

## ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 6

### I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Tập hợp số tự nhiên. Các phép toán trong tập hợp số tự nhiên: Cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa;
2. Tính chất chia hết trong tập hợp số tự nhiên:  
Tính chất chia hết, dấu hiệu chia hết, số nguyên tố - hợp số, ước và bội, ƯCLN và BCNN;
3. Tập hợp số nguyên. Các phép toán trong tập hợp số nguyên: Cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa;
4. Ước và bội của số nguyên;
5. Phân số. Các phép toán về phân số;
6. Số thập phân, các phép toán về số thập phân;
7. Toán có lời văn: Hai bài toán cơ bản của phân số, các dạng bài về tỉ số của hai số, tỉ số phần trăm;
8. Hình học: Đường thẳng, tia, đoạn thẳng, trung điểm của đoạn thẳng
9. Một số dạng bài nâng cao: Tính chất chia hết trong tập hợp số nguyên, số nguyên tố, số chính phương, phân số không xác định, dãy phân số theo quy luật, ...

### II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Thực hiện phép tính

a)  $-53 - 20 + 13$

b)  $150 - (-49) - [35 + (-51) + 15]$

c)  $8 \cdot (-84) \cdot (-125)$

d)  $162 - \{62 : [7^9 : 7^7 + (-3) \cdot 6]\}$ .

**Bài 2.** Tìm số nguyên  $x$  biết:

a)  $2(x+3) - 13 = 27$

b)  $(3+2x) - (x-5) = -12$ .

c)  $46 - (x-2)^3 = (-38) + 20$

d)  $(x^2 - 25)(x^3 + 64) = 0$

**Bài 3.** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:

a)  $(x+1) \cdot (y+2) = -6$

b)  $(2x+1) \cdot (y-2) = 24$

**Bài 4.** Thực hiện phép tính (Tính hợp lí nếu có thể)

a)  $\frac{17}{19} + \frac{-7}{23} + \frac{2}{19} + \frac{-39}{23}$

b)  $\frac{-5}{7} + \frac{3}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{-2}{7} + \frac{1}{4}$

c)  $\left(\frac{7}{-25} + \frac{4}{23}\right) + \left(\frac{-18}{25} + \frac{5}{7}\right) + \frac{19}{23}$

d)  $\left(4\frac{5}{37} - 3\frac{4}{5} + 8\frac{15}{29}\right) - \left(3\frac{5}{37} - 6\frac{14}{29}\right)$

e)  $\frac{-5}{17} \cdot \frac{-9}{23} + \frac{-9}{23} \cdot \frac{22}{17}$

f)  $\frac{-7}{19} \cdot \frac{8}{11} - \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} - \frac{12}{19}$

g)  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-8}{9}$

h)  $4\frac{1}{2} : \left(\frac{5}{2} - 3\frac{3}{4}\right) + \frac{-2}{3}$

i)  $75\% - 1\frac{1}{2} + 0,5 : \frac{5}{12}$

k)  $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} - 0,25\right) \cdot (-2)^2 + 35\%$

**Bài 5.** Thực hiện phép tính (Tính hợp lí nếu có thể)

a)  $(-35,8) + (-17,2) + 16,4 + 4,6$

b)  $(5,3 - 2,8) - (4 + 5,3)$

c)  $\frac{3}{11} \cdot \left(2\frac{2}{3} - 1,75\right)$

d)  $(-20) \cdot 3,1 - 7,2 : 4 + 3,1 \cdot (4,5 \cdot 6 - 5,2)$

e)  $(34,72 + 32,28) : 5 - (57,25 - 36,05) : 2$

f)  $2,5 \cdot (-4,68) + 2,5 \cdot (-5,32)$

g)  $5,36 \cdot 12,34 + (-5,36) \cdot 2,34$

h)  $8,5 \cdot 8,5 - 2 \cdot 8,5 \cdot 3,5 + 3,5 \cdot 3,5$

**Bài 6.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x - \frac{17}{36} = \frac{-15}{16} \cdot \frac{4}{27}$

b)  $\frac{4}{15} - x = \frac{-16}{25} \cdot \frac{5}{64}$

c)  $\frac{1}{3} : (2x - 1) = \frac{-4}{21}$

d)  $\frac{6}{-x} = \frac{x}{-24}$

e)  $\frac{x-3}{-4} = \frac{9}{3-x}$

f)  $\left(\frac{1}{2} + 2x\right)(2x - 3) = 0$

g)  $\frac{1}{4} - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

h)  $25 \cdot \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 16$

i)  $\left(11x - \frac{3}{4}\right)^3 + 21\frac{9}{17} = 29\frac{9}{17}$

**Bài 7.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x + 18,3 = 56,1 - 12,8$

b)  $18,5 - x + 3,4 = -5,1$

c)  $5,1 - 13,8 + x = 1,8 : 0,02$

d)  $x \cdot 2,5 = 36,4 - 20,65$

e)  $x \cdot 2,65 + x \cdot 3,35 = 15,43 + 20,57$

f)  $x \cdot (-4,9) - x : 10 = 24 : 1,2$

g)  $1,2 : x + 2,3 : x = -(0,2)^2 \cdot 10$

h)  $x - 25\%x - 0,5x = -\frac{5}{4}$

**Bài 8.** a) Tìm các phân số có mẫu là 5, lớn hơn  $\frac{-2}{3}$  và nhỏ hơn  $\frac{-1}{6}$

b) Tìm các phân số có mẫu là 150, lớn hơn  $\frac{-34}{75}$  nhưng không vượt quá  $\frac{-11}{25}$ .

**Bài 9.** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:

a)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$  và  $x + y = 14$

b)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$  và  $2x - y = 15$

c)  $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$  và  $2x^2 - y^2 = -124$

**Bài 10.** Ba lớp 6 của trường tổng cộng có 160 học sinh. Số học sinh lớp 6A chiếm 30% so với tổng số học sinh, số học sinh lớp 6B bằng  $\frac{17}{12}$  số học sinh lớp 6A, còn lại là số học sinh lớp 6C.

Tính số học sinh mỗi lớp?

**Bài 11.** Một trường phổ thông dân tộc ở Hà Giang có 300 học sinh gồm ba dân tộc H'Mông, Tày, Dao. Số bạn học sinh dân tộc Dao bằng  $\frac{1}{15}$  tổng số học sinh toàn trường, số bạn học sinh dân tộc Tày bằng  $\frac{2}{3}$  tổng số học sinh dân tộc H'Mông và Dao.

- Tính số học sinh dân tộc Dao, số học sinh dân tộc Tày
- Tính tỉ số phần trăm giữa số học sinh dân tộc Tày và dân tộc H'Mông

**Bài 12.** Lớp 6A chia làm ba tổ trồng được một số cây. Số cây tổ 1 trồng được bằng  $\frac{1}{3}$  số cây cả lớp trồng được. Tổ 2 trồng được  $\frac{5}{12}$  số cây cả lớp trồng được. Tổ 3 trồng được 30 cây.

- Tính số cây mỗi tổ trồng được
- Tính tỉ số phần trăm số cây tổ 1 và số cây tổ 2 trồng được

**Bài 13.** Cuối học kì I lớp 6A có  $\frac{1}{8}$  số học sinh đạt học sinh giỏi,  $\frac{1}{2}$  số học sinh đạt học sinh khá. Còn lại là học sinh trung bình. Biết số học sinh khá nhiều hơn số học sinh trung bình là 5 em.

- Tính số học sinh lớp 6A
- Tính số học sinh mỗi loại.

**Bài 14.** Ba người góp vốn mở công ty. Người thứ nhất góp một số tiền bằng  $\frac{1}{2}$  tổng số tiền của 2 người kia góp, người thứ hai góp một số tiền bằng  $\frac{1}{3}$  số tiền mà 2 người kia góp. Người thứ ba góp 10 tỉ đồng. Tính số tiền đã góp của người thứ nhất, người thứ hai?

**Bài 15.** Một giá sách có hai ngăn A và B. Số sách ngăn A bằng  $\frac{2}{3}$  số sách ngăn B. Nếu chuyển 3 quyển sách từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ngăn A bằng  $\frac{3}{7}$  số sách ngăn B. Hỏi ban đầu mỗi ngăn có bao nhiêu quyển sách?

**Bài 16.** Vẽ ba điểm A, B, C thẳng hàng, điểm B nằm giữa hai điểm A và C sao cho  $AB = 2cm$ ;  $AC = 6cm$ . Gọi I là trung điểm của BC.

- Tính độ dài đoạn thẳng BC
- Điểm B có phải là trung điểm của đoạn thẳng AI không? Vì sao?

**Bài 17.** Cho tia Ax và điểm B thuộc tia Ax sao cho  $AB = 6$  cm. Lấy điểm I thuộc đoạn thẳng AB sao cho  $AI = 3$  cm.

- Tính độ dài đoạn thẳng IB
- Điểm I có là trung điểm của đoạn thẳng AB không? Vì sao?
- Vẽ tia Ay là tia đối của tia Ax. Lấy điểm C thuộc tia Ay sao cho  $AC = 2$  cm.  
Tính độ dài đoạn thẳng BC
- Vẽ tia Am sao cho  $\widehat{BAm} = 60^\circ$ . So sánh số đo  $\widehat{BAm}$  và  $\widehat{BAy}$

**Bài 18.** Vẽ hình theo cách diễn đạt sau (vẽ trên cùng một hình)

- Vẽ hai tia phân biệt Ox và Oy (Ox và Oy không trùng nhau, không đối nhau)
- Vẽ đường thẳng aa' cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B (khác O)
- Lấy điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Kẻ tia OC
- Kể tên các cặp tia trùng nhau có góc O, góc A có trong hình vẽ
- Kể tên các góc đỉnh O có trong hình vẽ

**Bài 19.** Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho  $OA < OB$ . Lấy điểm M không thuộc đường thẳng AB. Vẽ các tia MO, MA, MB.

