MỤC LỤC

HỆ THỐNG ĐỀ THI

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ và $Q=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4\sqrt{x}}{x-9}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$

3) Với $P=A.B$, tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $78m$. Nếu giữ nguyên chiều dài và tăng chiều rộng thêm $2m$ thì diện tích mảnh vườn sẽ tăng $48\ m^2$. Xác định chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn.

2) Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình trụ cao $20\ cm$, đường kính đáy $10\ cm$. Tính thể tích của hộp đựng thực phẩm? (Bỏ qua bề dày của vỏ hộp và lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{x+2}-3(y-1)=5\\ 3\sqrt{x+2}+(y-1)=7\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2mx-3=0$

a) Giải phương trình khi $m=-1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn điều kiện $x_1<x_2$ và $|x_2|-|x_1|=2024$.

Bài IV (3,0 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Lấy M nằm giữa hai điểm O và B, kẻ dây CD vuông góc với AB tại M. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AC ($E\ne A$ và $E\ne C$), N là giao điểm của BE và CD.

1) Chứng minh $AMNE$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh hai tam giác MNB đồng dạng với tam giác EAB và $AC^2+BE.BN=4R^2$.

3) Kẻ dây $.DK$. song song với dây BE. Chứng minh AK vuông góc với CE.

Bài V (0,5 điểm): Cho hai số thực $a,b>0$ và $a+b=\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{4b}+2023$.

----------------------------- HẾT -----------------------------

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+4}{x-4}$ với $x>0; x\neq 4$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị của x thoả mãn $\left|P\right|=P$.

Bài II (2,0 điểm):

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?
2) Một lon nước ngọt hình trụ có bán kính đáy bằng $2,5\ cm$, chiều cao bằng $12\ cm$. Tính thể tích của lon nước ngọt hình trụ đó (Lấy $\pi\approx 3,14$)

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+2\sqrt{y}=8\\ \dfrac{11}{x-1}-3\sqrt{y}=2\end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai: $x^2-4x+m-1=0$ (m là tham số)
Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+7$

Bài IV (3,0 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

1) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp
2) Chứng minh $DA.DE=DB.DC$
3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài V (0,5 điểm): Giải phương trình $x^2+6x+2=(2x+2)\sqrt{x^2+5}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $N = \left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ với $x \ge 0; x \ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức M tại $x = 36$
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tìm giá trị của x thỏa mãn $M.N = -\sqrt{x} - 3$.

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Khi thực hiện, do cải tiến kĩ thuật nên mỗi tuần họ trồng vượt mức 5 ha so với kế hoạch. Vì vậy lâm trường đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?
2) Một chiếc nón lá có đường sinh bằng 30 cm, đường kính đáy bằng 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó.

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(\mathrm{P}): \mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ và đường thẳng $(\mathrm{d}): y = mx + m + 1$
a) Khi $m = 2$, không vẽ đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về bên phải của trục tung.

Bài IV (3,0 điểm): Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.
1) Chứng minh: Bốn điểm A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn.
2) Chứng minh: tam giác AMN và tam giác ACB đồng dạng.
3) Đường thẳng NM cắt đường thẳng BC tại P. Chứng minh: $PH^2 = PB.PC$.

Bài V (0,5 điểm): Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{3}{2}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+6}{x-4}$ với $x\ge 0; x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị âm

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Khôi đi xe đạp từ nhà đến trường trên quãng đường dài $4km$. Khi đi từ trường về nhà vẫn trên con đường đó, Khôi đạp xe với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình lúc đi là $2km/h$. Tổng thời gian đạp xe cả đi cả về của Khôi là 44 phút. Tính vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường

2) Một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy là $15cm$ và diện tích xung quanh của khúc gỗ là $2400\pi\ (m^2)$. Tính chiều cao của hinh trụ

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-3}+\sqrt{y-5}=2\\ 3\sqrt{x-3}-2\sqrt{y-5}=1\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+3$

a) Chứng minh với mọi giá trị m, đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$

b) Tìm m để $x_1^2=4-mx_2$

Bài IV (3,0 điểm): Từ điểm M cố định nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d thay đổi đi qua M, cắt đường tròn (O) tại hai điểm N, P sao cho $MN<MP$. Gọi K là trung điểm của NP

1) Chứng minh năm điểm A, M, B, O, K cùng thuộc một đường tròn

2) Chứng minh KM là tia phân giác của góc AKB

3) Tia BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác MPQ là lớn nhất

Bài V (0,5 điểm): Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $K=a\sqrt{3+bc}+b\sqrt{3+ac}+c\sqrt{3+ab}$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $Q=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\neq 1$

1) Tính giá trị của Q khi $x=16$

2) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\le Q$.

Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Phát động thi đua chào mừng 20 năm ngày thành lập quận Long Biên, hai phường Ngọc Thụy và Phúc Đồng tham gia lắp đặt camera để đảm bảo an ninh đô thị. Trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera. Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên cả hai phường đã lắp được 200 chiếc. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi phường lắp được bao nhiêu chiếc camera?

2) Một hộp sữa đặc có dạng một hình trụ với đường kính đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Tính thể tích của hộp sữa đó. (Lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{2}=4\\ \dfrac{4}{x}-3\sqrt{y-2}=-2\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=(3-2m)x-4$.

a) Chứng minh rằng (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (P) và (d).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\left(1-x_1^2\right)\left(1-x_2^2\right)-2x_1-2x_2$.

Bài IV: (3,0 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD với (O) sao cho $MC<MD$ và tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Kẻ AB cắt MD tại I, cắt MO tại H. Chứng minh $EA.EB=EI.EM$ và $\widehat{MHC}=\widehat{OCE}$.

3) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt AE tại K. Chứng minh $IK\,//\,AC$.

Bài V: (0,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3}{b+4}\le\dfrac{c+1}{c+3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=(a+1)(b+1)(c+1)$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4$

1) Tính giá trị của A khi $x=64$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P\ge\dfrac{2}{x+2}$

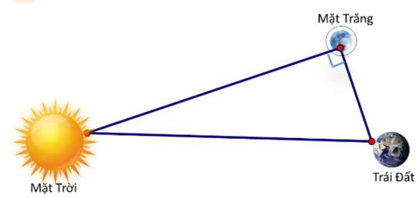
Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu tăng chiều rộng thêm 2m, giảm chiều dài đi 1m thì diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó

2) Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là khoảng cách lý tưởng giúp Trái Đất nhận được lượng nhiệt và ánh sáng phù hợp, từ đó giúp sự sống trên Trái Đất tồn tại và phát triển

Trong một số trường hợp của thiên văn học, người ta xem Trái Đất, Mặt Trời, Mặt Trăng là ba chất

điểm. Khi Trái Đất E , Mặt Trăng M và Mặt trời S tạo thành một góc vuông $\widehat{EMS}$ thì người ta đo được góc $\widehat{SEM}=89,85°$. Biết khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng là $384400\ km$. Em hãy tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời. *(Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*



Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}4|x+2|-\dfrac{3}{y-1}=1\\ |x+2|+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{5}{6}\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=2x-1$ và $(d'): y=-mx+5$, với m là tham số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng trên cắt nhau

b) Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau. Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d'). Tìm tất cả các giá trị của m để x và y là hai số đối nhau

Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). AD, BE, CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O). Chứng minh $AD.AM=AB.AC$

3) Gọi P là giao điểm của AH và EF. I là giao điểm của AM và BC. K là trung điểm của BC. Chứng minh: H, K, M thẳng hàng và $PI\,//\,HK$.

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm a, b thoả mãn $a+b=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b+1}+\sqrt{b^2+a+1}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}+14}{4-x}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$
2) Rút gọn biểu thức B
3) Xét biểu thức $P=A.B$. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $\sqrt{2P+3}=P$.

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng $12m$ và diện tích mảnh đất bằng $85m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất theo đơn vị mét?
2) Một quả địa cầu hành chính có đường kính bằng $33cm$. Tính diện tích bề mặt của quả địa cầu, lấy $\pi\approx 3{,}14$.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=4\\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+m^2+4$
a) Với $m=2$, tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).
b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại điểm $A(x_1;y_1)$ nằm bên trái trục tung và điểm $B(x_2;y_2)$ nằm bên phải trục tung sao cho $|x_1|-|x_2|=3$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường kính AD, lấy I là trung điểm của đoạn thẳng MO, gọi C là hình chiếu vuông góc của I lên AO.
1) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn
2) Đường thẳng vuông góc với MO tại điểm I cắt đường thẳng OB tại điểm E. Chứng minh $OB.OE=\dfrac{1}{2}OM^2$.
3) Chứng minh ΔIME đồng dạng với ΔCOI và $CE\perp MD$.

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{y}{2-y}+\dfrac{z}{2-z}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right)$ với $x>0;\ x\ne 1$

1) Tính A biết $x=16$

2) Chứng minh rằng $B=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\ne 1$

3) Tìm giá trị nguyên của x để $P=A:B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Ở một siêu thị, giá niêm yết ban đầu của một cái bàn là và một cái quạt máy có tổng số tiền là $850\ 000$ đồng. Sau đó siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của một cái bàn là và một cái quạt máy trên đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết ban đầu. Do đó khách hàng tiết kiệm hơn được $125\ 000$ đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá niêm yết ban đầu của mỗi sản phẩm trên là bao nhiêu ?

2) Ông An muốn sơn bên ngoài một toà nhà hình hộp chữ nhật có chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao 15m (không sơn trần). Biết diện tích các cửa chiếm 10% diện tích xung quanh toà nhà và giá tiền sơn $1m^2$ tường là $20\ 000$ đồng. Hỏi ông An dự kiến sơn toà nhà hết bao nhiêu tiền?

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{8}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=5\\ \frac{4}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{2y-1}=3\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

c) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1 , x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{5}$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B,C là các tiếp điểm), H là giao điểm của AO và BC. Trên cung nhỏ BC lấy điểm D sao cho $CD<BD$, tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Gọi I là trung điểm của DE.

1) Chứng minh 5 điểm A,B,O,I,C cùng thuộc một đường tròn

2) Gọi K là giao điểm của BC và DE. Chứng minh IA là phân giác của $\widehat{BIC}$ và $AK.AI=AD.AE$

3) Qua D kẻ đường thẳng song song song AB cắt BC tại M. Đường thẳng ME lần lượt cắt (O) và đường thẳng AB tại các điểm P và N (P khác E). Chứng minh: N là trung điểm của AB và $\widehat{APN}=\widehat{ICB}$

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+2c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+ac-4bc$.

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P=A.B$ nhận giá trị là số nguyên

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Hai người thợ, nếu cùng làm chung một công việc thì sau 15 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\dfrac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người cần bao lâu sẽ xong công việc đó?

2) Một hình nón có bán kính đáy bằng $5cm$ và diện tích xung quanh là $65\pi\, cm^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\dfrac{2}{|x-1|}+3y=5\\ \dfrac{1}{|x-1|}-2y=-1\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-2mx-m^2-2=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2-2|x_1|-3x_1x_2=3m^2+3m+4$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB, lấy điểm H thuộc đường kính AB, qua điểm H kẻ dây CD vuông góc với đường kính AB, lấy điểm E thuộc cung nhỏ BD (E khác B và D); AE cắt CD tại điểm F.

1. Chứng minh: Tứ giác $BEFH$ nội tiếp.
2. Chứng minh: $CD^2=4.AH.HB$
3. Đường thẳng đi qua H song song với CE, cắt đường thẳng AE và BE lần lượt tại I và K. Gọi G là giao điểm của DE và IK, M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh: $DI\perp AE$ và ba đường thẳng CI, MG, BE đồng quy.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{x}{1+y^2}+\dfrac{y}{1+z^2}+\dfrac{z}{1+x^2}+\dfrac{3}{2}xyz$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;\ x\neq 4;\ x\neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=36$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người cùng làm một công việc thì sau 7 giờ 12 phút hoàn thành xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\dfrac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc ?

2) Một người thợ làm một cái bồn inox hình trụ chứa đầy $3m^3$ nước, biết chiều cao của bồn là $1,5m$. Hỏi đường kính đáy của bồn nước là bao nhiêu m? (*lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2, bỏ qua độ dày của vỏ bình*)

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2}\\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2\end{cases}$

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=4\\ x-my=1\end{cases}$ (với m là tham số)

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thoả mãn x và y là hai số đối nhau.

Bài IV: (3,5 điểm) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Kẻ $OH\perp d$ tại H. Điểm A thuộc d và không trùng với điểm H. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B và C là các tiếp điểm). BC cắt OA, OH lần lượt tại M và N. Đoạn thẳng OA cắt (O) tại I

1) Chứng minh 4 điểm O,B,A,C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $OM.OA=ON.OH$.

3) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

4) Chứng minh rằng khi điểm A di động trên đường thẳng d thì đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V: (0,5 điểm) Cho $x>0$, $y>0$ và $x+y\leq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{y^2+xy}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x>0;\, x\neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=25$.
2) Rút gọn A.
3) Tìm các số nguyên x để $\sqrt{AB}<\dfrac{2}{3}$.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc không đổi, hai địa điểm cách nhau 30km. Khi đi từ B về A người đó chọn đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì vậy, lúc về người đó đi với vận tốc lớn hơn vận tốc đi là 3km/h. Nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi của người đó.
2) Một quả bóng hình cầu có diện tích bề mặt là $144\pi\ cm^2$. Tính thể tích của quả bóng đó? (Lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\dfrac{3x}{x+y}=-2 \\ 3\sqrt{x}+\dfrac{x}{x+y}=8 \end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx+1$ (với m là tham số).
a) Chứng tỏ rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $\sqrt{x_1}-x_1.|x_2|=1$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định nhỏ hơn đường kính, A là điểm di động trên cung lớn BC ($AB<AC$ và ΔABC nhọn). Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC.
1) Chứng minh rằng: Tứ giác $ACDF$ nội tiếp.
2) Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB tại P và cắt AC tại Q. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta AQP$.
3) Gọi N là trung điểm BC và EF cắt BC tại M. Chứng minh ΔDFP cân tại D và $MF.ME=MD.MN$.

Bài V: (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{b^2c+1}+\dfrac{b}{c^2a+1}+\dfrac{c}{a^2b+1}$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=16$

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$

3) Cho $P=A:B$. Tìm x để $P<\dfrac{1}{2}$

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất mỗi ngày tăng 10 sản phẩm. Vì thế không những hoàn thành sớm kế hoạch 1 ngày, mà còn vượt mức 100 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phải làm bao nhiêu sản phẩm.

2) Một chiếc thùng hình trụ có đường kính đáy là 40cm được đựng đầy nước. Sau khi múc ra 30 lít nước thì còn lại $\dfrac{2}{3}$ thùng. Tính chiều cao của thùng (lấy $\pi\approx 3,14$ và làm tròn đến đơn vị cm).

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{y-1}=3\\ 2\sqrt{x+2}-\dfrac{3}{y-1}=1\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2(m-1)x-m^2+3$ (với m là tham số)

a) Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Khi đó tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=8$

Bài IV: (3,0 điểm) Cho (O,R) đường kính AC, kẻ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy điểm M, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. MC cắt đường tròn tại D. AB cắt MO tại H.

1) Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp và $MB^2=MH.MO$

2) Chứng minh: $MC.MD=MH.MO$. Từ đó suy ra tứ giác $COHD$ nội tiếp.

3) Gọi I là giao điểm của BD với OM; K là giao điểm của AB với CD. Chứng minh ba đường thẳng MB, HC, IK đồng quy

Bài V: (0,5 điểm) Giải phương trình: $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 13

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x>0;x\neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

2) Chứng minh $B=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A.B$

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu ô tô chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến sớm hơn dự định 3 giờ, nếu ô tô chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

2) Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12cm, chiều cao 10cm. Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp sữa không tính phần mép nối (*kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân*)

Bài III: (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x+2)(2y-3)=6xy\\(4x+5)(y-5)=4xy\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-3x+m-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=9$

Bài IV: (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R$, C là điểm bất kì nằm trên đường tròn sao cho C khác A và $AC<AB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho: $\widehat{COD}=90°$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD

1) Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh: $FC.FA=FD.FB$

3) Gọi I là trung điểm của EF, chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

4) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Bài V: (0,5 điểm) Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 14

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2};Q=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}}$ với $x>0,x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{Q}{P}$.

3) Tìm x nguyên lớn nhất để $A<\dfrac{3}{4}$.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một công nhân được giao khoán sản xuất 120 sản phẩm trong thời gian nhất định. Trên thực tế, nhờ hợp lí hóa một số thao tác nên mỗi giờ người đó làm thêm được 3 sản phẩm nữa. Nhờ đó người công nhân hoàn thành công việc sớm hơn 2 giờ. Hỏi mỗi giờ người đó dự định làm bao nhiêu sản phẩm?

2) Một chiếc thang có chiều dài $6,7m$ được dựng tựa vào tường. Thang tạo với mặt đất góc 63^0. Tính chiều cao của đỉnh thang so với mặt đất *(Kết quả cuối cùng làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)*

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{y-2}=4\\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y-2}=5\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx-m^2+m+1$

a) Với $m=3$, xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|=4$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(\mathrm{O;R})$ và một đường thẳng d cắt (O) tại C,D. Lấy điểm M bất kỳ trên d sao cho $MC>MD$ và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O); A,B là các tiếp điểm. Gọi H là trung điểm CD. Chứng minh:

1) Năm điểm A,B,M,O,H cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $MA^2=MC\cdot MD$ và HM là tia phân giác của $\widehat{AHB}$.

3) Vẽ $DK // AM$ $(K\in AB)$. Chứng minh $HK // AC$.

Bài V: (0,5 điểm) Cho x,y là những số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+\sqrt{2}}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 15

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$, với $x>0, x\neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tìm $x\in\mathbb{N}$ để biểu thức $P=A\cdot B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Một đoàn xe cần vận chuyển hàng hóa thiết yếu tới các vùng có dịch. Nếu xếp mỗi xe 15 tấn thì còn thừa lại 5 tấn, còn nếu xếp mỗi xe 16 tấn thì chở được thêm 3 tấn nữa. Hỏi đoàn xe phải chở bao nhiêu tấn hàng, và có mấy xe?
2) Môn bi sắt (tên gọi quốc tế là pétanque) là một trong 40 môn được thi đấu tại SEA Game 31 được tổ chức tại Việt Nam. Một viên bi sắt hình cầu có đường kính 8 cm thì thể tích của viên bi đó là bao nhiêu cm (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân, lấy $\pi=3{,}14$).

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x-2y}-\dfrac{3}{2x-1}=1\\ 3\sqrt{x-2y}+\dfrac{1}{2x-1}=7\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=5x-m-1$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 sao cho $2x_1=\sqrt{x_2}$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định không đi qua O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB<AC$, kẻ đường kính AK. Gọi E là hình chiếu của C lên AK, F là hình chiếu của B lên AK và M là trung điểm của BC.
1) Chứng minh bốn điểm C,O,E,M cùng thuộc một đường tròn.
2) Kẻ $AD\perp BC$ tại D. Chứng minh $AB\cdot AC=AD\cdot 2R$ và $DE // BK$.
3) Chứng minh ΔMDE cân và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Chứng minh $\sqrt{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}+\sqrt{\dfrac{2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\dfrac{2ac}{a^2+c^2}}\geq 1$.

---------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 16

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{5\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
2) Rút gọn biểu thức x.
3) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A\cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn không có nước thì sau 4 giờ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi mất bao lâu mới chảy đầy bể?
2) Chiếc nón do làng Chuông (Thanh Oai - Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng $30cm$, đường kính đáy bằng $40cm$. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón (lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m-3)x-m+4$
a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(1;1)$ với mọi giá trị của m.
b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Bài IV: (3,0 điểm) . Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ có đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.
a) Chứng minh tứ giác $DHEC$ nội tiếp và xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.
b) Trên cung nhỏ của (O) lấy điểm I sao cho $IC>IE, DI$ cắt CE tại N. Chứng minh $NI.ND=NE.NC$
c) Gọi M là giao điểm của EF với IC, đường thẳng HM cắt (O) tại K, KN cắt (O) tại G (G khác K), MN cắt BC tại T. Chứng minh $MN // AB$ và H, T, G thẳng hàng.

Bài V: (0,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a,b\ge 0$; $0\le c\le 1$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+bc+ac+3(a+b+c)$.

---------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 17

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0;x\neq 1;x\neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Cho $P=\dfrac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P|>P$.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

1) Quãng đường AB dài 60 km; một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường, người đó giảm vận tốc 5 km / h trên nửa quãng đường còn lại. Vì vậy, nguời đó đã đến B chậm hơn dự định 1 giờ. Tính vận tốc dự định của người đó.

2) Một cốc trà sữa hình trụ có đường kính đáy là 8 cm. Bạn Đăng bỏ thêm trân châu vào cốc thì thấy trà sữa dâng lên cao thêm 3 cm. Tính thể tích phần trân châu bạn Đăng đã bỏ thêm vào (trân châu chìm hoàn toàn trong trà sữa và không thấm nước; lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2|x-1|+\dfrac{3}{\sqrt{y+1}}=5\\ |x-1|-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) với $m=-3$.

b) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 2 .

Bài IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O), đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB>AC$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB; F thuộc AC).

1) Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh $AE\cdot AB=AF.AC$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

3) Gọi D là giao điểm của EF và $BC;K$ là giao điểm của AD với $(O);I$ là giao điểm của KF và BC. Chứng minh rằng $IH^2=IC\cdot ID$.

Bài V (0,5 điểm). Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+a}+\sqrt{b^2+b}+\sqrt{c^2+c}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

ĐỀ SỐ 18

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{11\sqrt{x}+6}{x-4}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$. 2) Chứng minh $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Đặt $P=A:B$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $|P+1|<3P$.

Bài II (2,5 điểm). 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Để tham dự đại hội liên đội trường Lương Thế Vinh, bạn Thu phải đi xe đạp từ cơ sở A sang cơ sở I trên quãng đường dài 6 km. Khi từ cơ sở I trở về cơ sở A, bạn vẫn đi theo con đường cũ nhưng đã tăng vận tốc thêm 3 km / h. Biết rằng tổng thời gian đạp xe cả khi đi và khi về của bạn là 54 phút. Tính vận tốc của bạn Thu khi đi từ cơ sở A sang cơ sở I.

2) Một bồn nước hình trụ được làm bằng i-nox có chiều cao $1,5m$ và diện tích đáy là $3,14\,m^2$ đang chứa một lượng nước bằng $\dfrac{1}{3}$ thể tích của bồn. Bác An muốn xả hết nước đi để cọ sạch bồn nên đã mở vòi nước ở đáy bồn cho nước chảy ra. Nếu mỗi giờ vòi chảy được $3m$ nước thì sau 30 phút bồn cạn hết nước chưa? (bỏ qua bề dày của bồn).

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}-\dfrac{3}{y+1}=-\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{8}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{9}{y+1}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=5x+3m-1$.

a) Khi $m=-1$, tìm tọa độ giao diểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên dương.

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B,C ; $MB<MC$). Gọi D,E,F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống các đường thẳng BC,CA,AB.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $MDBF, MDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{MDF}=\widehat{ACM}$, từ đó suy ra F,D,E thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Gọi P,Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N xuống các đường thẳng AB,BC. Chứng minh PQ vuông góc với EF.

Bài V (0,5 điểm). Với a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\geq 3 \text{ và } a^3+b^3+c^3\geq a^2+b^2+c^2$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

ĐỀ SỐ 19

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2x-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-4}-\dfrac{5-\sqrt{x}}{x-16}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}$ với $x\ge 0; x\ne 16$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Đặt $P=A.B$. Tìm x biết $\sqrt{2P-1}=P-2$.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông dài $136km$, sau đó chạy ngược dòng $91km$ trên khúc sông đó. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là $4km/h$ và tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là 7 giờ 30 phút.
2. Bạn Linh có một chiếc cốc thuỷ tinh có lòng là một hình trụ có chiều cao $15cm$ và bán kính đáy bằng $2,5cm$ đang đựng $\dfrac{2}{3}$ nước. Linh muốn thả các viên bi ve hình cầu có bán kính $1cm$ vào cốc để trang trí. Hỏi bạn có thể thả thêm vào đó nhiều nhất bao nhiêu viên bi để nước không bị tràn ra khỏi cốc?

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-10x+5y=16\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m+3$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8. Khi đó hãy tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).
3. Tìm m để phương trình $x^4+(3m-2)x^2-3m+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính CD của đường tròn $(O;R)$ (C khác A, C khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại các điểm E, F.
a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
b) Chứng minh bốn điểm C, D, F, E cùng thuộc một đường tròn (I). Gọi K là trung điểm của EF, chứng minh $AK\perp CD$.
c) Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để tam giác IEF có diện tích nhỏ nhất.

Bài V (0,5 điểm). Cho các số thực $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

ĐỀ SỐ 20

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x>0;x\neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm m để có x thoả mãn $A.B=m$

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Tháng thứ nhất hai đội sản xuất làm được 700 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 10% và đội II làm vượt mức 25% so với tháng thứ nhất, vì vậy cả hai đội đã làm được 830 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi đội làm được bao nhiêu sản phẩm?

2. Một lon nước ngọt hình trụ có thể tích bằng $108\pi\ cm^3$. Biết chiều cao của lon nước ngọt gấp hai lần đường kính đáy. Tính diện tích vật liệu cần dùng để làm một vỏ lon như vậy (bỏ qua diện tích phần ghép nối).

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{4}{x-y}+3\sqrt{y-1}=5\\ \dfrac{1}{x-y}-2\sqrt{y-1}=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(2m-1)x+8$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị m.

b) Tìm m để các khoảng cách từ A và B tới trục Oy có tỉ số bằng 2.

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC Trên tia đối của tia BC lấy điểm A cố định, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại A. Qua điểm M trên đường thẳng d (M khác A) kẻ các tiếp tuyến ME; MF của (O) ($E;F$ là tiếp điểm)

1. Chứng minh năm điểm A,M,E,O,F cùng thuộc một đường tròn
2. EF cắt MO và AC lần lượt tại H và K, MC cắt (O) tại D (D khác C). Chứng minh:

a) $MD.MC=ME^2=MH.MO$

b) AC là phân giác của góc EAF.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK cắt đường tròn đi qua năm điểm A,M,E,O,F tại I. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên d thì đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V (0,5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}$$

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4\sqrt{x}}{x-9}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$

3) Với $P=A.B$, tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}-3}{\sqrt{16}+2}=\dfrac{4-3}{4+2}=\dfrac{1}{6}$

Vậy $A=\dfrac{1}{6}$ khi $x=16$.

2) $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4\sqrt{x}}{x-9}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}+3\right)-2\left(\sqrt{x}-3\right)+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}+9-2\sqrt{x}+6+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$

$=\dfrac{5\sqrt{x}+15}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{5\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}.\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{5}{\sqrt{x}+2}$

Vì $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}\le \dfrac{5}{2}\Rightarrow 0<\dfrac{5}{\sqrt{x}+2}\le \dfrac{5}{2}$

Suy ra $0<P\le \dfrac{5}{2}$. Mà $P\in \mathbb{Z}\Rightarrow P\in \{1;2\}$

Với $P=1\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}=1\Leftrightarrow \sqrt{x}+2=5\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (loại)

Với $P=2\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}=2\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}+2\right)=5\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+4=5\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (thoả mãn)

Vậy $x=\dfrac{1}{4}$ thì P nguyên.

