán được trong buổi chiều.

Hay tổng khối lượng hàng đã bán được ở 5 hòm là một số chia hết cho 5.

Tổng khối lượng hàng của 6 hòm là:

$$316 + 327 + 336 + 338 + 349 + 351 = 2017 \text{ (kg)}.$$

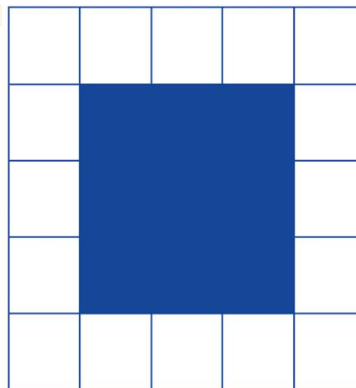
Vì tổng khối lượng hàng của 6 hòm là một số chia cho 5 dư 2, mà tổng khối lượng hàng đã bán được ở 5 hòm là một số chia hết cho 5 nên khối lượng của hòm hàng còn lại là một số chia cho 5 dư 2.

Trong 6 hòm đã cho, chỉ có hòm có khối lượng 327 kg có 327 là số chia cho 5 dư 2 nên hòm hàng còn lại có khối lượng là 327 kg.

Đáp số: 327 kg

Bài 48. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông như hình vẽ bên dưới. Người ta điền các số tự nhiên 1, 2, ..., 16 vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông được điền đúng một số và mỗi số chỉ được dùng đúng một lần, sao cho tổng của tất cả các số ở mỗi hàng và ở mỗi cột là như nhau (có tất cả hai hàng và hai cột). Gọi N là tổng của bốn số được điền vào bốn ô vuông ở góc của bảng. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của N .



Lời giải

Gọi T là tổng của tất cả các số ở mỗi hàng hay ở mỗi cột.

Khi đó ta có:

$$T \times 4 = N + (1 + 2 + 3 + \dots + 16)$$

$$T \times 4 = N + (1 + 16) \times 16 : 2$$

$$T \times 4 = N + 136.$$

Vì $T \times 4$ và 136 đều chia hết cho 4 nên N phải chia hết cho 4.

Tổng của 4 số nhỏ nhất trong các số tự nhiên từ 1 đến 16 là: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Do đó N lớn hơn hoặc bằng 10.

Vì N chia hết cho 4 và N lớn hơn hoặc bằng 10 nên N nhỏ nhất bằng 12.

Khi đó:

- Bốn số được điền vào bốn ô vuông ở góc của bảng có thể là 1, 2, 3, 6 (vì $1 + 2 + 3 + 6 = 12$).

- Tổng của tất cả các số ở mỗi hàng hay ở mỗi cột là: $(12 + 136) : 4 = 37$.

Ví dụ ta có cách sắp xếp các số 1, 2, 3, ..., 16 vào bảng thoả mãn yêu cầu bài toán với N nhỏ nhất bằng 12 như sau:

1	5	13	16	2
15				9
7				11
8				12
6	4	10	14	3

Bài 49. (Đề thi mẫu Archimedes Vòng 2 năm học 2024 – 2025)

Một số tự nhiên được gọi là số *palindrome* nếu đọc theo chiều xuôi hay chiều ngược thì đều như nhau (chẳng hạn, 131, 1221, 14841,... là các số *palindrome*). Một số tự nhiên có sáu chữ số \overline{abcdef} được gọi là số thú vị nếu \overline{cd} chia hết cho \overline{ab} và \overline{ef} chia hết cho \overline{cd} (chẳng hạn 124896, 102040,... là các số thú vị). Một số tự nhiên có sáu chữ số được gọi là số *palindrome* thú vị nếu nó vừa là số *palindrome* vừa là số thú vị. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số là số *palindrome* thú vị.

Lời giải

Số tự nhiên có sáu chữ số là số *palindrome* có dạng \overline{abccba} (a, b, c là các chữ số và a khác 0).

Để \overline{abccba} là số thú vị thì \overline{cc} chia hết cho \overline{ab} và \overline{ba} chia hết cho \overline{cc} .

Vì \overline{ba} chia hết cho \overline{cc} suy ra $b = a$. Khi đó ta được số \overline{aaccaa} .

Vì \overline{cc} chia hết cho \overline{aa} và \overline{aa} chia hết cho \overline{cc} nên $\overline{aa} = \overline{cc}$. Suy ra: $a = c$.

Do đó số tự nhiên có sáu chữ số là số *palindrome* thú vị nếu số đó có tất cả các chữ số giống nhau và khác 0.

Vậy các số tự nhiên có sáu chữ số là số *palindrome* thú vị là:

111111 ; 222222 ; 333333 ; 444444 ; 555555 ; 666666 ; 777777 ; 888888 ; 999999.

Bài 50. (Đề Ngôi Sao Hà Nội - Hoàng Mai Vòng 2, năm học 2024 – 2025)

Viết các số từ 31 đến 93 liên tiếp sao cho được dãy số 313233...9293. Ta cộng ba chữ số liền kề với nhau rồi điền các tổng đó thành một dãy số mới. Cứ như vậy đến khi còn đúng một số có một chữ số duy nhất. Nếu ta cộng các chữ số mà thừa ra hai chữ số thì ta cộng hai chữ số đó lại và lấy xuống dãy mới. Nếu còn 1 chữ số thì ta chuyển số đó xuống dãy mới luôn. Tìm số có một chữ số cuối cùng.

Lời giải

Từ số 31 đến 93 có số các số là: $(93 - 31) : 1 + 1 = 63$ (số).

Tổng tất cả các số từ 31 đến 93 là: $(31 + 93) \times 63 : 2 = 62 \times 63$, tổng này chia hết cho 9 vì 63 chia hết cho 9.

Do đó, tổng tất cả các chữ số trong dãy số 313233...9293 là một số chia hết cho 9.

Vì thế 1 chữ số cuối cùng nhận được của dãy số mới là số chia hết cho 9.

Vậy chữ số đó là 0 hoặc 9, mà chữ số đó không thể là 0 nên chữ số đó là 9.

Đáp số: 9.

Bài 51. (Đề Marie Curie năm học 2022 – 2023)

Cho ba chữ số 2; 3; 5. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 5 được tạo thành từ ba chữ số trên?

A. 9 số.

B. 7 số.

C. 2 số.

D. 6 số.

Lời giải

Các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 5 lập được từ các chữ số 2; 3; 5 là

555; 225; 335; 235; 325; 255; 525; 355; 535.

Vậy có 9 số thoả mãn yêu cầu.

Chọn A.

Bài 52. (Đề Marie Curie năm học 2022 – 2023)

Số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 9 là

A. 9870.

B. 9876.

C. 9873.

D. 9999.

Lời giải

Số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 9 là 9873.

Chọn C.