- Điểm A có nằm trong góc OMB không?
- Kẻ Oy là tia đối của tia Ox, lấy điểm E thuộc tia Oy và vẽ tia ME.  
Kể tên các điểm nằm trong góc EMB
- Kể tên các cặp tia đối nhau có trong hình vẽ (các tia trùng nhau chỉ kể 1 lần)
- Kể tên các góc bẹt trong hình vẽ.

**Bài 20.** Cho 50 điểm phân biệt. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng nếu:

- Không có 3 điểm nào thẳng hàng
- Có đúng 3 điểm thẳng hàng
- Có đúng 10 điểm thẳng hàng

**MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO KHÁC:****Bài 21.** Tìm các số nguyên  $x; y$  biết:

a)  $xy - x + y = 8$

b)  $xy - 3x + 2y = -11$

c)  $y^2x - 2x + y^2 - 3 = 0$

**Bài 22.** Tìm các số nguyên  $x$  biết:

a)  $(6-x).(x+3) > 0$

b)  $(x^2 - 2)(x^2 - 5)(x^2 - 12) < 0$

**Bài 23.** Tìm số nguyên  $n$  để các phân số sau có giá trị nguyên:

a)  $\frac{5}{n+1}$

b)  $\frac{n-3}{n+1}$

c)  $\frac{3n+2}{2n-3}$

**Bài 24.** Cho phân số  $M = \frac{3n+7}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )a) Tìm  $n$  để  $M$  có giá trị nguyênb) Tìm  $n$  để  $M$  có giá trị nguyên dương/nguyên âmc) Tìm  $n$  để  $M$  có giá trị lớn nhất / giá trị nhỏ nhất**Bài 25.**a) Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{Z}$  thì phân số  $A = \frac{2n+7}{3n+10}$  luôn là phân số tối giảnb) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $B = \frac{3n-1}{n+2}$  là phân số tối giảnc) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $C = \frac{4n+3}{3n+1}$  rút gọn được.**Bài 26.** Tính nhanh:

a)  $A = \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{61.63}$

b)  $B = \frac{6}{2.9} + \frac{6}{9.16} + \frac{6}{16.23} + \dots + \frac{6}{107.114}$

c)  $C = \frac{10}{56} + \frac{10}{140} + \frac{10}{260} + \dots + \frac{10}{1400}$

d)  $D = \frac{1.4}{2.3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{3.6}{4.5} + \dots + \frac{98.101}{99.100}$

e)  $E = \left(-1 - \frac{1}{2}\right)\left(-1 - \frac{1}{3}\right)\left(-1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(-1 - \frac{1}{999}\right)$

f)  $F = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{99.101}\right)$

g)  $G = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{-\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$

h)  $H = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \dots + \frac{98}{2} + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}$

**Bài 27.** a) Cho  $E = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{89} + \frac{1}{90}$ . Chứng minh rằng  $\frac{5}{6} < E < \frac{29}{21}$

b) Cho  $F = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ . Chứng minh  $\frac{32}{101} < F < \frac{7}{16}$

c) Cho  $C = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{4} < C < \frac{1}{3}$

**Bài 28.**

a) Cho  $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$ ;  $B = \frac{1}{501.1000} + \frac{1}{502.999} + \dots + \frac{1}{999.502} + \frac{1}{1000.501}$ . Tính  $\frac{A}{B}$

b) Cho  $C = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{101}$ . Chứng minh C không phải là số tự nhiên.

c) Cho  $\frac{m}{n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99}$ . Chứng minh rằng  $m : 149$

**Bài 29.**

a) Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh rằng  $4^{2n} - 3^{2n} - 7$  chia hết cho 21

b) Cho các số nguyên dương  $a; b$  thỏa mãn  $a + 2b; b + 2a$  là các số chính phương.

Chứng minh rằng  $4a^2 + 2ab + 2024b^2$  chia hết cho 9

c) Tìm các số nguyên tố  $a, b, c$  sao cho  $a^4 + b^4 + c^4 + 54 = 11abc$

**Bài 30.**

a) Cho 25 số tự nhiên 1; 2; 3; ...; 25. Chọn ra 12 số trong đó không có 2 số nào có tổng bằng 25.

Chứng minh rằng trong các số được chọn có 1 số là số chính phương.

b) Trên bảng viết các số 3, 4, 5, 6. Mỗi lần xóa đi hai số  $x, y$  tùy ý và thay bởi 2 số  $\frac{3xy}{x+2y}$  và  $\frac{3xy}{2x+y}$ .

Thực hiện liên tiếp các bước trên, chứng minh rằng không có thời điểm nào mà trên bảng xuất hiện một số nhỏ hơn 1.

## ĐÁP ÁN ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 6

### Bài 1. Thực hiện phép tính

a)  $-53 - 20 + 13$

b)  $150 - (-49) - [35 + (-51) + 15]$

c)  $8 \cdot (-84) \cdot (-125)$

d)  $162 - \{62 : [7^9 : 7^7 + (-3) \cdot 6]\}$ .

#### Lời giải

$\begin{aligned} a) & -53 - 20 + 13 \\ & = (-53) + (-20) + 13 \\ & = (-73) + 13 \\ & = -60 \end{aligned}$	$\begin{aligned} b) & 150 - (-49) - [35 + (-51) + 15] \\ & = 150 + 49 - 35 - (-51) - 15 \\ & = 150 + 49 + (-35) + 51 + (-15) \\ & = 150 + (49 + 51) + [(-35) + (-15)] \\ & = 150 + 100 + (-50) \\ & = 250 + (-50) \\ & = 200 \end{aligned}$
$\begin{aligned} c) & 8 \cdot (-84) \cdot (-125) \\ & = [8 \cdot (-125)] \cdot (-84) \\ & = (-1000) \cdot (-84) \\ & = 84\,000 \end{aligned}$	$\begin{aligned} d) & 162 - \{62 : [7^9 : 7^7 + (-3) \cdot 6]\} \\ & = 162 - \{62 : [7^2 + (-18)]\} \\ & = 162 - \{62 : [49 + (-18)]\} \\ & = 162 - \{62 : 31\} \\ & = 162 - 2 \\ & = 160 \end{aligned}$

### Bài 2. Tìm số nguyên $x$ biết:

a)  $2(x+3) - 13 = 27$

b)  $(3+2x) - (x-5) = -12$ .

c)  $46 - (x-2)^3 = (-38) + 20$

d)  $(x^2 - 25)(x^3 + 64) = 0$

#### Lời giải

$\begin{aligned} a) & 2(x+3) - 13 = 27 \\ & 2 \cdot (x+3) = 27 + 13 \\ & 2 \cdot (x+3) = 40 \\ & x+3 = 40 : 2 \\ & x+3 = 20 \\ & x = 20 - 3 \\ & x = 17 \end{aligned}$ <p>Vậy <math>x = 17</math></p>	$\begin{aligned} b) & (3+2x) - (x-5) = -12 \\ & 3 + 2x - x + 5 = -12 \\ & x + 8 = -12 \\ & x = -12 - 8 \\ & x = -20 \end{aligned}$ <p>Vậy <math>x = -20</math></p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>c) <math>46 - (x - 2)^3 = (-38) + 20</math>  <math>46 - (x - 2)^3 = -18</math>  <math>(x - 2)^3 = 46 - (-18)</math>  <math>(x - 2)^3 = 46 + 18</math>  <math>(x - 2)^3 = 64</math>  <math>(x - 2)^3 = 4^3</math>  <math>x - 2 = 4</math>  <math>x = 4 + 2</math>  <math>x = 6</math>            Vậy <math>x = 6</math></p>	<p>d) <math>(x^2 - 25)(x^3 + 64) = 0</math>  <math>\Rightarrow x^2 - 25 = 0</math> hoặc <math>x^3 + 64 = 0</math>  <math>\Rightarrow x^2 = 25</math> hoặc <math>x^3 = -64</math>            Xét hai trường hợp:            TH1: <math>x^2 = 25</math>  <math>\Rightarrow x^2 = 5^2 = (-5)^2</math>  <math>\Rightarrow x = 5</math> hoặc <math>x = -5</math>            TH2: <math>x^3 = -64</math>  <math>\Rightarrow x^3 = (-4)^3</math>  <math>\Rightarrow x = -4</math>            Vậy <math>x = -4</math></p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Bài 3.** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:

a)  $(x + 1).(y + 2) = -6$

b)  $(2x + 1).(y - 2) = 24$

**Lời giải**

a) Vì  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 1$  và  $y + 2 \in \mathbb{Z}$ .

Theo bài ra ta có  $(x + 1).(y + 2) = -6 \Rightarrow x + 1$  và  $y + 2$  là ước của 6

Do đó ta có bảng giá trị sau:

$x + 1$	1	-6	-1	6	2	-3	-2	3
$y + 2$	-6	1	6	-1	-3	2	3	-2
$x$	0	-7	-2	5	1	-4	-3	2
$y$	-8	-1	4	-3	-5	0	1	-4

Vậy  $(x, y) \in \{ (0, -8); (-7, -1); (-2, 4); (5, -3); (1, -5); (-4, 0); (-3, 1); (2, -4) \}$

b) Vì  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x + 1, y - 2 \in \mathbb{Z}$ .

