

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP MÔN TOÁN 7

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. PHẦN ĐẠI SỐ

1. Số hữu tỉ - Các phép toán về số hữu tỉ;
2. Tỷ lệ thức - Tính chất dãy tỉ số bằng nhau;
3. Số vô tỉ, căn bậc hai, số thực;
4. Giá trị tuyệt đối của số thực;
5. Tỷ lệ thuận – Tỷ lệ nghịch
6. Biểu thức đại số;
7. Đa thức một biến;
8. Nghiệm của đa thức một biến;
9. Cộng, trừ, nhân, chia đa thức một biến;
10. Một số dạng bài nâng cao khác: Số học, biến đổi biểu thức hữu tỉ,

II. PHẦN HÌNH HỌC

1. Góc và đường thẳng song song;
2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác;
3. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác;
4. Các đường đồng quy trong tam giác.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

I. PHẦN ĐẠI SỐ:

Bài 1. Tìm x , biết:

a) $x - \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = \frac{-13}{18}$

b) $\left(x^2 - \frac{9}{16}\right) \cdot \left(2\frac{1}{3} + x\right) = 0$

c) $-0,48 : x = -9,36 : 16,38$

d) $\frac{x-3}{5-x} = \frac{5}{7}$

e) $\frac{5}{7}\sqrt{x} + 3 = \frac{9}{2}$

f) $\left(\frac{13}{2} - |x+1|\right) : \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{2}{5}$

Bài 2. Tìm x, y, z , biết:

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$ và $x - y + z = -18$

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4}$ và $2x + 3y + 4z = 11$

c) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x + y - z = 26$

d) $2x = 3y; 5y = 7z$ và $3x + 5y - 7z = 21$

e) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2}$ và $5y - 3x + 2z = 37$

f) $\frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - 2z^2 = 92$

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức đại số sau:

a) $A = -x^2 + 5x + 7$ tại $x = 5$

b) $B = 7x^2 + 6xy - 10y^2$ tại $x = -\frac{1}{7}, y = -\frac{1}{5}$

c) $C = \frac{8x^2 + 3x - 5}{9x - 4}$ tại $|x - 2| = 1$

d) $D = \frac{15a + 14b}{10a + 2b}$ tại $a = 2b$

e) $E = \frac{3b + 25}{3a - 5} - \frac{35 - 3a}{5 - 3b}$ với $a - b = 10$

Bài 4. Ba nhóm thợ thực hiện xây các ngôi nhà giống nhau. Nhóm thứ nhất xây trong 40 ngày, nhóm thứ hai xây trong 60 ngày và nhóm thứ ba xây trong 50 ngày. Biết nhóm thứ ba có ít hơn nhóm thứ nhất là ba người thợ, tính số thợ của mỗi nhóm (năng suất các người thợ như nhau).

Bài 5. Biết độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 3, 5, 7. Tính độ dài các cạnh của tam giác, biết:

- a) Chu vi của tam giác là 45cm;
b) Tổng độ dài cạnh lớn nhất và cạnh nhỏ nhất hơn cạnh còn lại 20cm.

Bài 6. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

b) $g(x) = x^2 - 64x$

c) $h(x) = (16 - 25x^2)(8x^3 + 1)$

d) $q(x) = (4x + 7)(x^2 + 9)$

Bài 7. Cho hai đa thức : $f(x) = 2x^3 + 7x - 4x^2 - 3x^3 + 5x^2 + 11$

$$g(x) = 3x^2 + 2 - 5x^2 - (8x^2 - 4x^3 + 3)$$

- a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức $f(x), g(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.
b) Tính tổng $f(x) + g(x)$.
c) Tính hiệu $f(x) - g(x)$.

Bài 8. Cho hai đa thức

$$M(x) = -5x^4 + 3x^5 + x(x^2 + 5) + 14x^4 - 6x^5 - x^3 + x - 1.$$

$$N(x) = x^4(x - 5) - 3x^3 + 3x + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5.$$

- a) Thu gọn và sắp xếp hai đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.
b) Tính $H(x) = M(x) + N(x); G(x) = M(x) - N(x)$.
c) Tìm bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của $H(x), G(x)$.
d) Tính $H(-1); H(1); G(1); G(0)$.
e) Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$.

Bài 9. Chứng tỏ rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến:

- a) $A = 3(x - 2)(3 - x) + x(5x - 3) - 2x(x + 6) + 10$.
b) $B = 2x(x + 1) - x^2(3x - 2) + (x - 3)(3x^2 + 5x + 13)$.

Bài 10.

- a) Tìm đa thức A, biết đa thức A chia đa thức $B = x^2 - 2x + 3$ thì được thương là $Q = x^2 - 2$, dư là $R = 9x - 5$
b) Cho đa thức $M = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$, Biết chia đa thức M cho đa thức N được thương là $3x + 1$ và dư $x + 6$. Tìm đa thức N

II. PHẦN HÌNH HỌC

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$). Kẻ $BE \perp AC$ tại E, kẻ $CD \perp AB$ tại D.

- Chứng minh: $BE = CD$ và $\triangle ADE$ cân tại A.
- Gọi H là giao điểm của BE và CD. Chứng minh AH là tia phân giác của \widehat{BAC} .
- Chứng minh $DE \parallel BC$.
- Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, H, M thẳng hàng.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B. AD là tia phân giác của \widehat{BAC} ($D \in BC$). Kẻ $DI \perp AC$ ($I \in AC$).

- Chứng minh $\triangle ABD = \triangle AID$.
- So sánh DB và DC.
- Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AD, cắt AD tại K. Hai đường thẳng CK và AB cắt nhau tại E. Chứng minh K là trung điểm của CE và $\triangle AEC$ cân.
- Chứng minh $BI \parallel EC$.
- Chứng minh ba điểm E, D, I thẳng hàng.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi N là trung điểm của AC.

- Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$.
- Hai đoạn thẳng BN và AH cắt nhau tại G, trên tia đối của tia NB lấy K sao cho $NK = NG$. Chứng minh: $AG \parallel CK$.
- Chứng minh: G là trung điểm của BK.
- Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh $BC + AG > 4GM$.

Bài 14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Tia phân giác góc B cắt AC tại D. Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$

- Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle EBD$.
- Chứng minh: $\widehat{DEB} = 90^\circ$.
- Chứng minh: $DC > DA$.
- Gọi O là giao điểm của AE và BD. Chứng minh: $OA = OE$.
- Kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh: AE là tia phân giác của \widehat{HAC} .

Bài 15. Cho $\triangle ABC$, $AB = AC$, $AB > BC$, H là trung điểm của BC.

- Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$. Từ đó suy ra AH vuông góc với BC.
- Tia phân giác của góc B cắt AH tại I. Chứng minh tam giác BIC cân.
- Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt BI, CI lần lượt tại M, N. Chứng minh A là trung điểm của đoạn MN.
- Kẻ IE vuông góc với AB tại E, IF vuông góc với AC tại F. Chứng minh: $IH = IE = IF$.
- Chứng minh IC vuông góc với MC.

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO:

Bài 16. Tìm x, y, z , biết: $\frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115}$ và $x+y+2z = -31$.

Bài 17.

a) Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $-a+2b+2c \neq 0; 2a-b+2c \neq 0; 2a+2b-c \neq 0$ và

$$\frac{a}{-a+2b+2c} = \frac{b}{2a-b+2c} = \frac{c}{2a+2b-c}. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$$

b) Cho $xyz=1$. Tính $Q = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}$

Bài 18.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \sqrt{x} + |y^2 + 1| + 42$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = -\sqrt{x+2} - |2y-1| + 2022$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $C = |x+5| + |x+7| + |x+9|$

Bài 19.

a) Cho các số hữu tỉ a và b thỏa mãn $(2a+b-1)\sqrt{7} = a-b-2$. Tính giá trị của $P = \frac{a^2+b^2-2}{ab+2023}$

b) Tìm các số tự nhiên a, b, c sao cho $a^2 - 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 11 - c\sqrt{2}$

Bài 20. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $A = x^{2023} - 2024x^{2022} + 2024x^{2021} - 2024x^{2020} + \dots + 2024x - 1$ tại $x = 2023$

b) $B = 2200 - 80x + 80x^2 - 80x^3 + 80x^4 - \dots + 80x^{2020} - 80x^{2021} + x^{2022}$ tại $x = 79$

Bài 21. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh: Nếu $f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ là các số nguyên thì a, b, c đều là các số nguyên.

