

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 8

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. PHẦN ĐẠI SỐ

1. Hằng đẳng thức;
2. Phân tích đa thức thành nhân tử;
3. Phân thức đại số;
4. Phương trình bậc nhất một ẩn và các phương trình quy về bậc nhất một ẩn;
5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình ;
6. Hàm số, hàm số bậc nhất;
7. Một số yếu tố thống kê và xác suất

II. PHẦN HÌNH HỌC

1. Các loại tứ giác đặc biệt;
2. Định lí Thalès, đường trung bình, tính chất đường phân giác của tam giác;
3. Tam giác đồng dạng;
4. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO

1. Phương trình đại số;
3. Biến đổi biểu thức hữu tỉ;
4. Tính chất chia hết trong tập hợp số nguyên, số nguyên tố, số chính phương;
5. Bất đẳng thức.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = (2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) + 5x(x-1)$ tại $x = -\frac{1}{2}$.

b) $B = (2x-1)^3 - (2x+1)(4x^2-2x+1) + (1-3x)^2$ tại $x = -3$.

c) $C = (x+2y)^3 - 6xy(x+2y)$ tại $x = -0,1; y = 0,1$.

Bài 2. Tìm x , biết

a) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 21$.

b) $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2-6) = 18$.

c) $(x-1)^3 - (x-2)(x^2+2x+4) + 3x(x+2) = 6$.

d) $(x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2-2x+1) - 3x^2 = 42$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5(x+3y) - 15x(x+3y)$

b) $(4x-y)(a+b) - (y-4x)(b-1)$

c) $2x^2 - x - 6xy + 3y$

d) $x^4 + 6x^3 - 54x - 81$

e) $x^2 - 13x + 36$

f) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

g) $81x^4 + 4$

h) $8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1) - 130$

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{x+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A b) Tính giá trị của biểu thức A khi $|2x-1|=3$

c) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$

d) Tìm các giá trị của x để $A > 0$

e) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Bài 5. Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{x^2-4}$ và $B = \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} - \frac{x}{x+2}$ ($x \neq \pm 2$)

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 3$

b) Rút gọn B.

c) Cho $P = \frac{B}{A}$, tìm x để $P < 1$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $x - 5 = 6 + (2x - 7)$

b) $1 - (5 - 2x) = 3x - 7$

c) $5(3x - 2) - 4(5 - 3x) = 1$

d) $1 - \frac{3x-1}{4} = \frac{3x-5}{2} - \frac{3(x-2)}{8}$

e) $\frac{4x+3}{5} - \frac{6x-2}{7} = \frac{5x+4}{3} + 3$

f) $\frac{3(x-1)}{4} - \frac{3x+1}{10} + 1 = \frac{2(3x+2)}{5}$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $(2x-5)(3x+7) = 4x^2 - 25$

b) $3x^2 - 11x + 6 = 0$

c) $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$

d) $(x+1)^3 - 4(x+1) = 0$

e) $\frac{x-13}{87} + \frac{x-27}{73} + \frac{x-67}{33} + \frac{x-73}{27} = 4$

f) $\frac{x-95}{5} + \frac{x-80}{10} + \frac{x-76}{8} + \frac{x-48}{13} = 10$

Bài 8. Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình là 40 km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hàng trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình là 30 km/h. Tính quãng đường AB, biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.

Bài 9. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng là 8m. Nếu tăng chiều dài thêm 12m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích hình chữ nhật tăng gấp đôi. Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn đó.

Bài 10. Hai tổ sản xuất phải dệt 140 áo len. Trong thực tế tổ 1 đã vượt mức 10% kế hoạch của mình, tổ 2 vượt mức 5% kế hoạch của mình nên cả hai tổ đã dệt được 150 áo len. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải dệt được bao nhiêu áo len?

Bài 11. Một lâm trường lập kế hoạch trồng một số ha rừng, theo đó mỗi tuần lâm trường phải trồng 15ha. Trên thực tế nhờ cải tiến kĩ thuật, lâm trường đã trồng được 20ha mỗi tuần. Do đó lâm trường không chỉ hoàn thành kế hoạch trước 1 tuần mà còn trồng thêm được 5ha rừng. Hỏi theo kế hoạch thì lâm trường phải trồng bao nhiêu ha rừng?

Bài 12. Cho hàm số $y = (m-2)x + m - 1$

- Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2
- Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2
- Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $B(3; -2)$

Bài 13. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

- Vẽ hai đường thẳng đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ và chứng minh rằng chúng cắt nhau tại điểm A nằm trên trục hoành.
- Gọi giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$ với trục tung theo thứ tự là B và C .

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông, từ đó suy ra hai đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$ vuông góc với nhau.

Bài 14. Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần, tính xác suất của biến cố:

- Số chấm xuất hiện ở cả hai lần là chẵn
- Số chấm xuất hiện ở lần đầu tiên là lẻ, số chấm xuất hiện ở lần thứ hai lớn hơn 4
- Tổng số chấm xuất hiện ở cả hai lần lớn hơn 5

Bài 15. Thống kê số vụ tai nạn giao thông trong tháng 9 của một thành phố thu được kết quả như bảng sau:

Số vụ tai nạn giao thông trong một ngày	0	1	2	3	4	> 4
Số ngày	4	7	9	6	2	2

a) Hãy tính xác suất thực nghiệm, từ đó ước lượng xác suất của các biến cố:

Biến cố A: “Một ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn”

Biến cố B: “Một ngày có nhiều hơn 2 vụ tai nạn”

b) Hãy dự đoán xem trong ba tháng cuối năm (10; 11; 12) tại thành phố đó có bao nhiêu ngày có không quá 3 vụ tai nạn giao thông?

Bài 16. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$ ($E \in AB$), $HF \perp AC$ ($F \in AC$).

- Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AHB$ từ đó suy ra $AH^2 = AE \cdot AB$
- Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$
- Cho chu vi các $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$ lần lượt là 20cm và 30cm . Tính diện tích $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$ biết diện tích $\triangle ACB$ lớn hơn diện tích $\triangle AEF$ là 25cm^2 .

Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD và CE cắt nhau tại H

- Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$
- Chứng minh $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$
- Chứng minh $\triangle HED$ đồng dạng với $\triangle HBC$
- Khi tam giác ABC đều, tính tỉ số diện tích tam giác HED và tam giác ABC .

Bài 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với BD , d cắt tia BC tại E .

- Chứng minh rằng: $\triangle BDE$ đồng dạng với $\triangle DCE$.
- Kẻ $CH \perp DE$ tại H . Chứng minh rằng: $DC^2 = CH \cdot DB$.
- Gọi K là giao điểm của OE và HC . Chứng minh rằng: K là trung điểm của HC và tính tỉ số diện tích của $\triangle EHC$ và diện tích $\triangle EDB$.
- Chứng minh rằng: Ba đường thẳng OE , CD , BH đồng quy.

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH

- Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác HBA
- Cho $BH = 4\text{cm}$; $BC = 13\text{cm}$. Tính AH và AB
- Gọi E là một điểm tùy ý trên AB , đường thẳng qua H và vuông góc với HE cắt cạnh AC tại F . Chứng minh $AE \cdot CH = AH \cdot FC$
- Xác định vị trí của E trên AB để đoạn thẳng EF có độ dài ngắn nhất.

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ; $AB < AC$. Vẽ đường cao AH . Lấy điểm K thuộc tia đối của tia BC sao cho $KH = HA$. Qua K vẽ đường thẳng song song với AH cắt AC tại P . Gọi Q là trung điểm của BP ; AQ cắt BC tại I . Chứng minh rằng:

- $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$
- $\triangle BHQ \sim \triangle BPC$
- $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$

MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO

Bài 21. Giải các phương trình sau:

a) $(7x-1)(7x+2)^2(7x+5) = 112$

b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

Bài 22.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau: $Q = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $M = \frac{8x + 12}{x^2 + 4}$

Bài 23.

a) Cho ba số a, b, c phân biệt và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính: $Q = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$

b) Cho $(x + y)^3 + x + y = x^3 y^3 + xy$. Tính $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Bài 24.

a) Tìm số tự nhiên x sao cho $x^2 + 2x + 12$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố q , sao cho tồn tại số nguyên dương n để $n^2 + 22q$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

c) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng $ab \vdots a + b + c$.