Theo bài ra ta có  $(2x + 1).(y - 2) = 24 \Rightarrow 2x + 1$  và  $y - 2$  là ước của 24

Mà  $2x + 1$  luôn là số lẻ với mọi  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x + 1 \in \{ \pm 1; \pm 3 \}$

Ta có bảng giá trị sau:

$2x + 1$	1	-1	3	-3
$y - 2$	24	-24	8	-8
$x$	0	-1	1	-2
$y$	26	-22	10	-6

Vậy  $(x, y) \in \{ (0, 26); (-1, -22); (1, 10); (-2, -6) \}$



**Bài 4.** Thực hiện phép tính (Tính hợp lí nếu có thể)

a)  $\frac{17}{19} + \frac{-7}{23} + \frac{2}{19} + \frac{-39}{23}$

b)  $\frac{-5}{7} + \frac{3}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{-2}{7} + \frac{1}{4}$

c)  $\left(\frac{7}{-25} + \frac{4}{23}\right) + \left(\frac{-18}{25} + \frac{5}{7}\right) + \frac{19}{23}$

d)  $\left(4\frac{5}{37} - 3\frac{4}{5} + 8\frac{15}{29}\right) - \left(3\frac{5}{37} - 6\frac{14}{29}\right)$

e)  $\frac{-5}{17} \cdot \frac{-9}{23} + \frac{-9}{23} \cdot \frac{22}{17}$

f)  $\frac{-7}{19} \cdot \frac{8}{11} - \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} - \frac{12}{19}$

g)  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-8}{9}$

h)  $4\frac{1}{2} : \left(\frac{5}{2} - 3\frac{3}{4}\right) + \frac{-2}{3}$

i)  $75\% - 1\frac{1}{2} + 0,5 : \frac{5}{12}$

k)  $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} - 0,25\right) \cdot (-2)^2 + 35\%$

**Lời giải**

a)  $\frac{17}{19} + \frac{-7}{23} + \frac{2}{19} + \frac{-39}{23} = \left(\frac{17}{19} + \frac{2}{19}\right) + \left(\frac{-7}{23} + \frac{-39}{23}\right) = 1 - 2 = -1$

b)  $\frac{-5}{7} + \frac{3}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{-2}{7} + \frac{1}{4} = \left(\frac{-5}{7} + \frac{-2}{7}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{-1}{5} = -1 + 1 + \frac{-1}{5} = \frac{-1}{5}$

c)  $\left(\frac{7}{-25} + \frac{4}{23}\right) + \left(\frac{-18}{25} + \frac{5}{7}\right) + \frac{19}{23} = \frac{7}{-25} + \frac{4}{23} + \frac{-18}{25} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23} = \left(\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25}\right) + \left(\frac{4}{23} + \frac{19}{23}\right) + \frac{5}{7}$   
 $= -1 + 1 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

d)  $\left(4\frac{5}{37} - 3\frac{4}{5} + 8\frac{15}{29}\right) - \left(3\frac{5}{37} - 6\frac{14}{29}\right) = 4\frac{5}{37} - 3\frac{4}{5} + 8\frac{15}{29} - 3\frac{5}{37} + 6\frac{14}{29}$   
 $= \left(4\frac{5}{37} - 3\frac{5}{37}\right) + \left(8\frac{15}{29} + 6\frac{14}{29}\right) - 3\frac{4}{5} = 1 + 15 - 3\frac{4}{5} = 16 - 3\frac{4}{5} = \frac{80}{5} - \frac{19}{5} = \frac{61}{5}$

e)  $\frac{-5}{17} \cdot \frac{-9}{23} + \frac{-9}{23} \cdot \frac{22}{17} = \frac{-9}{23} \left(\frac{-5}{17} + \frac{22}{17}\right) = \frac{-9}{23} \cdot \frac{17}{17} = \frac{-9}{23}$

f)  $\frac{-7}{19} \cdot \frac{8}{11} - \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} - \frac{12}{19} = \frac{-7}{19} \left(\frac{8}{11} + \frac{3}{11}\right) - \frac{12}{19} = \frac{-7}{19} \cdot \frac{11}{11} - \frac{12}{19} = \frac{-7}{19} - \frac{12}{19} = \frac{-19}{19} = -1$

g)  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-8}{9} = \frac{-3}{8} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{5}{24}$

h)  $4\frac{1}{2} : \left(\frac{5}{2} - 3\frac{3}{4}\right) + \frac{-2}{3} = \frac{9}{2} : \left(\frac{10}{4} - \frac{15}{4}\right) + \frac{-2}{3} = \frac{9}{2} : \frac{-5}{4} + \frac{-2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{-5} + \frac{-2}{3} = \frac{-18}{5} + \frac{-2}{3} = \frac{-64}{15}$

i)  $75\% - 1\frac{1}{2} + 0,5 : \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} : \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{-3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{9}{20}$

k)  $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} - 0,25\right) \cdot (-2)^2 + 35\% = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) \cdot 4 + \frac{7}{20} = \frac{2}{7} + \frac{20}{7} \cdot \frac{7}{20} + \frac{7}{20} = \frac{2}{7} + 1 + \frac{7}{20} = \frac{229}{140}$

**Bài 5.** Thực hiện phép tính (Tính hợp lí nếu có thể)

a)  $(-35,8) + (-17,2) + 16,4 + 4,6$

b)  $(5,3 - 2,8) - (4 + 5,3)$

c)  $\frac{3}{11} \cdot \left(2\frac{2}{3} - 1,75\right)$

d)  $(-20) \cdot 3,1 - 7,2 : 4 + 3,1 \cdot (4,5 \cdot 6 - 5,2)$

e)  $(34,72 + 32,28) : 5 - (57,25 - 36,05) : 2$

f)  $2,5 \cdot (-4,68) + 2,5 \cdot (-5,32)$

g)  $5,36 \cdot 12,34 + (-5,36) \cdot 2,34$

h)  $8,5 \cdot 8,5 - 2 \cdot 8,5 \cdot 3,5 + 3,5 \cdot 3,5$

**Lời giải**

a)  $(-35,8) + (-17,2) + 16,4 + 4,6 = -53 + 21 = -32$

b)  $(5,3 - 2,8) - (4 + 5,3) = 5,3 - 2,8 - 4 - 5,3 = (5,3 - 5,3) + (-2,8 - 4) = -6,8$

c)  $\frac{3}{11} \cdot \left(2\frac{2}{3} - 1,75\right) = \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{7}{4}\right) = \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{32}{12} - \frac{21}{12}\right) = \frac{3}{11} \cdot \frac{11}{12} = \frac{1}{4}$

d)  $(-20) \cdot 3,1 - 7,2 : 4 + 3,1 \cdot (4,5 \cdot 6 - 5,2) = (-20) \cdot 3,1 - 1,8 + 3,1(27 - 5,2) = (-20) \cdot 3,1 + 3,1 \cdot 21,8 - 1,8$   
 $= 3,1(-20 + 21,8) - 1,8 = 3,1 \cdot 1,8 - 1,8 = 1,8(3,1 - 1) = 1,8 \cdot 2,1 = 3,78$

e)  $(34,72 + 32,28) : 5 - (57,25 - 36,05) : 2 = 67 : 5 - 21,2 : 2 = 13,4 - 10,6 = 2,8$

f)  $2,5 \cdot (-4,68) + 2,5 \cdot (-5,32) = 2,5[(-4,68) + (-5,32)] = 2,5 \cdot (-10) = -25$

g)  $5,36 \cdot 12,34 + (-5,36) \cdot 2,34 = 5,36(12,34 - 2,34) = 5,36 \cdot 10 = 53,6$

h)  $8,5 \cdot 8,5 - 2 \cdot 8,5 \cdot 3,5 + 3,5 \cdot 3,5 = 8,5 \cdot 8,5 - 8,5 \cdot 3,5 - 8,5 \cdot 3,5 + 3,5 \cdot 3,5$   
 $= 8,5 \cdot (8,5 - 3,5) - 3,5(8,5 - 3,5) = (8,5 - 3,5)(8,5 - 3,5) = (8,5 - 3,5)^2 = 5^2 = 25$