Bài II (2,0 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $78m$. Nếu giữ nguyên chiều dài và tăng chiều rộng thêm $2m$ thì diện tích mảnh vườn sẽ tăng $48\ m^2$. Xác định chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn.

2) Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình trụ cao $20\ cm$, đường kính đáy $10\ cm$. Tính thể tích của hộp đựng thực phẩm? (Bỏ qua bề dày của vỏ hộp và lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x và y (m)

(Điều kiện: $x > y > 0$)

Biết mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $78m$ nên ta có phương trình

$(x+y).2 = 78 \ \ (1)$

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu là $xy\ (m^2)$

Chiều rộng của mảnh vườn sau khi tăng 2m là $y+2\ (m)$

Giữ nguyên chiều dài và tăng chiều rộng thêm 2m thì diện tích mảnh vườn hình chữ nhật là $x(y+2)\ (m^2)$

Vì diện tích mảnh vườn tăng $48\ m^2$ nên ta có phương trình: $x(y+2) - xy = 48\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y).2 = 78\\ x(y+2) - xy = 48\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=39\\ xy+2x-xy=48\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=39\\ x=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=15\\ x=24\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là 24m và 15m.

2) Ta có $h = 20cm;\ d = 10cm \Rightarrow R = 5cm$

Thể tích hộp đựng thực phẩm là $V = \pi R^2 h \approx 20.5^2.3{,}14 \approx 1570\ (cm^3)$

Vậy thể tích hộp đựng đó khoảng $1570\ cm^3$

Bài III (2,5 điểm): 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{x+2} - 3(y-1) = 5\\ 3\sqrt{x+2} + (y-1) = 7\end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 3 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = -1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 < x_2$ và $|x_2| - |x_1| = 2024$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \geq -2$

Đặt $a = \sqrt{x+2}\ \ (a \geq 0)$ và $b = y - 1$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a-3b=5\\ 3a+b=7\end{cases}$

$\begin{cases}4a-3b=5\\ 3a+b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a-3b=5\\ 9a+3b=21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}13a=26\\ 3a+b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ 6+b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ (thoả mãn)

Suy ra $\begin{cases}\sqrt{x+2}=2\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=4\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;2)$.

2) $x^2-2mx-3=0$ (1)

a) Với $m=-1$ phương trình trở thành $x^2+2x-3=0$

$\Delta=2^2-4.1.(-3)=16>0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2.1}=1$; $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2.1}=-3$

Vậy với $m=-1$ phương trình có tập nghiệm là $S=\{1;-3\}$

b) Ta có $\Delta_{(1)}'=(-m)^2-1.(-3)=m^2+3>0$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=-3\end{cases}$

Vì $x_1x_2=-3<0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu

Mà $x_1<x_2\Rightarrow x_1<0<x_2$

Do đó $|x_2|-|x_1|=x_2-(-x_1)=x_2+x_1$

$\Rightarrow x_1+x_2=2024\Rightarrow 2m=2024\Leftrightarrow m=1012$

Vậy $m=1012$ thoả mãn đề bài

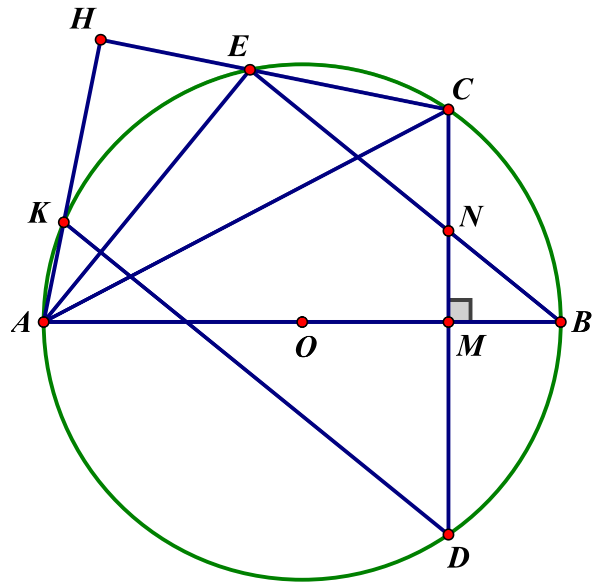
Bài IV (3,0 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Lấy M nằm giữa hai điểm O và B, kẻ dây CD vuông góc với AB tại M. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AC ($E\neq A$ và $E\neq C$), N là giao điểm của BE và CD.

1) Chứng minh $AMNE$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh hai tam giác MNB đồng dạng với tam giác EAB và $AC^2+BE.BN=4R^2$.

3) Kẻ dây DK song song với dây BE. Chứng minh AK vuông góc với CE.

Lời giải



1) Ta có E thuộc (O) đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AEB} = 90°$

Lại có $CD \perp AB$ tại $M \Rightarrow \widehat{NMA} = 90°$

Xét tứ giác $AMNE$ có $\widehat{AEN} + \widehat{AMN} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra $AMNE$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Xét ΔMNB và ΔEAB có

$\widehat{NMB} = \widehat{AEB} = 90°$; $\widehat{ABE}$ chung

$\Rightarrow \Delta MNB \backsim \Delta EAB\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{EB} = \dfrac{NB}{AB} \Rightarrow BE.BN = MB.AB$

Ta có C thuộc (O) đường kính $AB \Rightarrow \widehat{ACB} = 90°$

Xét ΔACB vuông tại C có CM là đường cao

$\Rightarrow AC^2 = AM.AB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Suy ra $AC^2 + BE.BN = AM.AB + MB.AB = AB(AM + MB) = AB^2 = 4R^2$

Vậy $AC^2 + BE.BN = 4R^2$

3) Gọi H là giao điểm của AK và CE

Xét (O) có $KD // BE \Rightarrow \overset{\frown}{KE} = \overset{\frown}{BD}$ (định lý)

Vì $AB \perp CD$ tại M nên B là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CD}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{KE}$

Lại có $\widehat{HAC} = \widehat{KAC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{KC} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{KE} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{BC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right)$

$\widehat{EAB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{EB} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{BC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{EAB}$

Xét (O) có $\widehat{HCA} = \widehat{EBA} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

Mà $\widehat{EBA} + \widehat{EAB} = 90^\circ$ (tam giác ABE vuông tại E)

Suy ra $\widehat{HCA} + \widehat{HAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$

$\Rightarrow AK \perp CE$ tại H

Bài V (0,5 điểm): Cho hai số thực $a, b > 0$ và $a + b = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 2023.$

Lời giải

$P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 2023 = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 4(a+b) + 2018 = \left(\frac{4}{a} + 4a\right) + \left(\frac{1}{4a} + 4b\right) + 2018$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có

$P \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.4a} + 2\sqrt{\frac{1}{4b}.4b} + 2018 = 2028$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1;\ b = \frac{1}{4}$

Vậy GTNN của $P = 2028$ khi $a = 1;\ b = \frac{1}{4}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+4}{x-4}$ với $x>0;\ x\ne 4$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị của x thoả mãn $|P|=P$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}}=\dfrac{3+4}{3}=\dfrac{7}{3}$

2) $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-2\right)+x+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$

Để $|P|=P\Leftrightarrow P\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}\ge 0$

Vì $\sqrt{x}\ge 0\,\forall x\in x>0;\ x\ne 4\Rightarrow \sqrt{x}+4>0$

$\Rightarrow \sqrt{x}-2>0\Leftrightarrow x>4$

Kết hợp ĐKXĐ ta có $x>4$.

Vậy $x>4$ thì $|P|=P$.

Bài II (2,0 điểm):

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

2) Một lon nước ngọt hình trụ có bán kính đáy bằng $2,5\ cm$, chiều cao bằng $12\ cm$. Tính thể tích của lon nước ngọt hình trụ đó (Lấy $\pi\approx 3,14$)

Lời giải

1) Gọi số sản phẩm số sản phẩm phân xưởng làm trong 1 ngày theo dự định là x (sản phẩm) $\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$

Số sản phẩm phân xưởng đó làm trong 1 ngày theo thực tế là $x+5$ (sản phẩm)

Thời gian để làm được 1100 sản phẩm theo dự định là $\dfrac{1100}{x}$ (ngày)

Thời gian để làm được 1100 sản phẩm theo thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày)

Vì phân xưởng hoàn thành trước kế hoạch 2 ngày ta có: $\frac{1100}{x}-\frac{1100}{x+5}=2$

$\Leftrightarrow \frac{1100(x+5)}{x(x+5)}-\frac{1100x}{x(x+5)}=2 \Rightarrow 1100(x+5)-1100x=2x(x+5) \Leftrightarrow x^2+5x-2750=0$

Giải PT ta được $x=50(TM); x=-55$ (Loại)

Vậy theo dự định mỗi ngày phân xưởng làm được 50 sản phẩm

2) Thể tích của lon nước ngọt hình trụ là $V=\pi r^2 h=\pi\cdot 2,5^2\cdot 12=75\pi \approx 75.3,14 \approx 235,5\left(\text{ cm}^3\right)$

Vậy thể tích của lon nước ngọt hình trụ khoảng $235,5\ cm^3$

Bài III (2,5 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{x-1}+2\sqrt{y}=8 \\ \frac{11}{x-1}-3\sqrt{y}=2 \end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai: $x^2-4x+m-1=0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=x_1x_2+7$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\neq 1; y\geq 0$

Đặt $a=\frac{1}{x-1}$; $b=\sqrt{y}$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$\begin{cases} 2a+2b=8 \\ 11a-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+6b=24 \\ 22a-6b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28a=28 \\ 22a-6b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{x-1}=1 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=9 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(\mathrm{x};\mathrm{y})=(2;9)$

2) $x^2-4x+m-1=0$ (1)

$\Delta'=(-2)^2-(m-1)=5-m$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 5-m>0 \Leftrightarrow m<5$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Theo đề bài $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2-7=0 \Rightarrow 4^2-3(m-1)-7=0 \Leftrightarrow m=4$ (thoả mãn)

Vậy $m=4$ thoả mãn đề bài.

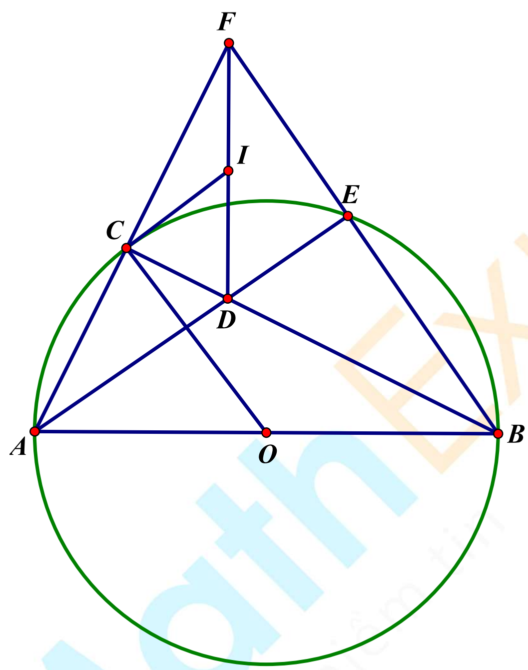
Bài IV (3,0 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

1) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp

2) Chứng minh $DA.DE = DB.DC$

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE.$ Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Lời giải



1) Ta có $E \in (O) \Rightarrow \widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{DEF} = 90°$

$F \in (O) \Rightarrow \widehat{AFB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{DCF} = 90°$

Xét tứ giác $FCDE$ có $\widehat{DEF} + \widehat{DCF} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra tứ giác $FCDE$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

2) Xét (O) có $\widehat{CAD} = \widehat{EBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

Xét ΔACD và ΔBED có $\widehat{CAD} = \widehat{EBD}$ (cmt); $\widehat{CDA} = \widehat{EDB}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BED\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DE} \Leftrightarrow DA.DE = DB.DC$

3) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE \Rightarrow I$ là trung điểm FD

Dễ dàng chứng minh D là trực tâm $\Delta FAB \Rightarrow FD \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{CAB}$) (1)

Xét ΔCFD vuông tại C có CI là trung tuyến

$\Rightarrow CI = IF = ID \Rightarrow \Delta IFC$ cân tại I và ΔICD cân tại I

$\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ mà $\widehat{ICF} + \widehat{ICD} = 90° \Rightarrow \widehat{ICD} + \widehat{IFC} = 90°$ (2)

Lại có $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ (vì ΔOBC cân tại O) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{ICD} + \widehat{OCB} = 90° \Rightarrow \widehat{OCI} = 90°$

$\Rightarrow CI$ là tiếp tuyến của (O) tại C

Bài V (0,5 điểm): Giải phương trình $x^2 + 6x + 2 = (2x+2)\sqrt{x^2+5}$.

Lời giải

$$x^2 + 6x + 2 = (2x+2)\sqrt{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 + 6x - 3 - (2x+2)\sqrt{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 + 3(2x-1) - (2x-1)\sqrt{x^2+5} - 3\sqrt{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+5} - 2x + 1\right)\left(\sqrt{x^2+5} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+5} = 2x-1 \\ \sqrt{x^2+5} = 3 \end{array}\right.$$

Giải ra ta được $x = 2$ hoặc $x = -2$

Vậy PT có tập nghiệm là $S = \{-2; 2\}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $M=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $N=\left(1+\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ với $x\ge 0;x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức M tại $x=36$

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị của x thỏa mãn $M.N=-\sqrt{x}-3$.

Lời giải

1) Thay $x=36$ (tmđk) vào biểu thức M ta có $M=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}+1}=\frac{6}{6+1}=\frac{6}{7}$

Vậy $M=\frac{6}{7}$ khi $x=36$

2) $N=\left(1+\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)=\left[1+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}\right].\left[1+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}\right]=\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)=1-x$

3)

$$M.N=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.(1-x)=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+1}=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow \sqrt{x}.\left(1-\sqrt{x}\right)=-\sqrt{x}-3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-x=-\sqrt{x}-3\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0$$

Vì $\sqrt{x}+1>0\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (tmđk)

Vậy $x=9$ thoả mãn đề bài.

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Khi thực hiện, do cải tiến kĩ thuật nên mỗi tuần họ trồng vượt mức 5 ha so với kế hoạch. Vì vậy lâm trường đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

2) Một chiếc nón lá có đường sinh bằng 30 cm, đường kính đáy bằng 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó.

Lời giải

1) Gọi số ha rừng lâm trường dự định trồng trong mỗi tuần là x $(ha;x>0)$

Thời gian trồng rừng theo theo kế hoạch là: $\frac{75}{x}$ (tuần)

Thời gian trồng rừng trên thực tế là: $\frac{80}{x+5}$ (tuần)

Vì thực tế hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần nên ta có phương trình $\frac{75}{x}-\frac{80}{x+5}=1$

$\Leftrightarrow x^2+10x-375=0\Leftrightarrow (x-15)(x+25)=0\Leftrightarrow x=15$ (thoả mãn) hoặc $x=-25$ (loại)

Vậy số ha rừng lâm trường dự định trồng trong một tuần là 15 ha.

2) Bán kính đáy của hình nón là $r = 40 : 2 = 20$ cm

Diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi rl = \pi \cdot 20.30 = 600\pi \left(\text{cm}^2\right)$

Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón nên diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó là: $600\pi \cdot 2 = 1200\pi \left(cm^2\right)$

Vậy diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó là $1200\pi\ cm^2$

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx + m + 1$

a) Khi $m = 2$, không vẽ đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về bên phải của trục tung.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 1$; $y \neq 1$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x-1}+\dfrac{6}{y-1}=7 \\ \dfrac{9}{x-1}-\dfrac{6}{y-1}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{x-1}=13 \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ 3-\dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} (tm)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;3)$

2a) Thay $\text{m} = 2$ vào $\text{y} = 2\text{x} + \text{m} + 1 \Rightarrow \text{y} = 2\text{x} + 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có

$$x^2 = 2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1$

Với $x=3 \Rightarrow y=9$

Vậy với $\text{m}=2$, giao điểm của (d) và (P) là $A(-1;1)$ và $B(3;9)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có

$x^2 = mx+m+1 \Leftrightarrow x^2-mx-m-1=0$ (1)

$\Delta = (-m)^2 - 4(-m-1) = m^2+4m+4 = (m+2)^2$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về bên phải của trục tung $\Leftrightarrow x_1 > 0$; $x_2 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn điều kiện đề bài

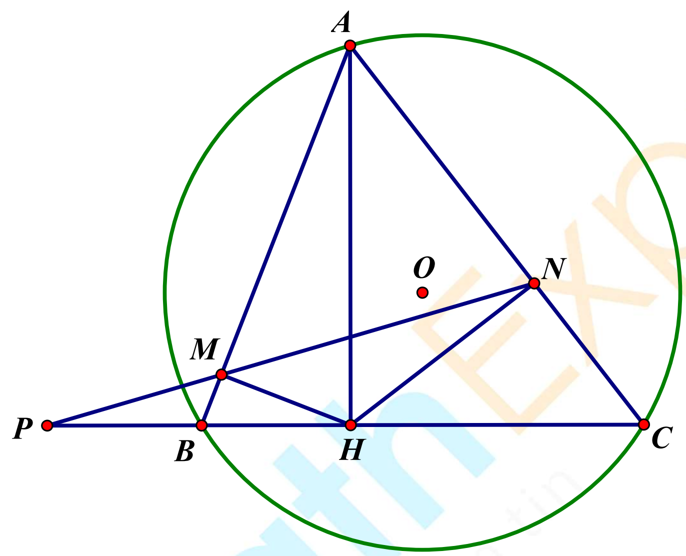
Bài IV (3,0 điểm): Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

1) Chứng minh: Bốn điểm A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: tam giác AMN và tam giác ACB đồng dạng.

3) Đường thẳng NM cắt đường thẳng BC tại P. Chứng minh: $PH^2 = PB.PC$.

Lời giải



1) Ta có $HM \perp AB \Rightarrow \widehat{AMH} = 90^\circ$; $\widehat{ANH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AMHN$ có $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp hay bốn điểm $\text{A}, \text{M}, \text{H}, \text{N}$ cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

2) Xét ΔAHB vuông tại H có HM là đường cao

$\Rightarrow AH^2 = AM.AB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

Xét ΔAHC vuông tại H có HN là đường cao

$\Rightarrow AH^2 = AN.AC$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM.AB = AN.AC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$

Xét ΔAMN và ΔACB có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$ (cmt) và $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB \ (c.g.c)$

3) Vì $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{AMN} = \widehat{PMB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{PCN}$

Xét ΔPMB và ΔPCN có $\widehat{CPN}$ chung và $\widehat{PMB} = \widehat{PCN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta PMB \backsim \Delta PCN \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{PM}{PC} = \dfrac{PB}{PN} \Leftrightarrow PM.PN = PB.PC$ (3)

Vì $\widehat{PMH} = 90^\circ + \widehat{PMB}$

$\widehat{PHN} = 90^\circ + \widehat{AHN} = 90^\circ + \widehat{PCN}$ (cùng phụ $\widehat{HAN}$)
Mà $\widehat{PMB} = \widehat{PCN}$ (cmt)
$\Rightarrow \widehat{PMH} = \widehat{PHN}$
Xét ΔPMH và ΔPHN có
$\widehat{MPB}$ chung và $\widehat{PMH} = \widehat{PHN}$ (cmt)
$\Rightarrow \Delta PMH \backsim \Delta PHN\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{PM}{PH} = \dfrac{PH}{PN} \Leftrightarrow PH^2 = PM.PN$ (4)
Từ (3) và (4) $\Rightarrow PH^2 = PB.PC$

Bài V (0,5 điểm): Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = (a+b)(a+c)$

Tương tự $1+b^2 = (b+a)(b+c)$; $1+c^2 = (c+a)(c+b)$

Ta có $\dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+c}$

$\dfrac{2b}{\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{2b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \le \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{b}{b+c}$

$\dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}} = \dfrac{2c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \le \dfrac{c}{a+b} + \dfrac{c}{b+c}$

$\Rightarrow \dfrac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{2b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{a+b}{a+b} + \dfrac{b+c}{b+c} + \dfrac{c+a}{c+a} = 3$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+6}{x-4}$ với $x\ge 0;x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$

2) Chứng minh $B=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị âm

Lời giải

1) Thay $x=49$ (tmdk) vào A ta có: $A=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}+2}=\frac{7}{9}$

Vậy với $x=49$ thì $A=\frac{7}{9}$

2) $B=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+6}{x-4}=\frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$B=\frac{\sqrt{x}-2+x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x+4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$B=\frac{(x+2)^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=A.B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Nhận xét $\sqrt{x}\ge 0\forall x\ge 0;x\ne 4$

Với $x=0$ thì $P=0$ (loại)

$P<0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \sqrt{x}-2<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<4$ (tmdk)

Bài II (2,5 điểm): 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Khôi đi xe đạp từ nhà đến trường trên quãng đường dài $4km$. Khi đi từ trường về nhà vẫn trên con đường đó, Khôi đạp xe với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình lúc đi là $2km/h$. Tổng thời gian đạp xe cả đi cả về của Khôi là 44 phút. Tính vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường

2) Một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy là $15cm$ và diện tích xung quanh của khúc gỗ là $2400\pi\ (m^2)$. Tính chiều cao của hinh trụ

Lời giải

1) Gọi vận tốc đạp xe trung bình của Khôi đi từ nhà đến trường là x $(km/h;x>0)$

Thời gian đạp xe của Khôi lúc đi từ nhà đến trường là: $\frac{4}{x}(h)$

Vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ trường về nhà là: $x+2(km/h)$

Thời gian đạp xe của Khôi lúc đi từ trường về nhà là: $\frac{4}{x+2}(km/h)$

Lập luận để có phương trình: $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=\frac{11}{15}$

Giải phương trình tìm được: $x=10$ (tmdk) hoặc $x=-\frac{12}{11}$ (loại)

Vậy vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường là 10km/h

2) Gọi h là chiều cao của khúc gỗ hình trụ. Theo công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ ta có: $S_{xq}=2\pi rh \Rightarrow h=\frac{S_{xq}}{2\pi r}$

Từ đó: $\Rightarrow h=\frac{2400\pi}{2\pi.15}=80(cm)$

Vậy chiều cao của hình trụ là $80cm$

Bài III (2,0 điểm): 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-3}+\sqrt{y-5}=2\\3\sqrt{x-3}-2\sqrt{y-5}=1\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+3$

a) Chứng minh với mọi giá trị m, đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$

b) Tìm m để $x_1^2=4-mx_2$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\geq 3; y\geq 5$

Đặt $\sqrt{x-3}=a;\sqrt{y-5}=b$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases}a+b=2\\3a-2b=1\end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-3}=1\\\sqrt{y-5}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=1\\y-5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$ (tmdk)

Tập nghiệm của hệ là $(x;y)=(4;6)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=mx+3 \Leftrightarrow x^2-mx-3=0$ (1)

Ta có $\begin{cases}\Delta=m^2+12>0\\x_1.x_2=a.c=1.(-3)=-3<0\end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ trái dấu

Vậy với mọi giá trị m, đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$

2b) Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-3\end{cases}$

Vì $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_1^2 = mx_1 + 3$

Theo đề bài ta có: $x_1^2 = 4 - mx_2 \Rightarrow mx_1 + 3 = 4 - mx_2$

$\Leftrightarrow m(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (tm)

Vậy với $m = \pm 1$ thì $x_1^2 = 4 - mx_2$

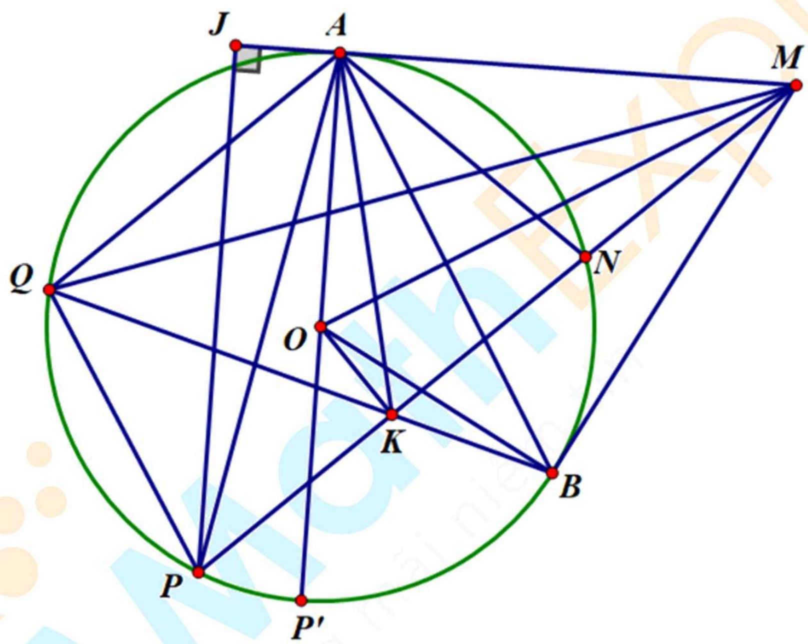
Bài IV (3,0 điểm): Từ điểm M cố định nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d thay đổi đi qua M, cắt đường tròn (O) tại hai điểm N, P sao cho $MN < MP$. Gọi K là trung điểm của NP

1) Chứng minh năm điểm A, M, B, O, K cùng thuộc một đường tròn

2) Chứng minh KM là tia phân giác của góc AKB

3) Tia BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác MPQ là lớn nhất

Lời giải



1) Chứng minh được $\widehat{MAO} = 90^0; \widehat{MBO} = 90^0; \widehat{OKM} = 90^0$

+ Tứ giác $OKMB$ có $\widehat{OKM} + \widehat{MBO} = 180^0$ và $\widehat{OKM}; \widehat{MBO}$ ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow OKMB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ 4 điểm O, K, M, B cùng thuộc một đường tròn (1)

+ Chứng minh tương tự $OAMB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ 4 điểm O, A, M, B cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 5 điểm A, M, B, O, K cùng thuộc một đường tròn

2) $AOKM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AKM} = \widehat{AOM}$ (3)

Từ (1) $\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BOM}$ (4)

Mà $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{BKM}$

$\Rightarrow KM$ là tia phân giác của $\widehat{AKB}$

3) Dễ chứng minh $\widehat{AQB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=\widehat{MOB}=\widehat{MKB}\Rightarrow AQ//MP$

$\Rightarrow S_{\Delta QMP}=S_{\Delta AMP}=\frac{1}{2}AM.PJ$ (J là hình chiếu vuông góc của P lên AM)

$\Rightarrow S_{\Delta QMP}$ đạt GTLN khi $PJ_{\max}\Leftrightarrow PJ=2R\Leftrightarrow P\equiv P'$ (P' đối xứng với A qua O)

Vậy $S_{\Delta MQP}\Leftrightarrow P\equiv P'$ hay đường thẳng d đi qua M và P'

Bài V (0,5 điểm): Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $K=a\sqrt{3+bc}+b\sqrt{3+ac}+c\sqrt{3+ab}$

Lời giải

* GTNN

Ta có $a,b,c\ge 0$

Suy ra:

$$K=a\sqrt{3+bc}+b\sqrt{3+ac}+c\sqrt{3+ab}\ge a\sqrt{3}+b\sqrt{3}+c\sqrt{3}=\left(a+b+c\right)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

Vậy $K_{\min}=3\sqrt{3}$ chẳng hạn khi $a=b=0;c=3$

* GTLN

Ta có: $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$K=a\sqrt{3+bc}=\frac{1}{2}2\sqrt{a}.\sqrt{3a+abc}\le\frac{1}{2}.\frac{4a+3a+abc}{2}=\frac{7a+abc}{4}$$

Chứng minh tương tự: $b\sqrt{3+ac}\le\frac{7b+abc}{4}$

$$c\sqrt{3+ab}\le\frac{7b+abc}{4}$$

$$\Rightarrow K\le\frac{7\left(a+b+c\right)+3abc}{4}\le\frac{7.3+3}{4}=6$$

Vậy $K_{\max}=6$ khi $a=b=c=1$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $Q=\dfrac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\neq 1$

1) Tính giá trị của Q khi $x=16$ 2) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\le Q$.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmdk) vào biểu thức Q ta được: $Q=\dfrac{7\sqrt{16}-2}{16+2\sqrt{16}}=\dfrac{7.4-2}{16+2.4}=\dfrac{26}{24}=\dfrac{13}{12}$

Vậy $Q=\dfrac{13}{12}$ khi $x=16$.