Bài 25.

a) Cho $x > 1$; $y > 1$ và $x + y = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 3x + 4y + \frac{5}{x-1} + \frac{9}{y-1}$.

b) Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng $N = \frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq \frac{3}{4}$

c) Cho $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = a^2 + b^2 + c^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = (2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) + 5x(x-1)$ tại $x = -\frac{1}{2}$.

b) $B = (2x-1)^3 - (2x+1)(4x^2-2x+1) + (1-3x)^2$ tại $x = -3$.

c) $C = (x+2y)^3 - 6xy(x+2y)$ tại $x = -0,1; y = 0,1$.

Lời giải

<p>a) $A = (2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) + 5x(x-1)$ $= 4x^2 + 4x + 1 - (9x^2 - 1) + 5x^2 - 5x$ $= 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 1 + 5x^2 - 5x$ $= -x + 2$</p> <p>Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào A ta được: $A = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$</p> <p>Vậy $A = \frac{5}{2}$ tại $x = -\frac{1}{2}$</p>	<p>c) $C = (x+2y)^3 - 6xy(x+2y)$ $= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 - 6x^2y - 12xy^2$ $= x^3 + 8y^3$</p> <p>Thay $x = -0,1; y = 0,1$ vào C ta được: $C = (-0,1)^3 + 8 \cdot 0,1^3 = 0,007$</p> <p>Vậy $C = 0,007$ tại $x = -0,1; y = 0,1$</p>
<p>b) $B = (2x-1)^3 - (2x+1)(4x^2-2x+1) + (1-3x)^2$ $= (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) - (8x^3 + 1) + (1 - 6x + 9x^2)$ $= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 8x^3 - 1 + 1 - 6x + 9x^2 = -3x^2 - 1$</p> <p>Thay $x = -3$ vào B ta được: $B = -3 \cdot (-3)^2 - 1 = -28$</p> <p>Vậy $B = -28$ tại $x = -3$</p>	

Bài 2. Tìm x , biết

a) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 21$.

b) $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2-6) = 18$.

c) $(x-1)^3 - (x-2)(x^2+2x+4) + 3x(x+2) = 6$.

d) $(x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2-2x+1) - 3x^2 = 42$

Lời giải

<p>a) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 21$ $\Rightarrow (x+2-x+3)(x+2+x-3) = 21$ $\Rightarrow 5(2x-1) = 21$ $\Rightarrow 2x-1 = \frac{21}{5}$ $\Rightarrow 2x = \frac{26}{5}$ $\Rightarrow x = \frac{13}{5}$</p> <p>Vậy $x = \frac{13}{5}$</p>	<p>b) $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2-6) = 18$ $\Rightarrow x^3 + 8 - x^3 + 6x = 18$ $\Rightarrow 8 + 6x = 18$ $\Rightarrow 6x = 10$ $\Rightarrow x = \frac{5}{3}$</p> <p>Vậy $x = \frac{5}{3}$</p>
--	--

$c) (x-1)^3 - (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 3x(x+2) = 6$ $\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 8 + 3x^2 + 6x = 6$ $\Rightarrow 9x + 7 = 6$ $\Rightarrow 9x = -1$ $\Rightarrow x = -\frac{1}{9}$ <p>Vậy $x = -\frac{1}{9}$</p>	$d) (x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) - 3x^2 = 42$ $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x(9x^2 + 6x + 1) + (2x)^3 + 1^3 - 3x^2 = 42$ $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 9x^3 - 6x^2 - x + 8x^3 + 1 - 3x^2 = 42$ $26x = 14$ $x = \frac{7}{13}$ <p>Vậy $x = \frac{7}{13}$</p>
---	--

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5(x+3y) - 15x(x+3y)$

b) $(4x-y)(a+b) - (y-4x)(b-1)$

c) $2x^2 - x - 6xy + 3y$

d) $x^4 + 6x^3 - 54x - 81$

e) $x^2 - 13x + 36$

f) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

g) $81x^4 + 4$

h) $8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1) - 130$

Lời giải

a) $5(x+3y) - 15x(x+3y) = 5(x+3y)(1-3x)$

b) $(4x-y)(a+b) - (y-4x)(b-1) = (4x-y)(a+b) - (4x-y)(b-1) = (4x-y)(a+b-b+1) = (4x-y)(a+1)$

c) $2x^2 - x - 6xy + 3y = (2x^2 - 6xy) - (x - 3y) = 2x(x - 3y) - 1 \cdot (x - 3y) = (x - 3y)(2x - 1)$

d) $x^4 + 6x^3 - 54x - 81 = (x^4 - 81) + (6x^3 - 54x) = (x^2 + 9)(x^2 - 9) + 6x(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9 + 6x)$
 $= (x - 3)(x + 3)(x + 3)^2 = (x - 3)(x + 3)^3$

e) $x^2 - 13x + 36 = x^2 - 4x - 9x + 36 = x(x - 4) - 9(x - 4) = (x - 4)(x - 9)$

f) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 4x - 4 = x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 4(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$

g) $81x^4 + 4 = 81x^4 + 36x^2 + 4 - 36x^2 = (81x^4 + 36x^2 + 4) - 36x^2 = (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2$
 $= (9x^2 + 2 - 6x) \cdot (9x^2 + 2 + 6x)$

h) Ta có:

$$8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1) - 130$$

$$= (4x+1)(4x-6)(4x-3)(4x+4) - 130$$

$$= [(4x+1)(4x-3)] \cdot [(4x-6)(4x+4)] - 130$$

$$= (16x^2 - 8x - 3)(16x^2 - 8x - 24) - 130$$

Đặt $16x^2 - 8x - 24 = t$ ta có:

$$t(t+21) - 130 = t^2 + 21t - 130 = t^2 + 26t - 5t - 130 = t(t+26) - 5(t+26) = (t+26)(t-5)$$

Do đó:

$$8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1) - 130 = (16x^2 - 8x + 2)(16x^2 - 8x - 29)$$

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{x+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A b) Tính giá trị của biểu thức A khi $|2x-1|=3$

c) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$ d) Tìm các giá trị của x để $A > 0$

e) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

Với $x \neq \pm 1$ ta có:

$$A = \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) - 2x - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

b) Vì $|2x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)} \\ x=-1 \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $x=2$ ta có: $A = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

Vậy với $|2x-1|=3$ thì $A = \frac{1}{3}$

c) Để $A = \frac{1}{2}$ thì $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x-1) = x+1 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy với $x=3$ thì $A = \frac{1}{2}$

d) Để $A > 0$ thì $\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$

Kết hợp ĐKXĐ ta có với $x > 1$ hoặc $x < -1$ thì $A > 0$

e) Với $x \neq \pm 1$ ta có: $A = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{2}{x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \in U(2) \Rightarrow x+1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

$x+1$	1	-1	2	-2
x	0	-2	1	-3
Đổi chiếu ĐKXĐ và thử lại	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn

Vậy $x \in \{0; -2; -3\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$

Bài 5. Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{x^2-4}$ và $B = \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} - \frac{x}{x+2}$ ($x \neq \pm 2$)

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 3$

b) Rút gọn B.

c) Cho $P = \frac{B}{A}$, tìm x để $P < 1$.

Lời giải

a) Thay $x = 3$ (tmđk) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{3+3}{3^2-4} = \frac{6}{5}$.