**Bài 6.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x - \frac{17}{36} = \frac{-15}{16} \cdot \frac{4}{27}$

b)  $\frac{4}{15} - x = \frac{-16}{25} \cdot \frac{5}{64}$

c)  $\frac{1}{3} : (2x - 1) = \frac{-4}{21}$

d)  $\frac{6}{-x} = \frac{x}{-24}$

e)  $\frac{x-3}{-4} = \frac{9}{3-x}$

f)  $\left(\frac{1}{2} + 2x\right)(2x - 3) = 0$

g)  $\frac{1}{4} - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

h)  $25 \cdot \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 16$

i)  $\left(11x - \frac{3}{4}\right)^3 + 21\frac{9}{17} = 29\frac{9}{17}$

**Lời giải**

<p>a) <math>x - \frac{17}{36} = \frac{-15}{16} \cdot \frac{4}{27}</math></p> <p><math>x - \frac{17}{36} = \frac{-5}{36}</math></p> <p><math>x = \frac{-5}{36} + \frac{17}{36}</math></p> <p><math>x = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}</math></p>	<p>b) <math>\frac{4}{15} - x = \frac{-16}{25} \cdot \frac{5}{64}</math></p> <p><math>\frac{4}{15} - x = \frac{-1}{20}</math></p> <p><math>x = \frac{4}{15} - \frac{-1}{20}</math></p> <p><math>x = \frac{16}{60} + \frac{3}{60} = \frac{19}{60}</math></p>	<p>c) <math>\frac{1}{3} : (2x - 1) = \frac{-4}{21}</math></p> <p><math>2x - 1 = \frac{1}{3} : \frac{-4}{21}</math></p> <p><math>2x - 1 = \frac{-7}{4}</math></p> <p><math>2x = \frac{-3}{4}</math></p> <p><math>x = \frac{-3}{8}</math></p> <p>Vậy <math>x = \frac{-3}{8}</math></p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$d) \frac{6}{-x} = \frac{x}{-24}$ $(-x).x = (-24).6$ $-x^2 = -144$ $x^2 = 144$ $x = 12 \text{ hoặc } x = -12$	$e) \frac{x-3}{-4} = \frac{9}{3-x}$ $(x-3)(3-x) = 9.(-4)$ $(x-3)^2 = 36$ $\text{TH1: } x-3 = 6 \Rightarrow x = 9$ $\text{TH2: } x-3 = -6 \Rightarrow x = -3$	$f) \left(\frac{1}{2} + 2x\right)(2x-3) = 0$ $\text{TH1: } \frac{1}{2} + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ $\text{TH2: } 2x-3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
$g) \frac{1}{4} - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\text{TH1: } 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 0$ $\Rightarrow x = 0$ $\text{TH2: } 2x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -1$ $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$	$h) 25 \cdot \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 16$ $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{25}$ $\text{TH1: } 3x - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow 3x = \frac{13}{10} \Rightarrow x = \frac{13}{30}$ $\text{TH1: } 3x - \frac{1}{2} = -\frac{4}{5}$ $\Rightarrow 3x = -\frac{3}{10} \Rightarrow x = -\frac{1}{10}$	$i) \left(11x - \frac{3}{4}\right)^3 + 21\frac{9}{17} = 29\frac{9}{17}$ $\left(11x - \frac{3}{4}\right)^3 = 29\frac{9}{17} - 21\frac{9}{17}$ $\left(11x - \frac{3}{4}\right)^3 = 8 = 2^3$ $11x - \frac{3}{4} = 2$ $11x = \frac{11}{4}$ $x = \frac{11}{4} : 11$ $x = \frac{1}{4}$

**Bài 7.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $x + 18,3 = 56,1 - 12,8$       b)  $18,5 - x + 3,4 = -5,1$   
 c)  $5,1 - 13,8 + x = 1,8 : 0,02$       d)  $x.2,5 = 36,4 - 20,65$   
 e)  $x.2,65 + x.3,35 = 15,43 + 20,57$       f)  $x.(-4,9) - x : 10 = 24 : 1,2$   
 g)  $1,2 : x + 2,3 : x = -(0,2)^2 . 10$       h)  $x - 25\%x - 0,5x = -\frac{5}{4}$

**Lời giải**

$a) x + 18,3 = 56,1 - 12,8$ $x + 18,3 = 43,3$ $x = 43,3 - 18,3$ $x = 25$	$b) 18,5 - x + 3,4 = -5,1$ $21,9 - x = -5,1$ $x = 21,9 - (-5,1)$ $x = 27$
$c) 5,1 - 13,8 + x = 1,8 : 0,02$ $-8,7 + x = 90$ $x = 90 + 8,7$ $x = 98,7$	$d) x.2,5 = 36,4 - 20,65$ $x.2,5 = 15,75$ $x = 15,75 : 2,5$ $x = 6,3$

$e) x.2,65 + x.3,35 = 15,43 + 20,57$ $x(2,65 + 3,35) = 36$ $x.6 = 36$ $x = 36 : 6$ $x = 6$	$f) x.(-4,9) - x : 10 = 24 : 1,2$ $x.(-4,9) - x.0,1 = 20$ $x(-4,9 - 0,1) = 20$ $x.(-5) = 20$ $x = -4$
$g) 1,2 : x + 2,3 : x = -(0,2)^2 . 10$ $(1,2 + 2,3) : x = -0,04.10$ $3,5 : x = -0,4$ $x = 3,5 : (-0,4)$ $x = -8,75$	$h) x - 25\%x - 0,5x = -\frac{5}{4}$ $x - 0,25x - 0,5x = -1,25$ $0,25x = -1,25$ $x = -1,25 : 0,25$ $x = -5$

**Bài 8.** a) Tìm các phân số có mẫu là 5, lớn hơn  $\frac{-2}{3}$  và nhỏ hơn  $\frac{-1}{6}$

b) Tìm các phân số có mẫu là 150, lớn hơn  $\frac{-34}{75}$  nhưng không vượt quá  $\frac{-11}{25}$ .

**Lời giải**

a) Phân số cần tìm có dạng là  $\frac{x}{5}$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ).

Theo đề bài ta có  $\frac{-2}{3} < \frac{x}{5} < \frac{-1}{6} \Rightarrow \frac{-20}{30} < \frac{6x}{30} < \frac{-5}{30} \Rightarrow -20 < 6x < -5$

Mà  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6x \in \{-18; -12; -6\} \Rightarrow x \in \{-3; -2; -1\}$

Vậy các phân số tìm được là  $\frac{-3}{5}; \frac{-2}{5}; \frac{-1}{5}$

b) Phân số cần tìm có dạng là  $\frac{x}{150}$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ).

Theo đề bài ta có  $\frac{-34}{75} < \frac{x}{150} \leq \frac{-11}{25} \Rightarrow \frac{-68}{150} < \frac{x}{150} \leq \frac{-66}{150} \Rightarrow -68 < x \leq -66$

Mà  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-67; -66\}$

Vậy các phân số tìm được là  $\frac{-67}{150}; \frac{-66}{150}$

**Bài 9.** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:

a)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$  và  $x + y = 14$

b)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$  và  $2x - y = 15$

c)  $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$  và  $2x^2 - y^2 = -124$

**Lời giải**

a)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$  và  $x + y = 14$

Đặt  $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = k \Rightarrow x = 4k; y = 3k$

Mà  $x + y = 14 \Rightarrow 4k + 3k = 14 \Rightarrow 7k = 14 \Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow x = 4 \cdot 2 = 8; y = 3 \cdot 2 = 6$

Vậy  $x = 8; y = 6$ .

b)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$  và  $2x - y = 15$

Đặt  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x = 4k; y = 5k$

Mà  $2x - y = 15 \Rightarrow 2 \cdot 4k - 5k = 15 \Rightarrow 8k - 5k = 15 \Rightarrow 3k = 15 \Rightarrow k = 5$

$\Rightarrow x = 4 \cdot 5 = 20; y = 5 \cdot 5 = 25$

Vậy  $x = 20; y = 25$

c)  $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$  và  $2x^2 - y^2 = -124$

Vì  $\frac{x}{y} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ . Đặt  $\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = k \Rightarrow x = 5k; y = 9k$

Mà  $2x^2 - y^2 = -124 \Rightarrow 2 \cdot (5k)^2 - (9k)^2 = -124 \Rightarrow 50k^2 - 81k^2 = -124 \Rightarrow -31k^2 = -124 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

Với  $k = 2 \Rightarrow x = 5 \cdot 2 = 10; y = 9 \cdot 2 = 18$

Với  $k = -2 \Rightarrow x = 5 \cdot (-2) = -10; y = 9 \cdot (-2) = -18$

Vậy  $(x, y) \in \{(10, 18); (-10, -18)\}$

**Bài 10.** Ba lớp 6 của trường tổng cộng có 160 học sinh. Số học sinh lớp 6A chiếm 30% so với tổng số học sinh, số học sinh lớp 6B bằng  $\frac{17}{12}$  số học sinh lớp 6A, còn lại là số học sinh lớp 6C.

Tính số học sinh mỗi lớp?

**Lời giải**

Số học sinh lớp 6A là:  $160 \cdot 30\% = 48$  (học sinh)

Số học sinh lớp 6B là:  $48 \cdot \frac{17}{12} = 68$  (học sinh)

Số học sinh lớp 6C là:  $160 - 48 - 68 = 44$  (học sinh)

Vậy số học sinh lớp 6A là 48 em; số học sinh lớp 6B là 68 em; số học sinh lớp 6C là 44 em.

**Bài 11.** Một trường phổ thông dân tộc ở Hà Giang có 300 học sinh gồm ba dân tộc H'Mông, Tày, Dao. Số bạn học sinh dân tộc Dao bằng  $\frac{1}{15}$  tổng số học sinh toàn trường, số bạn học sinh dân tộc Tày bằng  $\frac{2}{3}$  tổng số học sinh dân tộc H'Mông và Dao.

- a) Tính số học sinh dân tộc Dao, số học sinh dân tộc Tày  
b) Tính tỉ số phần trăm giữa số học sinh dân tộc Tày và dân tộc H'Mông

**Lời giải**

a) Số học sinh dân tộc Dao là  $300 \cdot \frac{1}{15} = 20$  (học sinh)

Phần số chỉ số học sinh dân tộc Tày so với tổng số học sinh là  $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$  (tổng số học sinh)

Số học sinh dân tộc Tày là  $300 \cdot \frac{2}{5} = 120$  (học sinh)

b) Số học sinh dân tộc H'Mông là  $300 - 20 - 120 = 160$  (học sinh)

Tỉ số phần trăm giữa số học sinh dân tộc Tày và dân tộc H'Mông là  $\frac{120}{160} \cdot 100\% = 75\%$

**Bài 12.** Lớp 6A chia làm ba tổ trồng được một số cây. Số cây tổ 1 trồng được bằng  $\frac{1}{3}$  số cây cả lớp trồng được. Tổ 2 trồng được  $\frac{5}{12}$  số cây cả lớp trồng được. Tổ 3 trồng được 30 cây.

- a) Tính số cây mỗi tổ trồng được  
b) Tính tỉ số phần trăm số cây tổ 1 và số cây tổ 2 trồng được

**Lời giải**

a) Phần số chỉ số cây tổ 3 so với tổng số cây lớp 6A trồng được là:  $1 - \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$  (tổng số cây)

Tổng số cây lớp 6A trồng được là  $30 : \frac{1}{4} = 120$  (cây)

Số cây tổ 1 trồng được là  $120 \cdot \frac{1}{3} = 40$  (cây)

Số cây tổ 2 trồng được là  $120 \cdot \frac{5}{12} = 50$  (cây)

b) Tỉ số phần trăm số cây tổ 1 và số cây tổ 2 trồng được là  $\frac{40}{50} \cdot 100\% = 80\%$

**Bài 13.** Cuối học kì I lớp 6A có  $\frac{1}{8}$  số học sinh đạt học sinh giỏi,  $\frac{1}{2}$  số học sinh đạt học sinh khá. Còn lại là học sinh trung bình. Biết số học sinh khá nhiều hơn số học sinh trung bình là 5 em.

a) Tính số học sinh lớp 6A

b) Tính số học sinh mỗi loại.