Bài 22.

a) Cho đa thức $Q(x) = 3x^2 + ax + b$. Biết $Q(-1) = 15; Q(3) = 11$. Tính $\frac{Q(1) - Q(-4)}{110}$

b) Cho a, b, c là các số nguyên, xét đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$

Biết rằng $P(8) - P(5) = 2022$. Chứng minh rằng $P(7) - P(4)$ là số chẵn.

Bài 23.

a) Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 + 5x + 5$.

b) Cho đa thức $g(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $g(1) = 2012; g(-2) = g(3) = 2036$

Chứng minh rằng đa thức $g(x)$ vô nghiệm.

Bài 24.

a) Tìm đa thức dư trong phép chia sau: $(x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1) : (x^2 - 1)$

b) Xác định đa thức $f(x)$ thỏa mãn cả ba điều kiện sau:

Khi chia cho $x - 1$ thì dư 4; khi chia cho $x + 2$ thì dư 1; khi chia cho $(x - 1)(x + 2)$ thì được thương là $5x^2$ và còn dư.

Bài 25.

a) Cho a, b, c là số nguyên và $a^2 + b^2 + c^2 : 4$. Chứng minh rằng abc chia hết cho 8.

b) Tìm các số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$.

c) Cho p là số nguyên tố; $p > 3$ và $a, b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh rằng $a : 12$



MathExpress
Sáng mãi niềm tin

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I. PHẦN ĐẠI SỐ:**Bài 1.** Tìm x , biết:

a) $x - \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = \frac{-13}{18}$

b) $\left(x^2 - \frac{9}{16}\right) \cdot \left(2\frac{1}{3} + x\right) = 0$

c) $-0,48 : x = -9,36 : 16,38$

d) $\frac{x-3}{5-x} = \frac{5}{7}$

e) $\frac{5}{7}\sqrt{x} + 3 = \frac{9}{2}$

f) $\left(\frac{13}{2} - |x+1|\right) : \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{2}{5}$

Lời giải

<p>a) $x - \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = \frac{-13}{18}$</p> $x = \frac{-13}{18} + \frac{5}{12} + \frac{4}{9}$ $x = \frac{-26}{36} + \frac{15}{36} + \frac{16}{36}$ $x = \frac{5}{36}$ <p>Vậy $x = \frac{5}{36}$</p>	<p>b) $\left(x^2 - \frac{9}{16}\right) \cdot \left(2\frac{1}{3} + x\right) = 0$</p> $\Rightarrow x^2 - \frac{9}{16} = 0 \text{ hoặc } 2\frac{1}{3} + x = 0$ <p>TH1: $x^2 - \frac{9}{16} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{16}$</p> $\Rightarrow x^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{-3}{4}\right)^2$ $\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{-3}{4}$ <p>TH2: $2\frac{1}{3} + x = 0 \Rightarrow \frac{7}{3} + x = 0$</p> $\Rightarrow x = \frac{-7}{3}$ <p>Vậy $x \in \left\{\frac{3}{4}; \frac{-3}{4}; \frac{-7}{3}\right\}$</p>	<p>c) $-0,48 : x = -9,36 : 16,38$</p> $-\frac{12}{25} : x = -\frac{4}{7}$ $x = -\frac{12}{25} : \left(-\frac{4}{7}\right)$ $x = \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{4}$ $x = \frac{21}{25}$ <p>Vậy $x = \frac{21}{25}$</p>
<p>d) $\frac{x-3}{5-x} = \frac{5}{7}$</p> $7 \cdot (x-3) = 5 \cdot (5-x)$ $7x - 21 = 25 - 5x$ $7x + 5x = 21 + 25$ $12x = 46$ $x = \frac{46}{12} = \frac{23}{6}$ <p>Vậy $x = \frac{23}{6}$</p>	<p>e) $\frac{5}{7}\sqrt{x} + 3 = \frac{9}{2}$</p> $\frac{5}{7}\sqrt{x} = \frac{9}{2} - \frac{6}{2}$ $\frac{5}{7}\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ $\sqrt{x} = \frac{3}{2} : \frac{5}{7}$ $\sqrt{x} = \frac{21}{10}$ $x = \left(\frac{21}{10}\right)^2$ $x = \frac{441}{100}$ <p>Vậy $x = \frac{441}{100}$</p>	<p>f) $\left(\frac{13}{2} - x+1 \right) : \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{2}{5}$</p> $\frac{13}{2} - x+1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{-5}{4}$ $\frac{13}{2} - x+1 = \frac{-1}{2}$ $ x+1 = \frac{13}{2} - \frac{-1}{2}$ $ x+1 = \frac{13}{2} + \frac{1}{2}$ $ x+1 = 7$ <p>TH1: $x+1 = 7 \Rightarrow x = 6$</p> <p>TH2: $x+1 = -7 \Rightarrow x = -8$</p> <p>Vậy $x \in \{6; -8\}$</p>

Bài 2. Tìm x, y, z , biết:

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$ và $x - y + z = -18$

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4}$ và $2x + 3y + 4z = 11$

c) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x + y - z = 26$

d) $2x = 3y; 5y = 7z$ và $3x + 5y - 7z = 21$

e) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2}$ và $5y - 3x + 2z = 37$

f) $\frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - 2z^2 = 92$

Lời giải

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$ và $x - y + z = -18$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{x-y+z}{5-6+7} = \frac{-18}{6} = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \cdot 5 = -15 \\ y = -3 \cdot 6 = -18 \\ z = -3 \cdot 7 = -21 \end{cases}$$

Vậy $x = -15; y = -18; z = -21$

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4}$ và $2x + 3y + 4z = 11$

Ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{2x}{2 \cdot 2} = \frac{2x}{4}; \frac{y}{-3} = \frac{3y}{3 \cdot (-3)} = \frac{3y}{-9}; \frac{z}{4} = \frac{4z}{4 \cdot 4} = \frac{4z}{16} \Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{3y}{-9} = \frac{4z}{16}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4} = \frac{3y}{-9} = \frac{4z}{16} = \frac{2x+3y+4z}{4-9+16} = \frac{11}{11} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Vậy $x = 2; y = -3; z = 4$

c) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x + y - z = 26$

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} &\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12} \Rightarrow \frac{2x}{16} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{4} = \frac{z}{5} &\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2x}{16} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{16} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{2x+y-z}{16+12-15} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 24 \\ z = 30 \end{cases}$$

Vậy $x = 16; y = 24; z = 30$

d) $2x = 3y$; $5y = 7z$ và $3x + 5y - 7z = 21$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} \\ 5y = 7z \Rightarrow \frac{y}{7} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{10} \Rightarrow \frac{3x}{63} = \frac{5y}{70} = \frac{7z}{70}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x}{63} = \frac{5y}{70} = \frac{7z}{70} = \frac{3x+5y-7z}{63+70-70} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 21 \cdot \frac{1}{3} = 7 \\ y = 14 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3} \\ z = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = 7$; $y = \frac{14}{3}$; $z = \frac{10}{3}$.

e) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2}$ và $5y - 3x + 2z = 37$