Vậy với $x = 3$ thì $A = \frac{6}{5}$

$$b) B = \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} - \frac{x}{x+2}$$

$$B = \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+2}$$

$$B = \frac{x^2 - (x+2) - x(x-2)}{x^2-4}$$

$$B = \frac{x^2 - x - 2 - x^2 + 2x}{x^2-4}$$

$$B = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$$

Vậy $B = \frac{1}{x+2}$ với mọi $x \neq \pm 2$.

c) ĐKXD: $x \neq \pm 2$; $x \neq -3$

$$P = \frac{B}{A} = \frac{x-2}{x^2-4} \cdot \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x-2}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x+3} = \frac{x-2}{x+3} = 1 - \frac{5}{x+3}$$

$$\text{Để } P < 1 \Rightarrow 1 - \frac{5}{x+3} < 1 \Rightarrow \frac{5}{x+3} > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

Vậy với $x \neq \pm 2$ và $x > -3$ thì $P < 1$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $x - 5 = 6 + (2x - 7)$

c) $5(3x - 2) - 4(5 - 3x) = 1$

e) $\frac{4x+3}{5} - \frac{6x-2}{7} = \frac{5x+4}{3} + 3$

b) $1 - (5 - 2x) = 3x - 7$

d) $1 - \frac{3x-1}{4} = \frac{3x-5}{2} - \frac{3(x-2)}{8}$

f) $\frac{3(x-1)}{4} - \frac{3x+1}{10} + 1 = \frac{2(3x+2)}{5}$

Lời giải

<p>a) $x - 5 = 6 + (2x - 7)$ $x - 5 = 6 + 2x - 7$ $\Rightarrow x = -4$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4\}$.</p>	<p>b) $1 - (5 - 2x) = 3x - 7$ $1 - 5 + 2x = 3x - 1$ $\Rightarrow x = -3$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3\}$.</p>
<p>c) $5(3x - 2) - 4(5 - 3x) = 1$ $15x - 10 - 20 + 12x = 1$ $27x = 31$ $\Rightarrow x = \frac{31}{27}$ Vậy tập nghiệm của phương trình trên là $S = \left\{ \frac{31}{27} \right\}$.</p>	<p>d) $1 - \frac{3x-1}{4} = \frac{3x-5}{2} - \frac{3(x-2)}{8}$ $\frac{8}{8} - \frac{6x-2}{8} = \frac{12x-20}{8} - \frac{3x-6}{8}$ $\Rightarrow 8 - 6x + 2 = 12x - 20 - 3x + 6$ $-6x + 10 = 9x - 14$ $-6x - 9x = -14 - 10$ $-15x = -24$ $\Rightarrow x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$ Vậy tập nghiệm của phương trình trên là $S = \left\{ \frac{8}{5} \right\}$.</p>
<p>e) $\frac{4x+3}{5} - \frac{6x-2}{7} = \frac{5x+4}{3} + 3$ $21(4x+3) - 15(6x-2) = 35(5x+4) + 3 \cdot 105$ $84x + 63 - 90x + 30 = 175x + 140 + 315$ $175x + 90x - 84x = 63 + 30 - 140 - 315$ $181x = -362$ $\Rightarrow x = -2$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2\}$.</p>	<p>f) $\frac{3(x-1)}{4} - \frac{3x+1}{10} + 1 = \frac{2(3x+2)}{5}$ $15(x-1) - 2(3x+1) + 20 = 8(3x+2)$ $15x - 15 - 6x - 2 + 20 = 24x + 16$ $15x - 6x - 24x = 16 + 15 + 2 - 20$ $-15x = 13$ $\Rightarrow x = -\frac{13}{15}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{13}{15} \right\}$.</p>

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $(2x-5)(3x+7) = 4x^2 - 25$

b) $3x^2 - 11x + 6 = 0$

c) $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$

d) $(x+1)^3 - 4(x+1) = 0$

e) $\frac{x-13}{87} + \frac{x-27}{73} + \frac{x-67}{33} + \frac{x-73}{27} = 4$

f) $\frac{x-95}{5} + \frac{x-80}{10} + \frac{x-76}{8} + \frac{x-48}{13} = 10$

Lời giải

<p>a) $(2x-5)(3x+7) = 4x^2 - 25$ $(2x-5)(3x+7) = (2x-5)(2x+5)$ $(2x-5)(3x+7-2x-5) = 0$ $(2x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -2 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -2; \frac{5}{2} \right\}.$</p>	<p>b) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ $3x^2 - 9x - 2x + 6 = 0$ $3x(x-3) - 2(x-3) = 0$ $(x-3)(3x-2) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 3x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 3; \frac{2}{3} \right\}$</p>
<p>c) $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$ $2x^2(x+3) = x(x+3)$ $(x+3)(2x^2-x) = 0$ $x(x+3)(2x-1) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ -3; 0; \frac{1}{2} \right\}.$</p>	<p>d) $(x+1)^3 - 4(x+1) = 0$ $(x+1)[(x+1)^2 - 4] = 0$ $(x+1)(x+1-2)(x+1+2) = 0$ $(x+1)(x-1)(x+3) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-3; -1; 1\}.$</p>

$$e) \frac{x-13}{87} + \frac{x-27}{73} + \frac{x-67}{33} + \frac{x-73}{27} = 4$$

$$\left(\frac{x-13}{87} - 1\right) + \left(\frac{x-27}{73} - 1\right) + \left(\frac{x-67}{33} - 1\right) + \left(\frac{x-73}{27} - 1\right) = 0$$

$$\frac{x-100}{87} + \frac{x-100}{73} + \frac{x-100}{33} + \frac{x-100}{27} = 0$$

$$(x-100) \cdot \left(\frac{1}{87} + \frac{1}{73} + \frac{1}{33} + \frac{1}{27}\right) = 0$$

$$x-100 = 0$$

$$x = 100$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{100\}$.

$$f) \frac{x-95}{5} + \frac{x-80}{10} + \frac{x-76}{8} + \frac{x-48}{13} = 10$$

$$\left(\frac{x-95}{5} - 1\right) + \left(\frac{x-80}{10} - 2\right) + \left(\frac{x-76}{8} - 3\right) + \left(\frac{x-48}{13} - 4\right) = 0$$

$$\frac{x-100}{5} + \frac{x-100}{10} + \frac{x-100}{8} + \frac{x-100}{13} = 0$$

$$(x-100) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13}\right) = 0$$

$$\text{Vi } \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} \neq 0 \Rightarrow x-100 = 0 \Rightarrow x = 100$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{100\}$.

Bài 8. Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình là 40 km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hàng trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình là 30 km/h. Tính quãng đường AB, biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.

Lời giải

Gọi x là thời gian ô tô đi từ A đến B (giờ, $x > 0$).

Quãng đường ô tô đi từ A đến B là $40x$ (km)

Xe xuất phát từ 6 giờ và về đến điểm xuất phát lúc 10 giờ, trong đó có 30 phút = 0,5 giờ nghỉ.

Suy ra thời gian ô tô đi từ B về A là: $4 - 0,5 - x = 3,5$ (giờ).

Quãng đường ô tô đi từ B về A là $30(3,5 - x)$ (km)

Ta có phương trình

$$40x = 30 \cdot (3,5 - x)$$

$$40x = 105 - 30x$$

$$70x = 105$$

$$x = 1,5$$

Vậy độ dài quãng đường AB là: $40 \cdot 1,5 = 60$ (km).

Bài 9. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng là 8m. Nếu tăng chiều dài thêm 12m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích hình chữ nhật tăng gấp đôi. Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh vườn hình chữ nhật là x (m) ($x > 0$).

Khi đó chiều dài mảnh vườn hình chữ nhật là $x + 8$ (m).

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu là $x.(x + 8)(m^2)$

Nếu tăng chiều dài thêm 12m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích mảnh vườn là:

$$(x + 3).(x + 8 + 12) = (x + 3).(x + 20)(m^2)$$

Ta có phương trình:

$$(x + 3).(x + 20) = 2x(x + 8)$$

$$x^2 + 23x + 60 = 2x^2 + 16x$$

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$x(x - 12) + 5(x - 12) = 0$$

$$(x + 5)(x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5(l) \\ x = 12(t / m) \end{cases}$$

Do đó mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu có chiều rộng là 12m, chiều dài là $12 + 8 = 20$ (m)

Vậy chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn đó lần lượt là 12m và 20m.

Bài 10. Hai tổ sản xuất phải dệt 140 áo len. Trong thực tế tổ 1 đã vượt mức 10% kế hoạch của mình, tổ 2 vượt mức 5% kế hoạch của mình nên cả hai tổ đã dệt được 150 áo len. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải dệt được bao nhiêu áo len?

Lời giải

Gọi số áo len tổ 1 và tổ 2 phải dệt là x và $140 - x$ (chiếc) ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số áo len thực tế tổ 1 đã dệt được là $x + 10\%x = 1,1x$ (chiếc)

Số áo len thực tế tổ 2 đã dệt được là $(140 - x) + 5\%(140 - x) = 1,05(140 - x)$ (chiếc)

Vì cả hai tổ đã cả hai tổ đã dệt được 150 áo len nên ta có phương trình:

$$1,1x + 1,05.(140 - x) = 150$$

$$0,05x + 147 = 150$$

$$0,05x = 3$$

$$x = 60 (t/m)$$

Vậy theo kế hoạch tổ 1 phải dệt 60 áo len và tổ 2 phải dệt 80 áo len.

Bài 11. Một lâm trường lập kế hoạch trồng một số ha rừng, theo đó mỗi tuần lâm trường phải trồng 15ha. Trên thực tế nhờ cải tiến kĩ thuật, lâm trường đã trồng được 20ha mỗi tuần. Do đó lâm trường không chỉ hoàn thành kế hoạch trước 1 tuần mà còn trồng thêm được 5ha rừng. Hỏi theo kế hoạch thì lâm trường phải trồng bao nhiêu ha rừng?

Lời giải

Gọi x (ha) là diện tích rừng lâm trường phải trồng theo dự định. Điều kiện: $x > 0$.

Thời gian lâm trường trồng xong x (ha) rừng theo dự định là $\frac{x}{15}$ (tuần).

Diện tích rừng lâm trường trồng được thực tế là: $x+5$ (ha).

Thời gian lâm trường trồng xong $x+5$ (ha) rừng theo thực tế là $\frac{x+5}{20}$ (tuần).

Vì lâm trường hoàn thành trước kế hoạch 1 tuần nên ta có phương trình

$$\frac{x}{15} - \frac{x+5}{20} = 1$$

$$\frac{x}{15} - \frac{x}{20} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{x}{60} = \frac{5}{4}$$

$$x = 75 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy theo kế hoạch, lâm trường phải trồng 75 ha rừng.

Bài 12. Cho hàm số $y = (m-2)x + m - 1$

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

c) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $B(3; -2)$

Lời giải

a) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2

\Rightarrow đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 0)$

Thay $x = 2; y = 0$ vào hàm số $y = (m-2)x + m - 1$, ta được

$$0 = (m-2) \cdot 2 + m - 1 \Rightarrow 2m - 4 + m - 1 = 0 \Rightarrow 3m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{3}$$

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

\Rightarrow đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$

Thay $x = 0; y = 2$ vào hàm số $y = (m-2)x + m - 1$, ta được

$$2 = (m-2) \cdot 0 + m - 1 \Rightarrow m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3$$

$$\text{Vậy } m = 3$$

c) Vì đồ thị hàm số đã cho đi qua $B(3; -2)$ nên thay $x = 3; y = -2$ vào hàm số $y = (m-2)x + m - 1$

ta được:

$$\begin{aligned} -2 &= (m-2) \cdot 3 + m - 1 \Rightarrow -2 = 3m - 6 + m - 1 \\ &\Rightarrow -2 = 4m - 7 \\ &\Rightarrow 4m = 5 \\ &\Rightarrow m = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{5}{4}$

Bài 13. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

a) Vẽ hai đường thẳng đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ và chứng minh rằng chúng cắt nhau tại điểm A nằm trên trục hoành.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$ với trục tung theo thứ tự là B và C .

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông, từ đó suy ra hai đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$ vuông góc với nhau.

Lời giải

a) (d₁): $y = 2x + 4$

x	0	-2
y	4	0

Vậy đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ đi qua hai điểm

$(0; 4)$ và $(-2; 0)$

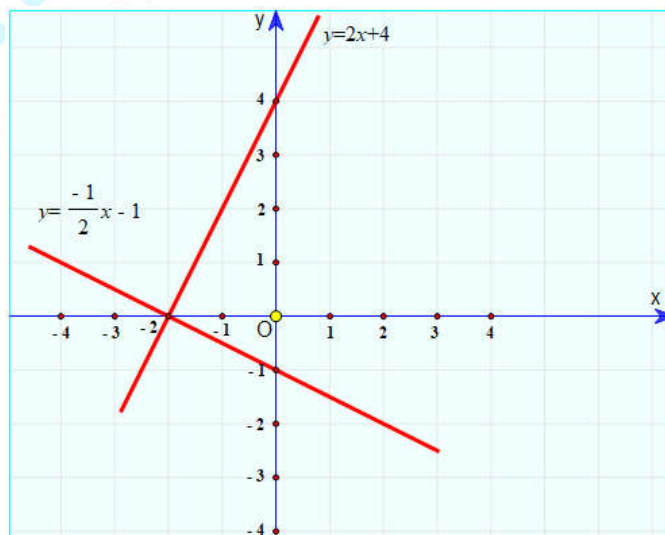
(d₂): $y = -\frac{1}{2}x - 1$

x	0	-2
y	-1	0

Vậy đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x - 1$ đi qua hai điểm $(0; -1)$ và $(-2; 0)$

Quan sát đồ thị hàm số, ta thấy các đường thẳng $y = 2x + 4$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$ cắt nhau tại điểm $A(-2; 0)$

nằm trên trục Ox .



b) Theo câu a, các đường thẳng

$$y = 2x + 4 \text{ và } y = -\frac{1}{2}x - 1 \text{ cắt trục tung}$$

tại hai điểm B và C

$$\Rightarrow B(0; 4) \quad ; \quad C(0; -1)$$

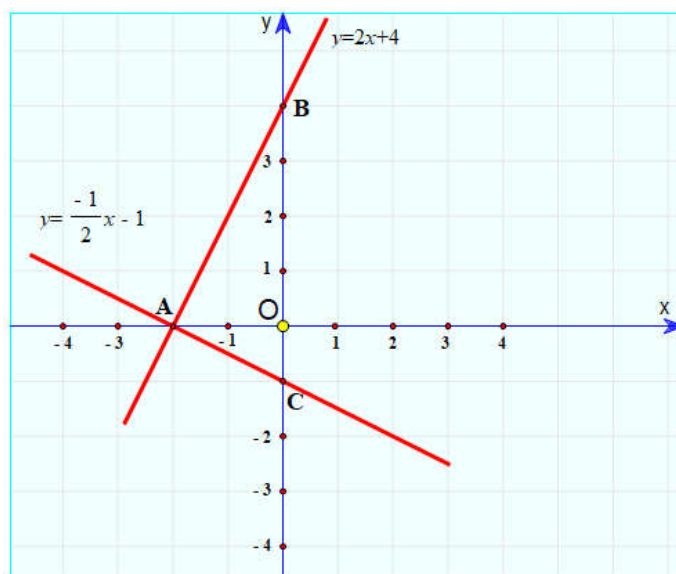
Theo câu a, ta có:

$$BC = |4| + |-1| = 5$$

$$OB = |4| = 4$$

$$OC = |-1| = 1$$

$$OA = |-2| = 2$$



Xét $\triangle OAB$ vuông tại O:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \text{ (Định lí Pythagore)}$$

$$\text{Thay số: } AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

Xét $\triangle OAC$ vuông tại O: $AC^2 = OA^2 + OC^2$ (Định lí Pythagore)

$$\text{Thay số: } AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = 20 + 5 = 25; \quad BC^2 = 5^2 = 25 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại A (Định lí Pythagore đảo)} \Rightarrow (d_1) \perp (d_2) \text{ tại A}$$

Bài 14. Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần, tính xác suất của biến cố:

a) Số chấm xuất hiện ở cả hai lần là chẵn

b) Số chấm xuất hiện ở lần đầu tiên là lẻ, số chấm xuất hiện ở lần thứ hai lớn hơn 4

c) Tổng số chấm xuất hiện ở cả hai lần lớn hơn 5

Lời giải

Một con xúc xắc có 6 mặt nên mỗi lần tung xúc xắc sẽ có 6 kết quả có thể xảy ra về số chấm nhận được là 1; 2; 3; 4; 5; 6 chấm.

Do đó tung con xúc xắc 2 lần sẽ có: $6 \cdot 6 = 36$ kết quả có thể xảy ra.

Vì con xúc xắc cân đối và đồng chất nên 36 kết quả này là đồng khả năng.

a) Xét biến cố A: “Số chấm xuất hiện ở cả hai lần là chẵn”

Có 9 kết quả thuận lợi để biến cố A xảy ra là: (2;2); (2;4); (2;6); (4;2); (4;4); (4;6); (6;2); (6;4); (6;6)

$$\text{Do đó } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Xét biến cố B: “Số chấm xuất hiện ở lần đầu tiên là lẻ, số chấm xuất hiện ở lần thứ hai lớn hơn 4”

Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố B xảy ra là: (1;5); (1;6); (3;5); (3;6); (5;5); (5;6)

$$\text{Do đó } P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) Xét biến cố C: “Tổng số chấm xuất hiện ở cả hai lần lớn hơn 5”

Có 26 kết quả thuận lợi cho biến cố C xảy ra là:

(1;5); (1;6);

(2;4); (2;5); (2;6);

(3;3); (3;4); (3;5); (3;6);

(4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6);

(5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6);

(6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6).

$$\text{Do đó } P(C) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

Bài 15. Thống kê số vụ tai nạn giao thông trong tháng 9 của một thành phố thu được kết quả như bảng sau:

Số vụ tai nạn giao thông trong một ngày	0	1	2	3	4	> 4
Số ngày	4	7	9	6	2	2

a) Hãy tính xác suất thực nghiệm, từ đó ước lượng xác suất của các biến cố:

Biến cố A: “Một ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn”

Biến cố B: “Một ngày có nhiều hơn 2 vụ tai nạn”

b) Hãy dự đoán xem trong ba tháng cuối năm (10; 11; 12) tại thành phố đó có bao nhiêu ngày có không quá 3 vụ tai nạn giao thông?

Giải

a) Thống kê số vụ tai nạn giao thông trong 30 ngày của tháng 9, ta có:

Số ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn là: $4 + 7 + 9 = 20$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của biến cố A là: $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Do đó $P(A) \approx \frac{2}{3}$

Số ngày có nhiều hơn 2 vụ tai nạn là: $6 + 2 + 2 = 10$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của biến cố B là: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Do đó $P(B) \approx \frac{1}{3}$

b) Xét biến cố C: “Một ngày có không quá 3 vụ tai nạn giao thông”

Trong số 30 ngày của tháng 9, số ngày có không quá 3 vụ tai nạn giao thông là:

$$4 + 7 + 9 + 6 = 26 \text{ (ngày)}$$

Xác suất thực nghiệm của biến cố C là: $\frac{26}{30} = \frac{13}{15}$

Do đó $P(C) \approx \frac{13}{15}$

Tổng số ngày của ba tháng cuối năm (10; 11; 12) là: $31 + 30 + 31 = 92$ (ngày)

Gọi h là số ngày có không quá 3 vụ tai nạn giao thông trong ba tháng cuối năm.

Vì $P(C) \approx \frac{13}{15} \Rightarrow \frac{h}{92} \approx \frac{13}{15} \Rightarrow h \approx 92 \cdot \frac{13}{15} \approx 80$

Vậy trong ba tháng cuối năm ước tính có khoảng 80 ngày có không quá 3 vụ tai nạn giao thông.

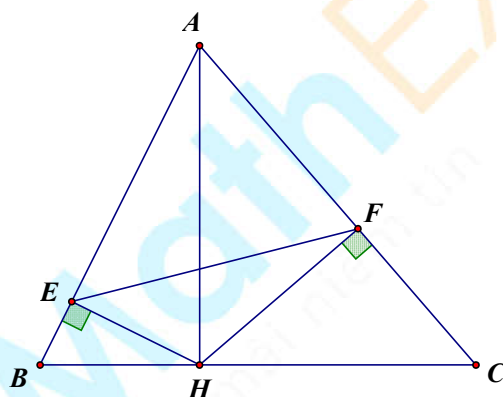
Bài 16. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$ ($E \in AB$), $HF \perp AC$ ($F \in AC$).

a) Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AHB$ từ đó suy ra $AH^2 = AE \cdot AB$

b) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

c) Cho chu vi các $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$ lần lượt là 20cm và 30cm . Tính diện tích $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$ biết diện tích $\triangle ACB$ lớn hơn diện tích $\triangle AEF$ là 25cm^2 .

Lời giải



a) Xét $\triangle AEH$ và $\triangle AHB$ có

\widehat{BAH} chung và $\widehat{AEH} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle AHB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB$ (1)

b) Chứng minh tương tự $\triangle AHF \sim \triangle ACH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AF}{AH} \Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC$ (2)

c) Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$ có: \widehat{EAF} chung và $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{CB} = \frac{P_{AEF}}{P_{ACB}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \text{ (tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ACB}} = \left(\frac{EF}{CB}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \text{ (tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng)}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{S_{AEF}}{4} = \frac{S_{ACB}}{9} = \frac{S_{ACB} - S_{AEF}}{9 - 4} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = 5.4 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}; S_{ACB} = 5.9 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy } S_{AEF} = 20 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ và } S_{ACB} = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD và CE cắt nhau tại H

a) Chứng minh $AD.AC = AE.AB$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$.

b) Chứng minh $BE.BA + CD.CA = BC^2$.

c) Chứng minh $\triangle HED \sim \triangle HBC$.

d) Khi tam giác ABC đều, tính tỉ số diện tích tam giác HED và tam giác ABC.

Lời giải

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có :

$$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ \text{ (gt)}; \widehat{A} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AC.AD = AB.AE$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ và } \triangle ADE \text{ có : } \widehat{A} \text{ chung ; } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADE}$$

b) Nối AH cắt BC tại F

Xét tam giác ABC có BD và CE là đường cao cắt nhau tại H

Khi đó H là trực tâm tam giác ABC

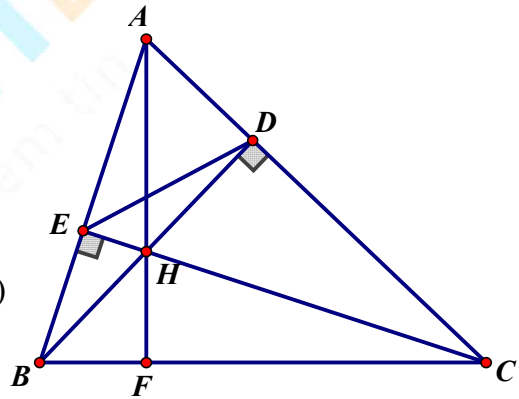
$$\Rightarrow AH \perp BC \text{ hay } AF \perp BC$$

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle CBE$ có \widehat{ABC} chung và $\widehat{AFB} = \widehat{CEB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle CBE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow AB.BE = BF.BC \text{ (1)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \triangle AFC \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{FC}{DC} \Leftrightarrow AC.DC = FC.CB \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB.BE + AC.CD = BF.BC + CF.BC = BC(BF + CF) = BC^2$$



c) Ta có $\widehat{DBC} = 90^\circ - \widehat{C}$; $\widehat{DEH} = 90^\circ - \widehat{AED}$

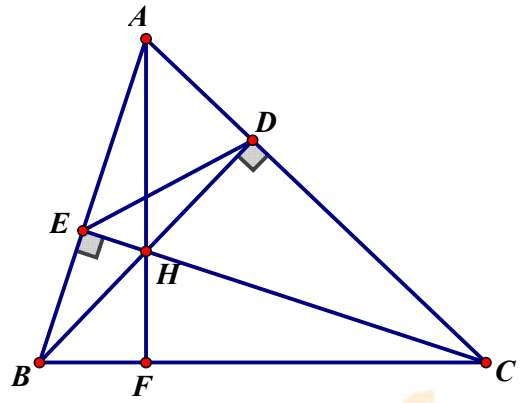
Mà $\widehat{C} = \widehat{AED}$ (do $\triangle ABC \sim \triangle ADE$)

$$\Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{DEH}$$

Xét tam $\triangle HBC$ và $\triangle HED$ có:

$$\widehat{HBC} = \widehat{DEH} \text{ (cmt)}; \widehat{BHC} = \widehat{EHD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle HBC \sim \triangle HED \text{ (g.g)}$$



d) Khi tam giác ABC đều thì $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$

Vì tam giác ABC đều có BD, CE là đường cao đồng thời là đường trung tuyến, phân giác của tam giác ABC. Mặt khác BD cắt CE tại H. Suy ra H là trọng tâm tam giác ABC

Ta có $\widehat{HBC} = \widehat{HCB} = 30^\circ$. Suy ra tam giác BHC cân tại H

$$\text{Ta có } \frac{S_{\triangle HBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HF \cdot BC}{\frac{1}{2} AF \cdot BC} = \frac{HF}{AF} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\triangle HBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

$$\text{Vì } \triangle HED \sim \triangle HBC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HE}{HC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle HED}}{S_{\triangle HBC}} = \left(\frac{HE}{HB}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle HED} = \frac{1}{4} S_{\triangle HBC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC}$$

Bài 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với BD , d cắt tia BC tại E .

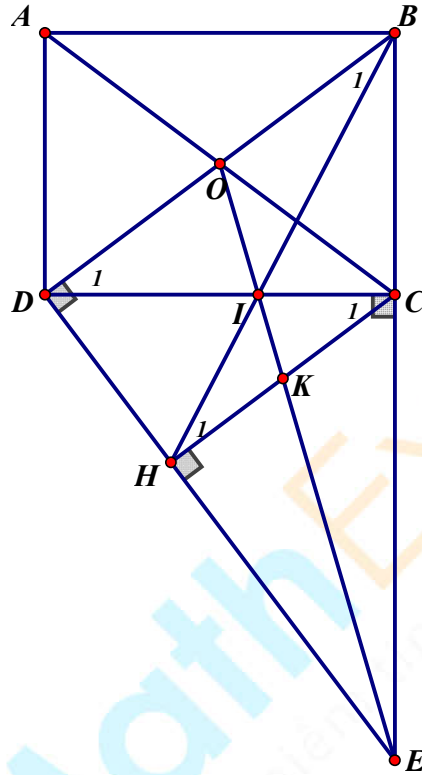
a) Chứng minh rằng: $\triangle BDE \sim \triangle DCE$.

b) Kẻ $CH \perp DE$ tại H . Chứng minh rằng: $DC^2 = CH \cdot DB$

c) Gọi K là giao điểm của OE và HC . Chứng minh rằng: K là trung điểm của HC và tính tỉ số diện tích của $\triangle EHC$ và diện tích $\triangle EDB$

d) Chứng minh rằng: Ba đường thẳng OE , CD , BH đồng quy

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\triangle BDE \sim \triangle DCE$.

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle DCE$ có:

$$\widehat{BDE} = \widehat{DCE} = 90^\circ; \widehat{DEB} \text{ chung}$$

$\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle DCE$ (g.g)

b) Chứng minh rằng: $DC^2 = CH \cdot DB$.

Chứng minh được: $CH \parallel BD \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (so le trong)

Chứng minh được: $\triangle DHC \sim \triangle BCD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{CH}{DC} \Rightarrow DC^2 = CH \cdot DB$$

c) Chứng minh: K là trung điểm của HC và tính $\frac{S_{EHC}}{S_{EDB}}$

Áp dụng hệ quả định lý Ta-let trong $\triangle BOE, \triangle DOE$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{KC}{OB} = \frac{KE}{OE} \\ \frac{KH}{OD} = \frac{EK}{OE} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{KC}{OB} = \frac{KH}{OD}$$

Mà $OB = OD \Rightarrow KH = KC \Rightarrow K$ là trung điểm HC

Chứng minh được $\triangle EHC \sim \triangle EDB$

$$\Rightarrow \frac{S_{EHC}}{S_{EDB}} = \left(\frac{HC}{DB}\right)^2 = \left(\frac{DC^2}{DB \cdot DB}\right)^2 = \left(\frac{DC}{DB}\right)^4 = \left(\frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}}\right)^4 = \left(\frac{8}{10}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$$

d) Chứng minh: Ba đường thẳng OE , CD , BH đồng quy

Gọi I là giao điểm của BH và CD

Ta có $HC \parallel BD$, theo hệ quả của Định lý Ta-let

$$\frac{IH}{IB} = \frac{HC}{BD} = \frac{2HK}{2OB} \Rightarrow \frac{HI}{IB} = \frac{HK}{OB}$$

Xét $\triangle HIK$ và $\triangle BIO$ có:

$$\frac{HI}{IB} = \frac{HK}{OB} \text{ (cmt) và } \widehat{B}_1 = \widehat{H}_1 \text{ (so le trong)}$$

$\Rightarrow \triangle HIK$ đồng dạng $\triangle BIO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{HIK} = \widehat{BIO} \Rightarrow \widehat{HIK} + \widehat{HIO} = 180^\circ$

$\Rightarrow O, I, K$ thẳng hàng hay 3 đường thẳng OE , DC , BH đồng quy.

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

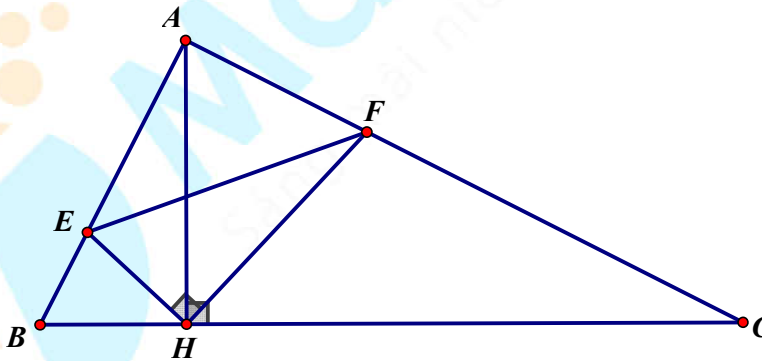
b) Cho $BH = 4\text{cm}$; $BC = 13\text{cm}$. Tính AH và AB

c) Gọi E là một điểm tùy ý trên AB , đường thẳng qua H và vuông góc với HE cắt cạnh AC tại F .

Chứng minh $AE \cdot CH = AH \cdot FC$

d) Xác định vị trí của E trên AB để đoạn thẳng EF có độ dài ngắn nhất

Lời giải



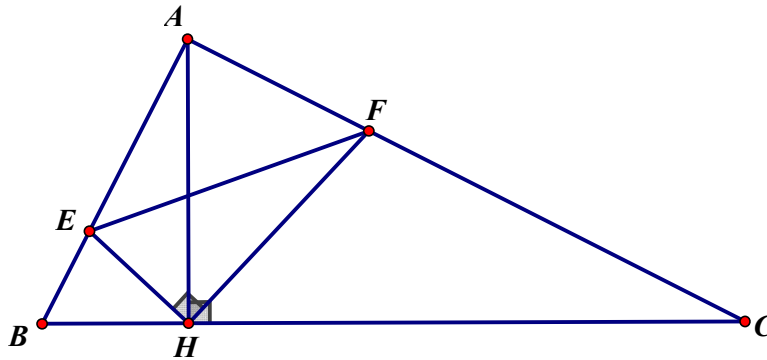
a) Tam giác ABC vuông tại A (gt) nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$

AH là đường cao trong tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle HBA$ có:

$$\widehat{BAC} = \widehat{BHA} = 90^\circ \text{ và } \widehat{ABC} \text{ chung}$$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HBA$ (g.g).



b) $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{13}{AB} \Rightarrow AB^2 = 4.13 = 52 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H ($\widehat{AHB} = 90^\circ$)

Theo định lý Py-ta-go ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = 52 - 16 = 36 \\ \Rightarrow AH = 6 \text{ cm}.$$

c) $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{ACB}$ (2 góc tương ứng)

$$EH \perp HF \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{EHF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EHA} + \widehat{AHF} = 90^\circ$$

Mà $\widehat{AHC} = 90^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AHF} + \widehat{FHC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{FHC} \text{ (cùng phụ } \widehat{AHF} \text{)}$$

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle CHF$ có:

$$\widehat{HAB} = \widehat{ACB} \text{ (cmt)}; \widehat{EHA} = \widehat{FHC} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle CHF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow AE \cdot CH = AH \cdot CF.$$

d) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAH$ có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ; \widehat{ABH} = \widehat{HAC} \text{ (cùng phụ } \widehat{BAH} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CAH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \triangle AHE \sim \triangle CHF \text{ (câu c)} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{EH}{FH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{EH}{FH}$$

$$\text{Xét } \triangle HEF \text{ và } \triangle HBA \text{ có: } \widehat{EHF} = \widehat{AHB} = 90^\circ; \frac{BH}{AH} = \frac{EH}{FH}$$

$$\Rightarrow \triangle HEF \sim \triangle HBA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{EF}{BA} = \frac{HE}{HB}$$

Mà $AB; HB$ không đổi nên để đoạn EF ngắn nhất thì đoạn HE ngắn nhất. Khi đó $HE \perp AB$.

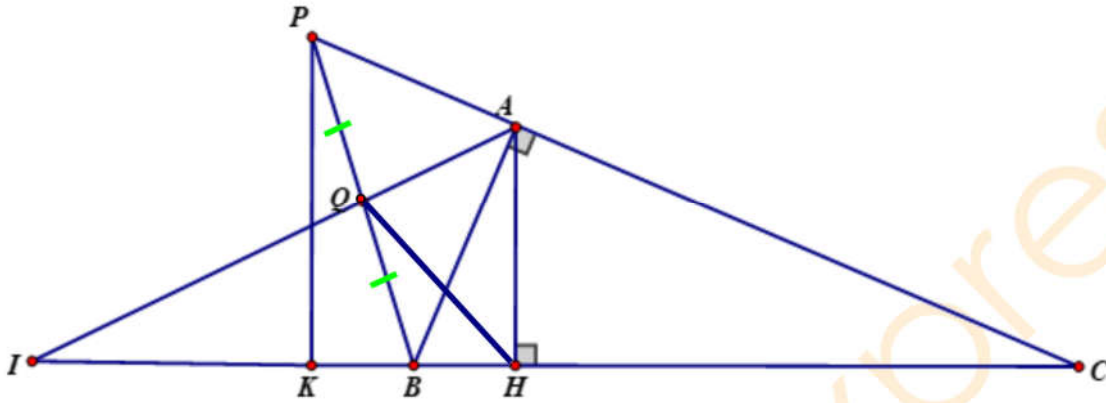
Bài 20. Cho ΔABC vuông tại A; $AB < AC$. Vẽ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc tia đối của tia BC sao cho $KH = HA$. Qua K vẽ đường thẳng song song với AH cắt AC tại P. Gọi Q là trung điểm của BP; AQ cắt BC tại I. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$$

$$b) \Delta BHQ \sim \Delta BPC$$

$$c) \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$$

Lời giải



a) Xét ΔAHB và ΔCHA có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{CHA} = 90^\circ; \widehat{ABH} = \widehat{HAC} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAH} \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta CHA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{HB}{AH} = \frac{AH}{HC} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{HB}{AH} \cdot \frac{AH}{HC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \text{ (dpcm)}$$

b) Chứng minh $\Delta BHQ \sim \Delta BPC$:

$$\text{Ta có: } AH \parallel KP \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{KH}{HC} = \frac{AP}{AC} \text{ (định lí Thalès)} \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{AP}{AC} \text{ (vì } KH = AH \text{ theo gt)}$$

$$\text{Mà } \Delta AHB \sim \Delta CHA \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AP = AB \Rightarrow \Delta ABP \text{ vuông cân tại A}$$

$$\text{Mà Q là trung điểm của BP (gt)} \Rightarrow AQ \perp BP \Rightarrow \Delta AQB \sim \Delta PAB \text{ (g.g)}$$

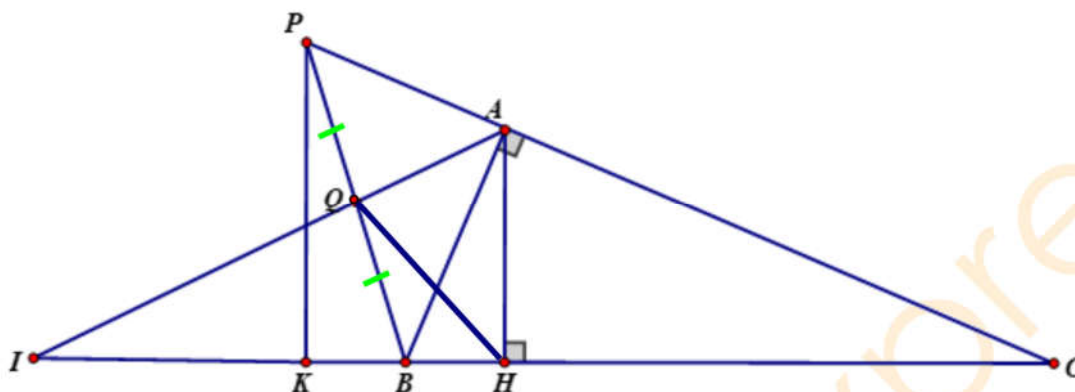
$$\Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{BQ}{AB} \Rightarrow AB^2 = BQ \cdot BP$$

$$\text{Mặt khác } \Delta AHB \sim \Delta CAB \text{ (g.g)} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC$$

$$\text{Do đó } BQ \cdot BP = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}$$

Xét $\triangle BHQ$ và $\triangle BPC$ có: \widehat{PBC} chung; $\frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle BHQ \sim \triangle BPC$ (c.g.c)

c) Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$



$$\text{Ta có: } \frac{AB}{AC} = \frac{HB}{AH} \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB}$$

Vì AQ là phân giác của \widehat{BAP} ($\triangle ABP$ vuông cân tại A, Q là trung điểm của BP)

$\Rightarrow AI$ là đường phân giác ngoài của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB}$$

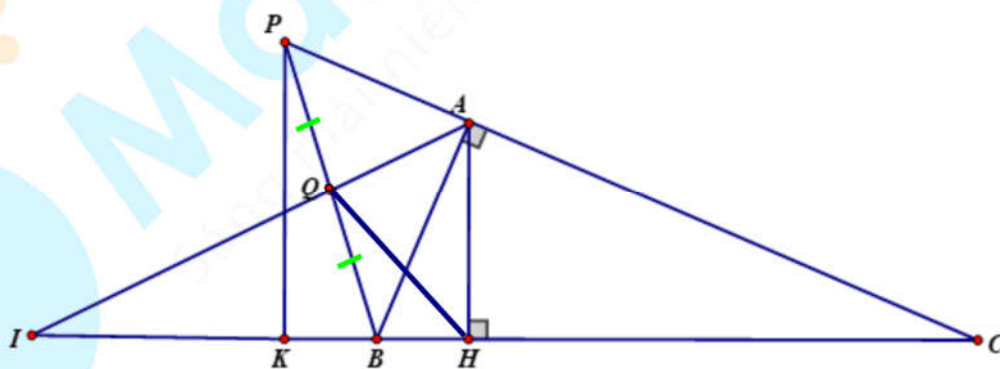
$$\Rightarrow \frac{IB + BC}{IB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Mà } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$$



MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO**Bài 21.** Giải các phương trình sau:

a) $(7x-1)(7x+2)^2(7x+5) = 112$

b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

Lời giảia) Đặt $7x+2 = t$ khi đó phương trình trở thành:

$$(t-3).t^2.(t+3) = 112$$

$$t^2(t^2 - 9) = 112$$

$$t^4 - 9t^2 - 112 = 0$$

$$t^4 - 16t^2 + 7t^2 - 112 = 0$$

$$t^2(t^2 - 16) + 7(t^2 - 16) = 0$$

$$(t^2 + 7)(t^2 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 7 = 0 \text{ hoặc } t^2 - 16 = 0$$

Xét hai trường hợp:

TH1: $t^2 + 7 = 0 \Rightarrow t^2 = -7$ (loại vì $t^2 \geq 0$ với mọi x)

TH2: $t^2 - 16 = 0 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$ hoặc $t = -4$

Với $t = 4 \Rightarrow 7x + 2 = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

Với $t = -4 \Rightarrow 7x + 2 = -4 \Rightarrow x = \frac{-6}{7}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{2}{7}; \frac{-6}{7} \right\}$

b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

Nhận xét: $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia cả 2 vế cho x^2

Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9$$

$$\left(2x - 3 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(2x + 5 + \frac{1}{x} \right) = 9$$

$$\text{Đặt } 2x + \frac{1}{x} + 1 = t \Rightarrow (t-4)(t+4) = 9 \Rightarrow t^2 - 16 = 9 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -5 \end{cases}$$

$$TH1: t = 5 \Rightarrow 2x + \frac{1}{x} + 1 = 5 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \end{cases}$$

$$TH2: t = -5 \Rightarrow 2x + \frac{1}{x} + 1 = -5 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7}{4}} - \frac{3}{2} \\ x = -\sqrt{\frac{7}{4}} - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} + 1; -\sqrt{\frac{1}{2}} + 1; \sqrt{\frac{7}{4}} - \frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{7}{4}} - \frac{3}{2} \right\}$.