**Lời giải**

a) Phân số chỉ số học sinh trung bình là  $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$  (tổng số học sinh)

Hiệu số phần giữa học sinh khá và học sinh trung bình là  $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$  (tổng số học sinh)

Số học sinh lớp 6A là  $5 : \frac{1}{8} = 40$  (học sinh)

b) Số học sinh giỏi là  $40 \cdot \frac{1}{8} = 5$  (học sinh)

Số học sinh khá là  $40 \cdot \frac{1}{2} = 20$  (học sinh)

Số học sinh trung bình là  $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$  (học sinh)

**Bài 14.** Ba người góp vốn mở công ty. Người thứ nhất góp một số tiền bằng  $\frac{1}{2}$  tổng số tiền của 2 người

kia góp, người thứ hai góp một số tiền bằng  $\frac{1}{3}$  số tiền mà 2 người kia góp. Người thứ ba góp 10 tỉ đồng.

Tính số tiền đã góp của người thứ nhất, người thứ hai?

**Lời giải**

**Chú ý:** Tổng số tiền không đổi

Phân số chỉ số tiền của người thứ nhất là:  $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$  (tổng số tiền của 3 người)

Phân số chỉ số tiền của người thứ hai là:  $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$  (tổng số tiền của 3 người)

Phân số chỉ số tiền của người thứ ba là:  $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$  (tổng số tiền của 3 người)

Tổng số tiền là:  $10 : \frac{5}{12} = 24$  (tỉ)

Số tiền người thứ nhất góp là:  $24 \cdot \frac{1}{3} = 8$  (tỉ)

Số tiền người thứ hai góp là:  $24 \cdot \frac{1}{4} = 6$  (tỉ)

Vậy người thứ nhất góp 8 tỉ, người thứ hai góp 6 tỉ.

**Bài 15.** Một giá sách có hai ngăn A và B. Số sách ngăn A bằng  $\frac{2}{3}$  số sách ngăn B. Nếu chuyển 3 quyển sách từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ngăn A bằng  $\frac{3}{7}$  số sách ngăn B. Hỏi ban đầu mỗi ngăn có bao nhiêu quyển sách?

**Lời giải**

**Chú ý:** Tổng số sách hai ngăn không đổi

Lúc đầu số sách ngăn A bằng:  $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$  (tổng số sách hai ngăn)

Nếu chuyển 3 quyển sách từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ngăn A bằng:

$$\frac{3}{3+7} = \frac{3}{10} \text{ (tổng số sách hai ngăn)}$$

Do đó 3 quyển sách sẽ ứng với:  $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$  (tổng số sách hai ngăn)

Tổng số sách cả hai ngăn là:  $3 : \frac{1}{10} = 30$  (quyển)

Số sách ngăn A lúc đầu là:  $30 \cdot \frac{2}{5} = 12$  (quyển)

Số sách ngăn B lúc đầu là:  $30 - 12 = 18$  (quyển)

Vậy lúc đầu ngăn A có 12 quyển sách; ngăn B có 18 quyển sách.

**Bài 16.** Vẽ ba điểm A, B, C thẳng hàng, điểm B nằm giữa hai điểm A và C sao cho  $AB = 2\text{cm}$ ;  $AC = 6\text{cm}$ . Gọi I là trung điểm của BC.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC

b) Điểm B có phải là trung điểm của đoạn thẳng AI không? Vì sao?

**Lời giải**

a) Vì B nằm giữa hai điểm A và C nên  $AB + BC = AC$

Suy ra  $BC = AC - AB = 6 - 2 = 4$  (cm)

Vậy  $BC = 4$  (cm)

b) Vì I là trung điểm BC nên  $IB = IC = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$  (cm)

Mà  $AB = BI = 2$  (cm) và B nằm giữa A và I

Suy ra B là trung điểm của AI.



**Bài 17.** Cho tia Ax và điểm B thuộc tia Ax sao cho  $AB = 6$  cm. Lấy điểm I thuộc đoạn thẳng AB sao cho  $AI = 3$  cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng IB

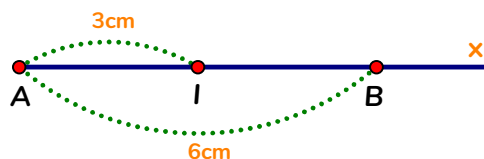
b) Điểm I có là trung điểm của đoạn thẳng AB không? Vì sao?

c) Vẽ tia Ay là tia đối của tia Ax. Lấy điểm C thuộc tia Ay sao cho  $AC = 2$  cm.

Tính độ dài đoạn thẳng BC

d) Vẽ tia Am sao cho  $\widehat{BAm} = 60^\circ$ . So sánh số đo  $\widehat{BAm}$  và  $\widehat{BAy}$

### Lời giải



a) Vì điểm I nằm giữa A và B nên  $AB = AI + IB$

$$\Rightarrow IB = AB - AI = 6 - 3 = 3 \text{ (cm)}$$

Vậy  $IB = 3$  cm

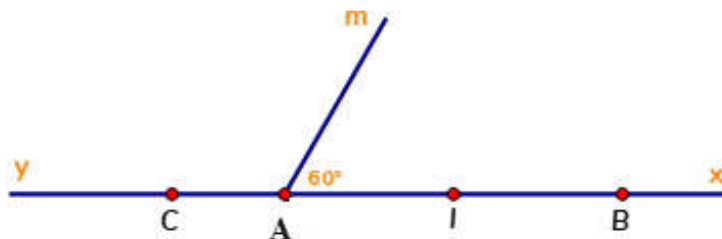
b) Vì I nằm giữa hai điểm A; B và  $AI = BI = 3$  cm nên I là trung điểm của AB.



c) Vì điểm B thuộc tia Ax; điểm C thuộc tia Ay và Ax, Ay là hai tia đối nhau nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C.

$$\text{Do đó: } CB = CA + AB = 2 + 6 = 8 \text{ (cm).}$$

Vậy  $BC = 8$  cm.



d) Vì Ax và Ay là hai tia đối nhau và B là điểm thuộc tia Ax nên  $\widehat{BAy} = 180^\circ$

Do đó  $\widehat{BAm} = 60^\circ < \widehat{BAy} = 180^\circ$ .

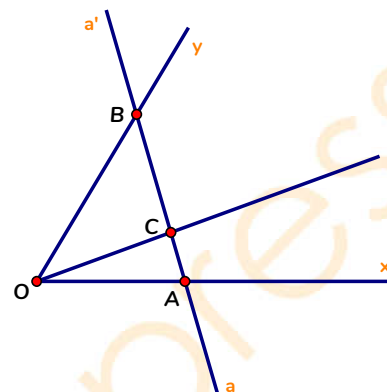
**Bài 18.** Vẽ hình theo cách diễn đạt sau (vẽ trên cùng một hình)

- Vẽ hai tia phân biệt  $Ox$  và  $Oy$  ( $Ox$  và  $Oy$  không trùng nhau, không đối nhau)
- Vẽ đường thẳng  $aa'$  cắt hai tia  $Ox$ ,  $Oy$  lần lượt tại  $A$  và  $B$  (khác  $O$ )
- Lấy điểm  $C$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$ . Kẻ tia  $OC$
- Kể tên các cặp tia trùng nhau có gốc  $O$ , góc  $A$  có trong hình vẽ
- Kể tên các góc đỉnh  $O$  có trong hình vẽ

**Lời giải**

Ý a; b; c trong phần hình vẽ:

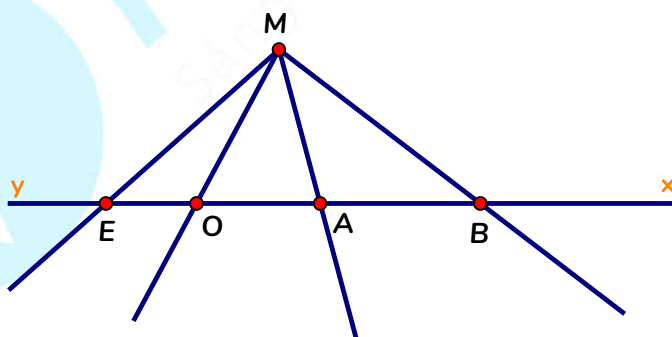
- Các tia trùng nhau gốc  $O$  là:  $OA$  và  $Ox$ ;  $OB$  và  $Oy$   
Các tia trùng nhau gốc  $A$ :  $AC$  và  $AB$ ;  $AC$  và  $Aa'$ ;  $AB$  và  $Aa'$
- Các góc đỉnh  $O$  là:  $\widehat{BOC}$ ;  $\widehat{COA}$ ;  $\widehat{BOA}$



**Bài 19.** Trên tia  $Ox$  lấy hai điểm  $A$ ,  $B$  sao cho  $OA < OB$ . Lấy điểm  $M$  không thuộc đường thẳng  $AB$ . Vẽ các tia  $MO$ ,  $MA$ ,  $MB$ .

- Điểm  $A$  có nằm trong góc  $OMB$  không?
- Kẻ  $Oy$  là tia đối của tia  $Ox$ , lấy điểm  $E$  thuộc tia  $Oy$  và vẽ tia  $ME$ .  
Kể tên các điểm nằm trong góc  $EMB$
- Kể tên các cặp tia đối nhau có trong hình vẽ (các tia trùng nhau chỉ kể 1 lần)
- Kể tên các góc bẹt trong hình vẽ.