2) $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left[\dfrac{x-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right].\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$=\left[\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right].\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Để $P\le Q$ thì $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\le\dfrac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}-\dfrac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\le 0$

Mà $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)>0$ (với $x>0,\ x\neq 1$)

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (tmđk)

Vậy $x=4$

Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Phát động thi đua chào mừng 20 năm ngày thành lập quận Long Biên, hai phường Ngọc Thụy và Phúc Đồng tham gia lắp đặt camera để đảm bảo an ninh đô thị. Trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera. Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên cả hai phường đã lắp được 200 chiếc. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi phường lắp được bao nhiêu chiếc camera?

2) Một hộp sữa đặc có dạng một hình trụ với đường kính đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Tính thể tích của hộp sữa đó. (Lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi số camera phường Ngọc Thụy và phường Phúc Đồng lắp được trong tháng thứ nhất lần lượt là x (chiếc) và y (chiếc) (ĐK: $x,y\in\mathbb{N}^*$; $x<180$; $y<180$).

Do trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera nên ta có phương trình: $x+y=180 \quad (1)$

Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên:

Số camera phường Ngọc Thụy lắp được trong tháng thứ hai là: $x+10\%x=1,1x$ (chiếc).

Số camera phường Phúc Đồng lắp được trong tháng thứ hai là: $y+12\%y=1,12y$ (chiếc)

Do tháng thứ hai cả hai phường lắp được 200 chiếc nên ta có phương trình: $1,1x+1,12y=200$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=180 \\ 1,1x+1,12y=200 \end{cases}$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} x=80 \\ y=100 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy trong tháng thứ nhất, phường Ngọc Thụy lắp được 80 chiếc camera, phường Phúc Đồng lắp được 100 chiếc camera.

2) Bán kính đáy hộp sữa là: $R=\dfrac{6}{2}=3$ (cm)

Thể tích hộp sữa đó là: $V=\pi R^2 h \approx 3,14.3^2.9=254,34 \ \left(cm^3\right)$

Vậy thể tích của hộp sữa đó khoảng $254,34 \ cm^3$.

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{2}=4 \\ \dfrac{4}{x}-3\sqrt{y-2}=-2 \end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=(3-2m)x-4$.

a) Chứng minh rằng (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (P) và (d).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\left(1-x_1^2\right)\left(1-x_2^2\right)-2x_1-2x_2$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq 0;\ y \geq 2$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a$; $\sqrt{y-2}=b$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a+\dfrac{b}{2}=4 \\ 4a-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18a+3b=24 \\ 4a-3b=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 22a=22 \\ 4a-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ \sqrt{y-2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ (tm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;6)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có:

$-x^2=(3-2m)x-4 \Leftrightarrow x^2+(3-2m)x-4=0 \quad$ (I)

Ta có: $\Delta = (2m-3)^2 + 16 > 0$ với mọi m (do $(2m-3)^2 \geq 0$ với mọi m)

$\Rightarrow$ Phương trình (I) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Vậy (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Xét PT hoành độ giao điểm: $x^2 + (3-2m)x - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-3 & (1) \\ x_1x_2 = -4 & (2) \end{cases}$

Theo bài ra, ta có: $K = (1-x_1^2)(1-x_2^2) - 2x_1 - 2x_2 = 1 - (x_1^2 + x_2^2) + (x_1x_2)^2 - 2(x_1+x_2)$

$$= 1 - (x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - 2(x_1+x_2) \qquad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3), ta có: $K = 1 - (2m-3)^2 + 2.(-4) + (-4)^2 - 2.(2m-3)$

$K = -4m^2 + 8m + 6 = -(2m-2)^2 + 10 \leq 10$ do $(2m-2)^2 \geq 0$ với mọi m.

Vậy giá trị lớn nhất của K là 10 $\Leftrightarrow (2m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

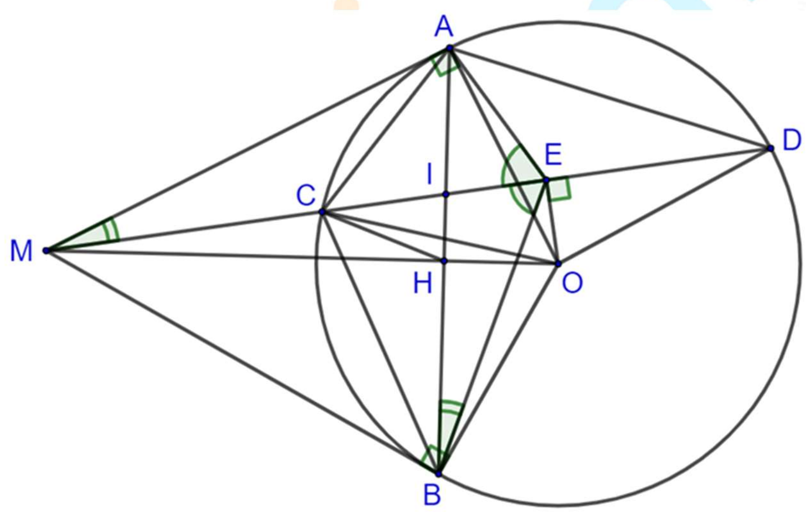
Bài IV: (3,0 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD với (O) sao cho $MC < MD$ và tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Kẻ AB cắt MD tại I, cắt MO tại H. Chứng minh $EA.EB = EI.EM$ và $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$.

3) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt AE tại K. Chứng minh $IK // AC$.

Lời giải



1) Xét (O) có: MA, MB là hai tiếp tuyến

$\Rightarrow MA \perp OA, MB \perp OB$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{MBO} = 90^0$.

Xét (O) có: E là trung điểm của dây $CD \Rightarrow OE \perp CD$ (định lí) $\Rightarrow \widehat{MEO} = 90^0$

Ta có: $\widehat{MEO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Ta có: $\widehat{MAO} = \widehat{MEO} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MAEO$ nội tiếp

Mà tứ giác $MEOB$ nội tiếp (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM

Xét (O) có: MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $M \Rightarrow MA = MB$ (tính chất)

Xét đường tròn đường kính OM có: $MA = MB \Rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{BEM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

và $\widehat{EMA} = \widehat{EBI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Suy ra $\Delta EAM \backsim \Delta EIB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EA}{EI} = \dfrac{EM}{EB} \Rightarrow EA.EB = EI.EM$ (điều phải chứng minh).

Ta có $AB \perp OM$ tại H (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Xét ΔOAM vuông tại A, đường cao AH có: $MH.MO = MA^2$ (hệ thức lượng) (1)

Xét ΔMAC và ΔMDA có: $\widehat{MAC} = \widehat{MDA} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{AMC}$ chung

$\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow MC.MD = MA^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow MH.MO = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$.

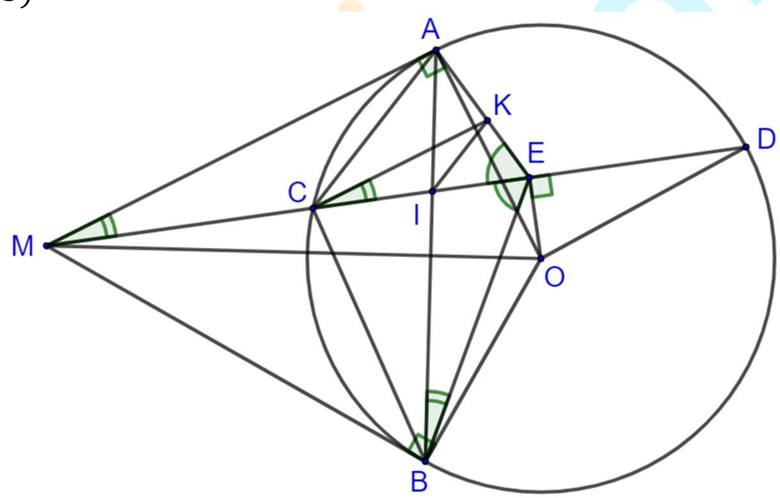
Xét ΔMCH và ΔMOD có: $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$ và $\widehat{HMC}$ chung

$\Rightarrow \Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

Xét ΔOCD có: $OC = OD$ (bán kính) $\Rightarrow \Delta OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{OCE}$.

Vậy $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$ (điều phải chứng minh).

3)



Do $CK // MA \Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EMA}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{EMA} = \widehat{EBI}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EBI}$

Xét ΔEKC và ΔEIB có: $\widehat{ECK} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{KEC} = \widehat{IEB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta EKC \backsim \Delta EIB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EK}{EI} = \dfrac{CK}{BI}$ (3)

Ta có: $\widehat{EKC}=\widehat{EIB}$ (do $\Delta EKC\backsim\Delta EIB$) và $\widehat{EKC}+\widehat{AKC}=180^0$; $\widehat{EIB}+\widehat{CIB}=180^0\Rightarrow\widehat{AKC}=\widehat{CIB}$.

Lại có: $\widehat{ACK}=\widehat{CAM}$ (do $CK\,//\,MA$); $\widehat{CAM}=\widehat{CBI}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}\Rightarrow\widehat{ACK}=\widehat{CBI}$.

Suy ra $\Delta ACK\backsim\Delta CBI$ (g.g) $\Rightarrow\frac{CK}{BI}=\frac{AK}{CI}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow\frac{EK}{EI}=\frac{AK}{CI}\Rightarrow\frac{EK}{AK}=\frac{EI}{CI}\Rightarrow IK\,//\,AC$ (định lí Ta-lét đảo).

Bài V: (0,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a+2}+\frac{3}{b+4}\le\frac{c+1}{c+3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=(a+1)(b+1)(c+1)$.

Lời giải

* Xét bất đẳng thức: $x+y\ge2\sqrt{xy}$ (*) với $x\ge0,\ y\ge0$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$).

* Ta có: $\frac{1}{a+2}+\frac{3}{b+4}\le\frac{c+1}{c+3}\Leftrightarrow\frac{1}{a+2}+\frac{3}{b+4}+\frac{2}{c+3}\le1$ (1)

Áp dụng (1) và (*), ta có: $\frac{a+1}{a+2}=1-\frac{1}{a+2}\ge\frac{3}{b+4}+\frac{2}{c+3}\ge2\sqrt{\frac{6}{(b+4)(c+3)}}$

$$\frac{b+1}{b+4}=1-\frac{3}{b+4}\ge\frac{1}{a+2}+\frac{2}{c+3}\ge2\sqrt{\frac{2}{(a+2)(c+3)}}$$

$$\frac{c+1}{c+3}=1-\frac{2}{c+3}\ge\frac{1}{a+2}+\frac{3}{b+4}\ge2\sqrt{\frac{3}{(a+2)(b+4)}}$$

* Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a+2)(b+4)(c+3)}\ge8.\frac{6}{(a+2)(b+4)(c+3)}\Leftrightarrow(a+1)(b+1)(c+1)\ge48$$

Vậy min $Q=48\Leftrightarrow\frac{1}{a+2}=\frac{3}{b+4}=\frac{2}{c+3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=5\\c=3\end{cases}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4$

1) Tính giá trị của A khi $x=64$

2) Chứng minh rằng $B=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) Cho $P=\frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P\ge\frac{2}{x+2}$

Lời giải

1) Thay $x=64$ (tmdk) vào biểu thức A ta có $A=\frac{2}{\sqrt{64}-2}=\frac{2}{8-2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Vậy với $x=64$ thì $A=\frac{1}{3}$.

2) $B=\frac{3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2\sqrt{x}}{4-x}=\frac{3\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\frac{3\sqrt{x}+6+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x+4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=\frac{A}{B}=\frac{2}{\sqrt{x}-2}:\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\frac{2}{\sqrt{x}-2}.\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\frac{2}{\sqrt{x}+2}$

Để $P\ge\frac{2}{x+2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{x}+2}\ge\frac{2}{x+2}$

Do $2>0;\ \sqrt{x}+2>0\ ;\ x+2>0\ \forall x\ge 0\ ;\ x\ne 4$

$\Rightarrow\sqrt{x}+2\le x+2\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\ge 0$

TH1: $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ (tm)

TH2: $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)>0$. Do $\sqrt{x}\ge 0$ $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

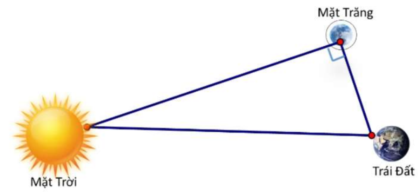
Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$ hoặc $x\ge 1; x\ne 4$

Vậy $x=0$ hoặc $x\ge 1; x\ne 4$

Bài II: (2,5 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình*
Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu tăng chiều rộng thêm 2m, giảm chiều dài đi 1m thì diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó
2) Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là khoảng cách lý tưởng giúp Trái Đất nhận được lượng nhiệt và ánh sáng phù hợp, từ đó giúp sự sống trên Trái Đất tồn tại và phát triển

Trong một số trường hợp của thiên văn học, người ta xem Trái Đất, Mặt Trời, Mặt Trăng là ba chất

điểm. Khi Trái Đất E , Mặt Trăng M và Mặt trời S tạo thành một góc vuông $\widehat{EMS}$ thì người ta đo được góc $\widehat{SEM}=89,85°$. Biết khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng là $384400\ km$. Em hãy tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời. *(Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*



Lời giải

1) Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là x và y $(x>y>0\ ;\ m)$

Diện tích của mảnh đất là $xy\ (m^2)$

Vì chu vi của mảnh đất là 56m nên ta có phương trình $2(x+y)=56$

Nếu tăng chiều rộng và giảm chiều dài thì:

+ Chiều dài của mảnh đất khi đó là $x-1\ (m)$

+ Chiều rộng của mảnh đất khi đó là $y+2\ (m)$

+ Diện tích mảnh đất khi đó là $(x-1)(y+2)\ (m^2)$

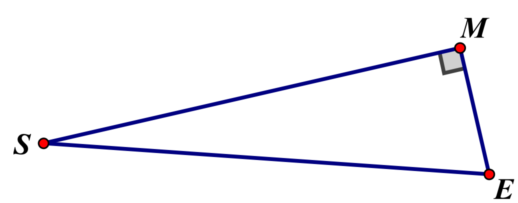
Theo đề bài, diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$ nên ta có phương trình $(x-1)(y+2)-xy=18$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}2(x+y)=56\\(x-1)(y+2)-xy=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=28\\xy+2x-y-2-xy=18\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=28\\2x-y=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=28\\3x=48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=12\\x=16\end{cases}$ (tm)

Vậy chiều dài của mảnh đất là 16m , chiều rộng của mảnh đất là 12m

2) Bài toán được cho theo mô hình sau



Xét ΔSME vuông tại M có

$\cos\widehat{SEM}=\dfrac{ME}{SE}\Rightarrow SE=\dfrac{ME}{\cos\widehat{SEM}}$

$\Rightarrow SE=\dfrac{384400}{\cos 89,85°}\approx 146830152\ (km)$

Vậy khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời khoảng 146 830 152 (km)

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}4|x+2|-\dfrac{3}{y-1}=1\\|x+2|+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{5}{6}\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=2x-1$ và $(d'): y=-mx+5$, với m là tham số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng trên cắt nhau

b) Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau. Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d'). Tìm tất cả các giá trị của m để x và y là hai số đối nhau

Lời giải

1) ĐKXĐ: $y\neq 1$

Đặt $a=|x+2|$; $b=\dfrac{1}{y-1}$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a-3b=1\\ a+b=\dfrac{5}{6}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a-3b=1\\ 3a+3b=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=\dfrac{7}{2}\\ a+b=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}+b=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases}|x+2|=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{y-1}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+2=\dfrac{1}{2}\\ x+2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ y-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{2}\\ x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\\ y=4\end{cases}$ (tm)

Vậy HPT có hai nghiệm là $\left(-\dfrac{3}{2};4\right)$ và $\left(-\dfrac{5}{2};4\right)$

2a) Để (d) và (d') cắt nhau thì $-m\neq 2\Leftrightarrow m\neq -2$

Vậy với $m=-2$ thì (d) và (d') cắt nhau

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') ta có

$$2x-1=-mx+5\Leftrightarrow(2+m)x=6\Leftrightarrow x=\frac{6}{m+2}\Rightarrow y=2.\frac{6}{m+2}-1=\frac{10-m}{m+2}$$

Vậy $M\left(\dfrac{6}{m+2};\dfrac{10-m}{m+2}\right)$

Vì x và y là hai số đối nhau nên $x+y=0$

$$\Rightarrow\frac{6}{m+2}+\frac{10-m}{m+2}=0\Leftrightarrow\frac{16-m}{m+2}=0\Rightarrow 16-m=0\Leftrightarrow m=16\ \text{(tm)}$$

Vậy $m=16$.

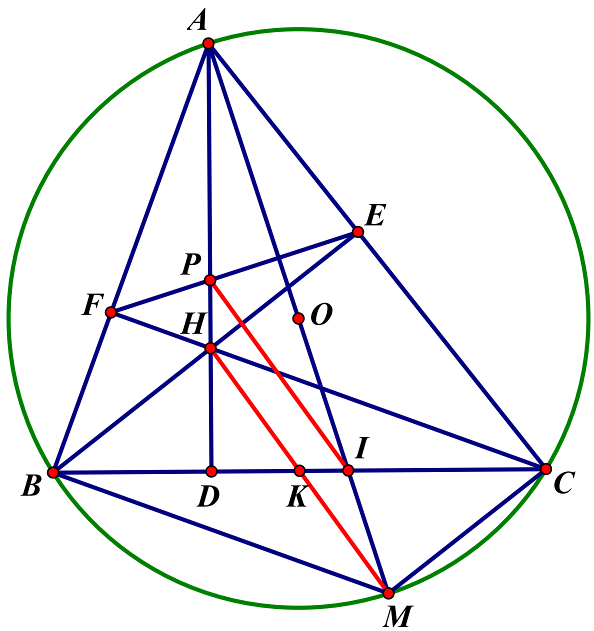
Bài IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). AD,BE,CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh bốn điểm A,F,H,E cùng thuộc một đường tròn.

2) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O). Chứng minh $AD.AM=AB.AC$

3) Gọi P là giao điểm của AH và EF. I là giao điểm của AM và BC. K là trung điểm của BC. Chứng minh: H,K,M thẳng hàng và $PI\,//\,HK$.

Lời giải



1) Vì $BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AH

Vì $CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AH

Suy ra 4 điểm A, F, H, E thuộc đường tròn đường kính AH

2) Xét (O) có $\widehat{ABD} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACM} = 90^\circ$

Xét ΔADB và ΔACM có $\widehat{ABD} = \widehat{AMC}$; $\widehat{ADB} = \widehat{ACM}$

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACM \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \Leftrightarrow AD.AM = AB.AC$

3) Ta có $BH // CM$ (cùng vuông góc với AC)

$CH // MB$ (cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BHCM$ là hình bình hành (dhnb)

Vì K là trung điểm $BC \Rightarrow K$ là trung điểm HM

Vậy H, K, M thẳng hàng.

Vì $\Delta ADB \backsim \Delta ACM \ (cmt) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAI}$

Tự chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABI}$

$\Rightarrow \Delta APE \backsim \Delta AIB \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AE}{AB}$

Chứng minh $\Delta AHE \backsim AMB \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AE}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow \dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AI}{AM} \Rightarrow PI // HM$ (Định lý Talet đảo)

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm a,b thoả mãn $a+b=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b+1}+\sqrt{b^2+a+1}$.

Lời giải

* Tìm GTLN

Từ giả thiết suy ra $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$

Do đó $a(a-1)\le 0\Leftrightarrow a^2\le a$ và $b(b-1)\le 0\Leftrightarrow b^2\le b$

Khi đó $P=\sqrt{a^2+b+1}+\sqrt{b^2+a+1}\le\sqrt{a+b+1}+\sqrt{a+b+1}=2\sqrt{a+b+1}=2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1$ và $b=0$ hoặc $a=0$ và $b=1$.

Vậy GTLN của $P=2\sqrt{2}$ khi $a=1$ và $b=0$ hoặc $a=0$ và $b=1$.

* Tìm GTNN

Ta có $P^2=\left(\sqrt{a^2+b+1}+\sqrt{b^2+a+1}\right)^2\ge 4\sqrt{\left(a^2+b+1\right)\left(b^2+a+1\right)}$

$$=4\sqrt{(ab)^2+\left(a^3+b^3\right)+\left(a^2+b^2\right)+ab+(a+b)+1}$$

$$=4\sqrt{(ab)^2+(a+b)^3-3ab(a+b)+(a+b)^2-2ab+ab+(a+b)+1}$$

$$=4\sqrt{(ab)^2-4ab+4}=4\sqrt{\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{7}{2}ab+\frac{63}{16}}$$

$$\ge 4\sqrt{0-\frac{7(a+b)^2}{8}+\frac{63}{16}}=7$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của $P=\sqrt{7}$ khi $a=b=\frac{1}{2}$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}+14}{4-x}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Xét biểu thức $P=A.B$. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $\sqrt{2P+3}=P$.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}+2}{\sqrt{16}-2}=\dfrac{4+2}{4-2}=\dfrac{6}{2}=3$

Vậy với $x=16$ thì $A=3$

2) $B=\dfrac{5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3\sqrt{x}+14}{4-x}=\dfrac{5\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(3\sqrt{x}+14\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{5\sqrt{x}+10-3\sqrt{x}-14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$

Theo đề bài $\sqrt{2P+3}=P\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 0\\ 2P+3=P^2\end{cases}\Leftrightarrow P=3$

Với $P=3$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{64}{9}$ (tmdk)

Vậy với $x=\dfrac{64}{9}$ thì $\sqrt{2P+3}=P$.

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng $12m$ và diện tích mảnh đất bằng $85m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất theo đơn vị mét?

2) Một quả địa cầu hành chính có đường kính bằng $33cm$. Tính diện tích bề mặt của quả địa cầu, lấy $\pi\approx 3{,}14$.

Lời giải

1) Gọi chiều rộng của mảnh đất là x $(x>0;\ m)$

Chiều dài của mảnh đất là $x+12$ (m)

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $x(x+12)$ (m^2)

Vì diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $85m^2$ nên ta có phương trình:
$x(x+12)=85 \Leftrightarrow x^2+12x-85=0$

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x=5\ (tm) \\ x=-17\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy chiều rộng của mảnh đất là $5m$, chiều dài là $17m$.

2) Bán kính của quả địa cầu là $33:2=16,5\ (cm)$

Diện tích bề mặt của quả địa cầu là: $S=4\pi R^2 \approx 4.3,14.16,5^2=3419,46\ (cm^2)$

Vậy diện tích bề mặt của quả địa cầu là $3419,46\ cm^2$

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=4 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+m^2+4$

a) Với $m=2$, tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại điểm $A(x_1;y_1)$ nằm bên trái trục tung và điểm $B(x_2;y_2)$ nằm bên phải trục tung sao cho $|x_1|-|x_2|=3$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\ge -1;\ y\ne 1$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=4 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1}+\dfrac{2}{y-1}=8 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{x+1}=15 \\ 3\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=3 \\ 3.3-\dfrac{2}{y-1}=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=9 \\ \dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \text{(tm)}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(8;2)$.

2a) Với $m=2$ phương trình đường thẳng (d) trở thành $(d): y=2x+8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=2x+8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$\Delta=(-2)^2-4.1.(-8)=36>0$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{2+\sqrt{36}}{2.1}=4$ và $x_2=\dfrac{2-\sqrt{36}}{2.1}=-2$

Với $x_1=4 \Rightarrow y_1=16$

Với $x_2=-2 \Rightarrow y_2=4$

Vậy toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là $(-2;4)$; $(4;16)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = mx + m^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - m^2 - 4 = 0$ (*)

Ta thấy $a.c = 1.\left(-m^2 - 4\right) = -m^2 - 4 < 0$

Suy ra PT (*) có hai nghiệm trái dấu $\forall m$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -m^2 - 4 \end{cases}$

Vì $A(x_1; y_1)$ nằm bên trái trục tung và điểm $B(x_2; y_2)$ nằm bên phải trục tung nên $x_1 < 0 < x_2$

Mà theo đề bài $|x_1| - |x_2| = 3 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -3 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm

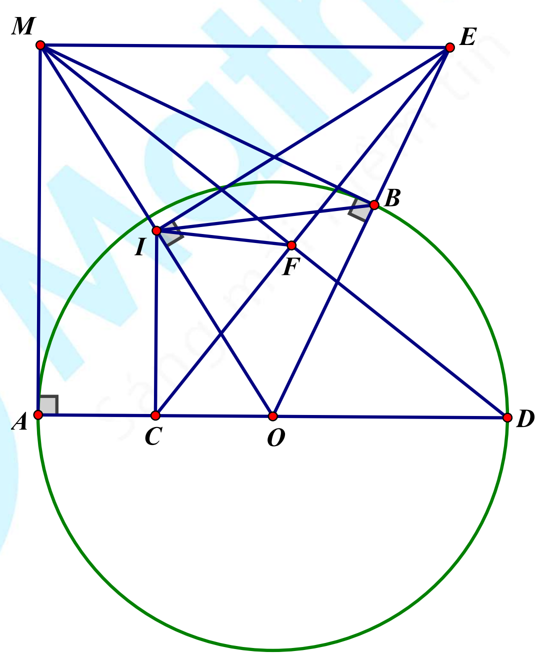
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường kính AD, lấy I là trung điểm của đoạn thẳng MO, gọi C là hình chiếu vuông góc của I lên AO.

1) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn

2) Đường thẳng vuông góc với MO tại điểm I cắt đường thẳng OB tại điểm E. Chứng minh $OB.OE = \frac{1}{2}OM^2$.

3) Chứng minh ΔIME đồng dạng với ΔCOI và $CE \perp MD$.