Ta thấy:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{3 \cdot 3} = \frac{3x+3}{9}; \frac{y-2}{4} = \frac{5 \cdot (y-2)}{5 \cdot 4} = \frac{5y-10}{20}; \frac{z+3}{2} = \frac{2 \cdot (z+3)}{2 \cdot 2} = \frac{2z+6}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+3}{9} = \frac{5y-10}{20} = \frac{2z+6}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x+3}{9} = \frac{5y-10}{20} = \frac{2z+6}{4} = \frac{(5y-10) - (3x+3) + (2z+6)}{20-9+4} = \frac{5y-3z+2x-10-3+6}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=6 \\ y-2=8 \\ z+3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=10 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy $x = 5$; $y = 10$; $z = 1$

f) $\frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - 2z^2 = 92$

$$\text{Đặt } \frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = -5k \\ z = 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16k^2 \\ y^2 = 25k^2 \\ z^2 = 9k^2 \end{cases}$$

Ta có: $x^2 + y^2 - 2z^2 = 16k^2 + 25k^2 - 2 \cdot 9k^2 = 23k^2 = 92 \Rightarrow k^2 = 92 : 23 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

Trường hợp 1: $k = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -10 \\ z = 6 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $k = -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 10 \\ z = -6 \end{cases}$$

Vậy $(x; y; z) \in \{(8; -10; 6); (-8; 10; -6)\}$.**Bài 3.** Tính giá trị các biểu thức đại số sau:

a) $A = -x^2 + 5x + 7$ tại $x = 5$

b) $B = 7x^2 + 6xy - 10y^2$ tại $x = -\frac{1}{7}, y = -\frac{1}{5}$

c) $C = \frac{8x^2 + 3x - 5}{9x - 4}$ tại $|x - 2| = 1$

d) $D = \frac{15a + 14b}{10a + 2b}$ tại $a = 2b$

e) $E = \frac{3b + 25}{3a - 5} - \frac{35 - 3a}{5 - 3b}$ với $a - b = 10$

Lời giải

a) Với $x = 5$ ta có: $A = -5^2 + 5.5 + 7 = -25 + 25 + 7 = 7$

b) Với $x = -\frac{1}{7}; y = -\frac{1}{5}$ ta có:

$$B = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 7 \cdot \frac{1}{49} + 6 \cdot \frac{1}{35} - 10 \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{7} + \frac{6}{35} - \frac{10}{25} = \frac{-3}{35}$$

c) Ta có $|x - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Với $x = 3$: $C = \frac{8.1^2 + 3.1 - 5}{9.1 - 4} = \frac{6}{5}$

Với $x = 1$: $C = \frac{8.3^2 + 3.3 - 5}{9.3 - 4} = \frac{76}{23}$

d) Với $a = 2b$ thay vào biểu thức D ta có:

$$D = \frac{15a + 14b}{10a + 2b} = \frac{15.2b + 14b}{10.2b + 2b} = \frac{30b + 14b}{20b + 2b} = \frac{44b}{22b} = 2$$

b) Vì $a - b = 10 \Rightarrow a = b + 10$

Thay $a = b + 10$ vào biểu thức E ta có:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3b + 25}{3a - 5} - \frac{35 - 3a}{5 - 3b} \\ &= \frac{3b + 25}{3.(b + 10) - 5} - \frac{35 - 3.(b + 10)}{5 - 3b} \\ &= \frac{3b + 25}{3b + 30 - 5} - \frac{35 - 3b - 30}{5 - 3b} \\ &= \frac{3b + 25}{3b + 25} - \frac{5 - 3b}{5 - 3b} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Bài 4. Ba nhóm thợ thực hiện xây các ngôi nhà giống nhau. Nhóm thứ nhất xây trong 40 ngày, nhóm thứ hai xây trong 60 ngày và nhóm thứ ba xây trong 50 ngày. Biết nhóm thứ ba có ít hơn nhóm thứ nhất là ba người thợ, tính số thợ của mỗi nhóm (năng suất các người thợ như nhau).

Lời giải

Gọi số người của nhóm 1,2,3 lần lượt là a, b, c (người) ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có : $a - c = 3$

Vì số người làm việc và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có :

$$40a = 60b = 50c \Rightarrow \frac{40a}{600} = \frac{60b}{600} = \frac{50c}{600} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{12}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{12} = \frac{a-c}{15-12} = \frac{3}{3} = 1$

$\Rightarrow a = 1.15 = 15 ; b = 1.10 = 10 ; c = 1.12 = 12$ (thoả mãn)

Vậy số người của nhóm 1,2,3 lần lượt là 15 ; 10 ; 12 người.

Bài 5. Biết độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 3, 5, 7.

Tính độ dài các cạnh của một tam giác, biết:

a) Chu vi của tam giác là 45cm;

b) Tổng độ dài cạnh lớn nhất và cạnh nhỏ nhất hơn cạnh còn lại 20cm.

Lời giải

a) Gọi độ dài ba cạnh của một tam giác lần lượt là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 3, 5, 7 nên ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$

Chu vi tam giác là 45 cm nên $x + y + z = 45$;

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{3+5+7} = \frac{45}{15} = 3$.

Suy ra:

$x = 3.3 = 9$ (cm);

$y = 5.3 = 15$ (cm);

$z = 7.3 = 21$ (cm).

Vậy độ dài ba cạnh của một tam giác lần lượt là: 9 cm, 15 cm, 21 cm.

b) Gọi độ dài ba cạnh của một tam giác lần lượt là x, y, z (cm).

Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 3, 5, 7 nên ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$;

Tổng độ dài cạnh lớn nhất và cạnh nhỏ nhất hơn cạnh còn lại 20cm nên ta có: $x + z - y = 20$;

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+z-y}{3+7-5} = \frac{20}{5} = 4$.

Suy ra:

$x = 3.4 = 12$ (cm);

$y = 5.4 = 20$ (cm);

$z = 7.4 = 28$ (cm).

Vậy độ dài ba cạnh của một tam giác lần lượt là: 12 cm, 20 cm, 28 cm.

Bài 6. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

b) $g(x) = x^2 - 64x$

c) $h(x) = (16 - 25x^2)(8x^3 + 1)$

d) $q(x) = (4x + 7)(x^2 + 9)$

Lời giải

a) Xét $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$

Vậy đa thức $f(x)$ có nghiệm là $x = 3$

b) Xét $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 64x = 0 \Rightarrow x(x - 64) = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 64$

Vậy đa thức $g(x)$ có nghiệm là $x = 0; x = 64$

c) Xét $h(x) = 0 \Rightarrow (16 - 25x^2)(8x^3 + 1) = 0 \Rightarrow 16 - 25x^2 = 0$ hoặc $8x^3 + 1 = 0$

TH1: $16 - 25x^2 = 0 \Rightarrow 25x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$ hoặc $x = -\frac{4}{5}$

TH2: $8x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 8x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy đa thức $h(x)$ có nghiệm là $x = \frac{4}{5}; x = -\frac{4}{5}; x = -\frac{1}{2}$

d) Xét $q(x) = 0 \Rightarrow (4x + 7)(x^2 + 9) = 0$

Vì $x^2 + 9 > 0$ với mọi x nên $q(x) = 0 \Rightarrow 4x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$

Vậy đa thức $q(x)$ có nghiệm là $x = -\frac{7}{4}$.

Bài 7. Cho hai đa thức : $f(x) = 2x^3 + 7x - 4x^2 - 3x^3 + 5x^2 + 11$

$$g(x) = 3x^2 + 2 - 5x^2 - (8x^2 - 4x^3 + 3)$$

a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức $f(x), g(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính tổng $f(x) + g(x)$.

c) Tính hiệu $f(x) - g(x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 2x^3 + 7x - 4x^2 - 3x^3 + 5x^2 + 11 \\ &= (2x^3 - 3x^3) + (5x^2 - 4x^2) + 7x + 11 \\ &= -x^3 + x^2 + 7x + 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x^2 + 2 - 5x^2 - (8x^2 - 4x^3 + 3) \\ &= 3x^2 + 2 - 5x^2 - 8x^2 + 4x^3 - 3 \\ &= 4x^3 + (3x^2 - 5x^2 - 8x^2) + (2 - 3) \\ &= 4x^3 - 10x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(x) + g(x) &= (-x^3 + x^2 + 7x + 11) + (4x^3 - 10x^2 - 1) \\
 &= -x^3 + x^2 + 7x + 11 + 4x^3 - 10x^2 - 1 \\
 &= (-x^3 + 4x^3) + (-10x^2 + x^2) + 7x + (11 - 1) \\
 &= 3x^3 - 9x^2 + 7x + 10 \\
 \text{c) } f(x) - g(x) &= (-x^3 + x^2 + 7x + 11) - (4x^3 - 10x^2 - 1) \\
 &= -x^3 + x^2 + 7x + 11 - 4x^3 + 10x^2 + 1 \\
 &= (-x^3 - 4x^3) + (10x^2 + x^2) + 7x + (11 + 1) \\
 &= -5x^3 + 11x^2 + 7x + 12
 \end{aligned}$$

Bài 8. Cho hai đa thức:

$$M(x) = -5x^4 + 3x^5 + x(x^2 + 5) + 14x^4 - 6x^5 - x^3 + x - 1$$

$$N(x) = x^4(x - 5) - 3x^3 + 3x + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5$$

- Thu gọn và sắp xếp hai đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tính $H(x) = M(x) + N(x)$; $G(x) = M(x) - N(x)$.
- Tìm bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của $H(x), G(x)$.
- Tính $H(-1); H(1); G(1); G(0)$.
- Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } M(x) &= -5x^4 + 3x^5 + x(x^2 + 5) + 14x^4 - 6x^5 - x^3 + x - 1 \\
 &= -5x^4 + 3x^5 + x^3 + 5x + 14x^4 - 6x^5 - x^3 + x - 1 \\
 &= (3x^5 - 6x^5) + (-5x^4 + 14x^4) + (x^3 - x^3) + (5x + x) - 1 \\
 &= -3x^5 + 9x^4 + 6x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(x) &= x^4(x - 5) - 3x^3 + 3x + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5 \\
 &= x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 3x + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5 \\
 &= (x^5 + 2x^5) + (-5x^4 - 4x^4) + (-3x^3 + 3x^3) + 3x - 5 \\
 &= 3x^5 - 9x^4 + 3x - 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } H(x) &= M(x) + N(x) \\
 &= (-3x^5 + 9x^4 + 6x - 1) + (3x^5 - 9x^4 + 3x - 5) \\
 &= -3x^5 + 9x^4 + 6x - 1 + 3x^5 - 9x^4 + 3x - 5 \\
 &= (-3x^5 + 3x^5) + (-9x^4 + 9x^4) + (6x + 3x) + (-1 - 5) \\
 &= 9x - 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(x) &= M(x) - N(x) \\
 &= (-3x^5 + 9x^4 + 6x - 1) - (3x^5 - 9x^4 + 3x - 5) \\
 &= -3x^5 + 9x^4 + 6x - 1 - 3x^5 + 9x^4 - 3x + 5 \\
 &= (-3x^5 - 3x^5) + (9x^4 + 9x^4) + (6x - 3x) + (5 - 1) \\
 &= -6x^5 + 18x^4 + 3x + 4
 \end{aligned}$$

c) Đa thức $H(x)$ có bậc 1, hệ số cao nhất là 9, hệ số tự do là -6.

Đa thức $G(x)$ có bậc 5, hệ số cao nhất là -6, hệ số tự do là 4.

d) Ta có:

$$H(-1) = 9 \cdot (-1) - 6 = -9 - 6 = -15$$

$$H(1) = 9 \cdot 1 - 6 = 9 - 6 = 3$$

$$G(1) = -6 \cdot 1^5 + 18 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1 + 4 = -6 + 18 + 3 + 4 = 19$$

$$G(0) = -6 \cdot 0^5 + 18 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0 + 4 = 0 + 0 + 0 + 4 = 4$$

$$e) H(x) = 0 \Rightarrow 9x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Vậy nghiệm của đa thức $H(x)$ là $x = \frac{2}{3}$

Bài 9. Chứng tỏ rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến:

a) $A = 3(x-2)(3-x) + x(5x-3) - 2x(x+6) + 10.$

b) $B = 2x(x+1) - x^2(3x-2) + (x-3)(3x^2+5x+13).$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) A &= 3(x-2)(3-x) + x(5x-3) - 2x(x+6) + 10 \\
 &= 3(3x - x^2 - 6 + 2x) + 5x^2 - 3x - 2x^2 - 12x + 10 \\
 &= 3(-x^2 + 5x - 6) + 5x^2 - 3x - 2x^2 - 12x + 10 \\
 &= -3x^2 + 15x - 18 + 5x^2 - 3x - 2x^2 - 12x + 10 \\
 &= (-3x^2 + 5x^2 - 2x^2) + (15x - 3x - 12x) + (-18 + 10) \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức A đã cho không phụ thuộc vào giá trị của biến.

$$\begin{aligned}
 b) B &= 2x(x+1) - x^2(3x-2) + (x-3)(3x^2+5x+13) \\
 &= 2x^2 + 2x - 3x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 13x - 9x^2 - 15x - 39 \\
 &= (-3x^3 + 3x^3) + (2x^2 + 2x^2 + 5x^2 - 9x^2) + (2x + 13x - 15x) - 39 \\
 &= -39
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức B đã cho không phụ thuộc vào giá trị của biến.

Bài 10.

a) Tìm đa thức A, biết đa thức A chia đa thức $B = x^2 - 2x + 3$ thì được thương là $Q = x^2 - 2$, dư là $R = 9x - 5$

b) Cho đa thức $M = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$, Biết chia đa thức M cho đa thức N được thương là $3x + 1$ và dư $x + 6$. Tìm đa thức N

Lời giải

a) Ta có:

$$A = B \cdot Q + R = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2) + 9x - 5 = x^4 - 2x^3 + x^2 + 13x - 11$$

b) Vì đa thức M chia cho đa thức N được thương là $3x + 1$ và dư $x + 6$

$\Rightarrow M - (x + 6)$ sẽ chia hết cho đa thức N

Ta có: $M - (x + 6) = (-3x^3 + 20x^2 + 20x + 10) - (x + 6)$

$$= -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10 - x - 6$$

$$= -3x^3 + 20x^2 + 19x + 4$$

Thực hiện phép chia đa thức $-3x^3 + 20x^2 + 19x + 4$ cho $3x + 1$, ta có:

$-3x^3 + 20x^2 + 19x + 4$	$3x + 1$
$-$	$-\underline{x^2 + 7x + 4}$
$-3x^3 - x^2$	
$\hline 21x^2 + 19x + 4$	
$-$	
$21x^2 + 7x$	
$\hline 12x + 4$	
$-$	
$12x + 4$	
$\hline 0$	

Ta thấy chia đa thức $-3x^3 + 20x^2 + 19x + 4$ cho $3x + 1$ được thương là $-x^2 + 7x + 4$

Vậy $N = -x^2 + 7x + 4$

II. PHẦN HÌNH HỌC

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Kẻ $BE \perp AC$ tại E , kẻ $CD \perp AB$ tại D .

- Chứng minh: $BE = CD$ và $\triangle ADE$ cân tại A .
- Gọi H là giao điểm của BE và CD . Chứng minh AH là tia phân giác của \widehat{BAC} .
- Chứng minh $DE \parallel BC$.
- Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh ba điểm A, H, M thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có: $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC, \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Xét $\triangle ABE$ vuông tại E và $\triangle ACD$ vuông tại D có:

$AB = AC$ (cmt); \widehat{BAC} chung.

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BE = CD$ và $AE = AD$.

Vì $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A .

b) Xét $\triangle ADH$ vuông tại D và $\triangle AEH$ vuông tại H có:

$AD = AE$ (cmt); AH chung.

$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle AEH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

$\Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{EAH}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AH$ là tia phân giác của góc \widehat{BAC} .

c) Ta có: $\triangle ABC$ cân tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$ (1).

$$\triangle ADE \text{ cân tại } A \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow DE \parallel BC$.

d) Xét $\triangle ABC$ cân tại A có: $CD \perp AB, BE \perp AC, CD \cap BE = H$.

$\Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$

$\Rightarrow AH$ là đường cao thứ ba của $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$ (3).

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC, \widehat{ABM} = \widehat{ACM}, MB = MC$

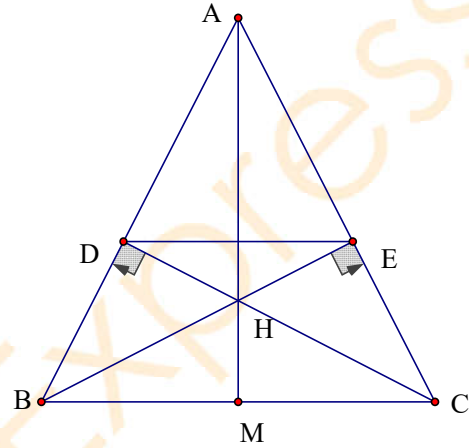
$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng)

Ta có: B, M, C thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$

mà $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$ (4).

Từ (3) và (4) \Rightarrow ba điểm A, H, M thẳng hàng.



Bài 12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B. AD là tia phân giác của \widehat{BAC} ($D \in BC$). Kẻ $DI \perp AC$ ($I \in AC$).

a) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle AID$.

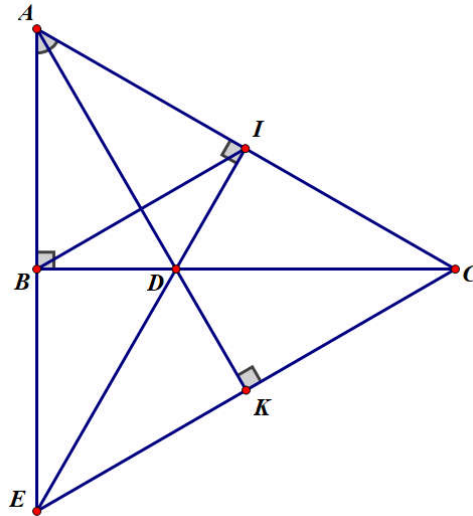
b) So sánh DB và DC.

c) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AD, cắt AD tại K. Hai đường thẳng CK và AB cắt nhau tại E. Chứng minh K là trung điểm của CE và $\triangle AEC$ cân.

d) Chứng minh $BI \parallel EC$.

e) Chứng minh ba điểm E, D, I thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét các tam giác vuông: $\triangle ABD$ (vuông tại B) và $\triangle AID$ (vuông tại I) có:

AD là cạnh chung; $\widehat{DAB} = \widehat{DAI}$ (AD là tia phân giác của \widehat{BAC});

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AID$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) So sánh DB và DC .

Vì $\triangle ABD = \triangle AID$ (chứng minh a) $\Rightarrow DB = DI$, mà trong $\triangle DIC$ vuông tại I có DC là cạnh huyền nên $DC > DI \Rightarrow DC > DB$.

c) Xét $\triangle AKE$ và $\triangle AKC$ có:

AK là cạnh chung; $\widehat{AKE} = \widehat{AKC} = 90^\circ$ (GT); $\widehat{EAK} = \widehat{CAK}$ (AD là tia phân giác của \widehat{BAC});

$\Rightarrow \triangle AKE = \triangle AKC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề) $\Rightarrow KE = KC$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của EC

Vì $\triangle AKE = \triangle AKC \Rightarrow AE = AC \Rightarrow \triangle ACE$ cân tại A.

d) Ta có: $\triangle ABD = \triangle AID$ (chứng minh a) $\Rightarrow AB = AI \Rightarrow \triangle ABI$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABI} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Theo c), ta có $\triangle ACE$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AEC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Vậy $\widehat{ABI} = \widehat{AEC} \left(= \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} \right) \Rightarrow BI \parallel EC$ (có cặp góc đồng vị bằng nhau).

e) $\triangle ACE$ có hai đường cao AK và CB cắt nhau tại D $\Rightarrow D$ là trực tâm của $\triangle ACE \Rightarrow ED \perp AC$;

Mà theo GT, ta có: $DI \perp AC \Rightarrow ED \equiv DI$ (tiên đề Euclid) $\Rightarrow E, D, I$ thẳng hàng.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi N là trung điểm của AC .

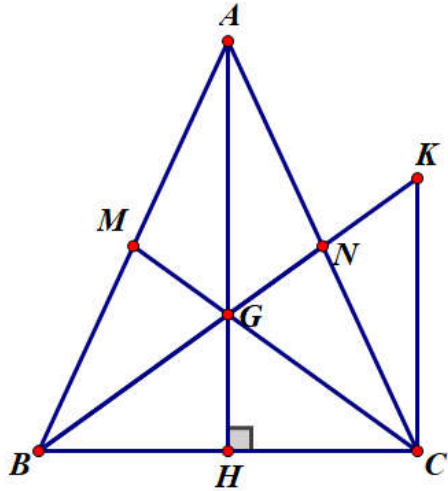
a) Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$.

b) Hai đoạn thẳng BN và AH cắt nhau tại G , trên tia đối của tia NB lấy K sao cho $NK = NG$. Chứng minh: $AG \parallel CK$.

c) Chứng minh: G là trung điểm của BK .

d) Gọi M là trung điểm AB . Chứng minh $BC + AG > 4GM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

AH là cạnh chung; $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ ($AH \perp BC$); $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A);
 $\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

b) Xét $\triangle NAG$ và $\triangle NCK$ có:

$NK = NG$ (GT); $\widehat{ANG} = \widehat{CNK}$ (hai góc đối đỉnh); $NA = NC$ (N là trung điểm của AC);
 $\Rightarrow \triangle NAG = \triangle NCK$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{NAG} = \widehat{NCK} \Rightarrow AG \parallel CK$ (có cặp góc so le trong bằng nhau).

c) $\triangle AHB = \triangle AHC$ (chứng minh a) $\Rightarrow HB = HC \Rightarrow H$ là trung điểm của BC

$\Rightarrow BN, AH$ là hai trung tuyến của $\triangle ABC$ cắt nhau tại $G \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ABC$

$\Rightarrow GB = 2GN$, mà $NK = NG$ (GT) $\Rightarrow GB = GN + NK \Rightarrow GB = GK$

Vậy G là trung điểm của BK .

d) Ta có CM là trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow G \in CM$ và $GC = 2GM$; $AG = 2GH$; $BC = 2HC$.

Áp dụng bất đẳng thức trong $\triangle GHC$, ta có:

$HC + GH > GC \Rightarrow 2HC + 2GH > 2GC = 2 \cdot 2GM \Rightarrow BC + AG > 4GM$.

Bài 14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Tia phân giác góc B cắt AC tại D . Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$

a) Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle EBD$.

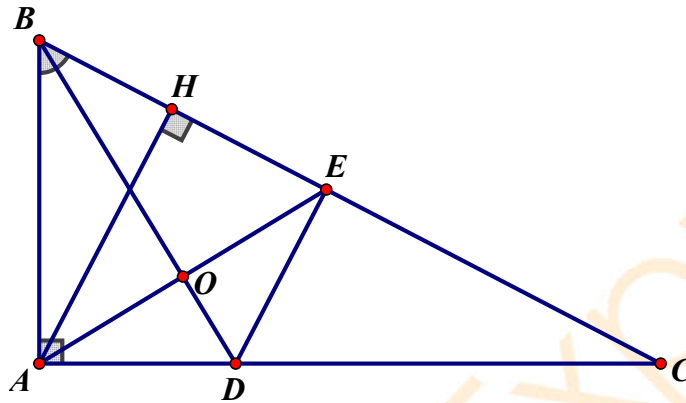
b) Chứng minh: $\widehat{DEB} = 90^\circ$.

c) Chứng minh: $DC > DA$.

d) Gọi O là giao điểm của AE và BD . Chứng minh: $OA = OE$.

e) Kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh: AE là tia phân giác của \widehat{HAC} .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có:

BD là cạnh chung; $BE = BA$ (GT); $\widehat{DBA} = \widehat{DBE}$ (BD là phân giác góc B);
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c).

b) $\triangle ABD = \triangle EBD$ (chứng minh a) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$, mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ (GT) $\Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ$.

c) Vì $\widehat{DEB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle DEC$ vuông tại $E \Rightarrow DC > DE$. Lại có $DE = DA$ ($\triangle ABD = \triangle EBD$) $\Rightarrow DC > DA$

d) Gọi O là giao điểm của AE và BD . Chứng minh: $OA = OE$.

Xét $\triangle BOA$ và $\triangle BOE$ có:

BO là cạnh chung; $BA = BE$ (GT); $\widehat{DBA} = \widehat{DBE}$ (BD là phân giác góc B);
 $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BOE$ (c.g.c)
 $\Rightarrow OA = OE$ (hai cạnh tương ứng).

e) Kẻ $AH \perp BC$.

Vì $AH \perp BC$, mà $\widehat{DEB} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp BC \Rightarrow DE \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{AED}$ (hai góc so le trong);

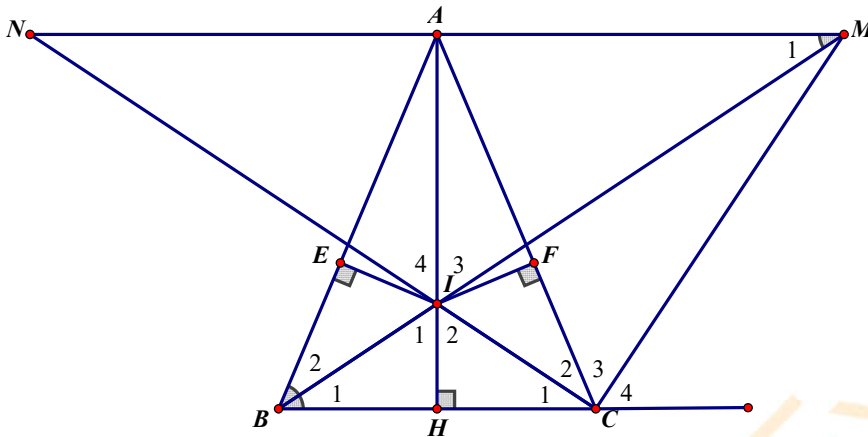
Lại có $DA = DE$ ($\triangle ABD = \triangle EBD$) $\Rightarrow \triangle DAE$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DAE}$;

$\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{DAE}$ ($= \widehat{AED}$) $\Rightarrow AE$ là tia phân giác của \widehat{HAC} .

Bài 15. Cho $\triangle ABC$, $AB = AC$, $AB > BC$, H là trung điểm của BC .

- Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$. Từ đó suy ra AH vuông góc với BC .
- Tia phân giác của góc B cắt AH tại I . Chứng minh tam giác BIC cân.
- Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt BI , CI lần lượt tại M , N . Chứng minh A là trung điểm của đoạn MN .
- Kẻ IE vuông góc với AB tại E , IF vuông góc với AC tại F . Chứng minh: $IH = IE = IF$.
- Chứng minh IC vuông góc với MC .

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

$AB = AC$

AH là cạnh chung

$HB = HC$ (H là trung điểm của BC)

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC}$ (2 góc tương ứng)

$\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ (2 góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

b) $\triangle ABC$: $AH \perp BC$; H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH$ là trung trực của BC .

Mà $I \in AH \Rightarrow IB = IC \Rightarrow \triangle IBC$ cân tại I

c)

Ta có $AH \perp BC$ mà $NM \parallel BC \Rightarrow AH \perp MN$

Vì $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{C}_1$; $\widehat{AMI} = \widehat{B}_1$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (tam giác ICB cân tại I)

$\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{AMI} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{ANI} = 90^\circ - \widehat{AMI} \Rightarrow \widehat{I}_4 = \widehat{I}_3$

Xét $\triangle AIN$ vuông tại A và $\triangle AIM$ vuông tại A có:

AI chung; $\widehat{I}_4 = \widehat{I}_3$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AIN = \triangle AIM$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề) $\Rightarrow AM = AN$ (2 cạnh tương ứng)

d) Kẻ IE vuông góc với AB tại E, IF vuông góc với AC tại F.

+) Xét $\triangle IHB$ và $\triangle IEB$ có:

Chung IB

$$\widehat{IHB} = \widehat{IEB} = 90^\circ$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (BI là phân giác)}$$

$$\Rightarrow \triangle IHB = \triangle IEB \text{ (ch - gn)} \Rightarrow IE = IH \text{ (1)}$$

+) $\triangle ABC$: có AH, BI là 2 đường phân giác cắt nhau tại I \Rightarrow CI là phân giác góc ACB.

+) Chứng minh tương tự: $\triangle IHC = \triangle IFC$ (ch - gn) $\Rightarrow IF = IH$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow IE = IH = IF$

e) $AM \parallel BC \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$ mà $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A $\Rightarrow AB = AM$.

Mà $AB = AC \Rightarrow AM = AC \Rightarrow \triangle ACM$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{C}_3$ mà $\widehat{AMC} = \widehat{C}_4$ (so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{C}_3 = \widehat{C}_4$$

Mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (CI là phân giác góc C) $\Rightarrow \widehat{C}_2 + \widehat{C}_3 = 90^\circ$. Suy ra $IC \perp MC$

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO

Bài 16. Tìm x, y, z , biết: $\frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115}$ và $x+y+2z = -31$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115} \Rightarrow \frac{x+3y}{19} = \frac{y+3z}{38} = \frac{z+3x}{23}$$

$$x+y+2z = -31 \Rightarrow x+y+z = -31-z$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x+3y}{19} = \frac{y+3z}{38} = \frac{z+3x}{23} = \frac{x+3y+y+3z+z+3x}{19+38+23} = \frac{4(x+y+z)}{80} = \frac{x+y+z}{20} = \frac{-31-z}{20}$$

$$\text{Có: } \frac{y+3z}{38} = \frac{-31-z}{20} \Rightarrow 20y+60z = -31 \cdot 38 - 38z \Rightarrow y = \frac{-1178-98z}{20}$$

$$\frac{z+3x}{23} = \frac{-31-z}{20} \Rightarrow 20z+60x = -31 \cdot 23 - 23z \Rightarrow x = \frac{-713-43z}{60}$$

Thay $x = \frac{-713-43z}{60}$; $y = \frac{-1178-98z}{20}$ vào $x+y+2z = -31$ ta có:

$$\text{Ta có: } \frac{-713-43z}{60} + \frac{-1178-98z}{20} + 2z = -31 \Rightarrow -713-43z-3534-294z+120z = -1860 \Rightarrow -217z = 2387 \Rightarrow z = -11$$

$$\text{Do đó } \frac{y+3z}{38} = \frac{-31-(-11)}{20} = -1 \Rightarrow y = -5 \quad ; \quad \frac{z+3x}{23} = \frac{-31-(-11)}{20} = -1 \Rightarrow x = -4$$

Vậy $x = -4; y = -5; z = -11$

Bài 17.

a) Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $-a + 2b + 2c \neq 0; 2a - b + 2c \neq 0; 2a + 2b - c \neq 0$ và

$$\frac{a}{-a+2b+2c} = \frac{b}{2a-b+2c} = \frac{c}{2a+2b-c}. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$$

b) Cho $xyz = 1$. Tính $Q = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}$

Lời giải

$$\text{TH1: } a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a = -b-c \\ b = -a-c \\ c = -a-b \end{cases}$$

$$P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1$$

$$\text{TH2: } a+b+c \neq 0$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{-a+2b+2c} = \frac{b}{2a-b+2c} = \frac{c}{2a+2b-c} = \frac{a+b+c}{-a+2b+2c+2a-b+2c+2a+2b-c} = \frac{a+b+c}{3a+3b+3c} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{-a+2b+2c} = \frac{1}{3} \\ \frac{b}{2a-b+2c} = \frac{1}{3} \\ \frac{c}{2a+2b-c} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = -a+2b+2c \\ 3b = 2a-b+2c \\ 3c = 2a+2b-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 2b+2c \\ 4b = 2a+2c \\ 4c = 2a+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = b+c \quad (1) \\ 2b = a+c \quad (2) \\ 2c = a+b \quad (3) \end{cases}$$

$$P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{2c}{a} \cdot \frac{2b}{c} \cdot \frac{2a}{b} = \frac{8abc}{abc} = 8$$

Vậy $P = -1$ hoặc $P = 8$

$$\text{b) } Q = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}$$

Ta có:

$$\frac{1}{xy+x+1} = \frac{xyz}{xy+x+xyz} = \frac{xyz}{x(y+1+yz)} = \frac{yz}{yz+y+1}$$

$$\frac{1}{zx+z+1} = \frac{y}{y(zx+z+1)} = \frac{y}{xyz+yz+y} = \frac{y}{yz+y+1}$$

$$\text{Do đó: } Q = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = \frac{yz}{yz+y+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{y}{yz+y+1} = \frac{yz+y+1}{yz+y+1} = 1$$

Vậy $Q = 1$

Bài 18.

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \sqrt{x} + |y^2 + 1| + 42$;
- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = -\sqrt{x+2} - |2y-1| + 2022$
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $C = |x+5| + |x+7| + |x+9|$

Lời giải

a) Với mọi $x \geq 0$ và với mọi y , ta có:

$$\sqrt{x} \geq 0 ; |y^2 + 1| \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} + |y^2 + 1| \geq 0 + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + |y^2 + 1| + 42 \geq 43$$

$$\Rightarrow A \geq 43$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ |y^2 + 1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của A bằng 43 khi $x = 0$; $y = 0$

b) Với mọi $x \geq -2$ và với mọi y , ta có:

$$\sqrt{x+2} \geq 0 ; |2y-1| \geq 0 \Rightarrow -(\sqrt{x+2} + |2y-1|) \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+2} - |2y-1| + 2022 \leq 2022 \Rightarrow B \leq 2022$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} \sqrt{x+2} = 0 \\ |2y-1| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ 2y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy GTLN của B bằng 2022 khi $x = -2$; $y = \frac{1}{2}$

c) $C = |x+5| + |x+7| + |x+9| = (|x+5| + |x+9|) + |x+7|$

Vì $|x+5| + |x+9| = |-x-5| + |x+9| \geq -x-5 + x+9 = 4$; $|x+7| \geq 0 \Rightarrow C \geq 4 + 0 \Rightarrow C \geq 4$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} -x-5 \geq 0 \\ x+9 \geq 0 \\ x+7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq -9 \\ x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq -5 \\ x = -7 \end{cases} \Rightarrow x = -7$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của C bằng 4 khi $x = -7$

Bài 19.

a) Cho các số hữu tỉ a và b thỏa mãn $(2a+b-1)\sqrt{7} = a-b-2$. Tính giá trị của $P = \frac{a^2+b^2-2}{ab+2023}$

b) Tìm các số tự nhiên a, b, c sao cho $a^2 - 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 11 - c\sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có: $(2a+b-1)\sqrt{7} = a-b-2$

Nếu: $2a+b-1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{7} = \frac{a-b-2}{2a+b-1}$

Mà $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a-b-2}{2a+b-1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ (vô lý vì $\sqrt{7}$ là số vô tỉ)

Nếu $2a+b-1=0 \Rightarrow a-b-2=0$

Khi đó: $a=1; b=-1$

Vậy $P = \frac{a^2+b^2-2}{ab+2023} = 0$.

b) $a^2 - 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 11 - c\sqrt{2} \Rightarrow 2ab\sqrt{2} - c\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 - 11 \Rightarrow (2ab-c)\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 - 11$

$TH_1: 2ab-c \neq 0 \Rightarrow \frac{a^2+2b^2-11}{2ab-c} = \sqrt{2}$

Vì a, b, c là số tự nhiên $\Rightarrow \frac{a^2+2b^2-11}{2ab-c} \in \mathbb{Q}$. Mà $\sqrt{2}$ là số vô tỉ \Rightarrow loại trường hợp này

$TH_2: 2ab-c=0 \Rightarrow a^2+2b^2-11=0 \Rightarrow a^2+2b^2=11 \Rightarrow 2b^2 \leq 11 \Rightarrow b^2 \leq \frac{11}{2} \Rightarrow b \in \{0; 1; 2\}$

Nếu $b=0$ thì từ $a^2+2b^2=11 \Rightarrow a^2=11$ (không tìm được số tự nhiên a thỏa mãn)

Nếu $b=1$ thì từ $a^2+2b^2=11 \Rightarrow a^2+2=11 \Rightarrow a=3 \Rightarrow c=6$

Nếu $b=2$ thì từ $a^2+2b^2=11 \Rightarrow a^2+8=11 \Rightarrow a^2=3$ (không tìm được số tự nhiên a thỏa mãn)

Vậy $a=3; b=1; c=6$

Bài 20. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $A = x^{2023} - 2024x^{2022} + 2024x^{2021} - 2024x^{2020} + \dots + 2024x - 1$ tại $x = 2023$

b) $B = 2200 - 80x + 80x^2 - 80x^3 + 80x^4 - \dots + 80x^{2020} - 80x^{2021} + x^{2022}$ tại $x = 79$

Lời giải

a) Với $x = 2023 \Rightarrow 2024 = x+1$

Ta có: $A = x^{2023} - (x+1)x^{2022} + (x+1)x^{2021} - (x+1)x^{2020} + \dots + (x+1)x - 1$

$$= x^{2023} - x^{2023} - x^{2022} + x^{2022} + x^{2021} - x^{2021} - x^{2020} + \dots + x^2 + x - 1$$

$$= x - 1 = 2023 - 1 = 2022$$

Vậy $A = 2022$.

a) Với $x = 79 \Rightarrow 80 = x + 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= 2200 - (x+1)x + (x+1)x^2 - (x+1)x^3 + (x+1)x^4 - \dots + (x+1)x^{2020} - (x+1)x^{2021} + x^{2022} \\ &= 2200 - x^2 - x + x^3 + x^2 - x^4 - x^3 + x^5 + x^4 - \dots + x^{2021} + x^{2020} - x^{2022} - x^{2021} + x^{2022} \\ &= 2200 - x \\ &= 2200 - 79 \\ &= 2121 \end{aligned}$$

Vậy $B = 2121$.

Bài 21. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh: Nếu $f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ là các số nguyên thì a, b, c đều là các số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c.$$

$f(0)$ là số nguyên nên c là số nguyên.

$f(1)$ là số nguyên và c là số nguyên nên $a + b$ là số nguyên.

$f(-1)$ là số nguyên và c là số nguyên nên $a - b$ là số nguyên.

$\Rightarrow 2a$ là số nguyên và $2b$ là số nguyên.

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ là số nguyên và c là số nguyên nên $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{a + 2b}{4}$ là số nguyên.

$\Rightarrow a + 2b$ là số nguyên. Mà $2b$ là số nguyên nên a là số nguyên $\Rightarrow b$ cũng là số nguyên.

Bài 22.

a) Cho đa thức $Q(x) = 3x^2 + ax + b$. Biết $Q(-1) = 15; Q(3) = 11$. Tính $\frac{Q(1) - Q(-4)}{110}$

b) Cho a, b, c là các số nguyên, xét đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$

Biết rằng $P(8) - P(5) = 2022$. Chứng minh rằng $P(7) - P(4)$ là số chẵn.

Lời giải

a) Ta có: $Q(x) = 3x^2 + ax + b$

$$Q(-1) = 15 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = 15 \Rightarrow -a + b = 12 \quad (1)$$

$$Q(3) = 11 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + b = 11 \Rightarrow 3a + b = -16 \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được: $4a = -28 \Rightarrow a = -7 \Rightarrow b = 12 - 7 = 5$

Khi đó: $Q(x) = 3x^2 - 7x + 5$

$$Q(1) = 3 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 5 = 1$$

$$Q(-4) = 3 \cdot (-4)^2 - 7 \cdot (-4) + 5 = 81$$

$$\text{Khi đó: } \frac{Q(1) - Q(-4)}{110} = \frac{1 - 81}{110} = \frac{-80}{110} = \frac{-8}{11}$$

b) Ta có:

$$P(8) - P(5) = (64a + 8b + c) - (25a + 5b + c) = 39a + 3b = 2022$$

$$P(7) - P(4) = (49a + 7b + c) - (16a + 4b + c) = 33a + 3b$$

Với $a, b \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$39a + 3b = 6a + (33a + 3b) = 2022 \text{ là số chẵn}$$

Mà $6a$ chẵn $\Rightarrow 33a + 3b$ là số chẵn

$\Rightarrow P(7) - P(4)$ là số chẵn

Vậy $P(7) - P(4)$ là số chẵn

Bài 23.

a) Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 + 5x + 5$.

b) Cho đa thức $g(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $g(1) = 2012$; $g(-2) = g(3) = 2036$

Chứng minh rằng đa thức $g(x)$ vô nghiệm

Lời giải

$$a) f(x) = x^2 + 5x + 5 = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{5}{4} = x\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$\text{Xét } f(x) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$$

$$\text{Trường hợp 1: } x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5} - 5}{2}$$

$$\text{Trường hợp 2: } x + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{5} + 5}{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của đa thức } f(x) \text{ là: } x \in \left\{ \frac{\sqrt{5} - 5}{2}; -\frac{\sqrt{5} + 5}{2} \right\}.$$

b) Ta có:

$$g(1) = a + b + c = 2012 \quad (1)$$

$$g(-2) = 4a - 2b + c = 2036 \quad (2)$$

$$g(3) = 9a + 3b + c = 2036 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow (4a - 2b + c) - (a + b + c) = 24 \Rightarrow 3a - 3b = 24 \Rightarrow a - b = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ (2) (3)} \Rightarrow (9a + 3b + c) - (4a - 2b + c) = 0 \Rightarrow 5a + 5b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) (5) tìm được } a = 4; b = -4 \Rightarrow c = 2012$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } g(x) &= 4x^2 - 4x + 2012 = (4x^2 - 2x) - (2x - 1) + 2011 = 2x(2x - 1) - 1 \cdot (2x - 1) + 2011 \\ &= (2x - 1)^2 + 2011 > 0 \text{ với mọi } x \end{aligned}$$

Vậy đa thức $f(x)$ vô nghiệm

Bài 24.

a) Tìm đa thức dư trong phép chia sau: $(x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1) : (x^2 - 1)$

b) Xác định đa thức $f(x)$ thỏa mãn cả ba điều kiện sau:

Khi chia cho $x - 1$ thì dư 4; khi chia cho $x + 2$ thì dư 1; khi chia cho $(x - 1)(x + 2)$ thì được thương là $5x^2$ và còn dư.

Lời giải

a) Giả sử đa thức $A(x) = x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1$ chia cho đa thức $B(x) = x^2 - 1$ được thương là $Q(x)$ và dư là $R(x)$

Vì bậc của $R(x)$ phải nhỏ hơn bậc của $B(x)$ nên bậc của $R(x)$ nhỏ hơn 2

$\Rightarrow R(x)$ có dạng $ax + b$

Ta có: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Hay: $A(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x) + ax + b$

Với $x = 1$ ta có: $A(1) = (1^2 - 1) \cdot Q(1) + a \cdot 1 + b \Rightarrow 7 = a + b$ (1)

Với $x = -1$ ta có: $A(-1) = [(-1)^2 - 1] \cdot Q(-1) + a \cdot (-1) + b \Rightarrow 1 = -a + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 3; b = 4$

b) Vì $(x - 1)(x + 2)$ có bậc 2 nên $f(x)$ chia cho $(x - 1)(x + 2)$ được đa thức dư có dạng $ax + b$

Đặt $f(x) = (x - 1)(x + 2) \cdot 5x^2 + ax + b$ (**)

Áp dụng định lý Bézout:

Vì $f(x)$ chia $x - 1$ dư 4 $\Rightarrow f(1) = 4$. Thay vào (**) ta được: $a + b = 4$ (1)

Vì $f(x)$ chia $x + 2$ dư 1 $\Rightarrow f(-2) = 1$. Thay vào (**) ta được: $-2a + b = 1$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow a = 1; b = 3$

Do đó $f(x) = (x - 1)(x + 2) \cdot 5x^2 + x + 3 = 5x^4 + 5x^3 - 10x^2 + x + 3$

Vậy $f(x) = 5x^4 + 5x^3 - 10x^2 + x + 3$

Bài 25.

a) Cho a, b, c là số nguyên và $a^2 + b^2 + c^2 : 4$. Chứng minh rằng abc chia hết cho 8.

b) Tìm các số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$.

c) Cho p là số nguyên tố; $p > 3$ và $a, b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh rằng $a : 12$

Giải

a) Nhận xét: $a^2; b^2; c^2$ chia 4 dư 0 hoặc 1

+) Nếu $a^2; b^2; c^2$ chia 4 dư 1 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod{4}$ (loại)

+) Nếu $a^2; b^2; c^2$ có một số chia 4 dư 1; hai số chia 4 dư 0 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod{4}$ (loại)

+) Nếu $a^2; b^2; c^2$ có hai số chia 4 dư 1; một số chia 4 dư 0 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}$ (loại)

\Rightarrow chỉ có trường hợp cả $a^2; b^2; c^2$ đều chia hết cho 4

$\Rightarrow a; b; c$ đều chia hết cho 2 $\Rightarrow abc : 8$

Vậy $abc : 8$

b) Vì $r = p^q + q^p > 2$ mà r là số nguyên tố $\Rightarrow r$ là số lẻ

$\Rightarrow p^q$ hoặc q^p chẵn

Mà p, q là các số nguyên tố

$\Rightarrow p = 2$ hoặc $q = 2$.

TH1: $p = 2$ thì $2^q + q^2 = r$.

+) Nếu $q = 2 \Rightarrow r = 8$ (loại).

+) Nếu $q = 3 \Rightarrow r = 17$ (thỏa mãn)

+) Nếu $q > 3$ mà q là số nguyên tố $\Rightarrow q \not\equiv 3$ và q lẻ

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^q \equiv (-1)^q \equiv -1 \pmod{3} \\ q^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow 2^q + q^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$\Rightarrow r = 2^q + q^2$ chia hết cho 3 và > 3 nên không là số nguyên tố (loại)

Do đó $p = 2; q = 3; r = 17$

Tương tự với $q = 2$ ta tìm được $p = 3; r = 17$.

Vậy $p = 2; q = 3; r = 17$ hoặc $p = 3; q = 2; r = 17$

c) Vì p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p \not\equiv 3$ và $p^2 \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Nếu $a^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 + a^2 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow b^2$ chia 3 dư 2 (loại) $\Rightarrow a^2 : 3 \Rightarrow a : 3$ (1)

Vì p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p$ lẻ $\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{8}$

Nếu $a^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow p^2 + a^2 \equiv 2 \pmod{8} \Rightarrow b^2$ chia 8 dư 2 (loại)

Nếu $a^2 \equiv 4 \pmod{8} \Rightarrow p^2 + a^2 \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow b^2$ chia 8 dư 5 (loại)

$\Rightarrow a^2 : 8 \Rightarrow a : 4$

Vì $a : 3$; $a : 4$ và $(3, 4) = 1 \Rightarrow a : 12$ (điều phải chứng minh)

