TỔNG HỢP MỘT SỐ CÂU CUỐI TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Bài 1. (Năm học 2010 - 2011)

Giải phương trình $x^2+4x+7=(x+4)\sqrt{x^2+7}$.

Bài 2. (Năm học 2011 - 2012)

Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=4x^2-3x+\dfrac{1}{4x}+2011$.

Bài 3. (Năm học 2012 - 2013)

Với x, y là các số dương thoả mãn điều kiện $x\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Bài 4. (Năm học 2013 - 2014)

Với $\mathrm{a,b,c}$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{a+b+c+ab+bc+ca=6abc}$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{\mathrm{a}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{b}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{c}^2}\ge 3$

Bài 5. (Năm học 2014 - 2015)

Với a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ca}+\sqrt{2c+ab}$.

Bài 6. (Năm học 2015 - 2016)

Với hai số thực không âm a,b thỏa mãn $a^2+b^2=4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{ab}{a+b+2}$.

Bài 7. (Năm học 2016 - 2017)

Với các số thực x,y thoả mãn $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Bài 8. (Năm học 2017 - 2018)

Cho các số thực a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn: $a\ge 1, b\ge 1, c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Bài 9. (Năm học 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}$.

Bài 10. (Năm học 2019 - 2020)

Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$ với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 11. (Năm học 2020 - 2021)

Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$.

Bài 12. (Năm học 2021 - 2022)

Với các số thực a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a+b) + ab$.

Bài 13. (Năm học 2022 - 2023)

Với các số thực không âm x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

Bài 14. (Năm học 2023 - 2024)

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $a + b \le 2$. Chứng minh $\frac{a^2}{a^2+b} + \frac{b^2}{b^2+a} \le 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Năm học 2010 - 2011)

Giải phương trình $x^2+4x+7=(x+4)\sqrt{x^2+7}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+7}$, phương trình dã cho trở thành $t^2+4x=(x+4)t$

$\Leftrightarrow t^2-(x+4)t+4x=0 \Leftrightarrow (t-x)(t-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=4. \end{array}\right.$

TH1: $\sqrt{x^2+7}=4 \Leftrightarrow x^2+7=16 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

TH2: $\sqrt{x^2+7}=x\ (x\geq 0) \Rightarrow x^2+7=x^2 \Leftrightarrow 7=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{-3;3\}$

Bài 2. (Năm học 2011 - 2012)

Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

Lời giải

Ta có $M=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x+\frac{1}{4x}+2010\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{4x}}+2010=2011$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2011.

Bài 3. (Năm học 2012 - 2013)

Với x, y là các số dương thoả mãn điều kiện $x\geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Lời giải

Đặt $t=\frac{x}{y}\geq 2 \Rightarrow M=\frac{t^2+1}{t}$.

Xét hiệu $M-\frac{5}{2}=\frac{t^2+1}{t}-\frac{5}{2}=\frac{(t-2)(2t-1)}{2t}\geq 0$ với mọi $t\geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi $x=2y$.

Bài 4. (Năm học 2013 - 2014)

Với a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$.

Chứng minh: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\ge\frac{1}{ab}$$

Theo bât đẳng Cauchy ta có

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\ge\frac{1}{ab};\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\frac{1}{bc};\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\frac{1}{ac}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\ge\frac{1}{a};\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\ge\frac{1}{b};\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+1\right)\ge\frac{1}{c}$$

Cộng lần lượt các vế

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\frac{c+b+a+bc+ac+ab}{abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 6-\frac{3}{2}=9$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$ (đpcm).

Bài 5. (Năm học 2014 - 2015)

Với a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ca}+\sqrt{2c+ab}$.

Lời giải

Vì $a+b+c=2$ nên $2a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$

$$\Rightarrow\sqrt{2a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{a+b+a+c}{2}.$$

Tương tự ta có $\sqrt{2b+ca}\le\frac{b+c+b+a}{2}$ và $\sqrt{2c+ab}\le\frac{c+a+c+b}{2}$.

Cộng theo vế ta có $Q\le 2(a+b+c)=4$.

Bài 6. (Năm học 2015 - 2016)

Với hai số thực không âm a,b thỏa mãn $a^2+b^2=4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{ab}{a+b+2}$.