Lời giải



1) Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90°$

Xét tứ giác $OAMB$ có $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra $OAMB$ là tứ giác nội tiếp

Vậy M, A, O, B cùng thuộc đường tròn tâm I, đường kính MO

2) Vì $EI \perp OM \Rightarrow \widehat{OIE} = 90°$

Xét ΔOIE và ΔOBM có

$\widehat{MOE}$ chung và $\widehat{OIE} = \widehat{OBM} = 90°$

$\Rightarrow \Delta OIE \backsim \Delta OBM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{OE}{OM} = \dfrac{OI}{OB} \Leftrightarrow OB.OE = OI.OM = \dfrac{1}{2}OM.OM = \dfrac{1}{2}OM^2$

Vậy $OB.OE = \dfrac{1}{2}OM^2$

3) * Ta có I là trung điểm MO và $EI \perp MO$

Suy ra EI là đường trung trực của $MO \Rightarrow EM = EO \Rightarrow \Delta EMO$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{EMO} = \widehat{EOM}$ (1)

Xét (O) có MA , MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M

Suy ra OM là phân giác $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IOC} = \widehat{EMI}$

Từ đó chứng minh được $\Delta IME \backsim \Delta COI\ (g.g)$

* Gọi F là giao điểm của CE và MD

Ta có $IC // MA$ (cùng vuông góc với AO) và I là trung điểm MO.

Từ đó chứng minh được IC là đường trung bình của ΔOMA

Suy ra C là trung điểm $OA \Rightarrow OC = AC = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}OD$

Vì $\Delta IME \backsim \Delta COI\ (cmt) \Rightarrow \dfrac{IC}{IE} = \dfrac{CO}{IM} = \dfrac{\frac{1}{2}OD}{\frac{1}{2}OM} = \dfrac{OD}{OM} \Rightarrow \dfrac{IC}{OD} = \dfrac{IE}{OM}$

Lại có $\widehat{CIE} = 90° + \widehat{CIO} = 90° + \widehat{AMO}$

Mà $\widehat{MOD} = 90° + \widehat{AMO}$ (tính chất góc ngoài của ΔAMO)

Xét ΔICE và ΔODM có $\dfrac{IC}{OD} = \dfrac{IE}{OM}\ (cmt)$; $\widehat{CIE} = \widehat{MOD}$

$\Rightarrow \Delta ICE \backsim \Delta ODM\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{IEC}$ hay $\widehat{IMF} = \widehat{IEF}$

Suy ra tứ giác $IMEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MIE} = 90°$

Vậy $CE \perp MD$

Bài V: (0,5 điểm) Với các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2-x} + \dfrac{y}{2-y} + \dfrac{z}{2-z}$

Lời giải

Theo giả thiết x, y, z không âm và $x + y + z = 1$

Ta có $\dfrac{1}{2-x} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x}{2-x} \le x$

Chứng minh tương tự $\frac{y}{2-y} \le y$; $\frac{z}{2-z} \le z$

Ta có $P = \frac{x}{2-x} + \frac{y}{2-y} + \frac{z}{2-z} \le x + y + z = 1$

Vậy GTLN của $P = 1$ khi $(x;y;z) = (1;0;0)$ và các hoán vị.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right)$ với $x>0;\, x\neq 1$

1) Tính A biết $x=16$

2) Chứng minh rằng $B=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\neq 1$

3) Tìm giá trị nguyên của x để $P=A:B$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}}=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$

Vậy với $x=16$ thì $A=\frac{5}{4}$.

2) $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right)=\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}:\frac{\sqrt{x}-1+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}-1}{1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$

3) $P=A:B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}:\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Vì $x\in\mathbb{Z}, x>0, x\neq 1\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow \sqrt{x}\geq\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\geq\sqrt{2}-1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}\leq\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Leftrightarrow P\leq\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

Dấu "=" xảy ra khi $x=2$

Vậy GTLN của $P=\sqrt{2}+1$ khi $x=2$

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Ở một siêu thị, giá niêm yết ban đầu của một cái bàn là và một cái quạt máy có tổng số tiền là 850 000 đồng. Sau đó siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của một cái bàn là và một cái quạt máy trên đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết ban đầu. Do đó khách hàng tiết kiệm hơn được 125 000 đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá niêm yết ban đầu của mỗi sản phẩm trên là bao nhiêu ?

2) Ông An muốn sơn bên ngoài một toà nhà hình hộp chữ nhật có chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao 15m (không sơn trần). Biết diện tích các cửa chiếm 10% diện tích xung quanh toà nhà và giá tiền sơn $1m^2$ tường là 20 000 đồng. Hỏi ông An dự kiến sơn toà nhà hết bao nhiêu tiền?

Lời giải

1) Gọi giá niêm yết của bàn là và quạt máy lần lượt là x , y $(0 < x\ ,\ y < 850\ 000;$ đồng)
Vì tổng giá niêm yết của bàn là và quạt máy là $850\ 000$ nên ta có phương trình
$x + y = 850\ 000$
Bàn là được giảm giá 10% tương ứng số tiền là $10\%x = 0,1x$ (đồng)
Quạt máy được giảm 20% tương ứng số tiền là $20\%y = 0,2y$ (đồng)
Vì khách hàng đã tiết kiệm được $125\ 000$ đồng nên ta có phương trình
$0,1x + 0,2y = 125\ 000$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 850\ 000 \\ 0,1x + 0,2y = 125\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1x + 0,1y = 85\ 000 \\ 0,1x + 0,2y = 125\ 000 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,1y = 40\ 000 \\ 0,1x + 0,2y = 125\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 400\ 000 \\ 0,1x + 0,2.400\ 000 = 125\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 400\ 000 \\ 0,1x = 45\ 000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 400\ 000 \\ x = 450\ 000 \end{cases}$ (tm)

Vậy giá niêm yết ban đầu của bàn là là 450 000 đồng và giá niêm yết ban đầu của chiếc quạt máy là $400\ 000$ đồng

2) Diện tích xung quanh của toà nhà (tính cả các cửa) là $2(10+5).15 = 450\ (m^2)$

Diện tích cần sơn (không tính cửa) là $450.(1-10\%) = 405\ (m^2)$

Số tiền cần sơn nhà là $20\ 000.405 = 8\ 100\ 000$ (đồng)

Vậy số tiền cần sơn nhà là $8\ 100\ 000$ đồng.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 5 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 3 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0\ (1)$ (m là tham số)
a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.
b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt
c) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1 , x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{5}$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \geq 0;\ x \neq 9\ ;\ y \neq \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 5 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 5 \\ \dfrac{8}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{2}{2y-1} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2y-1} = 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{1}{2y-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1 = 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{x}-3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 25 \end{cases}\ (tm)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(25;1)$

2) $x^2-2(m+1)x+2m+1=0\ (1)$

a) Với $m=3$ PT (1) trở thành $x^2-8x+7=0$

Ta có $\Delta'=(-4)^2-1.7=16-7=9>0$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{4+\sqrt{9}}{1}=7$; $x_2=\dfrac{4-\sqrt{9}}{1}=1$

Vậy với $m=3$ PT có tập nghiệm là $S=\{7;1\}$.

b) Ta có $\Delta'_{(1)}=\left[-(m+1)\right]^2-1.(2m+1)=m^2+2m+1-2m-1=m^2$

Để PT(1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta_{(1)}>0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0$

Vậy với $m=0$ thì PT (1) có hai nghiệm phân biệt

c) Vì x_1; x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên $m\neq 0$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\ x_1.x_2=2m+1\end{cases}$

Vì x_1,x_2 là độ dài các cạnh của tam giác nên $x_1>0$; $x_2>0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2>0\\ x_1.x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(m+1)>0\\ 2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$$

Vì x_1 , x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{5}$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=5\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-2(2m+1)=5\Leftrightarrow 4(m^2+2m+1)-4m-2=5\Leftrightarrow 4m^2+4m-3=0$$

$$\Leftrightarrow(2m-1)(2m+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\ (tm)\\ m=-\dfrac{3}{2}\ (ktm)\end{array}\right.$$

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$

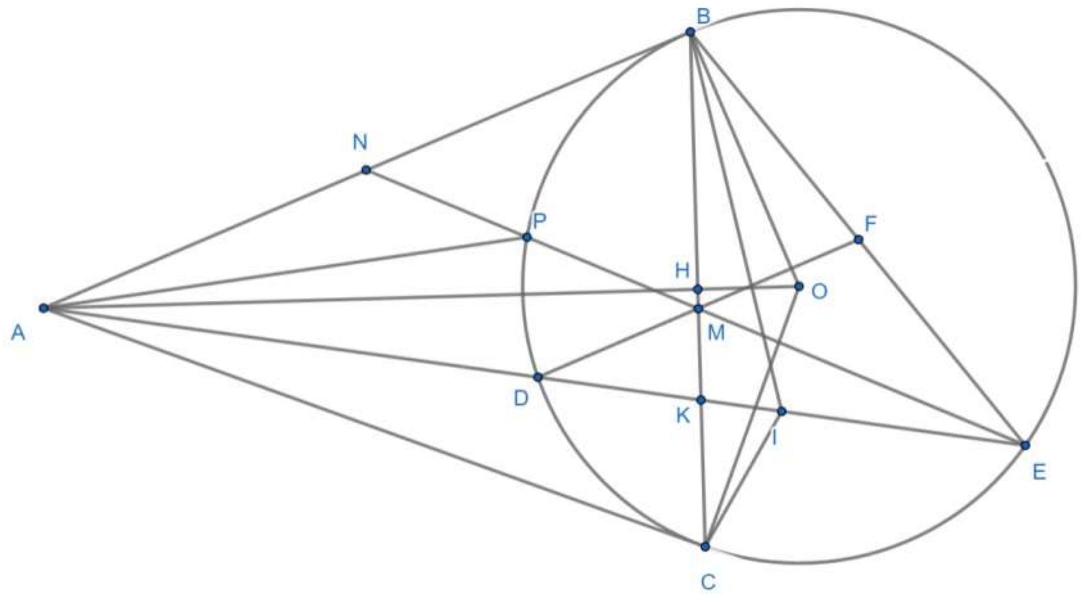
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B,C là các tiếp điểm), H là giao điểm của AO và BC. Trên cung nhỏ BC lấy điểm D sao cho $CD<BD$, tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Gọi I là trung điểm của DE.

1) Chứng minh 5 điểm A,B,O,I,C cùng thuộc một đường tròn

2) Gọi K là giao điểm của BC và DE. Chứng minh IA là phân giác của $\widehat{BIC}$ và $AK.AI=AD.AE$

3) Qua D kẻ đường thẳng song song song AB cắt BC tại M. Đường thẳng ME lần lượt cắt (O) và đường thẳng AB tại các điểm P và N (P khác E). Chứng minh: N là trung điểm của AB và $\widehat{APN}=\widehat{ICB}$

Lời giải



1) Chứng minh 5 điểm A,B,O,I,C cùng thuộc một đường tròn.

Vì AB, AC là tiếp tuyến (O) $(\text{gt}) \Rightarrow \widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90°$

Xét (O)

$+DE$ là dây cung

- OI thuộc 1 phần đường kính
- I là trung điểm DE

$\Rightarrow OI \perp DE \Rightarrow \widehat{OID}=\widehat{OIE}=90°$

Xét tứ giác OBAC có: $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=90°+90°=180°$

Mà 2 góc này đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBAC$ nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow O,B,A,C$ cùng thuộc 1 đường tròn (1)

Xét tứ giác OIAB có $\widehat{ABO}+\widehat{OIA}=90°+90°=180°$

Mà 2 góc này đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác OIAB nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow O,I,A,B$ cùng thuộc 1 đường tròn (1)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow O,A,B,I,C$ cùng thuộc 1 đường tròn (dpcm)

2) Gọi K là giao điểm của BC và DE. Chứng minh IA là phân giác của $\widehat{BIC}$ và $AK.AI=AD.AE$

Vì AB và AC là 2 tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A $\Rightarrow AB=AC$

Xét đường tròn đi qua nằm điểm O,B,I,A,C có:

$+AB=AC(cmt) \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC} \Rightarrow sd\ \overset{\frown}{AB}=sd\ \overset{\frown}{AC}(3)$

$+\widehat{AIB}=\frac{1}{2}sd\ \overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$+\widehat{AIC}=\frac{1}{2}sd\ \overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Từ (3) và $(4)\Rightarrow\widehat{AIB}=\widehat{AIC}\Rightarrow IA$ là phân giác $\widehat{BIC}$(dpcm)

$C/m: AK.AI=AD.AE$

Xét ΔABC có: $AB=AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow\Delta ABC$ cân tại A

Mà AO là phân giác $\widehat{BAC}\Rightarrow AO$ cũng là đường cao ứng với đáy AB

$\Rightarrow AO\perp BC=\{H\}$

Xét ΔABO vuông tại B có: $BH\perp AO\Rightarrow AB^2=AH.AO$ (hệ thức lượng)(1)

Xét ΔABD và ΔAEB có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ABD}=\widehat{AEB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến-dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\Rightarrow\Delta ABD\backsim\Delta AEB\ (g.g)$

$\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow AB^2=AD\cdot AE$ (2)

Theo bài: I là trung điểm DE

$\Rightarrow OI\perp DE$ hay $\widehat{AIO}=90^\circ$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

Xét ΔAHK và ΔAIO có: $\widehat{A}$ chung ; $\widehat{AHK}=\widehat{AIO}(=90^\circ)$

$\Rightarrow\Delta AHK\backsim\Delta AIO(g\cdot g)$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow AK.AI=AD.AE$

3) Qua D kẻ đường thẳng song song song AB cắt BC tại M . Đường thẳng ME lần lượt cắt (O) và đường thẳng AB tại các điểm P và $N(P$ khác E). Chứng minh: N là trung điểm của AB và $\widehat{APN}=\widehat{ICB}$

- Chứng minh: N là trung điểm của AB

Gọi F là giao điểm DM và BE

Chứng minh được: $\widehat{DMC}=\widehat{AIC}\left(=\widehat{ABC}\right)\Rightarrow$ Tứ giác DMIC nội tiếp $\Rightarrow\widehat{DCB}=\widehat{DIM}$

Xét (O): $\widehat{DCB}=\widehat{BED}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BD}$)$\Rightarrow\widehat{DIM}=\widehat{BED}\Rightarrow MI\,//\,BE$

Chứng minh được: M là trung điểm $DF\Rightarrow MD=MF$

ΔBEN có: $MF\,//\,NB\Rightarrow\frac{MF}{NB}=\frac{EM}{EN}$ (hệ quả định lý Ta-lét)

ΔANE có: $\frac{DM}{AN}=\frac{EM}{EN}$ (hệ quả định lý Ta-lét)

$\Rightarrow\frac{DM}{AN}=\frac{MF}{NB}$ mà $DM=MF(cmt)\Rightarrow AN=NB$

Mà A,N,B thẳng hàng $\Rightarrow$ N là trung điểm AB

- Chứng minh: $\widehat{APN} = \widehat{ICB}$

Chứng minh được: $NB^2 = NP.NE$

Mà $NA = NB\left(cmt\right) \Rightarrow AN^2 = NE.NP \Rightarrow \dfrac{AN}{NP} = \dfrac{NE}{AN}$

Xét ΔNAE và ΔNPA có: $\widehat{N}$ chung ; $\dfrac{AN}{NP} = \dfrac{NE}{NA}(\text{cmt})$

$\Rightarrow \Delta NAE \backsim \Delta NPA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{BAE}(1)$

Có tứ giác ABIC nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{ICB}$ (cùng nhìn cạnh BI) hay $\widehat{BAE} = \widehat{ICB}$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{ICB}(\text{dpcm})$

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + 2c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + ac - 4bc$.

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có $a\left(b + 2c\right) \le \left(\dfrac{a + b + 2c}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow P = ab + ac - 4bc \le ab + ac \le ab + 2ac = a\left(b + 2c\right) \le \dfrac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = b + 2c \\ a + b + 2c = 1 \\ bc = 0 \\ ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2};\ b = \dfrac{1}{2};\ c = 0$

Vậy GTLN của $P = \dfrac{1}{4}$ khi $a = \dfrac{1}{2}; b = \dfrac{1}{2}; c = 0$

Ta có $b + 2c \ge 2\sqrt{2bc} \Leftrightarrow \sqrt{2bc} \le \dfrac{b + 2c}{2} \Leftrightarrow 2bc = \left(\dfrac{b + 2c}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4bc \le 2\left(\dfrac{b + 2c}{2}\right)^2 \le 2\left(\dfrac{a + b + 2c}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow P = ab + ac - 4bc \ge -4bc \ge -\dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2c \\ a + b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0;\ b = \dfrac{1}{2};\ c = \dfrac{1}{4}$

Vậy GTNN của $P = -\dfrac{1}{2}$ khi $a = 0;\ b = \dfrac{1}{2};\ c = \dfrac{1}{4}$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0;\ x\ne 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P=A.B$ nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có: $A=\dfrac{7\left(\sqrt{9}+2\right)}{\sqrt{9}+3}=\dfrac{7(3+2)}{3+3}=\dfrac{35}{6}$

Vậy với $x=9$ thì $A=\dfrac{35}{6}$.

2) $B=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3\sqrt{x}-3-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

3) $P=A.B=\dfrac{7\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\sqrt{x}+3\ge 3>0\forall x\ge 0;x\ne 4\Leftrightarrow 0<\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}\le\dfrac{7}{3}$

Mà $P\in\mathbb{Z}\Rightarrow P\in\{1;2\}$

Với $P=1\Leftrightarrow\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=7\Leftrightarrow\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=16$ (tm)

Với $P=2\Leftrightarrow\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}=2\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (tm)

Vậy $x\in\left\{\dfrac{1}{4};16\right\}$

Bài II: (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai người thợ, nếu cùng làm chung một công việc thì sau 15 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\dfrac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người cần bao lâu sẽ xong công việc đó?

2) Một hình nón có bán kính đáy bằng $5cm$ và diện tích xung quanh là $65\pi\, cm^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Lời giải

1) Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x ($x>15$; giờ)

Thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y ($y>15$; giờ)

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 giờ cả hai người thợ làm chung được $\frac{1}{15}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$

Trong 3 giờ người thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 5 giờ người thứ hai làm được $\frac{5}{y}$ (công việc)

Vì người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\frac{1}{4}$ công việc nên ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{y}=\frac{1}{20}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=40\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{40}=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=40\\ \frac{3}{x}=\frac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=40\\ x=24\end{cases}$ (tm)

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 24 giờ, người thứ hai làm một mình xong công việc trong 40 giờ.

2) Gọi h,l lần lượt là chiều cao và đường sinh của hình nón đó

Theo đề bài cho diện tích xung quanh là $65\pi\, cm^2$, ta có $S_{xq}=\pi.R.l=65\pi \Leftrightarrow 5\pi l=65\pi \Leftrightarrow l=13\ (cm)$

Độ dài chiều cao hình nón là $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\ (cm)$

Thể tích của hình nón đó là: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi.5^2.12=100\pi\ (cm^3)$

Vậy thể tích hình nón là $100\pi\ cm^3$.

Bài III: (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{2}{|x-1|}+3y=5 \\ \dfrac{1}{|x-1|}-2y=-1 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-2mx-m^2-2=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2-2|x_1|-3x_1x_2=3m^2+3m+4$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\neq 1$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{|x-1|}+3y=5 \\ \dfrac{1}{|x-1|}-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{|x-1|}+3y=5 \\ \dfrac{2}{|x-1|}-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=7 \\ \dfrac{2}{|x-1|}-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \dfrac{2}{|x-1|}-4=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \dfrac{2}{|x-1|}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ |x-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x-1=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(2;1)$ và $(0;1)$

2) $x^2-2mx-m^2-2=0$

Ta có $\Delta'=(-m)^2-(-m^2-2)=2m^2+2>0, \forall m\in R$

nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$.

Khi đó theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m & (1) \\ x_1.x_2=-m^2-2 & (2) \end{cases}$.

Do $x_1.x_2=-m^2-2<0 \Rightarrow x_1<0; x_2>0$.

Giả thiết $x_2-2|x_1|-3x_1x_2=3m^2+3m+4$

$\Leftrightarrow 2x_1+x_2-3(-m^2-2)=3m^2+3m+4 \Leftrightarrow 2x_1+x_2=3m-2$ (3)

Từ $(1),(3)$ ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ 2x_1+x_2=3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=m-2 \\ x_2=m+2 \end{cases}$

Thay $x_1=m-2; x_2=m+2$ vào (2), ta được $(m-2)(m+2)=-m^2-2 \Leftrightarrow 2m^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị cần tìm là $m=-1$ và $m=1$.

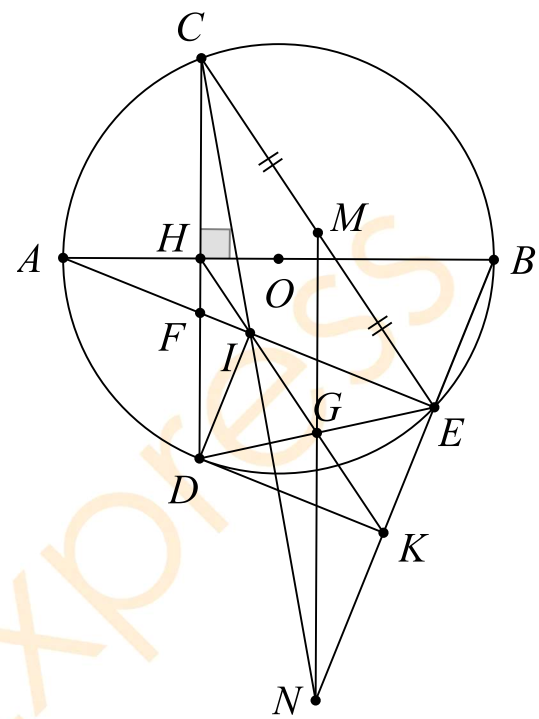
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB, lấy điểm H thuộc đường kính AB, qua điểm H kẻ dây CD vuông góc với đường kính AB, lấy điểm E thuộc cung nhỏ BD (E khác B và D); AE cắt CD tại điểm F.

1) Chứng minh: Tứ giác $BEFH$ nội tiếp.

2) Chứng minh: $CD^2=4.AH.HB$

3) Đường thẳng đi qua H song song với CE, cắt đường thẳng AE và BE lần lượt tại I và K. Gọi G là giao điểm của DE và IK, M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh: $DI \perp AE$ và ba đường thẳng CI, MG, BE đồng quy.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{BEA} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Dây $CD \perp AB \Rightarrow \widehat{FHB} = 90°$

Xét tứ giác $BEFH$ có

$\widehat{HBE} + \widehat{HFE} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra $BEFH$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

2) Xét $(O;R)$ có dây $CD \perp AB$ tại H

$\Rightarrow H$ là trung điểm của CD (quan hệ giữa đường kính và dây).

Xét (O) có: $\widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔABC vuông tại C, có CH là đường cao

$\Rightarrow CH^2 = AH.HB$ (hệ thức lượng)

Mà $CH = \dfrac{CD}{2}$. Nên $CD^2 = 4.AH.HB$

3) $HI // CE \Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DCE}$ (2 góc đồng vị)

Xét (O; R) có: $\widehat{DAE} = \widehat{DCE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DAI}$

Xét tứ giác $DAHI$ có: $\widehat{DHI} = \widehat{DAI}$, Mà H, A là 2 đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác AHID nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AID}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Mà $\widehat{AHD} = 90° \Rightarrow \widehat{AID} = 90° \Rightarrow DI \perp AE$

Xét (O;R) có $\widehat{DBE} = \widehat{DAE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

Mà $\widehat{DAE} = \widehat{DHI}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DBE}$

Xét tứ giác $DIEK$ có: $\widehat{DIE} = \widehat{IEK} = \widehat{DKE} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DIEK$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow IK$ và DE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường $\Rightarrow G$ là trung điểm của IK

Giả sử CI cắt BK tại N; NG cắt CE tại M'

Ta có: $IG // CM' \Rightarrow \dfrac{IG}{CM'} = \dfrac{NG}{NM'}$ (Hệ quả định lí Ta let)

$GK // M'E \Rightarrow \dfrac{GK}{M'E} = \dfrac{NG}{NM'} \Rightarrow \dfrac{IG}{CM'} = \dfrac{GK}{M'E}$

Mà $IG = GK$ (G là trung điểm IK)

$\Rightarrow CM' = M'E \Rightarrow M'$ là trung điểm của CE

$\Rightarrow M$ trùng $M' \Rightarrow M$, G, N thẳng hàng

Vậy CI, MG, BE đồng quy

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} + \frac{3}{2}xyz$.

Lời giải

Vì $xy + yz + zx = 3xyz.$ nên $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

Mà $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow x + y + z \geq 3 \qquad (1)$

Ta có: $\frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2y} = x - \frac{xy}{2}$ (Vì $1 + y^2 \geq 2y > 0$)

Tương tự $\frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}; \frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}$

Suy ra $\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \geq x - \frac{xy}{2} + y - \frac{yz}{2y} + z - \frac{zx}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} + \frac{1}{2}(xy + yz + zx) \geq x + y + z$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} + \frac{3}{2}xyz \geq x + y + z \qquad (2)$

Từ (1) và (2), ta được $Q \geq 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q bằng 3 khi $x = y = z = 1$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;\ x\neq 4;\ x\neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=36$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

1) Thay $x=36$ (tmdk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{36-3\sqrt{36}+16}{\sqrt{36}-3}=\dfrac{36-18+16}{6-3}=\dfrac{34}{3}$

Vậy với $x=36$ thì $A=\dfrac{34}{3}$

2) $B=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{2x-4\sqrt{x}+6-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$

3) $P=A.B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}-3}.\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}=\dfrac{x-3\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-3+\dfrac{16}{\sqrt{x}}$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương ta có $\sqrt{x}+\dfrac{16}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{16}{\sqrt{x}}}=8\Leftrightarrow \sqrt{x}+\dfrac{16}{\sqrt{x}}-3\geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}=\dfrac{16}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=16$ (tm)

Vậy GTNN của $P=5$ khi $x=16$.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người cùng làm một công việc thì sau 7 giờ 12 phút hoàn thành xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\dfrac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc ?

2) Một người thợ làm một cái bồn inox hình trụ chứa đầy $3m^3$ nước, biết chiều cao của bồn là $1,5m$. Hỏi đường kính đáy của bồn nước là bao nhiêu m ? (*lấy* $\pi\approx 3,14$, *kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2, bỏ qua độ dày của vỏ bình*)

Lời giải

1) Đổi 7 giờ 12 phút $=\frac{36}{5}$ (giờ)

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là x, y (giờ) $\left(x, y>\frac{36}{5}\right)$

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 giờ cả hai người làm chung được $\frac{5}{36}$ (công việc)

Ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{36}$

Trong 5 giờ người thứ nhất làm được $\frac{5}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ người thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ (công việc)

Vì người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{3}{4}$ công việc nên ta có phương trình $\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=\frac{3}{4}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{36}\\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=\frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=\frac{5}{6}\\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=\frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{12}\\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=\frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ \frac{5}{12}+\frac{6}{y}=\frac{3}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ \frac{6}{y}=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ y=18\end{cases}$ (tm)

Vậy thời gian người thứ nhất làm riêng xong công việc là 12 giờ, thời gian người thứ hai làm riêng xong công việc là 18 giờ

2) Thể tích của bồn inox hình trụ là $V=\pi r^2 h$

Thay số $3,14.r^2.1,5=3 \Rightarrow r \approx 0,8$

Đường kính của bồn nước là: $0,8.2=1,6\ (m)$

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\frac{15}{2}\\ \frac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2\end{cases}$

2) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=4 \\ x-my=1 \end{cases}$ (với m là tham số)

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thoả mãn x và y là hai số đối nhau.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\neq 4$; $y\geq -1$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{4}{x-4}-2\sqrt{y+1}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{x-4}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2 \\ \dfrac{2}{2}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2 \\ 1-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ \sqrt{y+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y+1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=(6;8)$.

