UBND QUẬN HAI BÀ TRƯNG
PHÒNG GD&ĐT QUẬN HAI BÀ TRƯNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học 2022 – 2023
Môn: **Toán**
Ngày thi: 18/10/2022
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I. *(5,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+x-1=\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x^2-1}.$
2) Cho a,b,c là các số thực thoả mãn: $a+b=2c$ và $2ab=ac+bc.$ Chứng minh rằng: $a=b=c.$

Bài II. *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh với mọi số tự nhiên n lẻ, giá trị của biểu thức $T=n^3+3n^2-n-3$ luôn chia hết cho 48.
2) Tìm các số nguyên x,y thoả mãn: $x\left(x^2-y\right)=5-2y.$

Bài III. *(2,0 điểm)*

Với a,b là các số thực không âm và thoả mãn $a+b=2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\sqrt{a}\left(b+1\right)+\sqrt{b}\left(a+1\right).$

Bài IV. *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn, không cân $\left(AB<AC\right)$, M là trung điểm của BC. Gọi E,F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M lên AC,AB (E thuộc AC; F thuộc AB). Đường thẳng qua C và vuông góc với BC, cắt ME tại P; đường thẳng qua B vuông góc với BC, cắt MF tại Q.

1) Chứng minh $ME.MP=MF.MQ$ và $\angle MFE=\angle MPQ.$
2) Hai đường thẳng FM và AC cắt nhau tại S. Chứng minh tam giác SEF đồng dạng với tam giác SMA và AM vuông góc với PQ.
3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm P,H,Q thẳng hàng.

Bài V. *(2,0 điểm)*

1) Cho a,b,x,y là các số nguyên dương thoả mãn a,b nguyên tố cùng nhau và $\dfrac{x^2+y^2}{a}=\dfrac{xy}{b}$.Chứng minh $a+2b$ là số chính phương.
2) Trong khu rừng trên đảo có một đàn gồm 2021 con kì nhông màu xanh,2022 con kì nhông màu đỏ, 2023 con kì nhông màu vàng sinh sống. Để lẩn trốn vắn mồi, loài kì nhông này biến đổi màu như sau: nếu hai con khác màu gặp nhau thì chúng cùng đổi sang màu thứ ba; nếu hai con cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên màu. Hỏi có khả năng nào để tất cả các con kì nhông trở thành cùng một màu được không? Vì sao?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. *(5,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+x-1=\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x^2-1}$.
2) Cho a,b,c là các số thực thoả mãn: $a+b=2c$ và $2ab=ac+bc$. Chứng minh rằng: $a=b=c$.

Hướng dẫn:

1) ĐKXĐ: $x\ge \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-1}=a;\sqrt{2x^2-1}=b$ ta được:

$$\frac{a^2+b^2}{2}=ab\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2-1}=\left[\begin{array}{l} x=0(KTM) \\ x=1(TM)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

2) $2ab=ac+bc\Rightarrow 2ab=c(a+b)$

Mà $a+b=2c\Rightarrow 2ab=2c^2\Rightarrow ab=c^2$.

Có $a+b=2c\Rightarrow (a+b)^2=4c^2$

$ab=c^2\Rightarrow (a+b)^2=4ab\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow a=b.$

Lại có $a+b=2c\Rightarrow a=b=c.$

Bài II. *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh với mọi số tự nhiên n lẻ, giá trị của biểu thức $T=n^3+3n^2-n-3$ luôn chia hết cho 48.
2) Tìm các số nguyên x,y thoả mãn: $x(x^2-y)=5-2y$.

Hướng dẫn:

1) $T=(n-1)(n+1)(n+3)$.

Vì n lẻ, đặt $n=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow T=2k(2k+2)(2k+4)=8k(k+1)(k+2).$

Vì $k,k+1,k+2$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên trong 3 số, tồn tại một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

$\Rightarrow T \vdots 48.$

2) $x\left(x^2-y\right)=5-2y \Rightarrow y(x-2)=x^3-5.$

- Với $x=2$, không thoả mãn.
- Với $x \neq 2$, ta được $y=\dfrac{x^3-5}{x-2}$.

  $\Rightarrow y=\dfrac{\left(x^3-8\right)+3}{x-2} \Rightarrow y=x^2+2x+4+\dfrac{3}{x-2}$

  Để $y \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \{\pm 1; \pm 3\}$. Ta tìm được $(x, y) \in \{(1;4);(3;22);(-1;2);(5;40)\}$.

Bài III. *(2,0 điểm)*

Với a, b là các số thực không âm và thoả mãn $a+b=2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\sqrt{a}(b+1)+\sqrt{b}(a+1)$.

Hướng dẫn:

$T=\sqrt{a}(b+1)+\sqrt{b}(a+1)$.

- Tìm GTLN

  $T=\sqrt{ab}\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{ba}\sqrt{a}+\sqrt{b}$

  $T \leq \dfrac{ab+b}{2}+\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{ba+a}{2}+\dfrac{b+1}{2}(AM-GM)$

  $T \leq ab+a+b+1$

  $T \leq ab+3$

  Lại có $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow ab \leq 1 \Rightarrow T \leq 4$.

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.
- Tìm GTNN

  $T=b\sqrt{a}+\sqrt{a}+a\sqrt{b}+\sqrt{b}$

  $T \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

  Lại có $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (dễ dàng chứng minh bằng biến đổi tương đương)

  $\Rightarrow T \geq \sqrt{a+b} \Rightarrow T \geq \sqrt{2}$.

  Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $(a, b)=(0,2)$.

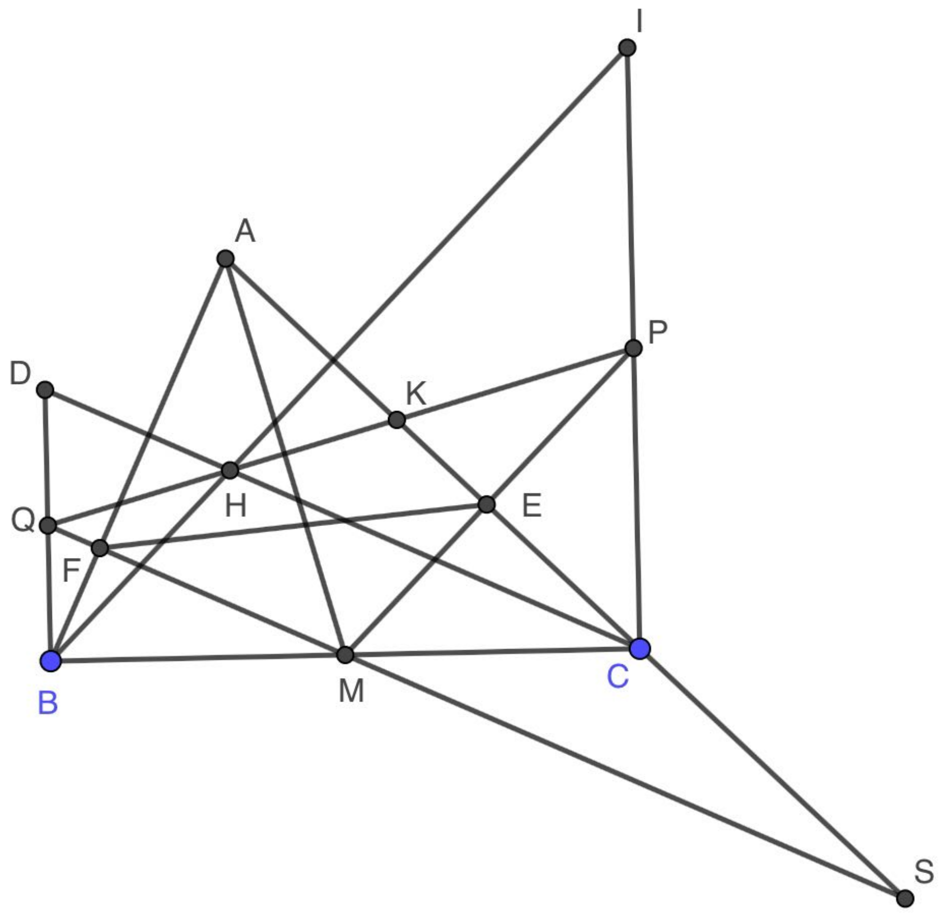
Bài IV. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, không cân $(AB<AC)$, M là trung điểm của BC. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M lên AC, AB (E thuộc $AC; F$ thuộc AB).

Đường thẳng qua C và vuông góc với BC, cắt ME tại P; đường thẳng qua B vuông góc với BC, cắt MF tại Q.

1) Chứng minh $ME.MP = MF.MQ$ và $\angle MFE = \angle MPQ$.
2) Hai đường thẳng FM và AC cắt nhau tại S. Chứng minh tam giác SEF đồng dạng với tam giác SMA và AM vuông góc với PQ.
3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn:



1) Có $ME.MP = MF.MQ = \dfrac{BC^2}{4}$.

Từ đó suy ra $\Delta MEF \sim \Delta MPQ \Rightarrow \angle MFE = \angle MPQ$.

2) Dễ dàng có: $\Delta SEM \sim \Delta SFA \Rightarrow \dfrac{SE}{SF} = \dfrac{SM}{SA}$

Từ đó suy ra $\Delta SEF \sim \Delta SMA$. Suy ra $\angle SAM = \angle SFE = \angle MPQ$.

Gọi K là giao điểm của AC và PQ

$\Rightarrow \angle AKH = \angle PKE$, mà $\angle PKE + \angle MPQ = 90^0$

$\Rightarrow \angle AKH + \angle SAM = 90^0 \Rightarrow AM \perp PQ.$

3) Đường thẳng BH, CH cắt CP, BQ lần lượt tại $I, D.$

Dễ dàng có: QM là đường trung bình của $\Delta BDC. \Rightarrow Q$ là trung điểm của $BD.$

Tương tự, P là trung điểm $CI.$

$$\Delta BHD \sim \Delta IHC(g-g) \Rightarrow \frac{HB}{HI} = \frac{BD}{CI} \Rightarrow \frac{HB}{HI} = \frac{BQ}{PI}$$

Lại có $\angle HBQ = \angle HIP \Rightarrow \Delta HBQ \sim \Delta HIP \Rightarrow \angle BHQ = \angle PHI$

$\Rightarrow Q, H, P$ thẳng hàng.

Bài V. *(2,0 điểm)*

1) Cho a, b, x, y là các số nguyên dương thoả mãn a, b nguyên tố cùng nhau và $\frac{x^2+y^2}{a} = \frac{xy}{b}$. Chứng minh $a+2b$ là số chính phương.
2) Trong khu rừng trên đảo có một đàn gồm 2021 con kì nhông màu xanh,2022 con kì nhông màu đỏ, 2023 con kì nhông màu vàng sinh sống. Để lẩn trốn vắn mồi, loài kì nhông này biến đổi màu như sau: nếu hai con khác màu gặp nhau thì chúng cùng đổi sang màu thứ ba; nếu hai con cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên màu. Hỏi có khả năng nào để tất cả các con kì nhông trở thành cùng một màu được không? Vì sao?

Hướng dẫn:

1) Đặt $\gcd(x, y) = d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$

Thế thì tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\gcd(m,n)=1$ để $x = dm, y = dn.$

$$\Rightarrow \frac{d^2m^2 + d^2n^2}{a} = \frac{dm.dn}{b} \Rightarrow \frac{m^2+n^2}{mn} = \frac{a}{b}$$

Giả sử m^2+n^2 và mn có ước nguyên tố chung là $p \Rightarrow \begin{cases} m^2+n^2 \vdots p \\ mn \vdots p \end{cases} (1)$

$\Rightarrow (m+n)^2 \vdots p \Rightarrow m+n \vdots p (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m \vdots p, n \vdots p$ mâu thuẫn vì $\gcd(m,n)=1 \Rightarrow \frac{m^2+n^2}{mn}$ là phân số tối giản

$\Rightarrow a=m^2+n^2, b=mn \Rightarrow a+2b=(m+n)^2$ là số chính phương.

2)

- Giả sử ở một thời điểm nào đó, số kì nhông màu xanh, đỏ, vàng là (a,b,c). $(a,b,c \in \mathbb{N})$
- Bây giờ nếu 2 con kì nhông khác màu gặp nhau, giả sử là kì nhông xanh và đỏ, khi đó số kì nhông xanh, đỏ, vàng sẽ lần lượt là: $a-1, b-1, c+2$.

  Ta thấy rằng:

  $(a-1)-(b-1) \equiv (a-b) \pmod 3$

  $(b-1)-(c+2) \equiv (b-c) \pmod 3$

  $(c+2)-(a-1) \equiv (c-a) \pmod 3$

  Như vậy, sau một lần đổi màu bất kì thì số dư khi chia 3 của các hiệu: kì nhông xanh trừ kì nhông đỏ, kì nhông đỏ trừ kì nhông vàng và kì nhông vàng trừ kì nhông xanh là không đổi.
- Nếu như tất cả các con kì nhông về cùng một màu, thì sẽ có 2 màu không xuất hiện, khi đó hiệu của số kì nhông mang 2 màu đó là: $0-0 \equiv 0 \pmod 3$.

  Điều này không thể xảy ra vì:

  $2021-2022 \not\vdots\, 3$

  $2022-2023 \not\vdots\, 3$

  $2023-2021 \not\vdots\, 3$

Vậy không thể có khả năng tất cả kì nhông chuyển cùng một màu.