Lời giải

Ta có $a^2+b^2=4 \Rightarrow 2ab=(a+b)^2-4 \Rightarrow 2M=\dfrac{(a+b)^2-4}{a+b+2}=a+b-2$.

Ta có $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=2\sqrt{2}\Rightarrow M\le\sqrt{2}-1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $\sqrt{2}$ khi $a=b=\sqrt{2}$.

Bài 7. (Năm học 2016 - 2017)

Với các số thực x,y thoả mãn $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Lời giải

Bổ đề $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)},\forall a,b\ge 0$.

Thật vậy bổ đề tương đương với $2\sqrt{ab}\le a+b$ (đúng theo bất đẳng thức cô-si)

Áp dụng ta có $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y \Leftrightarrow x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}\le\sqrt{2(x+y+12)}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2\le 2(x+y)+24 \Leftrightarrow -4\le x+y\le 6$ (1)

Dễ thấy $x+y\ge 0(2)$

Ta có $x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}\Leftrightarrow (x+y)^2=(x+y)+12+2\sqrt{(x+6)(y+6)}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-(x+y)-12=2\sqrt{(x+6)(y+6)}\ge 0\Leftrightarrow (x+y+3)(x+y-4)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\le 3\\ x+y\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow x+y\ge 4(3)$$

Từ (1),(2) và (3) suy ra $4\le x+y\le 6$.

Dấu " =" xảy ra khi $x+y=4\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4\\ \left[\begin{array}{l} x+6=0\\ y+6=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-6\\ y=10\end{cases}\\ \begin{cases} x=10\\ y=-6\end{cases}\end{array}\right.$

Khi $x+y=6\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6\\ x+6=y+6\end{cases}\Leftrightarrow x=y=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x+y$ là 6 khi $x=y=3$ và giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là 4 khi $(x;y)=(-6;10)$ hoặc $(x;y)=(10;-6)$.

Bài 8. (Năm học 2017 - 2018)

Cho các số thực a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn: $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:
$a^2+b^2\ge 2ab,b^2+c^2\ge 2bc,c^2+a^2\ge 2ca$.
Do đó: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\left(ab+bc+ca\right)=2.9=18\Rightarrow 2P\ge 18\Rightarrow P\ge 9$
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{Min}P=9$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$
Vì $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$ nên $(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow ab-a-b+1\ge 0\Leftrightarrow ab+1\ge a+b$
Tương tự ta có $bc+1\ge b+c,ca+1\ge c+a$
Do đó $ab+bc+ca+3\ge 2(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c\le \dfrac{9+3}{2}=6$
Mà $P=a^2+b^2+c^2=a+b+c^2-2ab+bc+ca=a+b+c^2-18$
$\Rightarrow P\le 36-18=18$. Dấu bằng xảy ra khi : $\left[\begin{array}{l}a=4;b=c=1\\ b=4;a=c=1\\ c=4;a=b=1\end{array}\right.$

Bài 9. (Năm học 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $0\le x\le 1$
Đặt $A=\sqrt{1-x}+\sqrt{x};\ B=\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$
Ta có $A^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\ge 1\forall 0\le x\le 1\Rightarrow A\ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=0$
$B^2=1+2x+2\sqrt{x(1+x)}\ge 1\forall 0\le x\le 1\Rightarrow B\ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=0$
Do đó $P=A+B\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi $x=0$
Vậy GTNN của P là 2 đạt được khi và chỉ khi $x=0$.

Cách 2:
Điều kiện: $0\le x\le 1$
Đặt $a=\sqrt{1-x},b=\sqrt{1+x}$. Vì $0\le x\le 1$ nên ta có $b\ge a\ge 0$ và $a^2+b^2=2$
Ta có $b^2-a^2=2x\Leftrightarrow \sqrt{2\left(b^2-a^2\right)}=2\sqrt{x}$
Khi đó $P=a+b+\sqrt{2\left(b^2-a^2\right)}\ge 2a+\sqrt{2\left(b^2-a^2\right)}$

Suy ra $P^2 \ge 4a^2 + 2\left(b^2 - a^2\right) + 4a\sqrt{2\left(b^2 - a^2\right)} = 2\left(a^2 + b^2\right) + 4a\sqrt{2\left(b^2 - a^2\right)}$

Vì $2\left(a^2 + b^2\right) = 4$ và $4a\sqrt{2\left(b^2 - a^2\right)} \ge 0$ với mọi $0 \le a \le b$

Nên $P^2 \ge 4 \Rightarrow P \ge 2($ do $P > 0)$

Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi $b = a$ tức là $x = 0$.

Bài 10. (Năm học 2019 - 2020)

Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$ với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

$$P = a^4 + b^4 - ab = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2 - ab = (3 - ab)^2 - 2a^2b^2 - ab = 9 - 6ab + a^2b^2 - 2a^2b^2 - ab$$

$$= 9 - 7ab - a^2b^2 = -\left[(ab)^2 + 2 \cdot ab \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4}\right] + \frac{49}{4} + 9 = -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}.$$

Vì $a^2 + b^2 = 3 - ab$, mà $(a + b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge -2ab \Rightarrow 3 - ab \ge -2ab \Leftrightarrow ab \ge -3$.

Và $(a - b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow 3 - ab \ge 2ab \Leftrightarrow ab \le 1$.

Từ (1) và (2) suy ra $-3 \le ab \le 1 \Leftrightarrow -3 + \frac{7}{2} \le ab + \frac{7}{2} \le \frac{7}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le ab + \frac{7}{2} \le \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \le \frac{81}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} \le -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} + \frac{85}{4} \le -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \le -\frac{1}{4} + \frac{85}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \le 21$$

Vậy Max $P = 21$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$.

Min$P = 1$. Dấu $=$ xảy ra khi $\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Bài 11. (Năm học 2020 - 2021)
Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}=x^2+1$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\frac{2}{3}$

Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}=x^2+1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2\sqrt{3x-2}=2x^2+2$

$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{x}-2\sqrt{3x-2}+2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1\right)+4x-2\sqrt{x}-2\sqrt{3x-2}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)^2+\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+\left(3x-2-2\sqrt{3x-2}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2=0$

Vì $\left(x-1\right)^2\ge 0;\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$ và $\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2\ge 0$ với mọi $x\ge\frac{2}{3}$ nên

$2\left(x-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ \sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{3x-2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=1\\ \sqrt{3x-2}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 3x-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1\ \ (tm)$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 12. (Năm học 2021 - 2022)
Với các số thực a và b thỏa mãn $a^2+b^2=2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\left(a+b\right)+ab$.

Lời giải

Ta có: $P=3\left(a+b\right)+ab\Leftrightarrow ab=P-3\left(a+b\right)$. Thay vào giả thiết, ta được:

$$a^2+b^2=2\Leftrightarrow (a+b)^2-2ab=2\Leftrightarrow (a+b)^2-2\left[P-3\left(a+b\right)\right]=2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2+6\left(a+b\right)=2P+2\Leftrightarrow (a+b+3)^2=2P+11$$

Ta có: $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow (a+b)^2\le 4\Leftrightarrow -2\le a+b\le 2$

$\Rightarrow -2+3\le a+b+3\le 2+3\Leftrightarrow 1\le (a+b+3)^2\le 25\Leftrightarrow 1\le 2P+11\le 25\Leftrightarrow -5\le P\le 7$

Do đó, MinP $=-5\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\ ab=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-1$

Bài 13. (Năm học 2022 - 2023)

Với các số thực không âm x và y thỏa mãn $x^2+y^2=4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$.

Lời giải

Vì $x,y\ge 0$ nên $P\ge 0$ và $P^2=x^2+4xy+4y^2=\left(x^2+y^2\right)+\left(4xy+3y^2\right)\ge 4$

Từ đó $P^2\ge 4\Leftrightarrow P\ge 2$.

Với $x=2,y=0$ (thỏa mãn điều kiện bài toán), ta có: $P=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2

Bài 14. (Năm học 2023 - 2024)

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $a+b\le 2$. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+b}+\dfrac{b^2}{b^2+a}\le 1$.

Lời giải

Do $a>0,b>0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2\left(b^2+a\right)+b^2\left(a^2+b\right)\le\left(b^2+a\right)\left(a^2+b\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+a^3+a^2b^2+b^3\le a^2b^2+b^3+a^3+ab$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2\le ab\Leftrightarrow ab\left(ab-1\right)\le 0\Leftrightarrow ab\le 1 \text{ (vì } ab>0\text{)}.$$

Do $a>0,b>0$ và $a+b\le 2$ nên $2\sqrt{ab}\le 2$. Suy ra $ab\le 1$ (đpcm).