2) Để HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thì $\dfrac{m}{1}\neq\dfrac{1}{-m}\Leftrightarrow m^2\neq -1$ (luôn đúng)

$$\begin{cases} mx+y=4 \\ x-my=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ x-my=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ x-m(4-mx)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ (1+m^2)x=4m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-mx \\ x=\dfrac{4m+1}{m^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-m.\dfrac{4m+1}{m^2+1} \\ x=\dfrac{4m+1}{m^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4-m}{m^2+1} \\ x=\dfrac{4m+1}{m^2+1} \end{cases}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{4m+1}{m^2+1};\dfrac{4-m}{m^2+1}\right)$.

Vì x và y là hai số đối nhau nên $x+y=0\Leftrightarrow \dfrac{4m+1}{m^2+1}+\dfrac{4-m}{m^2+1}=0$

$$\Leftrightarrow \dfrac{3m+5}{m^2+1}=0\Leftrightarrow 3m+5=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{3}$$

Vậy $m=-\dfrac{5}{3}$ thoả mãn yêu cầu bài toán

Bài IV: (3,5 điểm) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Kẻ $OH\perp d$ tại H. Điểm A thuộc d và không trùng với điểm H. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B và C là các tiếp điểm). BC cắt OA, OH lần lượt tại M và N. Đoạn thẳng OA cắt (O) tại I

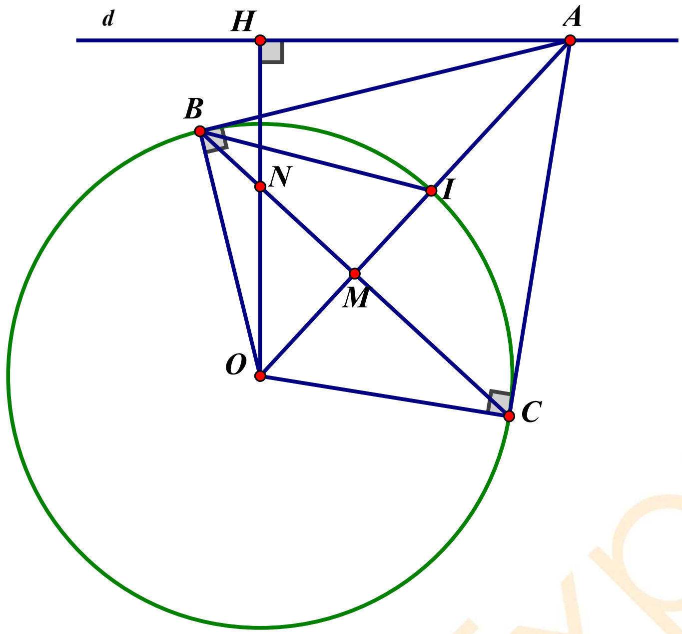
1) Chứng minh 4 điểm O,B,A,C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $OM.OA=ON.OH$.

3) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

4) Chứng minh rằng khi điểm A di động trên đường thẳng d thì đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



1) AB, AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AB \perp BO$; $AC \perp CO$

$\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$

$\Rightarrow B$, C thuộc đường tròn đường kính OA

Vậy O, B, A, C thuộc đường tròn đường kính OA

2) Vì AB , AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $A \Rightarrow AB = AC$

Lại có $OB = OC \Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OA \perp BC$ tại M $\Rightarrow \widehat{OMN} = 90°$

Xét ΔOMN và ΔOHA có $\widehat{OMN} = \widehat{OHA} = 90°$; $\widehat{HOA}$ chung

$\Rightarrow \Delta OMN \backsim \Delta OHA \,(g.g) \Rightarrow \dfrac{OM}{OH} = \dfrac{ON}{OA} \Leftrightarrow OM.OA = ON.OH$

3) Ta có AB , AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

$\Rightarrow AO$ là phân giác $\widehat{BAC}$ (1)

Ta có $\begin{cases} \widehat{ABI} + \widehat{OBI} = 90° \\ \widehat{IBC} + \widehat{OIB} = 90° \end{cases}$ mà $\widehat{OBI} = \widehat{OIB}$ (ΔOBI cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \Rightarrow BI$ là phân giác $\widehat{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

4) Xét ΔOAB vuông tại B, $BM \perp OA$

$\Rightarrow OB^2 = OM.OA$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà $OM.OA = ON.OH \Rightarrow OB^2 = ON.OH \Leftrightarrow ON = \dfrac{OB^2}{OH} = \dfrac{R^2}{OH}$

Do d cố định , O cố định nên OH không đổi, điểm H cố định
$\Rightarrow ON$ không đổi, điểm $N \in OH$ cố định
Suy ra BC luôn đi qua điểm N cố định khi A di động trên đường thẳng d.
Bài V: (0,5 điểm) Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{y^2+xy}$.

Lời giải
Ta chứng minh bất đẳng thức sau

Với $a,b>0$ ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab}\ge\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 4ab$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $T=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{y^2+xy}\ge\dfrac{4}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{4}{(x+y)^2}\ge\dfrac{4}{1^2}=4$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+xy}=\dfrac{1}{y^2+xy}\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y^2\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy GTNN của $T=4$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x>0;\, x\neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=25$.
2) Rút gọn A.
3) Tìm các số nguyên x để $\sqrt{AB}<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

1) Thay $x=25$ (TMĐK) vào biểu thức B ta được: $B=\dfrac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+1}=\dfrac{5-2}{5+1}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Vậy với $x=25$ thì $B=\dfrac{1}{2}$

2) $A=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{3\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

3) Với $x>0;\, x\neq 4 \Rightarrow A.\,B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

$\sqrt{AB}<\dfrac{2}{3}$ ĐK: $x>1;\, x\neq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}<\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow 9.\left(\sqrt{x}-1\right)<4\left(\sqrt{x}+1\right)$ (Do $9.\left(\sqrt{x}+1\right)>0$)

$\Leftrightarrow 9\sqrt{x}-9<4\sqrt{x}+4\Leftrightarrow 5\sqrt{x}<13\Leftrightarrow \sqrt{x}<\dfrac{13}{5}\Leftrightarrow x<\dfrac{169}{25}$

Mà $x\geq 1;\, x\neq 4;\, x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;\,2;\,3;\,5;\,6\}$

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc không đổi, hai địa điểm cách nhau 30km. Khi đi từ B về A người đó chọn đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì vậy, lúc về người đó đi với vận tốc lớn hơn vận tốc đi là 3km/h. Nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi của người đó.

2) Một quả bóng hình cầu có diện tích bề mặt là $144\pi\ cm^2$. Tính thể tích của quả bóng đó? (Lấy $\pi\approx 3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi vận tốc của người đi xe đạp từ A đến B là x (km/h; $x>0$)
Suy ra vận tốc lúc về của người đi xe đạp là $x+3$ (km/h)

Thời gian đi từ A đến B là $\frac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian đi về từ B đến A là $\frac{36}{x+3}$ (giờ)

Lập luận để có hệ phương trình $\frac{30}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{1}{3}$

Giải phương trình: $x=9$ (km/h); $x=-30$ (loại)

Vậy vận tốc của người đi xe đạp từ A đến B là 9 (km/h)

2) Thể tích quả bóng hình cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4}{3}.3,14.6^3=904,32$ cm³

Vậy thể tích quả bóng hình cầu xấp xỉ $904,32\ cm^3$

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x}-\dfrac{3x}{x+y}=-2\\ 3\sqrt{x}+\dfrac{x}{x+y}=8\end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx+1$ (với m là tham số).

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $\sqrt{x_1}-x_1.|x_2|=1$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne -y$

$$\begin{cases}2\sqrt{x}-\dfrac{3x}{x+y}=-2\\ 3\sqrt{x}+\dfrac{x}{x+y}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x}-\dfrac{3x}{x+y}=-2\\ 9\sqrt{x}+\dfrac{3x}{x+y}=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11\sqrt{x}=22\\ 2\sqrt{x}-\dfrac{3x}{x+y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=2\\ 2\sqrt{x}-\dfrac{3x}{x+y}=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ 2.\sqrt{4}-\dfrac{3.4}{4+y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ \dfrac{12}{4+y}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\ (tm)\\ y=-2\ (tm)\end{cases}$$

Vậy hệ PT có nghiệm duy nhất là $(4;-2)$

2a) PT hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2-2mx-1=0$ $(*)$

Ta có $ac=-1<0$. Nên PT (*) luôn có hai nghiệm trái dâu.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

2b) Theo hệ thức Viet ta có : $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=-1\end{cases}$

PT (*) luôn có hai nghiệm trái dấu

Mà theo yêu cầu đề bài $\sqrt{x_1}-x_1.|x_2|=1$ nên $x_1>0$ và $x_2<0$

$$\Rightarrow |x_2|=-x_2\Rightarrow \sqrt{x_1}+x_1.x_2=1\Rightarrow \sqrt{x_1}=2\Rightarrow x_1=4\Rightarrow x_2=\frac{-1}{4}$$

Thay $x_1 = 4$ và $x_2 = \dfrac{-1}{4}$ vào $x_1 + x_2 = 2m$

Tìm được $m = \dfrac{15}{8}$.

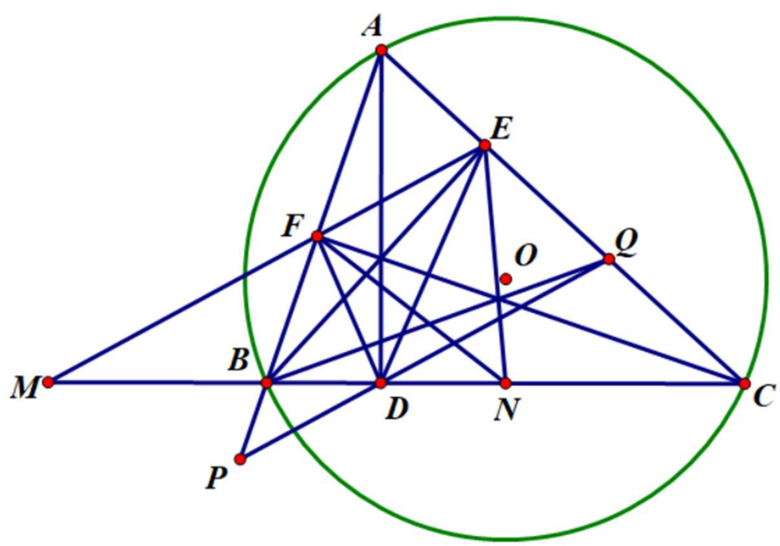
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định nhỏ hơn đường kính, A là điểm di động trên cung lớn BC ($AB < AC$ và ΔABC nhọn). Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC.

1) Chứng minh rằng: Tứ giác $ACDF$ nội tiếp.

2) Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB tại P và cắt AC tại Q. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta AQP$.

3) Gọi N là trung điểm BC và EF cắt BC tại M. Chứng minh ΔDFP cân tại D và $MF.ME = MD.MN$.

Lời giải



1) Ta có $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADC} = 90°$ và $CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFC} = 90°$

Xét tứ giác $AFDC$ có $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90°$

Mà hai đỉnh F, D kề nhau cùng nhìn cạnh AC

Suy ra $AFDC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

2) Vì $BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90°$

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$

Mà hai đỉnh F, E kề nhau cùng nhìn cạnh BC

Suy ra $BFEC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{ACB}$

Lại có $FE // PQ \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{APQ}$ (hai góc đồng vị)

Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$

Xét ΔABC và ΔAQP có

$\widehat{BAC}$ chung và $\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AQP$ (g.g)

3) Vì tứ giác $ACDF$ nội tiếp (cmt) suy ra $\widehat{PFD} = \widehat{BCE}$ (1)

Ta lại có: $MF // PD \Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{BPD}$

mà $\widehat{MFB} = \widehat{BCE}$ ($BFEC$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{BCE}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{BFD}$

Do đó tam giác DFP cân tại D

Ta có tam giác BEC vuông và N là trung điểm của BC nên $\widehat{BNE} = 2\widehat{ECB}$

$\widehat{BFD} = \widehat{ECB} = \widehat{AFE} \Rightarrow \widehat{BNE} + \widehat{EFD} = 2\widehat{ECB} + 180° - 2\widehat{BFD}$

Do đó: $\widehat{BNE} + \widehat{EFD} = 180°$ suy ra tứ giác $DFEN$ nội tiếp

Chứng minh được $\Delta MED \backsim \Delta MNF$ (g.g) suy ra $MF.ME = MD.MN$

Bài V: (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{b^2c+1} + \dfrac{b}{c^2a+1} + \dfrac{c}{a^2b+1}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{a}{b^2c+1} = a - \frac{ab^2c}{b^2c+1} \ge a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} = a - \frac{b\sqrt{a(ac)}}{2} \ge a - \frac{b(a+ac)}{4}$$

Suy ra ta có $\dfrac{a}{b^2c+1} \ge a - \dfrac{1}{4}(ab+abc)$

Tương tự có: $\dfrac{b}{c^2a+1} \ge b - \dfrac{1}{4}(bc+abc); \dfrac{c}{a^2b+1} \ge c - \dfrac{1}{4}(ca+abc)$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2a+1} + \frac{c}{a^2b+1} \ge 3 - \frac{ab+bc+ca}{4} - \frac{3abc}{4}$$

Ta có: $3 = a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3abc}{4}$

$$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{4} \le \frac{3}{4}$$

Do đó ta được $\dfrac{a}{b^2c+1} + \dfrac{b}{c^2a+1} + \dfrac{c}{a^2b+1} \ge 3 - \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}$ hay $\dfrac{a}{b^2c+1} + \dfrac{b}{c^2a+1} + \dfrac{c}{a^2b+1} \ge \dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\ge 0;\, x\ne 4;\, x\ne 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=16$

2) Chứng minh $B=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$

3) Cho $P=A:B$. Tìm x để $P<\frac{1}{2}$

Lời giải

1) Với $x=16$ (TMĐK) thay vào biểu thức A ta được: $A=\frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-3}=\frac{4-1}{4-3}=\frac{3}{1}=3$

2) ĐKXĐ: $x\ge 0;\, x\ne 4;\, x\ne 9$

$$B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{6\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+6\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{2x-6\sqrt{x}-x+4+6\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

3) ĐKXĐ: $x\ge 0;\, x\ne 4;\, x\ne 9$

$$P=A:B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}:\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}.\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

$$P<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{2}<0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}<0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-4}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}<0$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow 2\left(\sqrt{x}+2\right) > 0$

Nên để $\dfrac{\sqrt{x}-4}{2\left(\sqrt{x}+2\right)} < 0$ thì $\sqrt{x}-4<0 \Rightarrow \sqrt{x}<4 \Rightarrow x<16$

Vậy $0 \leq x < 16$ và $x \neq 4; x \neq 9$ thì $P < \dfrac{1}{2}$

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất mỗi ngày tăng 10 sản phẩm. Vì thế không những hoàn thành sớm kế hoạch 1 ngày, mà còn vượt mức 100 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phải làm bao nhiêu sản phẩm.

2) Một chiếc thùng hình trụ có đường kính đáy là 40cm được đựng đầy nước. Sau khi múc ra 30 lít nước thì còn lại $\dfrac{2}{3}$ thùng. Tính chiều cao của thùng (lấy $\pi \approx 3{,}14$ và làm tròn đến đơn vị cm).

Lời giải

1) Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/ngày, $x>0$)

Thì năng suất thực tế là: $x+10$ (sản phẩm/ngày)

Thời gian làm theo kế hoạch là $\dfrac{600}{x}$ (ngày)

Thời gian làm thực tế là $\dfrac{700}{x+10}$ (ngày)

Theo bài ra ta có phương trình $\dfrac{600}{x}-\dfrac{700}{x+10}=1$

$\Leftrightarrow 600(x+10)-700x = x(x+10) \Leftrightarrow 600x+6000-700x = x^2+10x \Leftrightarrow x^2+110x-6000=0$

Giải PT được: $x_1 = 40$ (tmđk); $x_2 = -150$ (loại)

Vậy theo dự định mỗi ngày phải làm 40 (sản phẩm)

2) Đổi 40cm = 4dm

Bán kính đáy là: 4:2 = 2dm

Thể tích thùng là: 30. 3 = 90 lít

Từ công thức $V = \pi . R^2 . h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2} = \dfrac{90}{3{,}14.\,4} \approx 7{,}1$ (dm) = 71 cm

Vậy chiều cao thùng là 71 (cm)

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\dfrac{1}{y-1}=3 \\ 2\sqrt{x+2}-\dfrac{3}{y-1}=1 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ, cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - m^2 + 3$ (với m là tham số)

a) Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Khi đó tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 8$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \ge -2;\ y \ne 1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+2} = a \\ \dfrac{1}{y-1} = b \end{cases}$ $(a \ge 0)$. Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=6 \\ 2a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b=5 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ (tm)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 2 \\ \dfrac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} (tm)$$

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x;y) = (2;2)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 = 2(m-1)x - m^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 3 = 0 = -2m + 4$$

Để (d) tiếp xúc với (P) thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow -2m = -4 \Leftrightarrow m = 2$$

Khi đó: $x_1 = x_2 = m - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1;1)$

Vậy với $m = 2$ thì (d) tiếp xúc (P). Khi đó tọa độ tiếp điểm là: $A(1;1)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0 \quad (*)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 4 > 0 \Leftrightarrow -2m > -4 \Leftrightarrow m < 2$

Theo Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

Theo bài: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 8$

$\Rightarrow [2(m-1)]^2 - 4(m^2 - 3) = 8 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12 = 8 \Leftrightarrow -8m = -8 \Rightarrow m = 1$ (tmđk)

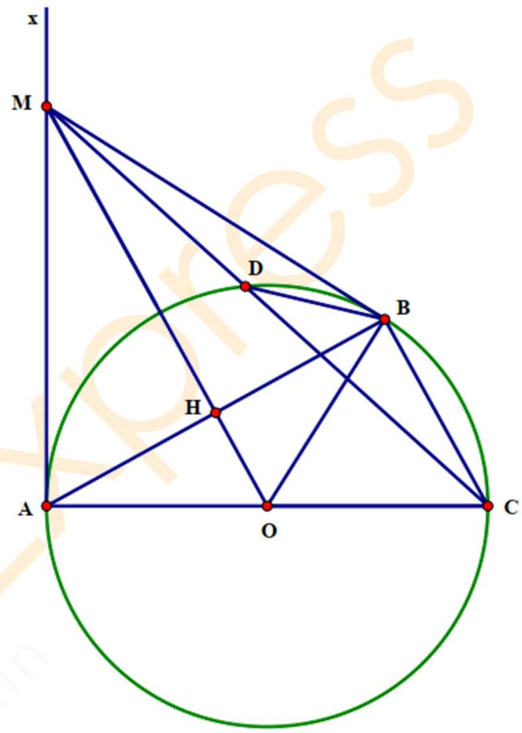
Bài IV: (3,0 điểm) Cho (O, R) đường kính AC, kẻ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy điểm M, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. MC cắt đường tròn tại D. AB cắt MO tại H.

1) Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp và $MB^2 = MH.MO$

2) Chứng minh: $MC.MD = MH.MO$. Từ đó suy ra tứ giác $COHD$ nội tiếp.

3) Gọi I là giao điểm của BD với OM; K là giao điểm của AB với CD. Chứng minh ba đường thẳng MB, HC, IK đồng quy

Lời giải



1) Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên

$\widehat{MAO} = 90°$; $\widehat{MBO} = 90°$

Xét tứ giác $MAOB$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

Vậy tứ giác $MAOB$ nội tiếp

Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MA = MB$

Lại có: $OA = OB = R$

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$

Áp dụng HTL trong tam giác MOB ta có: $MB^2 = MH.MO$

2) Xét (O) ta có: $\widehat{MCB} = \widehat{MBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây chắn chắn cung BD)

Xét ΔMBD và ΔMCB có:

$\widehat{M}$ là góc chung; $\widehat{MCB} = \widehat{MBD}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MCB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MC}{MB} \Rightarrow MB^2 = MC.MD$

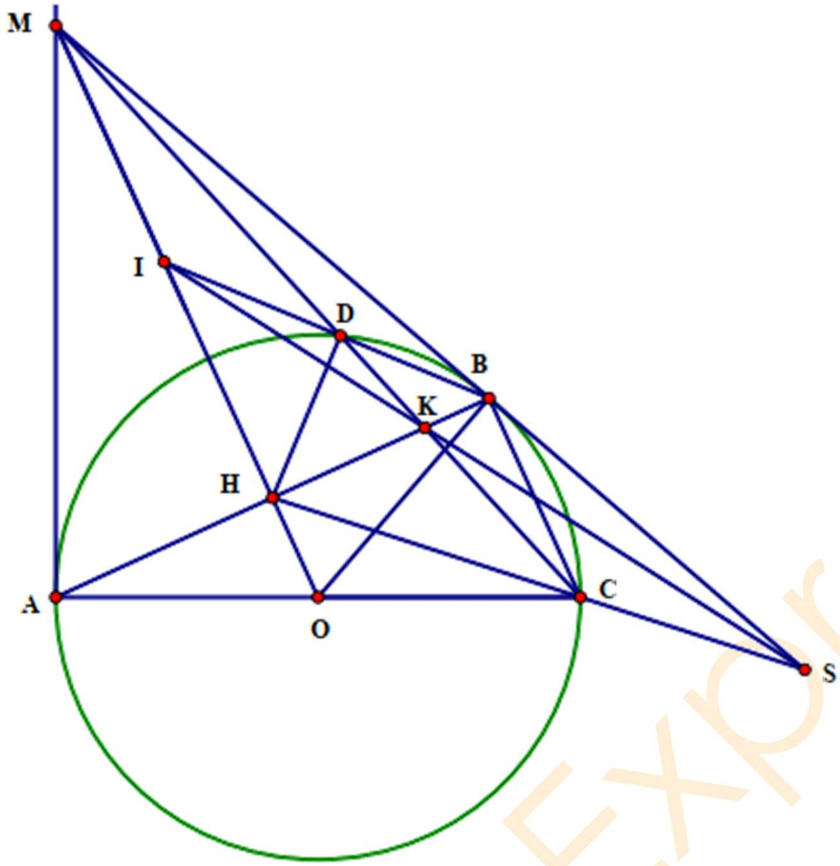
Mà $MB^2 = MH.MO \Rightarrow MC.MD = MH.MO \Rightarrow \dfrac{MD}{MH} = \dfrac{MO}{MC}$

Xét ΔMDH và ΔMOC có: $\widehat{M}$ chung; $\dfrac{MD}{MH} = \dfrac{MO}{MC}$

$\Rightarrow \Delta MDH \backsim \Delta MOC$ (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MCO}$

Mà $\widehat{MHD} + \widehat{DHO} = 180° \Rightarrow \widehat{DHO} + \widehat{DCO} = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DHOC$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$)



Xét (O) ta có: $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ (góc nội tiếp chắn cung AD)

Mà $\widehat{ACD}=\widehat{DHI}$ $\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{DHI}$

Lại có: $\widehat{DHI}+\widehat{DHB}=90^\circ$ $\Rightarrow$ $\widehat{HBD}+\widehat{DHB}=90^\circ$ $\Rightarrow HD\perp BI$

Áp dụng HTL trong tam giác BHI ta có: $IH^2=ID.IB$ (1)

Mặt khác: $\widehat{IMD}=\widehat{DCB}$ (so le trong)

Mà $\widehat{DCB}=\widehat{MBD}$ $\Rightarrow \widehat{IMD}=\widehat{IBM}$

Xét ΔIMD và ΔIBM có: $\hat{I}$ chung ; $\widehat{IMD}=\widehat{IBM}$ (cm trên)

$\Rightarrow \Delta IMD\backsim\Delta IBM$ (g . g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{ID}=\dfrac{IB}{IM}\Rightarrow IM^2=IB.ID$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH=IM$

Gọi S là giao điểm của MB và HC

Tứ giác $MBCH$ là hình thang do $BC//MH$ (cùng vuông góc với AC)

Xét hình thang $MBCH$ có:

S là giao điểm hai cạnh bên; K là giao điểm hai đường chéo; I là trung điểm cạnh đáy

$\Rightarrow S, K, I$ thẳng hàng (bổ đề hình thang)

$\Rightarrow$ Vậy ba đường thẳng: MB, HC, IK đồng quy tại S.