**Lời giải**



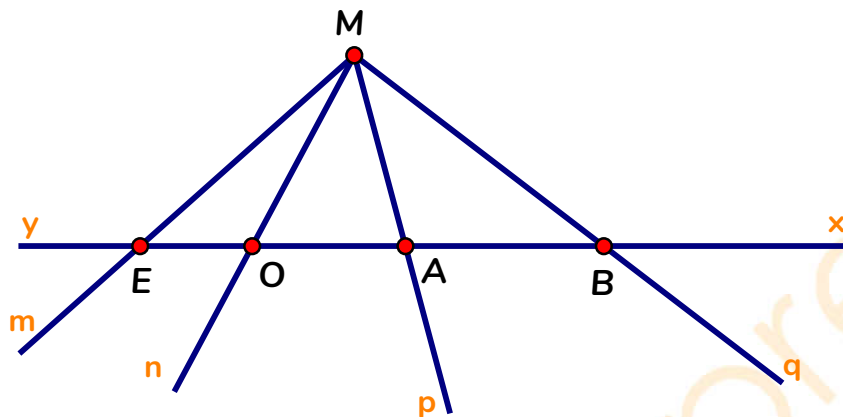
- Vì các điểm  $A$ ;  $B$  cùng thuộc tia  $Ox$  và  $OA < OB$  nên  $A$  nằm giữa  $O$  và  $B$ .  
Khi đó từ điểm  $M$  không thuộc đường thẳng  $AB$  vẽ các tia  $MO$ ,  $MA$ ,  $MB$  thì tia  $MA$  nằm giữa tia  $MO$  và tia  $MB$ .  
Vậy điểm  $A$  nằm trong góc  $OMB$ .

b) Các điểm nằm trong góc EMB là: O; A

c) Các cặp tia đối nhau là:  $Ey$  và  $Ex$ ;  $Oy$  và  $Ox$ ;  $Ay$  và  $Ax$ ;  $By$  và  $Bx$

d) Đặt tên các tia như hình vẽ.

Các góc bẹt là:  $\widehat{xEy}$ ;  $\widehat{xOy}$ ;  $\widehat{xAy}$ ;  $\widehat{xBy}$ ;  $\widehat{mEM}$ ;  $\widehat{nOM}$ ;  $\widehat{pAM}$ ;  $\widehat{qBM}$



**Bài 20.** Cho 50 điểm phân biệt. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng nếu:

- a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng                      b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng  
c) Có đúng 10 điểm thẳng hàng

### Lời giải

a) Từ 1 điểm bất kỳ nối với 49 điểm còn lại ta được 49 đường thẳng

Lặp lại 50 lần ta được  $49 \cdot 50 = 2450$  (đường thẳng)

Vì mỗi đường thẳng bị lặp lại 2 lần nên số đường thẳng được tạo thành là

$$2450 : 2 = 1225 \text{ (đường thẳng)}$$

b) Với 3 điểm không thẳng hàng ta lấy 1 điểm nối với 2 điểm còn lại thì vẽ được 2 đường thẳng

Như vậy với 3 điểm không thẳng hàng, ta vẽ được  $2 \cdot 3 = 6$  đường thẳng

Do mỗi đường thẳng bị lặp lại 2 lần nên số đường thẳng được tạo thành từ 3 điểm không thẳng hàng là

$$6 : 2 = 3 \text{ (đường thẳng)}$$

Nhưng với 3 điểm thẳng hàng ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng

Nên số đường thẳng đã giảm đi là  $3 - 1 = 2$  (đường thẳng)

Vậy số đường thẳng nếu có đúng 3 điểm thẳng hàng là  $1225 - 3 = 1222$  (đường thẳng)

c) Với 10 điểm không thẳng hàng ta lấy 1 điểm nối với 9 điểm còn lại thì vẽ được 9 đường thẳng

Như vậy với 10 điểm không thẳng hàng, ta vẽ được  $10 \cdot 9 = 90$  đường thẳng

Do mỗi đường thẳng bị lặp lại 2 lần nên số đường thẳng được tạo thành từ 10 điểm không thẳng hàng là  $90 : 2 = 45$  (đường thẳng)

Nhưng với 10 điểm thẳng hàng ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng

Nên số đường thẳng đã giảm đi là  $45 - 1 = 44$  (đường thẳng)

Vậy số đường thẳng nếu có đúng 10 điểm thẳng hàng là  $1225 - 44 = 1181$  (đường thẳng)

### MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO

**Bài 21.** Tìm các số nguyên  $x; y$  biết:

a)  $xy - x + y = 8$

b)  $xy - 3x + 2y = -11$

c)  $y^2x - 2x + y^2 - 3 = 0$

#### Lời giải

a)  $xy - x + y = 8$

$$\Rightarrow x \cdot (y - 1) + y - 1 = 8 - 1$$

$$\Rightarrow (y - 1) \cdot (x + 1) = 7$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y - 1)$  và  $(x + 1) \in \mathbb{Z}$ .

Mà  $(y - 1) \cdot (x + 1) = 7$  nên  $y - 1$  và  $x + 1$  là ước của 7

Do đó ta có bảng giá trị sau:

$x + 1$	$-1$	$1$	$7$	$-7$
$y - 1$	$-7$	$7$	$1$	$-1$
$x$	$-2$	$0$	$6$	$-8$
$y$	$-6$	$8$	$2$	$0$

Vậy  $(x, y) \in \{(-2; -6); (-8; 0); (0; 8); (6; 2)\}$

b)  $xy - 3x + 2y = -11$

$$\Rightarrow x(y - 3) + 2y = -11$$

$$\Rightarrow x(y - 3) + (2y - 6) = -11 - 6$$

$$\Rightarrow x(y - 3) + 2(y - 3) = -17$$

$$\Rightarrow (x + 2)(y - 3) = -17$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 2, y - 3 \in \mathbb{Z}$ .

Mà  $(x + 2) \cdot (y - 3) = -17$  nên  $x + 2$  và  $y - 3$  là ước của  $-17$ .

Do đó ta có bảng giá trị sau:

$x + 2$	1	-1	17	-17
$y - 3$	-17	17	-1	1
$x$	-1	-3	15	-19
$y$	-14	20	2	4

Vậy  $(x, y) \in \{(-1, -14); (-3, 20); (15, 2); (-19, 4)\}$

$$c) y^2x - 2x + y^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x(y^2 - 2) + (y^2 - 2) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y^2 - 2)(x + 1) = 1$$

Ta có bảng giá trị sau:

$x + 1$	1	-1
$y^2 - 2$	1	-1
$x$	0	-2
$y^2$	3	1
$y$	Không có giá trị phù hợp	$\pm 1$
Kết luận	Loại	Thỏa mãn

Vậy  $(x, y) \in \{(-2, 1); (-2, -1)\}$

**Bài 22.** Tìm các số nguyên  $x$  biết:

a)  $(6 - x) \cdot (x + 3) > 0$

b)  $(x^2 - 2)(x^2 - 5)(x^2 - 12) < 0$

**Lời giải**

a)  $(6 - x) \cdot (x + 3) > 0$

$$\Rightarrow -(6 - x)(x + 3) < 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x + 3) < 0$$

$\Rightarrow x - 6$  và  $x + 3$  là hai số trái dấu

Mà  $x - 6 < x + 3$

$$\Rightarrow x - 6 < 0 \text{ và } x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow -3 < x < 6$$

Mà  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Vậy  $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

b)  $(x^2 - 2)(x^2 - 5)(x^2 - 12) < 0 \Rightarrow$  số thừa số nguyên âm là lẻ.

Xét các trường hợp:

TH1: Có 1 thừa số âm, 2 thừa số dương

$$\Rightarrow x^2 - 12 < 0 < x^2 - 5 < x^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 < 12 \text{ và } x^2 > 5$$

$$\Rightarrow 5 < x^2 < 12$$

$$\Rightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

TH2: Có 3 thừa số âm

$$\Rightarrow x^2 - 12 < x^2 - 5 < x^2 - 2 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 < 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \text{ hoặc } x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1$$

Vậy  $x \in \{0; \pm 1; \pm 3\}$

**Bài 23.** Tìm số nguyên  $n$  để các phân số sau có giá trị nguyên:

a)  $\frac{5}{n+1}$

b)  $\frac{n-3}{n+1}$

c)  $\frac{3n+2}{2n-3}$

**Lời giải**

a) Để phân số  $\frac{5}{n+1}$  có giá trị nguyên thì  $5 : (n+1) \Rightarrow n+1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

Vậy  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

b) Ta có  $\frac{n-3}{n+1} = \frac{n+1-4}{n+1} = 1 - \frac{4}{n+1}$

Để  $\frac{n-3}{n+1}$  có giá trị nguyên thì  $\frac{4}{n+1}$  phải có giá trị nguyên  $\Rightarrow n+1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

$$\Rightarrow n \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}$$

Vậy  $n \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}$

c) Để phân số  $\frac{3n+2}{2n-3}$  có giá trị nguyên thì  $\frac{2(3n+2)}{2n-3}$  cũng phải có giá trị nguyên

Ta có:  $\frac{2(3n+2)}{2n-3} = \frac{6n+4}{2n-3} = \frac{3(2n-3)+13}{2n-3} = 3 + \frac{13}{2n-3}$