Bài 22.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau: $Q = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $M = \frac{8x + 12}{x^2 + 4}$

Lời giải

a) Với $x \neq 1$ ta có:

$$Q = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x-1) + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1}{(x-1)^2} = 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Đặt $\frac{1}{x-1} = t$ ta có:

$$3 - 2t + t^2 = (t^2 - 2t + 1) + 2 = (t-1)^2 + 2 \geq 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $(t-1)^2 = 0 \Rightarrow t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn $x \neq 1$)

Vậy $\text{Min } Q = 2$ tại $x = 2$

b) Xét $M + 1 = \frac{8x + 12}{x^2 + 4} + 1 = \frac{8x + 12 + x^2 + 4}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 4} = \frac{(x+4)^2}{x^2 + 4} \geq 0$ với mọi x

$\Rightarrow M \geq -1$ với mọi x

Dấu "=" xảy ra khi $(x+4)^2 = 0 \Rightarrow x = -4$

Vậy $\text{Min } M = -1$ khi $x = -4$

Xét $M - 4 = \frac{8x + 12}{x^2 + 4} - 4 = \frac{-4x^2 + 8x - 4}{x^2 + 4} = \frac{-4(x-1)^2}{x^2 + 4} \leq 0$ với mọi x

$\Rightarrow M \leq 4$ với mọi x

Dấu "=" xảy ra khi $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy $\text{Max } M = 4$ khi $x = 1$

Bài 23.

a) Cho ba số a, b, c phân biệt và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính: $Q = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$

b) Cho $(x + y)^3 + x + y = x^3 y^3 + xy$. Tính $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Lời giải

a) Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a = b = c \text{ (loại vì } a, b, c \text{ phân biệt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0$$

Do đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} \\ &= \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - (a+b)^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - (c+a)^2} \\ &= \frac{ab^2}{-2ab} + \frac{bc^2}{-2bc} + \frac{ca^2}{-2ca} \\ &= \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} \\ &= \frac{b+c+a}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \end{aligned}$$

$$b) (x+y)^3 + x+y = x^3y^3 + xy$$

Đặt $x+y=a$; $xy=b$. Ta có:

$$a^3 + a = b^3 + b$$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 + a - b = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$$

$$\text{Vì } a^2 + ab + b^2 = \left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} \right) + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 + 1 \geq 1 > 0$$

$$\text{Do đó từ } (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{a}{b} = 1$$

Vậy $P=1$

Bài 24.

- Tìm số tự nhiên x sao cho $x^2 + 2x + 12$ là số chính phương.
- Tìm tất cả các số nguyên tố q , sao cho tồn tại số nguyên dương n để $n^2 + 22q$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.
- Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng $ab \vdots a+b+c$.

Lời giải

a) Vì $x^2 + 2x + 12$ là số chính phương nên đặt $x^2 + 2x + 12 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + 11 = k^2$$

$$\Rightarrow k^2 - (x+1)^2 = 11$$

$$\Rightarrow (k+x+1)(k-x-1) = 11$$

Vì $k+x+1 > k-x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+x+1=11 \\ k-x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+x=10 \\ k-x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=10-x \\ k=x+2 \end{cases} \Rightarrow 10-x=x+2 \Rightarrow x=4$$

Thử lại: Với $x=4$ thì $x^2 + 2x + 12 = 4^2 + 2 \cdot 4 + 12 = 36 = 6^2$ là một số chính phương.

Vậy $x=4$

b) Đặt $n^2 + 22q = 11^a$.

Trường hợp 1: Nếu $a = 1$ thì $n^2 + 22q = 11$.

Vì $n^2 \geq 1$; $q \geq 2$ nên $n^2 + 22q > 11$ (loại).

Trường hợp 2: Nếu $a > 1 \Rightarrow a \geq 2$.

Ta có: $\begin{cases} 22q : 11 \\ 11^a : 11 \end{cases} \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n : 11 \Rightarrow n^2 : 11^2$.

Mà $11^a : 11^2$ (do $a \geq 2$) $\Rightarrow 22q : 11^2 \Rightarrow q : 11 \Rightarrow q = 11$ (do q là số nguyên tố).

Với $q = 11$ thì $n^2 + 242 = 11^a$.

Nhận thấy cặp $(n; a) = (33; 3)$ thỏa mãn $n^2 + 242 = 11^a$ nên với $q = 11$ thì tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $q = 11$.

c) Ta có: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c) = 2ab$$

$$\Rightarrow ab = \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2} = \frac{a+b-c}{2} \cdot (a+b+c) \quad (1)$$

$$\text{Vì } (a+b+c) - (a+b-c) = 2c$$

$$\Rightarrow a+b+c \text{ và } a+b-c \text{ cùng tính chẵn lẻ}$$

$$\text{Mà } (a+b+c)(a+b-c) = 2ab$$

$$\Rightarrow a+b+c \text{ và } a+b-c \text{ cùng chẵn}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-c}{2} \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\text{Từ } (1)(2) \Rightarrow ab : (a+b+c)$$

$$\text{Vậy } ab : a+b+c$$

Bài 25.

a) Cho $x > 1$; $y > 1$ và $x + y = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 3x + 4y + \frac{5}{x-1} + \frac{9}{y-1}$.

b) Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng $N = \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq \frac{3}{4}$

c) Cho $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\begin{aligned} S &= 3x + 4y + \frac{5}{x-1} + \frac{9}{y-1} = \frac{5(x-1)}{4} + \frac{5}{x-1} + \frac{9(y-1)}{4} + \frac{9}{y-1} + \frac{7}{4}(x+y) + \frac{7}{2} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{5(x-1)}{4} \cdot \frac{5}{x-1}} + 2\sqrt{\frac{9(y-1)}{4} \cdot \frac{9}{y-1}} + \frac{7}{4} \cdot 6 + \frac{7}{2} = 5 + 9 + \frac{21}{2} + \frac{7}{2} = 28 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 3$.

Vậy GTNN của $S=28$ khi $x = y = 3$.

b) Ta có: $\frac{a^2}{a+2b^2} = \frac{a(a+2b^2) - 2ab^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+2b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$\begin{aligned} a + 2b^2 &\geq 2\sqrt{a \cdot 2b^2} = 2\sqrt{2} \cdot b\sqrt{a} \\ \Rightarrow \frac{2ab^2}{a+2b^2} &\leq \frac{2ab^2}{2\sqrt{2} \cdot b\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = b \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

Lại có: $\sqrt{a \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{2ab^2}{a+2b^2} \leq b \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{ab}{2} + \frac{b}{4}$$

$$\Rightarrow a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{ab}{2} - \frac{b}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{ab}{2} - \frac{b}{4}$$

Tương tự: $\frac{b^2}{b+2c^2} \geq b - \frac{bc}{2} - \frac{c}{4}$; $\frac{c^2}{c+2a^2} \geq c - \frac{ca}{2} - \frac{a}{4}$

$$\Rightarrow N \geq a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2} - \frac{a + b + c}{4} \Rightarrow N \geq \frac{9}{8} - \frac{ab + bc + ca}{2}$$

$$\text{Mà } 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow ab + bc + ca \leq \frac{3}{4} \Rightarrow N \geq \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

c) Dự đoán $\text{Max } S = 18$ tại $(a; b; c) = (1; 1; 4)$ và các hoán vị.

$$C\acute{o} \quad S = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 18$$

Ta sẽ đánh giá $a+b+c$ qua $ab+bc+ca$

Vì $a \geq 1; b \geq 1; c \geq 1$ nên

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Rightarrow a + b \leq ab + 1$$

$$(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow b + c \leq bc + 1$$

$$(c-1)(a-1) \geq 0 \Rightarrow a + c \leq ac + 1$$

$$\text{Nên } 2(a+b+c) \leq ab+bc+ca+3=12$$

$$\Rightarrow a+b+c \leq 6 \Rightarrow S \leq 6^2 - 18 = 18$$

Dấu “=” xảy ra khi $(a, b, c) = (1, 1, 4)$ và các hoán vị.

Vậy $\text{Max } S = 18$ khi $(a, b, c) = (1; 1; 4)$ và các hoán vị.



MathExpress
Sáng mãi niềm tin