Bài V: (0,5 điểm) Giải phương trình: $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x < 0, x \ge 1$

Vì $x \ne 0$ nên chia cả hai vế cho x ta được:

$$x + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0$$

Đặt $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = t \ge 0$, phương trình $\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

Giải phương trình được $t = 1$ (tm); $t = -3$ (loại)

$$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \text{(tm)}$$

---------------------------- HẾT ----------------------------

ĐỀ SỐ 13

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x>0;x\neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

2) Chứng minh $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A.B$

Lời giải

1) Thay $x=25$ (tmdk) vào A ta có $A=\dfrac{25+7}{3.\sqrt{25}}=\dfrac{32}{15}$

Vậy $x=25$ thì $A=\dfrac{32}{15}$

2) $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$

$$B=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)-7\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{2x-6\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}+3-7\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$B=\frac{3x-9\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

3) $P=A.B=\dfrac{x+7}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}-6$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số $\sqrt{x}+3$ và $\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}$ ta có

$$\sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+3\right).\frac{16}{\sqrt{x}+3}}=8$$

$$\sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}-6\geq 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+3=\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x}+3\right)^2=16\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=4\Leftrightarrow x=1$ (tmdk)

Vậy GTNN của $P=2$ khi $x=1$

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu ô tô chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến sớm hơn dự định 3 giờ, nếu ô tô chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

2) Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12cm, chiều cao 10cm. Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp sữa không tính phần mép nối (*kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân*)

Lời giải

1) Gọi thời gian dự định là x (giờ), vận tốc của xe máy lúc đầu là y (km/h)

Điều kiện: $x > 3; y > 10$

Chiều dài quãng đường AB là xy (km)

Khi xe chạy nhanh hơn 10km mỗi giờ thì

+) Vận tốc của xe này là: $y+10$ (km/h)

+) Thời gian xe đi hết quãng đường AB là: $x-3$ (giờ)

Ta có phương trình: $(x-3)(y+10)=xy$

Khi xe chạy chậm hơn 10km mỗi giờ thì

+) Vận tốc xe lúc này là: $y-10$ (km/h)

+) Thời gian xe đi hết quãng đường AB là: $x+5$ (giờ)

Ta có phương trình: $(x+5)(y-10)=xy$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)(y+10)=xy\\(x+5)(y-10)=xy\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10x-3y=30\\2y=80\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=15\\y=20\end{cases}$ (tmdk)

Vậy thời gian xe dự định di hết quãng đường AB là 15 giờ

Vận tốc xe lúc đầu là 40km/h

Quãng đường AB có độ dài là: 15 . 40 = 600 (km)

2) Ta có bán kính đáy là $6cm$. Diện tích đáy là $\pi.6^2=36\pi\ (cm^2)$

Diện tích xung quanh là $2\pi.6.10=120\pi\ (cm^2)$

Diện tích vật liệu dùng để làm vỏ sữa là: $2.36\pi+120\pi=192\pi\ (cm^2)$

Bài III: (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x+2)(2y-3)=6xy\\(4x+5)(y-5)=4xy\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-3x+m-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=9$

Lời giải

1) $\begin{cases}(3x+2)(2y-3)=6xy\\(4x+5)(y-5)=4xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6xy-9x+4y-6=6xy\\4xy-20x+5y-25=4xy\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-9x+4y=6\\-20x+5y=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9x+4y=6\\-4x+y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9x+4y=6\\-16x+4y=20\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-9x+4y=6\\7x=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9x+4y=6\\x=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-3\\x=-2\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;-3)$

2) $x^2-3x+m-3=0$

Có $\Delta=9-4(m-3)=21-4m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 21-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{21}{4}$

Áp dụng hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1.x_2=m-3 \end{cases}$

Theo giả thiết: $x_1^3+x_2^3=9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1.x_2(x_1.x_2)=9$

$\Rightarrow 3^3-3.3(m-3)=9 \Leftrightarrow m=5$

Kết hợp điều kiện $m<\dfrac{21}{4} \Rightarrow m=5$ (thỏa mãn)

Bài IV: (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R$, C là điểm bất kì nằm trên đường tròn sao cho C khác A và $AC<AB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho: $\widehat{COD}=90°$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD

1) Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh: $FC.FA=FD.FB$

3) Gọi I là trung điểm của EF, chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

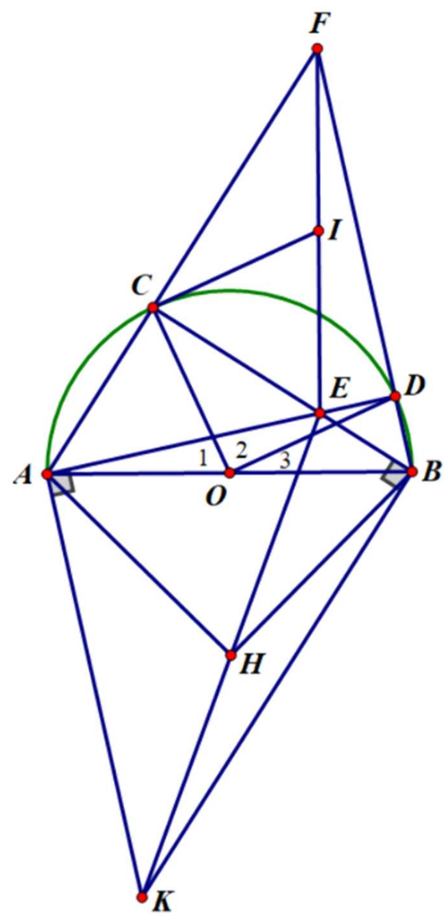
4) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Lời giải

1) Xét (O) có $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ECF}=\widehat{EDF}=90°$

Xét tứ giác $CEDF$ có $\widehat{ECF}=\widehat{EDF}=90°$. Mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow CEDF$ là tứ giác nội tiếp



2) Xét ΔFAD và ΔFBC có $\widehat{AFB}$ chung ; $\widehat{FDA}=\widehat{FCB}=90^0$

$\Rightarrow \Delta FAD \backsim \Delta FBC\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{FA}{FB}=\dfrac{FD}{FC} \Rightarrow FC.FA=FD.FB$

3) Xét ΔCEF vuông tại C có CI là trung tuyến

$\Rightarrow CI=IF=IE \Rightarrow \Delta ICE$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICE}=\widehat{IEC}$ (1)

Ta có: $OB=OC=R \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC}=\widehat{OCB}$ (2)

Xét ΔAFB có: $\begin{cases} AD\perp FB; BC\perp AF \\ AD\cap BC=E \end{cases} \Rightarrow E$ là trực tâm ΔAFB

$\Rightarrow FE\perp AB \Rightarrow \widehat{CFE}+\widehat{CAB}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{CFE}=\widehat{OBC}$ (cùng phụ $\widehat{CAB}$)

Mà $\widehat{CFE}+\widehat{IEC}=90^0 \Rightarrow \widehat{OBC}+\widehat{IEC}=90^0$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{ICE}+\widehat{OCB}=90^0 \Rightarrow \widehat{OCI}=90^0 \Rightarrow OC\perp CI$

$\Rightarrow CI$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

4) Ta có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=180^0\\ \widehat{O_2}=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{O_1}+\widehat{O_3}=90^0$

Xét (O) ta có $\left.\begin{array}{l}\widehat{DAB}=\dfrac{1}{2}\widehat{O_1}\\ \widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}\widehat{O_3}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DAB}+\widehat{ABC}=45^0\Rightarrow \widehat{AEB}=135^0$

Qua A kẻ $Ax\perp AE$; Qua B kẻ $By\perp BE$. $By\cap Ax=K$

Xét tứ giác $EAKB$ ta có $\left.\begin{array}{l}\widehat{KAE}=90^0\ (Ax\perp AE)\\ \widehat{KBE}=90^0\ (By\perp BE)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{KAE}+\widehat{KBE}=180^0$

Mà hai góc nằm tại hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $EAKB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AKB}+\widehat{AEB}=180^0\Rightarrow \widehat{AKB}+135^0=180^0\Rightarrow \widehat{AKB}=45^0$

Gọi H là trung điểm của EK $\Rightarrow HA=HE=HK$ (ΔAEK vuông tại A)

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EAKB$

Xét (H): $\widehat{AKB}=\dfrac{1}{2}\widehat{AHB}\Rightarrow \widehat{AHB}=90^0$

Xét ΔAHB vuông tại H có $HA=HB$ (bán kính đường tròn tâm H)

$\Rightarrow \Delta AHB$ vuông cân tại H mà AB không đổi nên H cố định

Áp dụng định lý Pytago vào ΔAHB ta có

$HA^2+HB^2=AB^2\Leftrightarrow 2HA^2=4R^2\Leftrightarrow HA=R\sqrt{2}$

Vậy khi C thay đổi E chạy trên đường tròn $\left(H;R\sqrt{2}\right)$ cố định

Bài V: (0,5 điểm) Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{a}{1+b^2}=a.\dfrac{1}{1+b^2}=a\left(1-\dfrac{b^2}{1+b^2}\right)\ge a\left(1-\dfrac{b}{2}\right)=a-\dfrac{ab}{2}$

Tương tự ta được: $\dfrac{b}{1+c^2}\ge b-\dfrac{bc}{2}$; $\dfrac{c}{1+a^2}\ge c-\dfrac{ca}{2}$

Cộng vế với vế ta có: $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\ge(a+b+c)-\dfrac{ab+bc+ca}{2}\ge\dfrac{3}{2}$

Vì $ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=3\Rightarrow(a+b+c)-\dfrac{ab+bc+ca}{2}\ge 3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

Vậy $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 14

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}; Q=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{Q}{P}$.

3) Tìm x nguyên lớn nhất để $A<\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức P ta có $P=\dfrac{9+\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-2}=13$

Vậy với $x=9$ thì $P=13$

2) $Q=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$

$A=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}:\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

3) Ta có: $A<\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}<\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x}-2\right)<3\left(\sqrt{x}+2\right)$

(do $x\geq 0, \sqrt{x}\geq 0, \sqrt{x}+2>0$). Suy ra $\sqrt{x}<14\Rightarrow x<196$.
Từ đó tìm được $x=195$ (tmđk).

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một công nhân được giao khoán sản xuất 120 sản phẩm trong thời gian nhất định. Trên thực tế, nhờ hợp lí hóa một số thao tác nên mỗi giờ người đó làm thêm được 3 sản phẩm nữa. Nhờ đó người công nhân hoàn thành công việc sớm hơn 2 giờ. Hỏi mỗi giờ người đó dự định làm bao nhiêu sản phẩm?

2) Một chiếc thang có chiều dài $6,7m$ được dựng tựa vào tường. Thang tạo với mặt đất góc 63^0. Tính chiều cao của đỉnh thang so với mặt đất *(Kết quả cuối cùng làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)*

Lời giải

1) Gọi số sản phẩm người công nhân dự định làm trong mỗi giờ là x.
Điều kiện: $x>0$.

Thời gian người đó dự định làm là $\dfrac{120}{x}$ (giờ)

Thực tế, mỗi giờ người đó làm được $x+3$ (sản phẩm)

Thời gian thực tế đã làm 120 sản phẩm là $\dfrac{120}{x+3}$ (giờ)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{120}{x}-\frac{120}{x+3}=2$

Giải phương trình, ta tìm được $x_1=12$ (tmđk); $x_2=-15$ (không tmđk)

Vậy người công nhân đó dự định mỗi giờ làm 12 sản phẩm.

2) Độ dài hình thang: $AB=6,7m$

Độ cao của đỉnh thang so với mặt đất AC

Góc tạo bởi thang so với mặt đất: $\widehat{ABC}=63^0$

Ta có ΔABC vuông tại C

$\Rightarrow \sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{AB}$ (tỉ số lượng giác góc nhọn)

$\Rightarrow AC=AB.\sin\widehat{ABC}=6,7.\sin 63^0\approx 6,0\ (m)$

Vậy độ cao của đỉnh thang so với mặt đất là $6,0\ (m)$

Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{3}{x+1}+\frac{1}{y-2}=4\\ \frac{2}{x+1}+\frac{3}{y-2}=5\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx-m^2+m+1$

a) Với $m=3$, xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|=4$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\neq -1; y\neq 2$.

Đặt $a=\frac{1}{x+1};b=\frac{1}{y-2}$, hệ trở thành $\begin{cases}3a+b=4\\2a+3b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x+1}=1\\ \frac{1}{y-2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1\\y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ (tmđk)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;3)$

2a) Với $m=3, (d): y=6x-5$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P): x^2=6x-5$

$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$.

Với $x=1\Rightarrow y=1$

Với $x=5\Rightarrow y=25$.

Vậy giao điểm của (d) và (P) là $(1;1)$ và $(5;25)$.

2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2=2mx-m^2+m+1\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m-1=0$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1$.

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m^2-m-1 \end{cases}$

Theo bài ra: $|x_1-x_2|=4\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=16\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$

Suy ra $4m^2-4(m^2-m-1)=16$

Từ đó tìm được $m=3$ (tmđk).

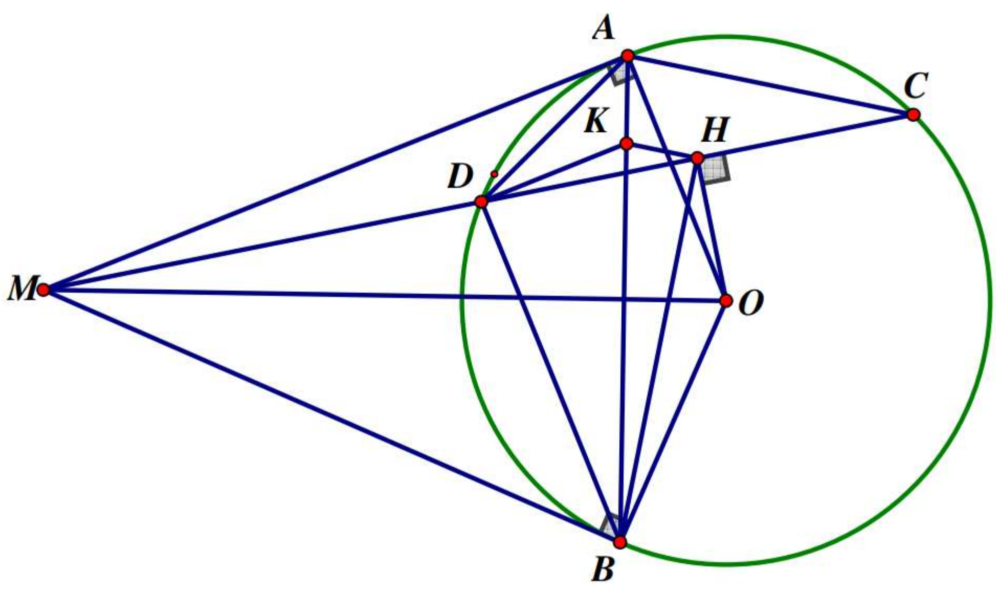
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d cắt (O) tại C,D. Lấy điểm M bất kỳ trên d sao cho $MC>MD$ và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O); A,B là các tiếp điểm. Gọi H là trung điểm CD. Chứng minh:

1) Năm điểm A,B,M,O,H cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $MA^2=MC\cdot MD$ và HM là tia phân giác của $\widehat{AHB}$.

3) Vẽ $DK\,//\,AM$ $(K\in AB)$. Chứng minh $HK\,//\,AC$.

Lời giải



1) Vì MA,MB là tiếp tuyến của $(O)\Rightarrow \widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^\circ$

Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO}+\widehat{MBO}=90+90^\circ=180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

Suy ra $MAOB$ là tứ giác nội tiếp (1)

Ta có H là trung điểm dây $CD\Rightarrow OH\perp CD$ (quan hệ đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{OHM}=90^\circ$

Xét tứ giác $MHOB$ có $\widehat{MHO}+\widehat{MBO}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$
Mà hai góc này đối nhau
Suy ra $MHOB$ là tứ giác nội tiếp (2)
Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm M,A,H,O,B cùng thuộc một đường tròn

2) * Ta có $\widehat{MAD}=\widehat{MCA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến - dây cung và góc nội tiếp chắn cung DA)
Xét ΔMAD và ΔMCA có $\widehat{AMD}$ chung và $\widehat{MAD}=\widehat{MCA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MAD \backsim \Delta MCA\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2=MC.MD$

* Vì tứ giác $MAHO$ nội tiếp nên $\widehat{AHM}=\widehat{AOM}$ (3)
Vì $MHOB$ nội tiếp nên $\widehat{MHB}=\widehat{MOB}$ (4)
Mà MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M

$\Rightarrow OM$ là phân giác $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM}=\widehat{BOM}$ (5)
Từ (3) , (4) , (5) suy ra $\widehat{MHA}=\widehat{MHB}$
Vậy HM là phân giác $\widehat{AHB}$

3) Ta có $\widehat{AMH}=\widehat{KBH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AH của đường tròn đi qua 5 điểm M,A,H,O,B).
Mà $\widehat{AMH}=\widehat{HDK}$ (đồng vị) nên $\widehat{KBH}=\widehat{KDH}$.
Từ đó tứ giác $KHDB$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{KHD}=\widehat{KBD}$
Mà $\widehat{ACD}=\widehat{KBD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD của đường tròn (O)).
Do đó $\widehat{KHD}=\widehat{ACD}$, mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $AC // KH$.

Bài V: (0,5 điểm) Cho x,y là những số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+\sqrt{2}}$.

Lời giải

Từ điều kiện $x^2+y^2=1 \Rightarrow |y|\le 1 \Rightarrow y+\sqrt{2}>0$

Ta có $P=\dfrac{x}{y+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}P=x-Py \Rightarrow 2P^2=(x-Py)^2$

$2P^2=(x-Py)^2\le\left(1+P^2\right)\left(x^2+y^2\right)=1+P^2 \Rightarrow P^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le P\le 1.$

Vậy GTLN của $P=1$ khi $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}};y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 15

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$, với $x>0, x\neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm $x\in\mathbb{N}$ để biểu thức $P=A\cdot B$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Thay $x=25$ (tmđk) vào A được $A=\dfrac{2\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}}=\dfrac{9}{5}$.

Vậy giá trị của biểu thức A khi $x=25$ là $\dfrac{9}{5}$.

2) $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(2\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+3\right)-\left(2x-\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$=\dfrac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-\sqrt{x}-3-2x+\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{x+3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

3) Ta có $P=A.B=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}=2+\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$.

Trong hai trường hợp $\sqrt{x}-3<0$ và $\sqrt{x}-3>0$. Để P lớn nhất thì $\sqrt{x}-3>0$

Mà $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\geq 10\Rightarrow\sqrt{x}-3\geq\sqrt{10}-3>0$

Suy ra $P_{\max}=\dfrac{2\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}-3}=17+5\sqrt{10}$ khi $x=10$ (tmđk).

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một đoàn xe cần vận chuyển hàng hóa thiết yếu tới các vùng có dịch. Nếu xếp mỗi xe 15 tấn thì còn thừa lại 5 tấn, còn nếu xếp mỗi xe 16 tấn thì chơ được thêm 3 tẫn nữa. Hỏi đoàn xe phải chở bao nhiêu tấn hàng, và có mấy xe?

2) Môn bi sắt (tên gọi quốc tế là pétanque) là một trong 40 môn được thi đấu tại SEA Game 31 được tổ chức tại Việt Nam. Một viên bi sắt hình cầu có đường kính 8 cm thì thể tích của viên bi đó là bao nhiêu cm (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân, lấy $\pi=3{,}14$).

Lời giải

1) Gọi x (xe) là số xe của đoàn $x\in\mathbb{N}^*$

y (tấn) là số hàng cần vận chuyển $(y>5)$

Nếu xếp mỗi xe 15 tấn thì còn thừa lại 5 tấn, ta có phương trình $15x=y-5$

Nếu xếp mỗi xe 16 tấn thì chở được thêm 3 tấn nữa, ta có phương trình $16x=y+3$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 15x = y - 5 \\ 16x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 125 \end{cases}$ (tmđk)

Vậy đoàn xe phải chở 125 tấn hàng, và có 8 xe.

2) Bán kính viên bi sắt là $4cm$

Thể tích của viên bi đó là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}3{,}14.4^3 \approx 267{,}95\ \text{cm}^3$.

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-2y} - \dfrac{3}{2x-1} = 1 \\ 3\sqrt{x-2y} + \dfrac{1}{2x-1} = 7 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x - m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $2x_1 = \sqrt{x_2}$.

Lời giải

1) Điều kiện $x \geq 2y; x \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2y} - \dfrac{3}{2x-1} = 1 \\ 3\sqrt{x-2y} + \dfrac{1}{2x-1} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x-2y} - \dfrac{9}{2x-1} = 3 \\ 6\sqrt{x-2y} + \dfrac{2}{2x-1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11}{2x-1} = 11 \\ 2\sqrt{x-2y} - \dfrac{3}{2x-1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 1 \\ 2\sqrt{x-2y} - \dfrac{3}{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2\sqrt{1-2y} - \dfrac{3}{2.1-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{1-2y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1-2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

(tmđk)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(1; \frac{-3}{2}\right)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = 5x - m - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + m + 1 = 0$

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4(m+1) = -4m + 21$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 21 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{21}{4}$

Khi đó theo Vi et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 (1) \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 (2) \end{cases}$

Theo đề ta có: $2x_1 = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_2 = 4x_1^2, (x_1 \geq 0; x_2 \geq 0)$, thay vào (1) ta được

$$x_1 + 4x_1^2 = 5 \Leftrightarrow 4x_1^2 + x_1 - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1\ (tm) \\ x_1 = -\dfrac{5}{4}\ (ktm) \end{array}\right.$$

Khi đó $x_2 = 4$ (thỏa mãn), thay vào (2) được: $1.4 = m+1 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn $m < \dfrac{21}{4}$).

Vậy $m = 3$.

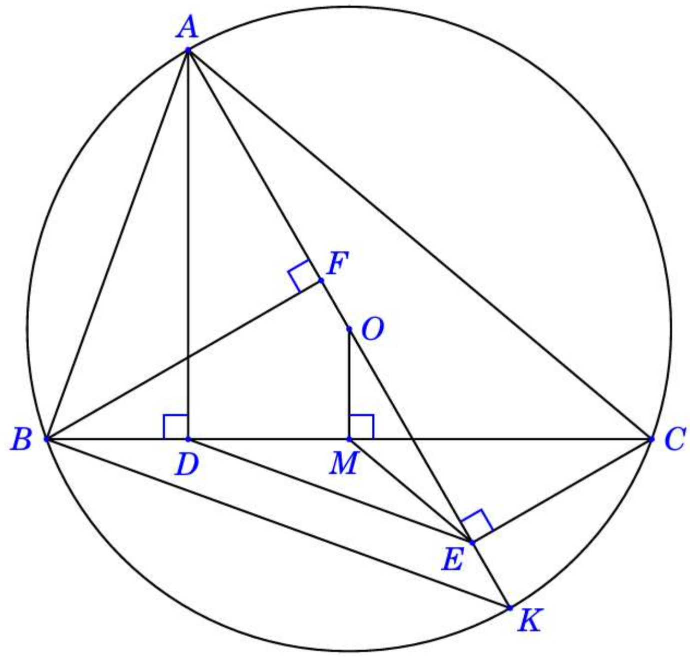
Bài IV: (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định không đi qua O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$, kẻ đường kính AK. Gọi E là hình chiếu của C lên AK, F là hình chiếu của B lên AK và M là trung điểm của BC.

1) Chứng minh bốn điểm C,O,E,M cùng thuộc một đường tròn.

2) Kẻ $AD \perp BC$ tại D. Chứng minh $AB \cdot AC = AD \cdot 2R$ và $DE // BK$.

3) Chứng minh ΔMDE cân và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{CEO} = 90°$ (vì E là hình chiếu của C lên AK)

$\widehat{CMO} = 90°$ (vì dây BC cố định không đi qua O và M là trung điểm của BC)

Tứ giác $CEMO$ có $\widehat{CEO} = \widehat{CMO} = 90°$ nên nội tiếp đường tròn đường kinh OC

Vậy bốn điểm C,O,E,M cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét ΔABD và ΔAKC có $\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90°; \widehat{ABD} = \widehat{AKC}\left(=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}\right)$

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AKC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AD}{AC}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AK$

Vậy $AB \cdot AC = AD.2R$.

Ta có $\widehat{ADC} = 90°$ (vì $AD \perp BC$)

$\widehat{AEC} = 90°$ (vì E là hình chiếu của C lên AK)

Tứ giác $CEDA$ có $\widehat{ADC}=\widehat{AEC}=90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn đường kính AC

Suy ra $\widehat{CDE}=\widehat{CAE}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EC}\right)$. Mà $\widehat{CBK}=\widehat{CAE}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CK}\right)$

$\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{CBK}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Vậy $DE\,//\,BK$.

c) Ta có $\widehat{CME}=\widehat{COE}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EC}\right)$; $\widehat{CAE}=\widehat{MDE}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EC}\right)$

Mà $\widehat{CME}=\widehat{MDE}+\widehat{MED}$ (góc ngoài của tam giác)

$\Rightarrow \widehat{MDE}=\widehat{MED}$

Vậy ΔMDE cân tại M (1)

+) Chứng minh ΔMEF cân:

Ta có $\widehat{MFO}=\widehat{MBO}$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn cung MO)

$\widehat{MCO}=\widehat{MEO}$ (3) (góc nội tiếp cùng chắn cung MO)

$\widehat{MCO}=\widehat{MBO}(4)(\Delta OBC$ cân)

Từ (2),(3),(4) suy ra $\widehat{MFO}=\widehat{MEO}$

Do đó ΔMEF cân tại M (5)

Từ (1) và (5) suy ra $MD=ME=MF$

Mà M là trung điểm BC cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm M cố định khi A di động trên cung lớn BC.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Chứng minh $\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}+\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{2ac}{a^2+c^2}}\ge 1$.

Lời giải

Với mọi $x,y,z\ge 0$ ta luôn có $(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2\Rightarrow x+y+z\ge\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Áp dụng ta có $\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}+\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{2ac}{a^2+c^2}}\ge\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ac}{a^2+c^2}}$

Mà $a,b,c>0\Rightarrow\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ac}{a^2+c^2}}\ge\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\sqrt{\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi $a-b>0,c=0$ và các hoán vị của chúng.

--------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 16

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{5\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
2) Rút gọn biểu thức x.
3) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A\cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được $A=\dfrac{16-2}{\sqrt{16}+1}=\dfrac{14}{4+1}=\dfrac{14}{5}$.

Vậy với $x=16$ thì $A=\dfrac{14}{5}$

2) $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{5\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}=\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$=\dfrac{2x-6\sqrt{x}-x+4+5\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

3) Ta có $P=A\cdot B=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{x-9+7}{\sqrt{x}-3}=\sqrt{x}+3+\dfrac{7}{\sqrt{x}-3}$

Xét $x=2\Rightarrow P=0\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=2$ (thỏa mãn) (1)

Xét $x\ne 2, x\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-3\in\mathbb{Z}$

Để $P\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{7}{\sqrt{x}-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-3\in\text{U}'(7)=\{-7,-1;1;7\}$

Vi $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}\in\{4;10\}(2)$

Xét $x\ne 2, x\in\mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\sqrt{x}-3$ là số vô tỉ mà $x-2\in\mathbb{Z}^*$ nên P là số vô tỉ (loại)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow x\in\{2;16;100\}$.

Bài II: (2,0 điểm) 1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn không có nước thì sau 4 giờ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi mất bao lâu mới chảy đầy bể?

2) Chiếc nón do làng Chuông (Thanh Oai - Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng $30\,cm$, đường kính đáy bằng $40\,cm$. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón (lấy $\pi\approx 3,14$).

Lời giải

1) Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x (giờ, $x > 4$)
Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $x+6$ (giờ)

Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được là $\frac{1}{x}$ (bể)

Mỗi giờ vòi thứ hai chảy được là $\frac{1}{x+6}$ (bể)

Vì cả hai vòi cùng chảy trong 4 giờ thì đầy bể nên trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{4}$ (bể)

Từ đó ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-2x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6\ (tm) \\ x=-4\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong 6 giờ, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $6+6=12$ giờ
2) Bán kính đáy của chiếc nón là $40:2=20\ (cm)$

Diện tích xung quanh của chiếc nón là $S=\pi Rl \approx 3{,}14.20.30=1884\ \left(cm^2\right)$

Diện tích lá cần dùng để làm một chiếc nón là $1884\ .\ 2=3768\ \left(cm^2\right)$

Vậy diện tích lá cần dùng để làm chiếc nón xấp xỉ $3768\ \left(cm^2\right)$.

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m-3)x-m+4$

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(1;1)$ với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 0; x \ne 9; y \ne \frac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt{x}-3} \\ b=\dfrac{1}{|2y-1|} \end{cases} (a \ne 0; b > 0)$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 8a+b=5 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=2 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{|2y-1|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3=2 \\ |2y-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right. (tm) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(25;1),(25;0)\}$.

2a) Thay $x=1;y=1$ vào $(d): y=(m-3)x-m+4$ ta có

$(m-3).1-m+4=1 \Leftrightarrow m-3-m+4=1 \Leftrightarrow 0m=0$ (luôn đúng với mọi m)

Vậy (d) luôn đi qua điểm $A(1;1)$ với mọi giá trị của m.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$x^2=(m-3)x-m+4 \Leftrightarrow x^2-(m-3)x+m-4=0$ (1)

Ta có $a+b+c=1-m+3+m-4=0$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm $x_1=1;x_2=m-4$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow m-4 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 5$

Do x_1,x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1>0;x_2>0 \Rightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m-4>0 \end{cases} \Rightarrow m>4$

Do $x_1 \neq x_2$ nên x_1,x_2 không thể là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông cân.