Để  $\frac{2(3n+2)}{2n-3}$  có giá trị nguyên thì  $\frac{13}{2n-3}$  phải có giá trị nguyên  $\Rightarrow 13 : (2n-3)$

$$\Rightarrow 2n-3 \in U(13) = \{\pm 1; \pm 13\}$$

Ta có bảng sau

$2n-3$	-13	-1	1	13
$n$	-5	1	2	8
$A$	1 (thỏa mãn)	-5 (thỏa mãn)	8 (thỏa mãn)	2 (thỏa mãn)

Vậy  $n \in \{-5; 1; 2; 8\}$

**Bài 24.** Cho phân số  $M = \frac{3n+7}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

- a) Tìm  $n$  để  $M$  có giá trị nguyên  
 b) Tìm  $n$  để  $M$  có giá trị nguyên dương/nguyên âm  
 c) Tìm  $n$  để  $M$  có giá trị lớn nhất / giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

a) Để  $M$  có giá trị nguyên thì  $\frac{16}{n-3}$  nguyên  $\Rightarrow n-3 \in U(16) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}$

Ta có bảng sau:

$n-3$	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$n$	-13	-5	-1	1	2	4	5	7	11	19
$M$	2	1	-1	-5	-13	19	11	7	5	4

Thử lại ta thấy tất cả các giá trị  $n$  đều thoả mãn

Vậy  $n \in \{-13; -5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11; 19\}$

b) Dựa vào kết quả câu a:

Với  $n \in \{-13; -5; 4; 5; 7; 11; 19\}$  thì  $M$  có giá trị nguyên dương

Với  $n \in \{-1; 1; 2\}$  thì  $M$  có giá trị nguyên âm.

c) Để  $M$  có giá trị lớn nhất thì  $\frac{16}{n-3}$  có giá trị lớn nhất hay  $n-3$  nhỏ nhất

$\Rightarrow n-3$  là số nguyên dương nhỏ nhất  $\Rightarrow n-3=1 \Leftrightarrow n=4$

Vậy GTLN của  $M = \frac{3 \cdot 4 + 7}{4 - 3} = 19$  khi  $n=4$

Để  $M$  có giá trị nhỏ nhất thì  $\frac{16}{n-3}$  có giá trị nhỏ nhất hay  $n-3$  lớn nhất

$\Rightarrow n-3$  là số nguyên âm lớn nhất  $\Rightarrow n-3=-1 \Leftrightarrow n=2$

Vậy GTNN của  $M = \frac{3 \cdot 2 + 7}{2 - 3} = -13$  khi  $n=2$

**Bài 25.**

a) Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{Z}$  thì phân số  $A = \frac{2n+7}{3n+10}$  luôn là phân số tối giản

b) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $B = \frac{3n-1}{n+2}$  là phân số tối giản

c) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $C = \frac{4n+3}{3n+1}$  rút gọn được.

**Lời giải**

a) Đặt ƯC  $(2n+7, 3n+10) = d$  ( $d \in \mathbb{Z}$ ). Ta có:

$$\begin{cases} 2n+7 : d \\ 3n+10 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+21 : d \\ 6n+20 : d \end{cases} \Rightarrow (6n+21) - (6n+20) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1\}$$

Vậy  $A = \frac{2n+7}{3n+10}$  là phân số tối giản với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

b) Đặt ƯC  $(3n-1, n+2) = d$  ( $d \in \mathbb{Z}$ ). Ta có:

$$\begin{cases} 3n-1 : d \\ n+2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-1 : d \\ 3(n+2) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-1 : d \\ 3n+6 : d \end{cases} \\ \Rightarrow (3n+6) - (3n-1) : d \Rightarrow 7 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để  $B$  là phân số tối giản thì  $d \neq \pm 7 \Rightarrow n+2 \not\equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow n \neq 7k+5$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Vậy với  $n \neq 7k+5$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) thì  $B$  là phân số tối giản

c) Đặt ƯC  $(4n+3, 3n+1) = d$  ( $d \in \mathbb{Z}$ ). Ta có:

$$\begin{cases} 4n+3 : d \\ 3n+1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(4n+3) : d \\ 4(3n+1) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12n+9 : d \\ 12n+4 : d \end{cases} \\ \Rightarrow (12n+9) - (12n+4) : d \Rightarrow 5 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

Để phân số  $C$  rút gọn được thì  $d = \pm 5$

$$\Rightarrow 4n+3 : 5 \Rightarrow 5n - (4n+3) : 5 \Rightarrow n-3 : 5 \Rightarrow n = 5k+3 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy với  $n = 5k+3$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) thì phân số  $C$  rút gọn được



**Bài 26.** Tính nhanh:

$$a) A = \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{61.63}$$

$$b) B = \frac{6}{2.9} + \frac{6}{9.16} + \frac{6}{16.23} + \dots + \frac{6}{107.114}$$

$$c) C = \frac{10}{56} + \frac{10}{140} + \frac{10}{260} + \dots + \frac{10}{1400}$$

$$d) D = \frac{1.4}{2.3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{3.6}{4.5} + \dots + \frac{98.101}{99.100}$$

$$e) E = \left(-1 - \frac{1}{2}\right) \left(-1 - \frac{1}{3}\right) \left(-1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(-1 - \frac{1}{999}\right)$$

$$f) F = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{99.101}\right)$$

$$g) G = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{-\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

$$h) H = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \dots + \frac{98}{2} + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}$$

**Lời giải**

$$a) A = \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{61.63} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{63} = \frac{1}{3} - \frac{1}{63} = \frac{20}{63}$$

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{6}{2.9} + \frac{6}{9.16} + \frac{6}{16.23} + \dots + \frac{6}{107.114} \\ &= \frac{6}{7} \cdot \left( \frac{7}{2.9} + \frac{7}{9.16} + \frac{7}{16.23} + \dots + \frac{7}{107.114} \right) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{107} - \frac{1}{114} \right) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{114} \right) = \frac{6}{7} \cdot \left( \frac{57}{114} - \frac{1}{114} \right) = \frac{6}{7} \cdot \frac{56}{114} = \frac{8}{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) C &= \frac{10}{56} + \frac{10}{140} + \frac{10}{260} + \dots + \frac{10}{1400} \\ &= \frac{5}{28} + \frac{5}{70} + \frac{5}{130} + \dots + \frac{5}{700} \\ &= \frac{5}{3} \left( \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \frac{3}{10.13} + \dots + \frac{3}{25.28} \right) \\ &= \frac{5}{3} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{28} \right) \\ &= \frac{5}{3} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{28} \right) = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) D &= \frac{1.4}{2.3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{3.6}{4.5} + \dots + \frac{98.101}{99.100} \\
 &= 1 - \frac{2}{2.3} + 1 - \frac{2}{3.4} + 1 - \frac{2}{4.5} + \dots + 1 - \frac{2}{99.100} \\
 &= \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{98 \text{ số } 1} - \left( \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{99.100} \right) \\
 &= 98 - 2 \cdot \left( \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) \\
 &= 98 - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\
 &= 98 - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \right) = 98 - 2 \cdot \frac{49}{100} \\
 &= 98 - \frac{49}{50} = \frac{4851}{50}
 \end{aligned}$$

$$e) E = \left(-1 - \frac{1}{2}\right) \left(-1 - \frac{1}{3}\right) \left(-1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(-1 - \frac{1}{999}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right) \left(\frac{-4}{3}\right) \left(\frac{-5}{4}\right) \dots \left(\frac{-1000}{999}\right)$$

Vì đây là tích của 998 phân số âm nên  $E = \frac{3.4.5 \dots 1000}{2.3.4 \dots 999} = \frac{1000}{2} = 500$

$$\begin{aligned}
 f) F &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{99.101}\right) \\
 &= \frac{4}{1.3} \cdot \frac{9}{2.4} \cdot \frac{16}{3.5} \dots \frac{10000}{99.101} \\
 &= \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{100^2}{99.101} \\
 &= \frac{2.3.4 \dots 100}{1.2.3 \dots 99} \cdot \frac{2.3.4 \dots 100}{3.4.5 \dots 101} \\
 &= \frac{100}{1} \cdot \frac{2}{101} = \frac{200}{101}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) G &= \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \dots + \left(1 - \frac{88}{93}\right)}{\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}} \\
 &= \frac{\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{5}{93}}{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93}\right)} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93}\right)}{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93}\right)} = -10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) H &= \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \dots + \frac{98}{2} + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}} = \frac{1 + \left(\frac{1}{99} + 1\right) + \left(\frac{2}{98} + 1\right) + \dots + \left(\frac{98}{2} + 1\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}} = \frac{\frac{100}{100} + \frac{100}{99} + \frac{100}{98} + \dots + \frac{100}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}} \\
 &= \frac{100 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}} = 100
 \end{aligned}$$

**Bài 27.** a) Cho  $E = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{89} + \frac{1}{90}$ . Chứng minh rằng  $\frac{5}{6} < E < \frac{29}{21}$

b) Cho  $F = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ . Chứng minh rằng  $\frac{32}{101} < F < \frac{7}{16}$

c) Cho  $C = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{4} < C < \frac{1}{3}$

### Lời giải

a) Biểu thức E có 60 số hạng. Chia làm 2 nhóm, ta có:

$$E = \left( \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left( \frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{90} \right)$$

\* Làm giảm phân số:

$$E > \frac{1}{60} \cdot 30 + \frac{1}{90} \cdot 30 = \frac{5}{6}$$

Biểu thức E có 60 số hạng. Chia làm 3 nhóm, ta có:

$$E = \left( \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left( \frac{1}{51} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{70} \right) + \left( \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \dots + \frac{1}{90} \right)$$