Giả sử x_1 là cạnh huyền, x_2 là cạnh góc vuông của một tam giác vuông cân thì theo định lý Pytago ta có $x_1^2=x_2^2+x_2^2 \Leftrightarrow x_1=\sqrt{2}\cdot x_2\,(*)$

Trường hợp 1: $x_1=1;x_2=m-4$ thay vào $(*)$ ta được $m-4=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{8+\sqrt{2}}{2}(\text{tm})$

Trường hợp 2: $x_2=1;x_1=m-4$ thay vào $(*)$ ta được $m-4=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=4+\sqrt{2}(\text{tm})$

Vậy $m \in \left\{4+\sqrt{2};\dfrac{8+\sqrt{2}}{2}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

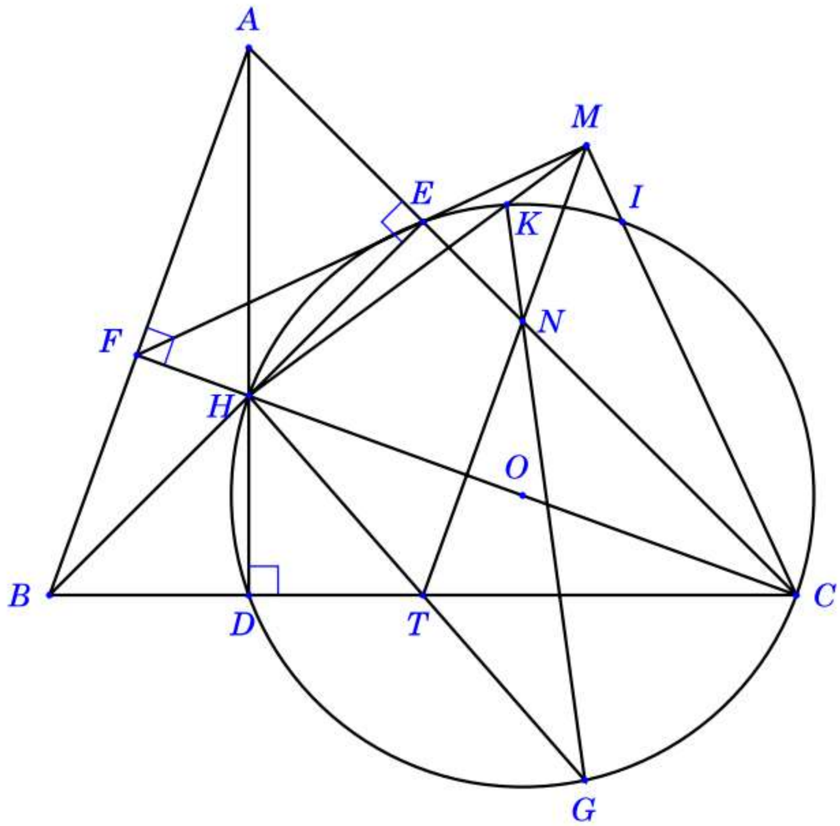
Bài IV: (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ có đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $DHEC$ nội tiếp và xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

b) Trên cung nhỏ của (O) lấy điểm I sao cho $IC>IE, DI$ cắt CE tại N. Chứng minh $NI.ND=NE.NC$

c) Gọi M là giao điểm của EF với IC, đường thẳng HM cắt (O) tại K, KN cắt (O) tại G (G khác K), MN cắt BC tại T. Chứng minh $MN // AB$ và H,T,G thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì AD là đường cao của $\triangle ABC$ nên $AD \perp BC$ tại $D \Rightarrow \widehat{HDC} = 90^\circ$

Vì BE là đường cao của $\triangle ABC$ nên $BE \perp AC$ tại $E \Rightarrow \widehat{HEC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $DHEC$ có $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $DHEC$ nội tiếp (theo dấu hiệu nhận biết)

Lấy O là trung điểm của đoạn thẳng HC

Vậy O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHEC$.

b) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{DIC} = \widehat{DEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DC)

Hay $\widehat{CIN} = \widehat{DEN}$

Xét $\triangle EDN$ và $\triangle ICN$ có

$\widehat{CIN} = \widehat{DEN}$ (chứng minh trên)

$\widehat{END} = \widehat{INC}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\triangle EDN \sim \triangle ICN$ (góc-góc)

$\Rightarrow \dfrac{EN}{IN} = \dfrac{DN}{CN}$ (các cạnh tương ứng)

$\Rightarrow NI.ND = NE.NC$.

c) **Chứng minh** $MN // AB$

Vì CF là đường cao của $\triangle ABC$ nên $CF \perp AB$ tại $D \Rightarrow \widehat{BFC} = 90°$

$\widehat{HEC} = 90^\circ$ hay $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (cmt) Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$

Mà hai góc này cùng kề cạnh EF và nhìn cạnh $BC \Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp (theo dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Hay $\widehat{AFE} = \widehat{DCE}$

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DIE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{DIE}$ (1)

Tương tự ta chứng minh được tứ giác $BDEA$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{ABC}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Ta có $\widehat{MEN} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{FEC}$)

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{MEN}$

Mà $\widehat{DEC} = \widehat{DIC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DC)

$\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{DIC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MENI$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{EMN} = \widehat{EIN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EN) (2)

Mà $\widehat{AFE} = \widehat{DIN}$ (cmt) hay $\widehat{AFE} = \widehat{EIN} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{EMN}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow MN // AB$ (dấu hiệu nhận biết)

Chứng minh H, T, G thẳng hàng

Xét (O) có $\widehat{HCK} = \widehat{HGK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

Do $MN \parallel AB$ (cmt) mà $AB \perp CF \Rightarrow MN \perp CF \Rightarrow \widehat{KMN} + \widehat{KHC} = 90^\circ$

Mà $\widehat{HKC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

$\Rightarrow \widehat{KCH} + \widehat{KHC} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{KMN} = \widehat{HCK} = \widehat{HGK}$ hay $\widehat{HGN} = \widehat{KMN}$ (3)

Xét (O) có $\widehat{IDC} = \widehat{IEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IC)

Hay $\widehat{TDN} = \widehat{IEN}$

Tứ giác $MENI$ nội tiếp $(\text{cmt}) \Rightarrow \widehat{IMN} = \widehat{IEN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NI)

Do đó $\widehat{IMN} = \widehat{TDN}$

Từ đó chứng minh được $\Delta MNI \backsim \Delta DNT(\text{g}-\text{g})$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{DN} = \dfrac{NI}{NT}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow NI.ND = MN.NT$

Xét (O) có $\widehat{KGC} = \widehat{KEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC) Hay $\widehat{NGC} = \widehat{NEK}$

Từ đó chứng minh được $\Delta GNC \backsim \Delta ENK(\text{g}-\text{g})$

$\Rightarrow \dfrac{GN}{NE} = \dfrac{NC}{NK}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow GN.NK = NE.NC$

Mà $NI.ND = NE.NC$ (ý b) $\Rightarrow NI.ND = GN.NK$

Mà $NI.ND = MN.NT$ (cmt)

$\Rightarrow MN.NT = GN.NK \Rightarrow \dfrac{MN}{GN} = \dfrac{NK}{NT}$

$\Rightarrow \Delta TGN \backsim \Delta KMN\left(\text{c}-\text{g}-\text{c}\right)$

$\Rightarrow \widehat{TGN} = \widehat{KMN}$ (4) (cặp góc tương ứng)

Từ (3) và $\left(4\right) \Rightarrow \widehat{TGN} = \widehat{HGN}$

$\Rightarrow H,T,G$ thẳng hàng.

Bài V: (0,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a,b \ge 0$; $0 \le c \le 1$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = ab+bc+ac+3\left(a+b+c\right)$.

Lời giải

Ta có $2\left(ab+bc+ca\right) = (a+b+c)^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right) = (a+b+c)^2 - 3$

$\Rightarrow 2P = (a+b+c)^2 + 6\left(a+b+c\right) - 3$

Lại có $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 9 \Rightarrow a+b+c \le 3 \Rightarrow 2P \le 9+18-3 = 24 \Rightarrow P \le 12$

Dấu" = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy GTLN của P là 12 $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Tìm GTNN

Do $(a+b+c)^2 \ge a^2+b^2+c^2 = 3 \Rightarrow a+b+c \ge \sqrt{3}$

$2P \ge 3+6\sqrt{3}-3 = 6\sqrt{3} \Rightarrow P \ge 3\sqrt{3}$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow a=c=0; b=\sqrt{3}$ hoặc $b=c=0; a=\sqrt{3}$

Vậy GTNN của P là $3\sqrt{3} \Leftrightarrow a=c=0; b=\sqrt{3}$ hoặc $b=c=0; a=\sqrt{3}$.

---------------------------- HẾT ---------------------------

ĐỀ SỐ 17

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0;x\ne 1;x\ne 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$. 2. Rút gọn biểu thức B.

3. Cho $P=\frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P|>P$.

Lời giải

1. Thay $x=49$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\frac{\sqrt{49}+1}{\sqrt{49}}=\frac{8}{7}$

Vậy với $x=49$ thì $A=\frac{8}{7}$

2. $B=\frac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$=\frac{3x-(x-1)+(x-4)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{3x-3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

3. ĐKXĐ: $x>0;x\ne 1;x\ne 4$

$P=\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}:\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$

Để $|P|>P$ thì $P<0\Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}<0$

Vì $3\sqrt{x}>0\,\forall x>0;x\ne 1;x\ne 4$

$\Rightarrow \sqrt{x}-2<0\Rightarrow \sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

Kết hợp ĐKXĐ ta có $0<x<4$ và $x\ne 1$

Mà x là số nguyên nhỏ nhất nên $x=2$

Vậy $x=2$ thoả mãn bài toán.

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

1) Quãng đường AB dài 60 km; một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường, người đó giảm vận tốc $5km/h$ trên nửa quãng đường còn lại. Vì vậy, nguời đó đã đến B chậm hơn dự định 1 giờ. Tính vận tốc dự định của người đó.

2) Một cốc trà sữa hình trụ có đường kính đáy là $8cm$. Bạn Đăng bỏ thêm trân châu vào cốc thì thấy trà sữa dâng lên cao thêm $3cm$. Tính thể tích phần trân châu bạn Đăng đã bỏ thêm vào (trân châu chìm hoàn toàn trong trà sữa và không thấm nuốc; lấy $\pi\approx 3,14$).

Lời giải

1) Gọi vận tốc dự định của người đó là x (km/h) $(x>5)$

Thời gian dự định người đó đi từ A đến B là $\frac{60}{x}$ (giờ)

Trên thực tế, thời gian người đó đi được nửa quãng đường đầu là $\frac{30}{x}$ (giờ)

Vận tốc thực tế của người đó đi trên nửa quãng đường còn lại là $x-5$ (km/h)

Thời gian thực tế của người đó đi trên nửa quãng đường còn lại là $\frac{30}{x-5}$ (giờ)

Vì người đó đế B chậm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình

$\frac{30}{x}+\frac{30}{x-5}=\frac{60}{x}+1$

Giải phương trình trên tìm được $x=15$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc dự định của người đó là $15\left(km/h\right)$

2) Bán kính đáy của cốc trà sữa là $8:2=4\left(cm\right)$

Thể tích nước tăng lên là thể tích phần trân châu được bỏ thêm

Thể tích phần trân châu là $\pi.R^2.h\approx 3{,}14\ .\ 4^2\ .\ 3\approx 150{,}72\left(cm^3\right)$

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\left|x-1\right|+\dfrac{3}{\sqrt{y+1}}=5\\ \left|x-1\right|-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

2) Cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right):y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\left(d\right)$ và parabol $\left(P\right)$ với $m=-3$.

b) Tìm giá trị của m để $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 2 .

Lời giải

1) Điều kiện: $y>-1$

Đặt $a=\left|x-1\right|$ $\left(a\ge 0\right)$; $b=\frac{1}{\sqrt{y+1}}$ $\left(b>0\right)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}2a+3b=5\\ a-b=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ (tm)

Khi đó $\begin{cases}\left|x-1\right|=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-1=2\\ x-1=-2\end{array}\right.\\ \sqrt{y+1}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.\\ y+1=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.\left(tm\right)\\ y=8\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left\{\left(3;8\right);\left(-1;8\right)\right\}$

2a) Với $m=-3$ thì $\left(d\right):y=3x-2$

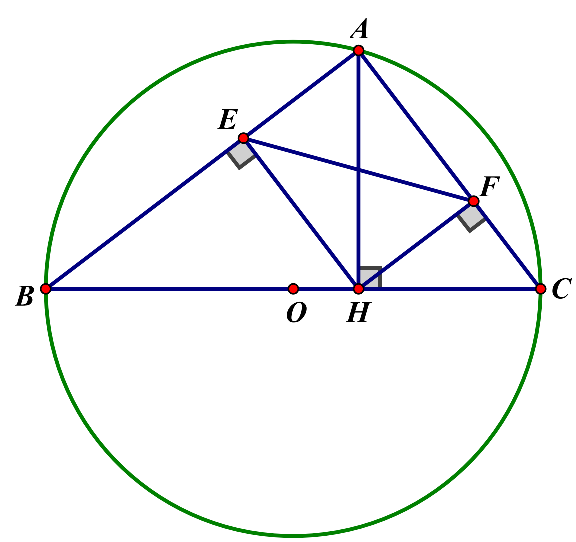
Xét phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ ta có

$x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\end{array}\right.$

Với $x=2\Rightarrow y=4$
Với $x=1\Rightarrow y=1$
Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P)là $(2;4)$ và $(1;1)$
b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có
$x^2=mx-m+1\Leftrightarrow x^2-mx+m-1=0$
$\Delta=(-m)^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2$
Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta>0\Rightarrow(m-2)^2>0\Rightarrow m-2\neq0\Rightarrow m\neq2$
Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=m-1\end{cases}$
Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 2 thì $|x_1|+|x_2|=2$
$\Rightarrow(|x_1|+|x_2|)^2=4\Leftrightarrow x_1{}^2+x_2{}^2+2|x_1x_2|=4\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=4$
$\Rightarrow m^2-2(m-1)+2|m-1|=4\Rightarrow2|m-1|=-m^2+2m+2\quad\left(1-\sqrt{3}\le x\le1+\sqrt{3}\right)$
$TH1: 2(m-1)=-m^2+2m+2\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=2$ (loại) hoặc $m=-2$ (thoả mãn)
$TH1: 2(m-1)=m^2-2m-2\Leftrightarrow m^2-4m=0\Leftrightarrow m=4$ (loại) hoặc $m=0$ (thoả mãn)
Vậy $m\in\{0;-2\}$ thoả mãn đề bài

Bài IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O), đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB>AC$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC(H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB; F thuộc AC).
1) Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật.
2) Chứng minh $AE\cdot AB=AF.AC$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.
3) Gọi D là giao điểm của EF và BC; K là giao điểm của AD với (O); I là giao điểm của KF và BC. Chứng minh rằng $IH^2=IC\cdot ID$.

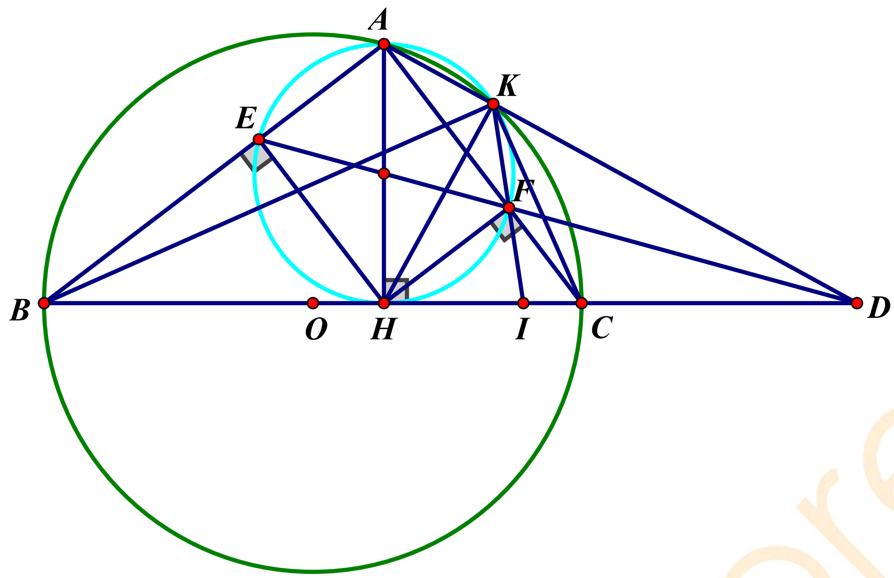
Lời giải



a) Ta có $\widehat{BAC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$HE\perp AB\Rightarrow\widehat{AEH}=90^\circ$; $HF\perp AC\Rightarrow\widehat{AFC}=90^\circ$
Xét tứ giác $AEHF$ có
$\widehat{EAF}=\widehat{AEH}=\widehat{AFH}=90^\circ$
$\Rightarrow AEHF$ là hình chữ nhật (dhnb)
b) Xét ΔAHB có $HE\perp AB$
$\Rightarrow AH^2=AE.AB$ (Hệ thức lượng)
Xét ΔAHC có $HF\perp AC$
$\Rightarrow AH=AF.AC$ (Hệ thức lượng)
Từ đó $AE.AB=AF.AC\Rightarrow\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB}$
Xét ΔAEF và ΔACB có $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB}$ và $\widehat{BAC}$ chung
$\Rightarrow\Delta AEF\backsim\Delta ACB$ (góc – góc)$\Rightarrow\widehat{AEF}=\widehat{ACB}$

Suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp

c)



Vì $BEFC$ nội tiếp nên $DF.DE = DC.DB$

$AKCB$ nội tiếp nên $DK.DA = DC.DB$

$\Rightarrow DK.DA = DF.DE \Rightarrow AKFE$ là tứ giác nội tiếp

Khi đó chứng minh được 5 điểm A, K, F, H, E cùng nội tiếp đường tròn đường kính AH

Do đó $AKFH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{AFH} = 90° \Rightarrow \widehat{KHI} = 90° - \widehat{KHA} = \widehat{KAH} = \widehat{HFI}$

Xét ΔHKI và ΔFHI có $\widehat{KHI} = \widehat{HFI}$ (cmt) và $\widehat{FIH}$ chung

$\Rightarrow \Delta HKI \backsim \Delta FHI$ (góc - góc) $\Rightarrow IH^2 = IK.IF$ (1)

Lại chứng minh được $\widehat{FKD} = \widehat{AHF} = 90° - \widehat{FHC} = \widehat{FCH}$ (do $AKFH$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow KFCD$ là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow IF.IK = IC.ID$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH^2 = IC.ID$

Bài V (0,5 điểm). Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{a^2 + a} + \sqrt{b^2 + b} + \sqrt{c^2 + c}$.

Lời giải

* GTLN

Ta có $\sqrt{10}.\sqrt{a^2 + a} = \sqrt{10a(a+1)} \le \frac{10a + a + 1}{2} = \frac{11a + 1}{2}$

Tương tự $\sqrt{10}\sqrt{b^2 + b} \le \frac{11b + 1}{2}$; $\sqrt{10}\sqrt{c^2 + c} \le \frac{11c + 1}{2}$

Cộng cả ba vế ta được $\sqrt{10}\left(\sqrt{a^2 + a} + \sqrt{b^2 + b} + \sqrt{c^2 + c}\right) \le \frac{11(a + b + c) + 3}{2} = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow P_{\max} \le \frac{\sqrt{10}}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{9}$

* GTNN

Ta có $a+b+c=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 0<3\left(a+b+c\right)=1\Rightarrow 0<3a\le 1$

Suy ra $3a\left(3a-1\right)\le 0\Leftrightarrow 3a\ge 9a^2\Rightarrow \sqrt{3a^2+3a}\ge \sqrt{3a^2+9a^2}=\sqrt{12a^2}$

Khi đó $\sqrt{3a^2+3a}+\sqrt{3b^2+3b}+\sqrt{3c^2+3c}\ge \sqrt{12a^2}+\sqrt{12b^2}+\sqrt{12c^2}=\sqrt{12}\left(a+b+c\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow P_{\min}=\dfrac{2}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $\left(a;b;c\right)=\left(1;0;0\right)$ và các hoán vị

------------------------------ HẾT ------------------------------

ĐỀ SỐ 18

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{11\sqrt{x}+6}{x-4}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0;x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$. 2) Chứng minh $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Đặt $P=A:B$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $\left|P+1\right|<3P$.

Lời giải

1) Thay $x=25$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{1-\sqrt{25}}{\sqrt{25}-2}=\dfrac{1-5}{5-2}=-4$

Vậy với $x=25$ thì $A=-4$

2) $B=\dfrac{11\sqrt{x}+6}{x-4}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{11\sqrt{x}+6+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-3\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{11\sqrt{x}+6+2x-4\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{2x+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=A:B=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow P+1=\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+1=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}>0\ \forall\ x>0;\ x\neq 4\Rightarrow \left|P+1\right|=P+1$

Theo đề bài $\left|P+1\right|<3P\Rightarrow P+1<3P\Leftrightarrow P>\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1>0\Leftrightarrow \dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}>0\Rightarrow 1-2\sqrt{x}>0$ (do $\sqrt{x}>0$)

$\Rightarrow \sqrt{x}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow x<\dfrac{1}{4}$. Kết hợp ĐKXĐ ta có $0<x<\dfrac{1}{4}$

Vậy $0<x<\dfrac{1}{4}$ thoả mãn đề bài

Bài II (2,5 điểm). 1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Để tham dự đại hội liên đội trường Lương Thế Vinh, bạn Thu phải đi xe đạp từ cơ sở A sang cơ sở I trên quãng đường dài 6 km. Khi từ cơ sở I trở về cơ sở A, bạn vẫn đi theo con đường cũ nhưng đã tăng vận tốc thêm 3 km / h. Biết rằng tổng thời gian đạp xe cả khi đi và khi về của bạn là 54 phút. Tính vận tốc của bạn Thu khi đi từ cơ sở A sang cơ sở I.

2) Một bồn nước hình trụ được làm bằng i-nox có chiều cao $1,5m$ và diện tích đáy là $3,14\,m^2$ đang chứa một lượng nước bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của bồn. Bác An muốn xả hết nước đi để cọ sạch bồn nên đã mở vòi nước ở đáy bồn cho nước chảy ra. Nếu mỗi giờ vòi chảy được $3m$ nước thì sau 30 phút bồn cạn hết nước chưa? (bỏ qua bề dày của bồn).

Lời giải

1) Gọi vận tốc của Thu khi đi từ cơ sở A sang cơ sở I là x (km/h) $(x>0)$

Thời gian Thu đi từ cơ sở A đến cơ sở I là $\frac{6}{x}$ (giờ)

Vận tốc khi Thu đi từ cơ sở I về cơ sở A là $x+3$ (km/h)

Thời gian Thu đi từ cơ sở I về cơ sở A là $\frac{6}{x+3}$ (giờ)

Tổng thời gian Thu đi từ cơ sở A đến cơ sở I rồi quay về là 54 phút $=\frac{9}{10}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+3}=\frac{9}{10}$$

Giải phương trình trên tìm được $x=12$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc của Thu đi từ cơ sở A sang cơ sở I là $12\,km/h$

2) Thể tích bồn nước hình trụ là $V=S.h=3,14.1,5=4,71\left(m^3\right)$

Thể tích nước trong bồn là $\frac{1}{3}.4,71=1,57\left(m^3\right)$

Thời gian để bồn xả hết nước là $1,57:3\approx 0,52$ (giờ) $\approx 31,4$ phút > 30 phút

Vậy sau 30 phút xả thì bồn chưa cạn hết nước

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}-\dfrac{3}{y+1}=-\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{8}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{9}{y+1}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=5x+3m-1$.

a) Khi $m=-1$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên dương.

Lời giải

1) Điều kiện: $x>5$; $y\neq -1$

Đặt $a=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ $(a>0)$; $b=\frac{1}{y+1}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}a-3b=-\dfrac{1}{4}\\ 8a+9b=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{1}{6}\end{cases}$ (tm)

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-5}} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 4 \\ y+1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 16 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 5 \end{cases}$ (thoả mãn)

2a) Với $m = -1 \Rightarrow (d): y = 5x - 4$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = 5x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow y = 16 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$

Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $(4;16)$ và $(1;1)$

2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2 = 5x + 3m - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3m + 1 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(-3m+1) = 12m + 21$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = -3m + 1 \end{cases}$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 + 12m > 0 \\ 5 > 0 \\ -3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{7}{4} \\ m < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4} < m < \dfrac{1}{3}$

Do $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1; x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow x_1; x_2 \in \{1;2;3;4\}$

Ta có bảng sau

x_1	1	2	3	4
x_2	4	3	2	1
$-3m+1 = x_1x_2$	4	6	6	4
m	-1 (thoả mãn)	$-\dfrac{5}{3}$ (thoả mãn)	$-\dfrac{5}{3}$ (thoả mãn)	-1 (thoả mãn)

Vậy $m \in \left\{-1; -\dfrac{5}{3}\right\}$

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B, C; $MB < MC$). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống các đường thẳng BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $MDBF, MDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{MDF} = \widehat{ACM}$, từ đó suy ra F, D, E thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N xuống các đường thẳng AB, BC. Chứng minh PQ vuông góc với EF.

Lời giải

a) Ta có $MD \perp BC$; $ME \perp AC$; $MF \perp AB\ (gt)$

$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{MFB} = \widehat{MEC} = \widehat{MDC} = 90°$

Xét tứ giác $MDBF$ có $\widehat{MDB} + \widehat{MFB} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow MDBF$ là tứ giác nội tiếp

Xét tứ giác $MDEC$ có

$\widehat{MDC} = \widehat{MEC} = 90°$

Mà hai đỉnh D, E kề nhau cùng nhìn cạnh MC

$\Rightarrow MDEC$ là tứ giác nội tiếp

b) Vì $MDBF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MDF} = \widehat{MBF}$

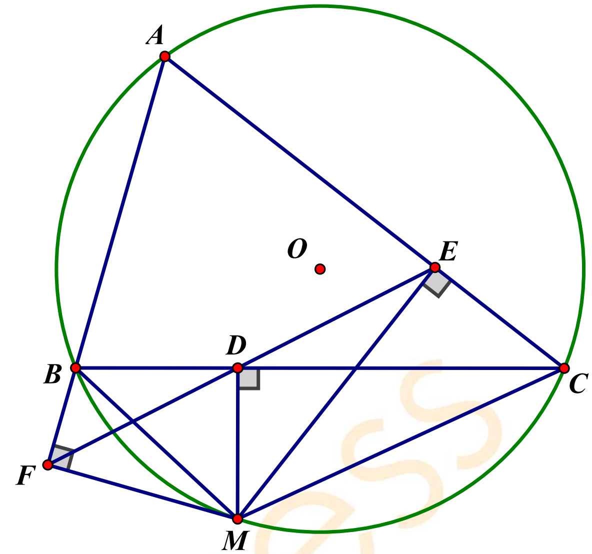
Lại có $\widehat{ACM} = \widehat{MBF}$ (Tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{ACM}$

$MDEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MCE} + \widehat{MDE} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MDF} + \widehat{MDE} = 180°$

Suy ra F, D, E thẳng hàng.



c) Ta có $NP \perp AB$; $NQ \perp BC\ (gt)$

$\Rightarrow \widehat{NPB} = \widehat{NQB} = 90°$

Xét tứ giác $NPBQ$ có $\widehat{NPB} + \widehat{NQB} = 180°$

$\Rightarrow NPBQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQN} = \widehat{PBN}$ (1)

Lại có $\widehat{NBM} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{PBN} = 180° - \widehat{NBM} - \widehat{MBF} = 180° - 90° - \widehat{MBF}$

$= 90° - \widehat{MBF} = \widehat{FMB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PQN} = \widehat{PBN} = \widehat{FMB}$

Ta có $MDBF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FMB} = \widehat{FDB}$

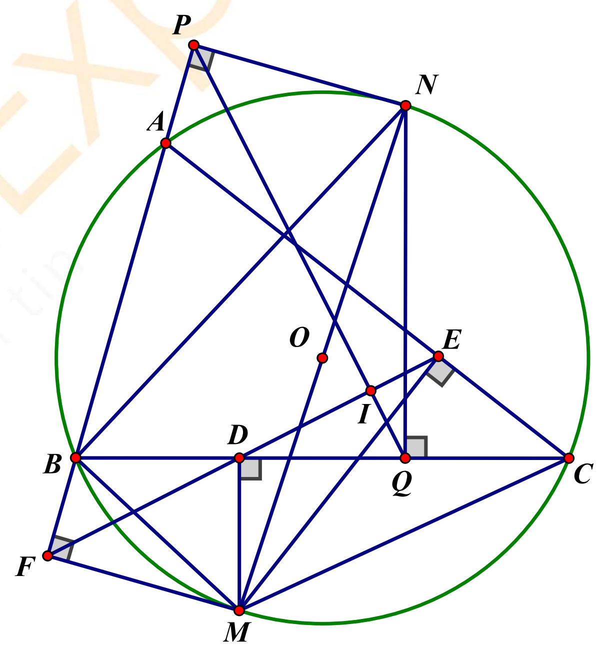
Mà $\widehat{FDB} = \widehat{EDQ}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{PQN} = \widehat{EDQ}$

Gọi I là giao điểm của EF với PQ

Ta có $\widehat{IDQ} + \widehat{IQD} = \widehat{EDQ} + \widehat{IQD} = \widehat{PQN} + \widehat{IQD} = \widehat{BQN} = 90°$

$\Rightarrow PQ \perp EF$ tại I



Bài V (0,5 điểm). Với a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \text{ và } a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwartza có

$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2 + 1 - 3 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 6 - 3 = 3$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ta có $a^3 + a \geq 2a^2$; $b^3 + b \geq 2b^2$; $c^3 + c \geq 2c^2$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+(a+b+c)\ge 2(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3\ge (a^2+b^2+c^2)+3$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2+b^2+c^2$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

------------------------------ HẾT ------------------------------

ĐỀ SỐ 19

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2x-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-4}-\dfrac{5-\sqrt{x}}{x-16}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}$ với $x\ge 0;x\ne 16$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$. 2. Rút gọn biểu thức B.
3. Đặt $P=A.B$. Tìm x biết $\sqrt{2P-1}=P-2$.

Lời giải

1. Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{2.9-8\sqrt{9}}{\sqrt{9}+5}=\dfrac{-3}{4}$

Vậy với $x=9$ thì $A=-\dfrac{3}{4}$

2. $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-4}-\dfrac{5-\sqrt{x}}{x-16}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+4\right)-\left(5-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4}$

$=\dfrac{3\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}.\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3}{\sqrt{x}-4}$

3. $P=A.B=\dfrac{2x-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}.\dfrac{3}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{\sqrt{x}+5}.\dfrac{3}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$

$\sqrt{2P-1}=P-2\Rightarrow\begin{cases}P\ge 2\\2P-1=\left(P-2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 2\\P^2-6P+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 2\\\left(P-5\right)\left(P-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 2\\P=5\ (tm)\\P=1\ (ktm)\end{cases}$

Suy ra $P=5\Rightarrow\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}=5\Rightarrow 6\sqrt{x}=5\sqrt{x}+25\Leftrightarrow\sqrt{x}=25\Leftrightarrow x=625$ (tm)

Vậy $x=625$ thoả mãn yêu cầu đề bài

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông dài $136\,km$, sau đó chạy ngược dòng $91\,km$ trên khúc sông đó. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là $4\,km/h$ và tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là 7 giờ 30 phút.

2. Bạn Linh có một chiếc cốc thuỷ tinh có lòng là một hình trụ có chiều cao $15\,cm$ và bán kính đáy bằng $2,5\,cm$ đang đựng $\dfrac{2}{3}$ nước. Linh muốn thả các viên bi ve hình cầu có bán kính $1\,cm$ vào cốc để trang trí. Hỏi bạn có thể thả thêm vào đó nhiều nhất bao nhiêu viên bi để nước không bị tràn ra khỏi cốc?

Lời giải

1) Gọi vận tốc riêng của Ca nô là x (km/h) $\left(x>4\right)$

Vận tốc của ca nô đi xuôi dòng là $x+4\ (km/h)$

Thời gian canô đi xuôi dòng là $\frac{136}{x+4}$ (giờ)

Vận tốc của canô đi ngược dòng là $x-4\ (km/h)$

Thời gian canô đi ngược dòng là $\frac{91}{x-4}$ (giờ)

Vì tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là 7 giờ 30 phút.$=\frac{15}{2}$ giờ

nên ta có phương trình

$$\frac{136}{x+4}+\frac{91}{x-4}=\frac{15}{2}$$

Giải phương trình trên tìm được $x=30$ (thoả mãn)

Vậy vận tốc riêng của canô là $30\ km/h$

2) Thể tích cốc nước hình trụ là $\pi R^2h=\pi\ .\ 2,5^2\ .\ 15=\frac{375}{2}\pi\ (cm^3)$

Thể tích nước trong cốc là $\frac{375}{4}\pi.\frac{2}{3}=\frac{125}{2}\pi\ (cm^3)$

Thể tích phần còn lại là $\frac{375}{4}\pi-\frac{125}{2}\pi=\frac{125}{4}\pi\ (cm^3)$

Thể tích viên bi là $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.1^3=\frac{4}{3}\pi\ (cm^3)$

Số viên bi nhiều nhất có thể thả vào cốc nước là $\frac{125}{4}\pi:\frac{4}{3}\pi=\frac{375}{16}\approx 23,4$ (viên)

Vậy bạn Linh có thể thả nhiều nhất 23 viên bi

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}-10x+5y=16\end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m+3$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8. Khi đó hãy tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

3. Tìm m để phương trình $x^4+(3m-2)x^2-3m+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Lời giải

1) Điều kiện: $x>1$

$\begin{cases}\frac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}-10x+5y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{\sqrt{x-1}}+2x-y=2\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}-5(2x-y)=16\end{cases}$. Đặt $a=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\ (a>0)$; $b=2x-y$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}5a+b=2\\a-5b=16\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}25a+5b=10\\a-5b=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}26a=26\\a-5b=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$ (thoả mãn)

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=1\\2x-y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\2x-y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\2x-y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=7\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy HPT có nghiệm là $(x;y)=(2;7)$

2) Vì (d) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8 nên (d) đi qua $(0;8)$

Thay $x=0$; $y=8$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có

$8=2.0+m+3\Rightarrow m=5$

Vậy với $m=5\Rightarrow(d): y=2x+8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=2x+8\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow(x-4)(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$

Với $x=4\Rightarrow y=16$

Với $x=-2\Rightarrow y=4$

Vậy với $m=5$ thì toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $(4;16)$ và $(-2;4)$

3) $x^4+(3m-2)x^2-3m+1=0$ (1)

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)\Rightarrow t^2+(3m-2)t-3m+1=0$ (*)

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt đều dương

$\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\\t_1+t_2>0\\t_1t_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3m-2)^2-4(-3m+1)>0\\2-3m>0\\-3m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3m-2)^2-4(-3m+1)>0\\2-3m>0\\-3m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2>0\\m<\dfrac{2}{3}\\m<\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\m<\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Vậy $m<\dfrac{1}{3}$ và $m\ne 0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

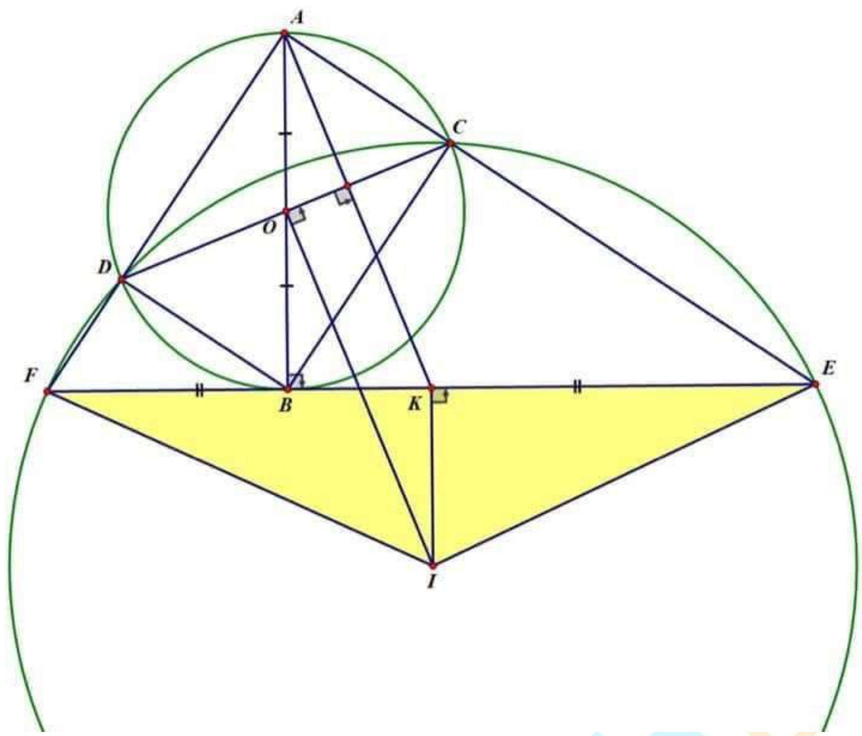
Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính CD của đường tròn $(O;R)$ (C khác A, C khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại các điểm E, F.

a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh bốn điểm C, D, F, E cùng thuộc một đường tròn (I). Gọi K là trung điểm của EF, chứng minh $AK\perp CD$.

c) Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điểu kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để tam giác IEF có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



a) Ta có $A \in (O)$ đường kính $DC \Rightarrow \widehat{DAC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$B \in (O)$ đường kính $DC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$C \in (O)$ đường kính $AB \Rightarrow \widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $ACBD$ có $\widehat{DAC} = \widehat{ACB} = \widehat{DBC} = 90°$

Suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật

b) +) Chứng minh C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn:

Xét ΔABF có $BD \perp AF \Rightarrow AD \cdot AF = AB^2$ (Hệ thức lượng)

Xét ΔABE có $BC \perp AE \Rightarrow AC \cdot AE = AB^2$ (Hệ thức lượng)

Chứng minh $\Delta ACD \backsim \Delta AFE \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AEF} \Rightarrow$ tứ giác $CDFE$ nội tiếp

+) Chứng minh $AK \perp CD$

K là trung điểm của EF

$\Rightarrow AK$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông AEF

$\Rightarrow AK = KE \Rightarrow$ tam giác AKE cân tại $E \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KEA}$

Lai có $\widehat{ACD} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{KEA} + \widehat{AFE} = 90° \Rightarrow \widehat{KAE} + \widehat{ACD} = 90° \Rightarrow AK \perp CD$

c) Tìm vị trí của CD để diện tích tam giác IEF nhỏ nhất

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của hai đường trung trực của EF và CD

Chứng minh tứ giác $AOIK$ là hình bình hành $\Rightarrow IK = AO = R$ không đổi

$S_{IEF} = \dfrac{EF \cdot IK}{2}$ mà IK không đổi $\Rightarrow S_{IEF}\min \Leftrightarrow EF\min$

$EF = EB + BF \geq 2\sqrt{EB \cdot FB} = 2\sqrt{AB^2} = 2 \cdot AB = 4R$

Vậy S_{IEF} $\min = \dfrac{4R \cdot R}{2} = 2R^2 \Leftrightarrow BE = BF \Leftrightarrow B \equiv K$ hay B là trung điểm của EF

$\Rightarrow C, D$ là trung điểm của AE, EF hay $CD \perp AB$

Bài V (0,5 điểm). Cho các số thực $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = (a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

Lời giải

Chứng minh B Đ.T phụ: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$

Ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = 3 + \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right) + \left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right) \geq 3+2+2+2 = 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Áp dụng B.Đ.T $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$ và $xy+yz+zx \leq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ ta có:

$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca} \geq \dfrac{9}{ab+bc+ca} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab+bc+ca} + \dfrac{1}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{9}{(a+b+c)^2}$

$ab+bc+ca \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow \dfrac{7}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{21}{(a+b+c)^2}$

$P \geq (a+b+c)^2\left(\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab+bc+ca} + \dfrac{1}{ab+bc+ca} + \dfrac{7}{ab+bc+ca}\right)$

$P \geq (a+b+c)^2\left[\dfrac{9}{(a+b+c)^2} + \dfrac{7}{ab+bc+ca}\right] \geq (a+b+c)^2\left[\dfrac{9}{(a+b+c)^2} + \dfrac{21}{(a+b+c)^2}\right] = 30$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

------------------------------ HẾT ------------------------------

ĐỀ SỐ 20

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x>0; x\neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Tìm m để có x thoả mãn $A.B=m$

Lời giải

1) Ta có $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{3}=\left|\sqrt{3}+1\right|-\sqrt{3}=1$

Thay $x=1$ (tmđk) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{1}-3}{\sqrt{1}}=-2$

Vậy với $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ thì $A=-2$

2) $B=\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}=\dfrac{2x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

3) $A.B=m\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=m\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}=m\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=m\left(\sqrt{x}+2\right)\Leftrightarrow (1-m)\sqrt{x}=2m+3$

+) Với $m=1\Rightarrow 0=2.1+3\Leftrightarrow 0=5$ (vô lý)

+) Với $m\neq 1\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{2m+3}{1-m}$ (1)

Vì $x>0$; $x\neq 4\Rightarrow \sqrt{x}>0$; $\sqrt{x}\neq 2$

Để PT (1) có nghiệm thì $\begin{cases}\dfrac{2m+3}{1-m}>0\\ \dfrac{2m+3}{1-m}\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m+3>0\\1-m>0\end{cases}\\ \begin{cases}2m+3<0\\1-m<0\end{cases}\end{array}\right.\\ 2m+3\neq 2(1-m)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-\dfrac{3}{2}<m<1\\ \begin{cases}m<\dfrac{-3}{2}\\ m>1\end{cases}(vl)\end{array}\right.\\ m\neq -\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Vậy $-\dfrac{3}{2}<m<1$ và $m\neq -\dfrac{1}{4}$ thì $A.B=m$ có nghiệm

Bài II (2,5 điểm). 1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*
Tháng thứ nhất hai đội sản xuất làm được 700 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 10% và đội II làm vượt mức 25% so với tháng thứ nhất, vì vậy cả hai đội đã làm được 830 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi đội làm được bao nhiêu sản phẩm?

2. Một lon nước ngọt hình trụ có thể tích bằng $108\pi\ cm^3$. Biết chiều cao của lon nước ngọt gấp hai lần đường kính đáy. Tính diện tích vật liệu cần dùng để làm một vỏ lon như vậy (bỏ qua diện tích phần ghép nối).

Lời giải

1. Gọi số sản phẩm đội I làm trong tháng thứ nhất là x (sản phẩm) $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Số sản phẩm đội II làm trong tháng thứ nhất là y (sản phẩm) $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Vì trong tháng thứ nhất hai đội làm được 700 sản phẩm

Nên ta có phương trình $x+y=700$ (1)

Số sản phẩm đội I làm trong tháng thứ hai là $x+10\%x=1,1x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm đội II làm trong tháng thứ hai là $y+25\%y=1,25y$ (sản phẩm)

Vì trong tháng thứ hai cả hai đội đã làm được 830 sản phẩm

Nên ta có phương trình $1,1x+1,25y=830$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=700 \\ 1,1x+1,25y=830 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,1x+1,1y=770 \\ 1,1x+1,25y=830 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15y=60 \\ x+y=700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=400 \\ x=300 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy trong tháng thứ nhất đội I làm được 300 sản phẩm ; đội II làm được 400 sản phẩm.

Bài III (2,0 điểm). 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4}{x-y}+3\sqrt{y-1}=5 \\ \dfrac{1}{x-y}-2\sqrt{y-1}=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(2m-1)x+8$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị m.

b) Tìm m để các khoảng cách từ A và B tới trục Oy có tỉ số bằng 2.

Lời giải

1. Điều kiện $x \neq y$; $y \geq 1$

Đặt $a=\dfrac{1}{x-y}$; $b=\sqrt{y-1}$ $(b \geq 0)$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a+3b=5 \\ a-2b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b=5 \\ 4a-8b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b=11 \\ 4a-8b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (thoả mãn)

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(4;2)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có

$x^2=(2m-1)x+8 \Leftrightarrow x^2-(2m-1)x-8=0\ (1)$

Ta có $ac=-8<0$. Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị m.

b) Giả sử giao điểm của (d) và (P) có toạ độ là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ với $x_1<x_2$

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m-1\ (1) \\ x_1x_2=-8\ (2) \end{cases}$

Để khoảng cách từ A và B tới trục $.Oy$. có tỉ số bằng 2 $\Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_2|}=2 \Leftrightarrow |x_1|=2|x_2|$

Vì x_1 ; x_2 là hai nghiệm trái dấu nên $x_1<0<x_2$

Khi đó $|x_1|=2|x_2| \Leftrightarrow -x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_2=-x_1-x_2 \Leftrightarrow x_2=1-2m$

$\Rightarrow x_1=-2x_2=-2(1-2m)=4m-2$

Thay $x_1=4m-2$ và $x_2=1-2m$ vào (2) ta được $(4m-2)(1-2m)=-8$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1=2 \\ 2m-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left\{\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC Trên tia đối của tia BC lấy điểm A cố định, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại A. Qua điểm M trên đường thẳng d (M khác A) kẻ các tiếp tuyến ME; MF của (O) ($E;F$ là tiếp điểm)

1. Chứng minh năm điểm A, M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn

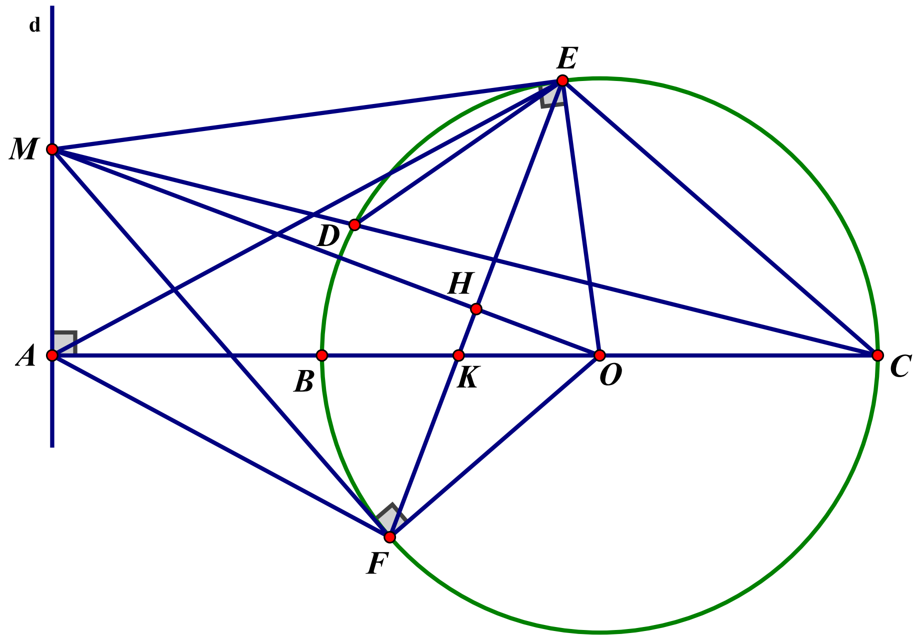
2. EF cắt MO và AC lần lượt tại H và K, MC cắt (O) tại D (D khác C). Chứng minh:

a) $MD.MC=ME^2=MH.MO$

b) AC là phân giác của góc EAF.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK cắt đường tròn đi qua năm điểm A, M, E, O, F tại I. chứng minh rằng khi M di chuyển trên d thì đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định.

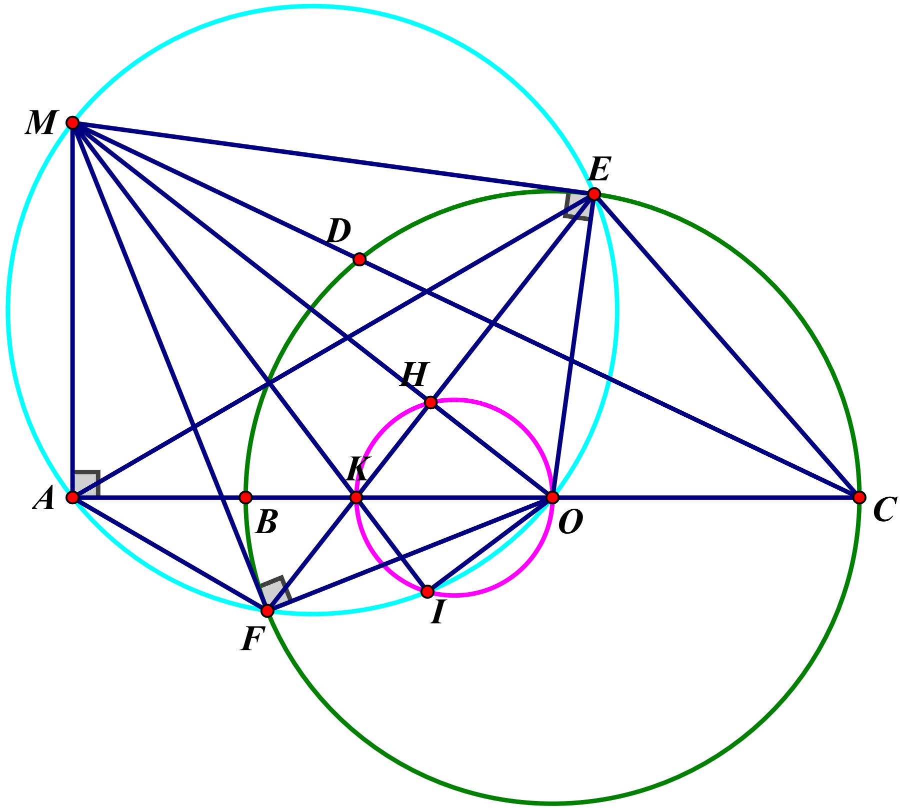
Lời giải



1) Ta có ME, MF là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{MFO} = 90°$

Xét tứ giác $MEOF$ có $\widehat{MEO} + \widehat{MFO} = 90° + 90° = 180°$
Mà hai góc này đối nhau
Suy ra $MEOF$ là tứ giác nội tiếp (1)
Lại có $d \perp BA \Rightarrow \widehat{MAO} = 90°$
Xét tứ giác $MAFO$ có $\widehat{MAO} = \widehat{MFO} = 90°$
Mà hai đỉnh A, F kề nhau cùng nhìn cạnh MO
Suy ra $MAFO$ là tứ giác nội tiếp (2)
Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, M, E, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính MO

2a) Xét (O) có $\widehat{MED} = \widehat{MCE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DE}$)
Xét ΔMED và ΔMCE có $\widehat{EMD}$ chung và $\widehat{MED} = \widehat{MCE}$ (cmt)
$\Rightarrow \Delta MED \backsim \Delta MED \, (g.g) \Rightarrow ME^2 = MD.MC$ (3)
Vì ME, MF là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow ME = MF$ (tính chất)
Mà $OE = OF \Rightarrow MO$ là đường trung trực của $EF \Rightarrow EH \perp MO$
Xét ΔMEO vuông tại E có $EH \perp MO \Rightarrow ME^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng) (4)
Từ (3) và (4) $\Rightarrow MD.MC = ME^2 = MH.MO$
b) Tứ giác $AMEO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EMO}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EO}$)
Tứ giác $AMOF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{OMF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{OF}$)
Mà $\widehat{EMO} = \widehat{FMO}$ (do ME, MF là tiếp tuyến của (O))
$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{FAO} \Rightarrow AC$ là phân giác $\widehat{EAF}$



3) Chứng minh $\Delta OHK \backsim \Delta OAM\ (g.g)$

$\Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{OK}{OM} \Rightarrow OK.OA = OH.OM = OE^2 \Rightarrow OK = \frac{OE^2}{OA}$ (không đổi)

Suy ra điểm K cố định

Ta có tứ giác $OHKI$ nội tiếp đường tròn đường kính OK

$\Rightarrow \widehat{OHK} + \widehat{OIK} = 180° \Rightarrow \widehat{OIK} = 90° \Rightarrow KI \perp OI$

Lại có tứ giác $OMAI$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MAI} = 90° \Rightarrow AI \perp OI$

Suy ra M, K, I thẳng hàng

Vậy MI luôn đi qua K cố định

Bài V (0,5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{4-x^2}$$

Lời giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Đặt $a = \sqrt{2+x}\ ;\ b = \sqrt{2-x}\ \ (a \ge 0\ ;\ b \ge 0)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 4 \Leftrightarrow ab = \frac{(a+b)^2}{2} - 2$

Ta có $(a+b)^2 = 4 + 2\sqrt{(2+x)(2-x)} \ge 4\ \forall -2 \le x \le 2$

$\Rightarrow a + b \ge 2$

Lại có $a + b \le \sqrt{2(a^2+b^2)} = 2\sqrt{2}$

Khi đó $P=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}=a+b-ab=a+b-\dfrac{(a+b)^2}{2}+2$

Xét $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+2$ với $2\le x\le 2\sqrt{2}$

Xét $x_1;x_2$ với $2\le x_1<x_2\le 2\sqrt{2}$, ta có:

$f(x_1)-f(x_2)=x_1-\dfrac{x_1^2}{2}-x_2+\dfrac{x_2^2}{2}=(x_1-x_2)-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=1-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)<0$ với $2\le x_1<x_2\le 2\sqrt{2}$

Hay $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ luôn nghịch biến trên đoạn $x\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ hay:

$f(2)\ge f(x)\ge f\left(2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 2\ge f(x)\ge 2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow 2\ge P\ge 2\sqrt{2}-2$

Vậy min $P=2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow a+b=2\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-2$

Max $P=2\Leftrightarrow a+b=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=0$

------------------------------ HẾT ------------------------------