\* Làm trội phân số:

$$E < \frac{1}{30} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 20 + \frac{1}{70} \cdot 20$$

$$E < \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{142}{105} < \frac{145}{105} = \frac{29}{21}$$

$$\text{Vậy } \frac{5}{6} < E < \frac{29}{21}$$

b)

$$\text{Chứng minh } F > \frac{32}{101}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3^2} > \frac{1}{3.4}; \frac{1}{4^2} > \frac{1}{4.5}, \dots, \frac{1}{100^2} > \frac{1}{100.101}$$

$$\begin{aligned} F &> \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{100.101} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{101} = \frac{98}{303} > \frac{96}{303} = \frac{32}{101} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{32}{101} < F < \frac{7}{16}$$

$$\text{c) Cho } C = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}}. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{4} < C < \frac{1}{3}$$

$$5C = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{2015}{5^{2014}} + \frac{2016}{5^{2015}}$$

$$5C - C = \left( 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{2015}{5^{2014}} + \frac{2016}{5^{2015}} \right) - \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} \right)$$

$$\begin{aligned} 4C &= 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} \\ &= 1 + \underbrace{\left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2015}} \right)}_{\text{đặt là } D} - \frac{2016}{5^{2016}} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } D = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2015}}$$

$$\Rightarrow 5D = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2014}}$$

$$\Rightarrow 4D = 5D - D = 1 - \frac{1}{5^{2015}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5^{2015}}$$

$$\text{Do đó } 4C = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4.5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow C < \frac{5}{16} < \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Mặt khác } C = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} > \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} = \frac{7}{25} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{4} < C < \frac{1}{3}$$

$$\text{Chứng minh } F < \frac{7}{16}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{5^2} < \frac{1}{4.5}, \frac{1}{6^2} < \frac{1}{5.6}, \dots, \frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100}$$

$$\begin{aligned} F &< \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} = \frac{61}{144} - \frac{1}{100} < \frac{63}{144} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

**Bài 28.**

a) Cho  $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$ ;  $B = \frac{1}{501.1000} + \frac{1}{502.999} + \dots + \frac{1}{999.502} + \frac{1}{1000.501}$ . Tính  $\frac{A}{B}$

b) Cho  $C = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{101}$ . Chứng minh C không phải là số tự nhiên.

c) Cho  $\frac{m}{n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99}$ . Chứng minh rằng  $m : 149$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1000}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{500}\right) \\ &= \frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \dots + \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{501.1000} + \frac{1}{502.999} + \dots + \frac{1}{999.502} + \frac{1}{1000.501} \\ 1501B &= \frac{501+1000}{501.1000} + \frac{502+999}{502.999} + \dots + \frac{999+502}{999.502} + \frac{1000+501}{1000.501} \\ 1501B &= \frac{1}{501} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{502} + \frac{1}{999} + \dots + \frac{1}{999} + \frac{1}{502} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{501} \\ 1501B &= 2\left(\frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \dots + \frac{1}{1000}\right) \\ 1501B &= 2A \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{1501}{2} \end{aligned}$$

b) Chọn mẫu chung là  $5.7.9 \dots 99.101$  ta có:  $C = \frac{k_5 + k_7 + \dots + k_{99} + k_{101}}{5.7.9 \dots 101}$

với  $k_5 = 7.9.11 \dots 99.101$ ;  $k_7 = 5.9.11 \dots 99.101$ ; ... ;  $k_{101} = 5.7.9 \dots 97.99$

**Nhận xét:** Từ  $k_5$  đến  $k_{101}$  chỉ có  $k_{101} = 5.7 \dots 97.99$  không chia hết cho 101; các số còn lại đều chia hết cho 101.

Do đó tử số là  $k_5 + k_7 + \dots + k_{99} + k_{101}$  không chia hết cho 101; mà mẫu số là  $5.7.9 \dots 101$  chia hết cho 101  $\Rightarrow$  tử số không chia hết cho mẫu số  $\Rightarrow C$  không là số tự nhiên.

Vậy C không là số tự nhiên.

c) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} \\ &= \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{98} \right) = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} \right) - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{98} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} \right) - \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{49} \right) = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} \\ &= \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{99} \right) + \left( \frac{1}{51} + \frac{1}{98} \right) + \dots + \left( \frac{1}{74} + \frac{1}{75} \right) \\ &= \frac{149}{50.99} + \frac{149}{51.98} + \dots + \frac{149}{74.75} \end{aligned}$$

Chọn mẫu chung là 50.51.52....98.99

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{149(k_1 + k_2 + \dots + k_{25})}{50.51.52....98.99} \quad \text{với } k_1; k_2; \dots; k_{25} \text{ là các thừa số phụ}$$

Vì tử chia hết cho 149, còn mẫu không chứa thừa số nguyên tố 149 nên khi rút gọn phân số đến tối giản thì tử vẫn chia hết cho 149

Vậy  $m : 149$

### Bài 29.

a) Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh rằng  $4^{2n} - 3^{2n} - 7$  chia hết cho 21

b) Cho các số nguyên dương  $a; b$  thỏa mãn  $a + 2b; b + 2a$  là các số chính phương.

Chứng minh rằng  $4a^2 + 2ab + 2024b^2$  chia hết cho 9

c) Tìm các số nguyên tố  $a, b, c$  sao cho  $a^4 + b^4 + c^4 + 54 = 11abc$

### Giải

$$\text{a) } 4^{2n} - 3^{2n} - 7 = 16^n - 9^n - 7$$

$$\text{Vi } 16 \equiv 1 \pmod{3}; 9 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 16^n - 9^n - 7 \equiv 1^n - 0 - 7 \equiv -6 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 4^{2n} - 3^{2n} - 7 : 3 \quad (1)$$

Lại có:

$$16 \equiv 9 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 16^n - 9^n - 7 \equiv 9^n - 9^n - 7 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 4^{2n} - 3^{2n} - 7 : 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) } \Rightarrow 4^{2n} - 3^{2n} - 7 : 21 \quad (\text{đpcm})$$

b) Đặt  $a + 2b = x^2$ ;  $b + 2a = y^2$

Vì  $x^2$ ;  $y^2$  chia 3 dư 0 hoặc 1

Mà  $x^2 + y^2 = 3a + 3b = 3(a + b) : 3$

$\Rightarrow x^2 : 3$ ;  $y^2 : 3$

$\Rightarrow x : 3$ ;  $y : 3$

$\Rightarrow x^2 : 9$ ;  $y^2 : 9$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3(a + b) : 9 \\ a + 2b : 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b : 3 \\ a + 2b : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : 3 \\ b : 3 \end{cases} \Rightarrow 4a^2 + 2ab + 2024b^2 : 9 \text{ (đpcm)}$

c) Nếu cả ba số  $a, b, c$  đều không chia hết cho 3 thì  $a^2, b^2, c^2$  đều chia 3 dư 1

$\Rightarrow a^4; b^4; c^4$  đều chia 3 dư 1

$\Rightarrow (a^4 + b^4 + c^4) : 3$  mà  $11abc \not\equiv 3$  (vô lí)

$\Rightarrow$  trong ba số  $a, b, c$  phải có ít nhất một số chia hết cho 3

Giả sử  $a : 3$  mà  $a$  là số nguyên tố  $\Rightarrow a = 3$ . Khi đó  $b^4 + c^4 + 135 = 33bc$ .

Nếu cả  $b^4, c^4$  đều chia 3 dư 1  $\Rightarrow b^4 + c^4 + 135$  chia 3 dư 2, mà  $33bc : 3$  (vô lí)

$\Rightarrow b$  hoặc  $c$  chia hết cho 3

Giả sử  $b : 3$  mà  $b$  là số nguyên tố  $\Rightarrow b = 3$

Khi đó  $c^4 + 216 = 99c \Rightarrow c^4 = 99c - 216 : 3 \Rightarrow c : 3$

Mà  $c$  là số nguyên tố  $\Rightarrow c = 3$

Vậy  $a = b = c = 3$

### Bài 30.

a) Cho 25 số tự nhiên 1; 2; 3; ...; 25. Chọn ra 12 số trong đó không có 2 số nào có tổng bằng 25.

Chứng minh rằng trong các số được chọn có 1 số là số chính phương.

b) Trên bảng viết các số 3, 4, 5, 6. Mỗi lần xóa đi hai số  $x, y$  tùy ý và thay bởi 2 số  $\frac{3xy}{x+2y}$  và  $\frac{3xy}{2x+y}$ .

Thực hiện liên tiếp các bước trên, chứng minh rằng không có thời điểm nào mà trên bảng xuất hiện một số nhỏ hơn 1.

### Giải

a) Ta chia 25 số đã cho thành 13 nhóm là (1;24); (2;23);...; (12;13); 25.

Vì chọn ra 12 số trong đó không có 2 số nào có tổng bằng 25 nên mỗi nhóm trên ta chỉ chọn ra 1 số.

Trường hợp 1: Trong 12 số đã chọn có số 25 (suy ra đpcm).

Trường hợp 2: Trong 12 số đã chọn không có số 25.

Khi đó trong các nhóm còn lại, mỗi nhóm phải lấy ra 1 số.

Mà nhóm (9;16) gồm hai số chính phương nên ta luôn chọn được 1 số chính phương từ 12 số đó (đpcm).

b) **Nhận xét:**  $\frac{x+2y}{3xy} + \frac{2x+y}{3xy} = \frac{x+2y+2x+y}{3xy} = \frac{3y+3x}{3xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

⇒ Tổng nghịch đảo các số ban đầu và các số mới bằng nhau

⇒ Tổng nghịch đảo của các số trên bảng luôn luôn bằng:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$  (\*)

Giả sử trên bảng xuất hiện một số nhỏ hơn 1 thì nghịch đảo của số đó lớn hơn 1

Khi đó tổng nghịch đảo của các số trên bảng sẽ lớn hơn 1 (mâu thuẫn với (\*))

Vậy không có thời điểm nào mà trên bảng xuất hiện một số nhỏ hơn 1.



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin