

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 8

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. PHẦN ĐẠI SỐ

1. Đơn thức và đa thức nhiều biến
2. Các phép tính cộng, trừ, nhân, chia đa thức
3. Hằng đẳng thức

II. PHẦN HÌNH HỌC

1. Định lí Pythagore
2. Tứ giác, hình thang, hình thang cân
3. Hình bình hành
4. Hình chữ nhật

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Thu gọn và tìm bậc của các đa thức sau:

- a) $x^4 - 3x^2y^2 + 3x^2y - x^4 + 1$
- b) $5x^2y + 8xy - 2x^2 - 5x^2y + x^2$
- c) $5x^2 - 7xy + 2,5y^2 + 2x - 8,3y + 1$
- d) $4x^5 - \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2 - 4x^5 + 2y^2 - 7$

Bài 2. Cho đa thức $M = 9x^2y^2z - 3xyz + 5y^2z - 6x^2y^2z + x^2y^2 - 3x^2y^2z$

- a) Thu gọn và tìm bậc của đa thức M ;
- b) Tính giá trị của đa thức M tại $x = 1; y = -1$ và $z = 2$

Bài 3.

- a) Tìm đa thức M thoả mãn $M - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.
- b) Cho hai đa thức: $A = x^7 - 4x^3y^2 - 5xy + 7$; $B = x^7 + 5x^3y^2 - 3xy - 3$

Tìm đa thức D sao cho: $A + D = B$

- c) Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức: $C = x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}; y = -100$

Bài 4. Chứng tỏ giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

- a) $A = x^4 - (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - y^4$
- b) $B = (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2)$
- c) $C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$
- d) $D = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$

Bài 5.

a) Chứng minh rằng biểu thức $P = (2y - x)(x + y) + x(y - x) - 2y(x + 5y) - 1$ luôn nhận giá trị âm với mọi giá trị của biến x và y

b) Chứng minh rằng ít nhất một trong 3 đa thức sau có giá trị dương với mọi giá trị của biến x, y biết:

$$P = 5x^2y^2 - xy - 2y^3 - y^2 + 5x^4; \quad Q = -2x^2y^2 - 5xy + y^3 - 3y^2 + 2x^4; \quad R = -x^2y^2 + 6xy + y^3 + 6y^2 + 7$$

Bài 6. Cho $x + y = 2$. Tính giá trị của đa thức: $B = x + y + 3(x + y) + 3^2 \cdot (x + y) + \dots + 3^{100} \cdot (x + y)$.

Bài 7.

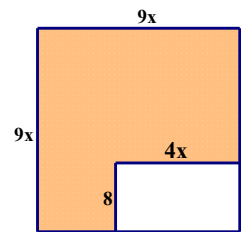
a) Cho $A = x^5y^n - 12x^{n+1}y^4; B = 24x^{n-1}y^3$. Tìm số tự nhiên $n > 0$ để A chia hết cho B

b) Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$

Bài 8. Tìm a, b, c thỏa mãn đẳng thức $(ax + b)(x^2 - 2cx + abc) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ với mọi giá trị của biến x

Bài 9.

Thửa đất hình vuông có cạnh $9x$, bên trong thửa đất đã canh tác một khoảng đất hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $4x$ và 8 để trồng cà chua. Hệ số cao nhất của biểu thức biểu thị diện tích thửa đất chưa canh tác còn lại là bao nhiêu?

**Bài 10.**

Một tàu du lịch đi ngược dòng từ Quảng Ninh tới Hải Phòng, sau đó nghỉ lại tại Hải Phòng 3 giờ trước khi quay trở lại Quảng Ninh (từ Hải Phòng về Quảng Ninh tàu đi xuôi dòng). Quãng đường từ Quảng Ninh tới Hải Phòng là 80 km . Vận tốc của dòng nước là 6 km/h . Gọi vận tốc thực của tàu là $x \text{ (km/h)}$. Hãy viết biểu thức biểu thị thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi quay trở về Quảng Ninh?

Bài 11. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+2y)^2$

e) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)^3$

b) $(7x-6y)^2$

f) $\left(\frac{1}{3}x+2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right)$

c) $\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)$

g) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

d) $(2x+y)^3$

Bài 12. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = (x^2 - 8x + 16) - (x^2y^2 + 2xy + 1)$ với $x = 4; y = 1$

b) $B = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ với $x = 8; y = 6$

c) $C = \left(\frac{x}{2}-y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{x}{2}-y\right) - 8$ với $x = 206; y = 1$

d) $D = (6x+2)(9x^2-3x+1) - (x+1)(x^2-x+1)$ với $x = \frac{1}{2}$

Bài 13. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(x+y)^2 + (x-y)^2 + 2(x+y)(x-y) = 4x^2.$

b) $2y^2 - 10xy = 3(x-y)^2 - 2(x+y)^2 - (x-y)(x+y).$

c) $(4x-1)^3 - (4x-3)(16x^2+3) = 8.$

Bài 14. Tìm x , biết

a) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 21.$

b) $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2-6) = 18.$

c) $(x-1)^3 - (x-2)(x^2+2x+4) + 3x(x+2) = 6.$

d) $(x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2-2x+1) - 3x^2 = 42$

Bài 15. Tính nhanh

a) $127^2 + 146 \cdot 127 + 73^2$

c) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

b) $9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$

d) $(20^2 + 18^2 + 16^2 + \dots + 4^2 + 2^2) - (19^2 + 17^2 + 15^2 + \dots + 3^2 + 1^2)$

Bài 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = x^2 - 4x + 24.$

b) $B(x) = 2x^2 - 8x + 1.$

c) $C(x) = 3x^2 + x - 1$

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = -x^2 - 6x - 11.$

b) $B(x) = -3x^2 + x + 1$

Bài 18. Tìm x, y, z biết: $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 16z^2 - 8z + 35 = 0$

Bài 19.

a) Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ thì $a = b = c$

b) Cho các số a, b, c thỏa mãn $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

Tính giá trị biểu thức: $M = (a - b)^{2014} + (b - c)^{2015} + (c - a)^{2016}$

Bài 20. Tính số đo các góc chưa biết của hình thang $IJGH$ ($IJ \parallel GH$) trong các trường hợp sau:

a) $\widehat{H} = 50^\circ, \widehat{J} = 110^\circ.$

b) $IJGH$ là hình thang cân và $\widehat{H} = 30^\circ.$

Bài 21. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ AH và CK vuông góc với BD lần lượt tại H và K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Bài 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Tia phân giác của góc A cắt CD ở E . Tia phân giác của góc C cắt AB ở F . Chứng minh rằng:

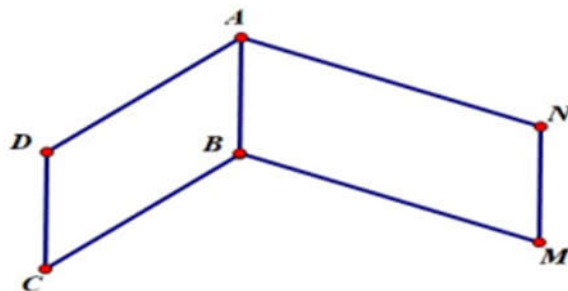
a) Tứ giác $AFCE$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy

Bài 23. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ANMB$ như hình vẽ

a) Chứng minh $CD = MN$

b) Chứng minh $\widehat{BCD} + \widehat{BMN} = \widehat{DAN}$



Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A ; đường cao AH . Gọi E là trung điểm của AB . Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại M . Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $EFMH$ là hình thang cân.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Điểm D thuộc cạnh BC . Các hình chiếu của D trên AB, AC theo thứ tự là E, F .

a) Chứng minh rằng $DEAF$ là hình chữ nhật.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $DEAF$. Chứng minh $HO = \frac{1}{2}EF$, từ đó suy ra tam giác EHF vuông.

c) Tìm vị trí của điểm D để EF có độ dài nhỏ nhất.

-----Hết-----



HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Thu gọn và tìm bậc của các đa thức sau:

a) $x^4 - 3x^2y^2 + 3x^2y - x^4 + 1$

b) $5x^2y + 8xy - 2x^2 - 5x^2y + x^2$

c) $5x^2 - 7xy + 2,5y^2 + 2x - 8,3y + 1$

d) $4x^5 - \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2 - 4x^5 + 2y^2 - 7$

Lời giải:

a) $x^4 - 3x^2y^2 + 3x^2y - x^4 + 1 = (x^4 - x^4) - 3x^2y^2 + 3x^2y + 1 = -3x^2y^2 + 3x^2y + 1$

Hạng tử có bậc cao nhất của đa thức thu gọn là $-3x^2y^2$ có bậc 4. Do đó bậc của đa thức là 4.

b) $5x^2y + 8xy - 2x^2 - 5x^2y + x^2$

$$= (5x^2y - 5x^2y) + 8xy + (-2x^2 + x^2)$$

$$= 8xy - x^2$$

Bậc của đa thức là 2.

c) $5x^2 - 7xy + 2,5y^2 + 2x - 8,3y + 1$. Bậc của đa thức là 2.

d) $4x^5 - \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2 - 4x^5 + 2y^2 - 7$

$$= (4x^5 - 4x^5) - \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2 + 2y^2 - 7$$

$$= -\frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2 + 2y^2 - 7$$

Bậc của đa thức bằng 4.

Bài 2.

Cho đa thức $M = 9x^2y^2z - 3xyz + 5y^2z - 6x^2y^2z + x^2y^2 - 3x^2y^2z$

a) Thu gọn và tìm bậc của đa thức M ;

b) Tính giá trị của đa thức M tại $x = 1; y = -1$ và $z = 2$

Lời giải

a) Thu gọn đa thức M :

$$M = 9x^2y^2z - 3xyz + 5y^2z - 6x^2y^2z + x^2y^2 - 3x^2y^2z$$

$$= (9x^2y^2z - 6x^2y^2z - 3x^2y^2z) - 3xyz + 5y^2z + x^2y^2$$

$$= -3xyz + 5y^2z + x^2y^2$$

Hạng tử $-3xyz$ có bậc 3; hạng tử $5y^2z$ có bậc 3; hạng tử x^2y^2 có bậc 4.

Vậy đa thức M có bậc 4.

b) Thay $x = 1; y = -1$ và $z = 2$ vào đa thức M thu gọn, ta được:

$$M = -3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-1)^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot (-1)^2 = 6 + 10 + 1 = 17.$$

Vậy $M = 17$ tại $x = 1; y = -1$ và $z = 2$

Bài 3.

a) Tìm đa thức M thỏa mãn $M - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.

b) Cho hai đa thức: $A = x^7 - 4x^3y^2 - 5xy + 7$; $B = x^7 + 5x^3y^2 - 3xy - 3$.

Tìm đa thức D sao cho: $A + D = B$

c) Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức: $C = x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}; y = -100$.

Lời giải:

$$a) M - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$$

$$M = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$= x^2 + (-7xy + 3xy) + (8y^2 - 4y^2)$$

$$= x^2 + (-7xy + 3xy) + (8y^2 - 4y^2)$$

$$= x^2 - 4xy + 4y^2$$

b) Ta có $A + D = B$, suy ra $D = B - A$

$$D = x^7 + 5x^3y^2 - 3xy - 3 - (x^7 - 4x^3y^2 - 5xy + 7)$$

$$= x^7 + 5x^3y^2 - 3xy - 3 - x^7 + 4x^3y^2 + 5xy - 7$$

$$= (x^7 - x^7) + (5x^3y^2 + 4x^3y^2) + (-3xy + 5xy) + (-3 - 7)$$

$$= 9x^3y^2 + 2xy - 10$$

Vậy $D = 9x^3y^2 + 2xy - 10$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x) \\
 &= x \cdot x^2 - x \cdot y - (x^2 \cdot x + x^2 \cdot y) + y \cdot x^2 - y \cdot x \\
 &= x^3 - xy - x^3 - x^2y + x^2y - xy \\
 &= (x^3 - x^3) + (x^2y - x^2y) - xy - xy \\
 &= -2xy
 \end{aligned}$$

Thay $x = \frac{1}{2}$; $y = -100$ vào đa thức C ta có: $C = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-100) = 100$.

Bài 4. Chứng tỏ giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } A = x^4 - (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - y^4 & \text{c) } C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) \\
 \text{b) } B = (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2) & \text{d) } D = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3
 \end{array}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= x^4 - (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - y^4 \\
 &= x^4 - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - y^4 \\
 &= x^4 - (x^4 - y^4) - y^4 \\
 &= x^4 - x^4 + y^4 - y^4 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến x, y

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2) \\
 &= x^4 - 2x^2 + x^3 - 2x - x^2 + 2 - x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x \\
 &= (x^4 - x^4) + (x^3 - x^3) + (-2x^2 - x^2 + 3x^2) + (-2x + 2x) + 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) \\
 &= x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x - x^4 - x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 2 \\
 &= (x^4 - x^4) + (x^3 - x^3) + (-3x^2 + x^2 + 2x^2) + (-2x + 2x) - 2 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= x(2x+1) - x^2(x+2) + x^3 - x + 3 \\
 &= 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + x^3 - x + 3 \\
 &= (-x^3 + x^3) + (2x^2 - 2x^2) + (x - x) + 3 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức D không phụ thuộc vào giá trị của biến x

Bài 5.

a) Chứng minh rằng biểu thức $P = (2y - x)(x + y) + x(y - x) - 2y(x + 5y) - 1$ luôn nhận giá trị âm với mọi giá trị của biến x và y .

b) Chứng minh rằng ít nhất một trong 3 đa thức sau có giá trị dương với mọi giá trị của biến x, y biết:

$$P = 5x^2y^2 - xy - 2y^3 - y^2 + 5x^4$$

$$Q = -2x^2y^2 - 5xy + y^3 - 3y^2 + 2x^4$$

$$R = -x^2y^2 + 6xy + y^3 + 6y^2 + 7$$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= (2y - x)(x + y) + x(y - x) - 2y(x + 5y) - 1 \\
 &= 2xy + 2y^2 - x^2 - xy + xy - x^2 - 2xy - 10y^2 - 1 \\
 &= (2xy - xy + xy - 2xy) + (2y^2 - 10y^2) + (-x^2 - x^2) - 1 \\
 &= -8y^2 - 2x^2 - 1
 \end{aligned}$$

Với mọi giá trị của x, y ta có: $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ nên $-2x^2 \leq 0; -8y^2 \leq 0$.

Suy ra $-8y^2 - 2x^2 - 1 \leq -1$ với mọi giá trị của biến x, y .

Vậy P luôn nhận giá trị âm với mọi giá trị của biến x và y (điều phải chứng minh).

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 P+Q+R &= 5x^2y^2 - xy - 2y^3 - y^2 + 5x^4 - 2x^2y^2 - 5xy + y^3 - 3y^2 + 2x^4 - x^2y^2 + 6xy + y^3 + 6y^2 + 7 \\
 &= (5x^2y^2 - 2x^2y^2 - x^2y^2) + (-xy - 5xy + 6xy) + (-2y^3 + y^3 + y^3) + (-y^2 - 3y^2 + 6y^2) + (5x^4 + 2x^4) + 7 \\
 &= 2x^2y^2 + 2y^2 + 7x^4 + 7
 \end{aligned}$$

Nhận thấy:

$$2x^2y^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}$$

$$2y^2 \geq 0 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R}$$

$$7x^4 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Suy ra: $P+Q+R \geq 7$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Vậy có ít nhất một trong ba đa thức P, Q, R có giá trị dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (điều phải chứng minh)

Bài 6. Cho $x + y = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $B = x + y + 3(x + y) + 3^2 \cdot (x + y) + \dots + 3^{100} \cdot (x + y)$.

Lời giải:

$$B = x + y + 3(x + y) + 3^2 \cdot (x + y) + \dots + 3^{100} \cdot (x + y) = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{100}) \cdot (x + y).$$

$$\text{Đặt } C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{100}$$

$$\text{Khi đó } B = C \cdot (x + y). \text{ Ta có } 3C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} + 3^{101}$$

$$\text{Trừ vế với vế của } 3C \text{ cho } C \text{ ta có: } 2C = 3^{101} - 1.$$

$$\text{Suy ra } C = \frac{3^{101} - 1}{2}.$$

$$\text{Thay } x + y = 2 \text{ và } C = \frac{3^{101} - 1}{2} \text{ vào biểu thức } B, \text{ ta có: } B = \frac{3^{101} - 1}{2} \cdot 2 = 3^{101} - 1$$

Bài 7.

a) Cho $A = x^5y^n - 12x^{n+1}y^4$; $B = 24x^{n-1}y^3$. Tìm số tự nhiên $n > 0$ để A chia hết cho B

b) Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$

Lời giải:

$$a) A : B = (x^5y^n - 12x^{n+1}y^4) : (24x^{n-1}y^3) = x^5y^n : 24x^{n-1}y^3 - 12x^{n+1}y^4 : 24x^{n-1}y^3 = \frac{1}{24}x^{6-n}y^{n-3} - \frac{1}{2}x^2y.$$

$$A : B \text{ thì } \begin{cases} 6-n \geq 0 \\ n-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leq 6 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq n \leq 6 \text{ và } n \text{ là số tự nhiên nên } n \in \{3; 4; 5; 6\}.$$

$$b) \text{ Ta có } x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4 = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1).$$

Ta gọi thương của phép chia đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ cho $x^2 - 2x - 3$ là $q(x)$.

$$\text{Ta có: } 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = (x-3)(x+1)q(x).$$

Chọn $x = 3$, ta có:

$$4 \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^3 - 2a \cdot 3^2 + 5 \cdot b \cdot 3 - 6 = 0$$

$$324 - 297 - 18a + 15b - 6 = 0$$

$$-18a + 15b + 21 = 0(1)$$

Chọn $x = -1$, ta có:

$$4(-1)^4 - 11(-1)^3 - 2a(-1)^2 + 5b(-1) - 6 = 0$$

$$4 + 11 - 2a - 5b - 6 = 0$$

$$-2a - 5b + 9 = 0(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 2$. Thay vào (2) $\Rightarrow 5b + 4 = 9 \Rightarrow b = 1$

Vậy $a = 2; b = 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán

Bài 8. Tìm a, b, c thỏa mãn đẳng thức $(ax + b)(x^2 - 2cx + abc) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ với mọi x

Lời giải:

Ta có: $(ax + b)(x^2 - 2cx + abc)$

$$= ax^3 - 2acx^2 + a^2bcx + bx^2 - 2bcx + ab^2c$$

$$= ax^3 + (b - 2ac)x^2 + (a^2bc - 2bc)x + ab^2c$$

Theo đề: $(ax + b)(x^2 - 2cx + abc) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$.

$$\text{Suy ra: } ax^3 + (b - 2ac)x^2 + (a^2bc - 2bc)x + ab^2c = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$$

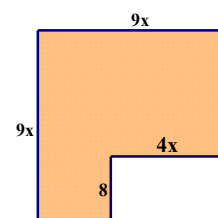
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2ac = -4 \\ a^2bc - 2bc = 2 \\ ab^2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$a = 1; b = -2; c = 1$$

Vậy $a = 1; b = -2; c = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 9.

Thửa đất hình vuông có cạnh $9x$, bên trong thửa đất đã canh tác một khoảng đất hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $4x$ và 8 để trồng cà chua. Hệ số cao nhất của biểu thức biểu thị diện tích thửa đất chưa canh tác còn lại là bao nhiêu?



Lời giải:

Biểu thức biểu thị diện tích hình vuông là: $9x \cdot 9x = 81x^2$

Biểu thức biểu thị diện tích hình chữ nhật là: $8 \cdot 4x = 32x$

Biểu thức biểu thị diện tích thửa đất chưa canh tác còn lại là: $81x^2 - 32x$

Do đó, hệ số cao nhất của biểu thức biểu thị diện tích thửa đất chưa canh tác còn lại là 81 .

Bài 10.

Một tàu du lịch đi ngược dòng từ Quảng Ninh tới Hải Phòng, sau đó nghỉ lại tại Hải Phòng 3 giờ trước khi quay trở lại Quảng Ninh (từ Hải Phòng về Quảng Ninh tàu đi xuôi dòng). Quãng đường từ Quảng Ninh tới Hải Phòng là 80 km . Vận tốc của dòng nước là 6 km/h . Gọi vận tốc thực của tàu là $x \text{ (km/h)}$. Hãy viết biểu thức biểu thị thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi quay trở về Quảng Ninh?

Lời giải:

Thời gian tàu đi ngược dòng từ Quảng Ninh đến Hải Phòng là: $\frac{80}{x-6}$ (giờ)

Thời gian tàu đi xuôi dòng từ Hải Phòng đến Quảng Ninh là: $\frac{80}{x+6}$ (giờ)

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi quay trở lại Quảng Ninh là: $\frac{80}{x-6} + \frac{80}{x+6} + 3$ (giờ)

Bài 11. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+2y)^2$

b) $(7x-6y)^2$

c) $\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)$

d) $(2x+y^2)^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}y\right)^3$

f) $\left(\frac{1}{3}x+2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}xy+4y^2\right)$

g) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

Lời giải:

a) $(x+2y)^2$ $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2$ $= x^2 + 4xy + 4y^2$	e) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}y\right)^3$ $= \left(\frac{2}{3}x^2\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^3$ $= \frac{8}{27}x^6 - \frac{2}{3}x^4y + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^3$
b) $(7x-6y)^2$ $= (7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 6y + (6y)^2$ $= 49x^2 - 84xy + 36y^2$	f) $\left(\frac{1}{3}x+2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}xy+4y^2\right)$ $= \left(\frac{1}{3}x+2y\right)\left[\left(\frac{1}{3}x\right)^2 - \frac{1}{3}x \cdot 2y + (2y)^2\right]$ $= \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + (2y)^3 = \frac{1}{27}x^3 + 8y^3$

$\begin{aligned} \text{c) } & \left(\frac{x}{2} - y\right)\left(\frac{x}{2} + y\right) \\ & = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 \\ & = \frac{x^2}{4} - y^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{g) } & (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) \\ & = (x - 3y)\left[x^2 + x \cdot 3y + (3y)^2\right] \\ & = x^3 - (3y)^3 \\ & = x^3 - 27y^3 \end{aligned}$
$\text{d) } (2x + y^2)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot (y^2)^2 + (y^2)^3 = 8x^3 + 12x^2y^2 + 6xy^4 + y^6$	

Bài 12. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = (x^2 - 8x + 16) - (x^2y^2 + 2xy + 1)$ với $x = 4; y = 1$

b) $B = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ với $x = 8; y = 6$

c) $C = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{x}{2} - y\right) - 8$ với $x = 206; y = 1$

d) $D = (6x + 2)(9x^2 - 3x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$ với $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (x^2 - 8x + 16) - (x^2y^2 + 2xy + 1) \\ &= (x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2) - (x^2y^2 + 2xy + 1) \\ &= (x - 4)^2 - (xy + 1)^2 \end{aligned}$$

Thay $x = 4; y = 1$ vào A ta có: $A = (4 - 4)^2 - (4 \cdot 1 + 1)^2 = -5^2 = -25$

Vậy $A = -25$ khi $x = 4, y = 1$.

$$\text{b) } B = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3x \cdot 2^2y^2 + (2y)^3 = (x + 2y)^3$$

Với $x = 8; y = 6 \Rightarrow B = (8 + 2 \cdot 6)^3 = 20^3 = 8000$.

$$\text{c) } C = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{x}{2} - y\right) - 8$$

$$= \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{x}{2} - y\right) \cdot 2^2 - 2^3 = \left(\frac{x}{2} - y - 2\right)^3$$

$$\text{Với } x = 206; y = 1 \Rightarrow C = \left(\frac{206}{2} - 1 - 2 \right)^3 = (103 - 3)^3 = 100^3 = 1000000.$$

$$\text{d) } D = (6x + 2)(9x^2 - 3x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$= 2(3x + 1) \left[(3x)^2 - 3x \cdot 1 + 1^2 \right] - (x^3 + 1)$$

$$= 2 \cdot \left[(3x)^3 + 1 \right] - x^3 - 1$$

$$= 54x^3 + 2 - x^3 - 1$$

$$= 53x^3 + 1$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{2} \text{ ta có: } D = 53 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + 1 = \frac{53}{8} + 1 = \frac{61}{8}.$$

Bài 13. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } (x + y)^2 + (x - y)^2 + 2(x + y)(x - y) = 4x^2$$

$$\text{b) } 2y^2 - 10xy = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y).$$

$$\text{c) } (4x - 1)^3 - (4x - 3)(16x^2 + 3) = 8$$

Lời giải:

$$\text{a) VT} = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 2(x + y)(x - y)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + 2(x^2 - y^2)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2y^2 = 4x^2 = \text{VP (điều phải chứng minh)}$$

$$\text{b) VP} = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y)$$

$$= 3(x^2 - 2xy + y^2) - 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - y^2)$$

$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 - x^2 + y^2$$

$$= (3x^2 - 2x^2 - x^2) + (-6xy - 4xy) + (3y^2 - 2y^2 + y^2)$$

$$= -10xy + 2y^2 = \text{VT (điều phải chứng minh)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) VT} &= (4x-1)^3 - (4x-3)(16x^2+3) \\
 &= (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 4x \cdot 1^2 - 1^3 - (64x^3 + 12x - 48x^2 - 9) \\
 &= 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 - 64x^3 - 12x + 48x^2 + 9 \\
 &= 8 = \text{VP (điều phải chứng minh)}
 \end{aligned}$$

Bài 14. Tìm x , biết

- a) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 21$.
- b) $(x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 6) = 18$.
- c) $(x-1)^3 - (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 3x(x+2) = 6$.
- d) $(x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) - 3x^2 = 42$

Lời giải

$ \begin{aligned} \text{a) } &(x+2)^2 - (x-3)^2 = 21 \\ &(x+2-x+3)(x+2+x-3) = 21 \\ &5(2x-1) = 21 \\ &2x-1 = \frac{21}{5} \\ &2x = \frac{26}{5} \\ &x = \frac{13}{5} \\ \text{Vậy } &x = \frac{13}{5} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \text{b) } &(x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 6) = 18 \\ &x^3 + 8 - x^3 + 6x = 18 \\ &8 + 6x = 18 \\ &6x = 10 \\ &x = \frac{5}{3} \\ \text{Vậy } &x = \frac{5}{3} \end{aligned} $
$ \begin{aligned} \text{c) } &(x-1)^3 - (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 3x(x+2) = 6 \\ &x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 8 + 3x^2 + 6x = 6 \\ &9x + 7 = 6 \\ &9x = -1 \\ &x = \frac{-1}{9} \\ \text{Vậy } &x = \frac{-1}{9} \end{aligned} $	

$$\begin{aligned}
 d) & (x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) - 3x^2 = 42 \\
 & x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x(9x^2 + 6x + 1) + (2x)^3 + 1^3 - 3x^2 = 42 \\
 & x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 9x^3 - 6x^2 - x + 8x^3 + 1 - 3x^2 = 42 \\
 & 26x = 14 \\
 & x = \frac{7}{13} \\
 \text{Vậy } & x = \frac{7}{13}
 \end{aligned}$$

Bài 15. Tính nhanh

$$\begin{array}{ll}
 a) 127^2 + 146.127 + 73^2 & c) 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 \\
 b) 9^8.2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1) & d) (20^2 + 18^2 + 16^2 + \dots + 4^2 + 2^2) - (19^2 + 17^2 + 15^2 + \dots + 3^2 + 1^2)
 \end{array}$$

Lời giải:

$ \begin{aligned} a) & A = 127^2 + 146.127 + 73^2 \\ & = 127^2 + 2.73.127 + 73^2 \\ & = (127 + 73)^2 \\ & = 200^2 \\ & = 40000 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} c) & C = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 \\ & = (100 + 99)(100 - 99) + (98 + 97)(98 - 97) + \dots + (2 + 1)(2 - 1) \\ & = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 \\ & = \frac{(100 + 1).100}{2} \\ & = 5050 \end{aligned} $
$ \begin{aligned} b) & B = 9^8.2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1) \\ & = 18^8 - (18^8 - 1) \\ & = 1 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} d) & D = (20^2 + 18^2 + 16^2 + \dots + 4^2 + 2^2) - (19^2 + 17^2 + 15^2 + \dots + 3^2 + 1^2) \\ & = (20^2 - 19^2) + (18^2 - 17^2) + (16^2 - 15^2) + \dots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2) \\ & = (20 + 19)(20 - 19) + (18 + 17)(18 - 17) + \dots + (2 + 1)(2 - 1) \\ & = 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ & = \frac{(20 + 1).20}{2} \\ & = 210 \end{aligned} $

Bài 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = x^2 - 4x + 24.$

b) $B(x) = 2x^2 - 8x + 1.$

c) $C(x) = 3x^2 + x - 1$

Lời giải

a) $A(x) = x^2 - 4x + 24 = (x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) + 20 = (x - 2)^2 + 20$

Ta có $(x - 2)^2 \geq 0$, với mọi x

$$(x - 2)^2 + 20 \geq 20, \text{ với mọi } x$$

Vậy GTNN của $A(x) = 20$ khi $x = 2.$

b) $B(x) = 2x^2 - 8x + 1 = 2x^2 - 8x + 8 - 7 = 2 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7$

Ta có $(x - 2)^2 \geq 0$, với mọi x

$$2(x - 2)^2 \geq 0, \text{ với mọi } x$$

$$2(x - 2)^2 - 7 \geq -7, \text{ với mọi } x$$

Vậy GTNN của $B(x) = -7$ khi $x = 2.$

c) $C(x) = 3x^2 + x - 1 = 3\left(x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right] = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$

Ta có $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$, với mọi x

$$3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0, \text{ với mọi } x$$

$$3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} \geq \frac{-13}{12}, \text{ với mọi } x$$

Vậy GTNN của $C(x) = \frac{-13}{12}$ khi $x = \frac{-1}{6}.$

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = -x^2 - 6x - 11.$

b) $B(x) = -3x^2 + x + 1$

Lời giải

a) $A(x) = -x^2 - 6x - 11 = -(x^2 + 6x + 11) = -[x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 + 2] = -[(x + 3)^2 + 2] = -(x + 3)^2 - 2$

Ta có: $(x+3)^2 \geq 0$ với mọi x

$$-(x+3)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x$$

$$-(x+3)^2 - 2 \leq -2 \text{ với mọi } x$$

Vậy GTLN của $A(x)$ là -2 khi $x = -3$.

$$\text{b) } B(x) = -3x^2 + x + 1 = -3\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) = -3\left[x^2 - 2x \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right] = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}$$

Ta có: $\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x

$$-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x$$

$$-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{12} \leq \frac{13}{12} \text{ với mọi } x$$

Vậy GTLN của $B(x)$ là $\frac{13}{12}$ khi $x = \frac{1}{6}$.

Bài 18. Tìm x, y, z biết: $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 16z^2 - 8z + 35 = 0$

Lời giải

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y + 16z^2 - 8z + 35 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) + (16z^2 - 8z + 1) = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (4z-1)^2 = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy: $(x-3)^2 \geq 0$ với mọi x

$$(y+5)^2 \geq 0 \text{ với mọi } y$$

$$(4z-1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } z$$

Suy ra $VT(1) \geq 0$ với mọi x, y, z

$$\text{Do đó } \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ (y+5)^2 = 0 \\ (4z-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy $x = 3, y = -5, z = \frac{1}{4}$.

Bài 19.

a) Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ thì $a = b = c$

b) Cho các số a, b, c thỏa mãn $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

Tính giá trị biểu thức: $M = (a-b)^{2014} + (b-c)^{2015} + (c-a)^{2016}$

Lời giải

a) Theo đề ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$$2.(a^2 + b^2 + c^2) = 2.(ab + bc + ca)$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy: $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi a, b

$$(b-c)^2 \geq 0 \text{ với mọi } b, c$$

$$(c-a)^2 \geq 0 \text{ với mọi } c, a$$

Suy ra $VT(1) \geq 0$ với mọi a, b, c

$$\text{Để (1) đúng thì } \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases}$$

Vậy $a = b = c$ (điều phải chứng minh)

b) Theo đề, ta có: $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

Theo chứng minh ở câu a) ta suy ra: $a = b = c$

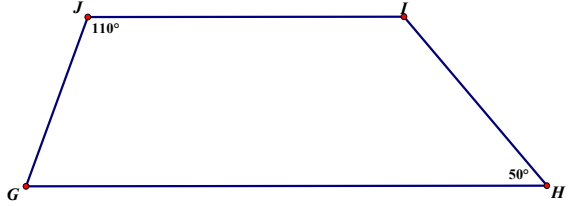
Thay $a = b = c$ vào biểu thức $M = (a-b)^{2014} + (b-c)^{2015} + (c-a)^{2016}$ ta được $M = 0$

Bài 20. Tính số đo các góc chưa biết của hình thang $IJGH$ ($IJ \parallel GH$) trong các trường hợp sau:

a) $\widehat{H} = 50^\circ, \widehat{J} = 110^\circ$.

b) $IJGH$ là hình thang cân và $\widehat{H} = 30^\circ$.

Lời giải

<p>a) Trong hình thang $IJGH$ ($IJ \parallel GH$) nên ta có:</p> <p>$\widehat{I} + \widehat{H} = 180^\circ$, suy ra</p> <p>$\widehat{I} = 180^\circ - \widehat{H} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$</p> <p>$\widehat{J} + \widehat{G} = 180^\circ$, suy ra</p> <p>$\widehat{G} = 180^\circ - \widehat{J} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$</p> <p>Vậy hình thang $IJGH$ có: $\widehat{I} = 130^\circ; \widehat{G} = 70^\circ$.</p>	
<p>b) Hình thang cân $IJGH$ ($IJ \parallel GH$) có $\widehat{I} = \widehat{J}$ và</p> <p>$\widehat{G} = \widehat{H} = 30^\circ$ (tính chất hình thang cân).</p>	

Áp dụng định lí tổng các góc của một tứ giác, ta

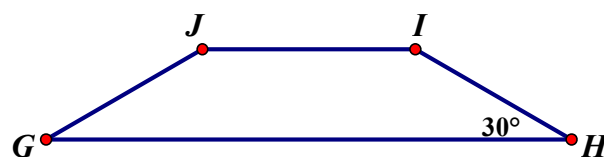
$$\text{có: } \hat{I} + \hat{J} + \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ$$

$$\text{Suy ra } 2\hat{I} = 360^\circ - 2\hat{H} = 360^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 300^\circ$$

$$\text{Do đó } \hat{I} = \hat{J} = 150^\circ.$$

Vậy hình thang cân $IJGH$ có:

$$\hat{G} = 30^\circ; \hat{I} = \hat{J} = 150^\circ$$



Bài 21. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ AH và CK vuông góc với BD lần lượt tại H và K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Lời giải

Ta có: $AH \perp BD$ và $CK \perp BD$. Suy ra:

$$\widehat{AHD} = \widehat{CKB} = 90^\circ \text{ và } AH \parallel CK. (1)$$

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle CKB$ có:

$$\widehat{AHD} = \widehat{CKB} = 90^\circ \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{ADH} = \widehat{CBK} \text{ (hai góc so le trong, } AD \parallel BC)$$

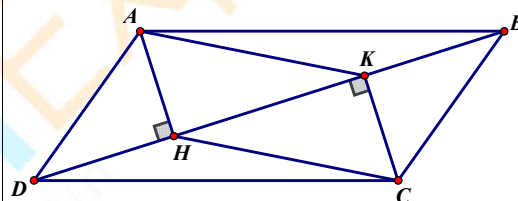
$$AD = BC \text{ (} ABCD \text{ là hình bình hành)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AHD = \triangle CKB \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\text{Suy ra } AH = CK \text{ (hai cạnh tương ứng) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AHCK$ là hình bình hành.

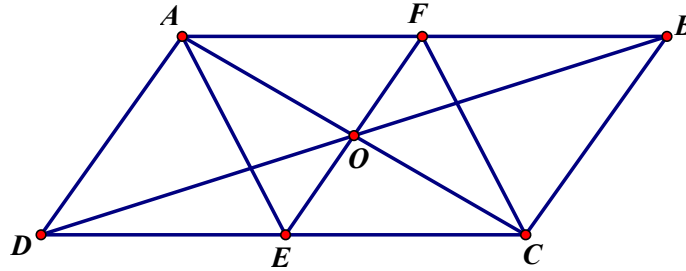
Vậy tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.



Bài 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Tia phân giác của góc A cắt CD ở E . Tia phân giác của góc C cắt AB ở F . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AFCE$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy.

Lời giải



a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$, suy ra $AF \parallel EC$ (1)

Ta có: AE, CF là đường phân giác của \widehat{BAD} và \widehat{BCD} nên: $\widehat{DAE} = \widehat{FAE}$, $\widehat{ECF} = \widehat{BCF}$

Mặt khác: $ABCD$ là hình bình hành nên: $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$

Do đó: $\widehat{DAE} = \widehat{FAE} = \widehat{ECF} = \widehat{BCF}$

Mà $AF \parallel EC$ nên $\widehat{ECF} = \widehat{BFC}$

Suy ra: $\widehat{BFC} = \widehat{FAE}$. Hai góc này ở vị trí đồng vị, suy ra: $CF \parallel AE$ (2)

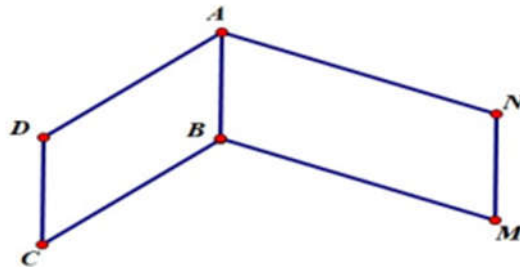
Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFCE$ có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

b) $ABCD$ là hình bình hành, suy ra hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

$AFCE$ là hình bình hành, suy ra hai đường chéo AC và EF cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Chứng tỏ rằng các đường thẳng AC, BD, FE đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường.

Bài 23. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ANMB$ như hình vẽ



a) Chứng minh $CD = MN$

b) Chứng minh $\widehat{BCD} + \widehat{BMN} = \widehat{DAN}$

Lời giải

a) Ta có $ABCD$ và $ANMB$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB = MN$. Suy ra $AB = CD = MN$
Do đó $CD = MN$

b) Vì $ABCD$ và $ANMB$ là hình bình hành nên $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$; $\widehat{BMN} = \widehat{BAN}$.

Suy ra $\widehat{BCD} + \widehat{BMN} = \widehat{BAD} + \widehat{BAN} = \widehat{DAN}$ (điều phải chứng minh)

Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A ; đường cao AH . Gọi E là trung điểm của AB . Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại M . Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $EFMH$ là hình thang cân.

Lời giải

a) Xét tứ giác $AEMF$ có:

$AE \parallel FM$ (giả thiết); $AF \parallel EM$ (giả thiết);

Suy ra $AEMF$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Mà $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (do $\triangle ABC$ vuông tại A)

Suy ra $AEMF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

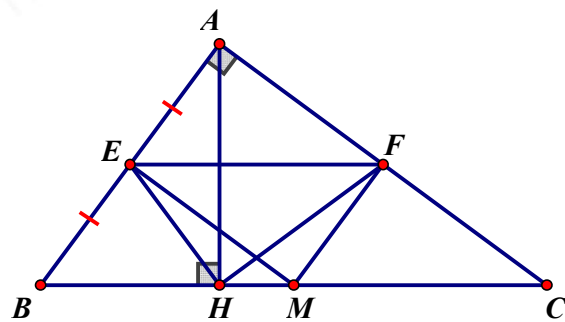
b) Xét $\triangle AEF$ và $\triangle EBM$ có:

$AF = EM$ (Do $AEMF$ là hình chữ nhật);

$\widehat{EAF} = \widehat{BEM} = 90^\circ$

$AE = EB$ (Do E là trung điểm của AB)

$\Rightarrow \triangle AEF = \triangle EBM$ (c - g - c)



Xét $\triangle AEF$ và $\triangle FMC$ có:

$\widehat{EAF} = \widehat{MFC} = 90^\circ$

$AE = FM$ (Do $AEMF$ là hình chữ nhật);

$\widehat{AEF} = \widehat{FMC}$ ($= \widehat{EBM}$)

Suy ra $\triangle AEF = \triangle FMC$ (g - c - g)

$\Rightarrow FA = FC$ (hai cạnh tương ứng)

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{EBM}$ (2 góc tương ứng)
 Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EF \parallel BC$
 Hay $EF \parallel HM$
 Suy ra $EFMH$ là hình thang
 Vì $EF \parallel BC$; $FM \parallel AE$
 $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{EBM}$; $\widehat{FMC} = \widehat{EBM}$
 (các góc đồng vị)

Do đó HF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC trong $\triangle AHC$ vuông tại H
 Do đó: $AF = HF = \frac{AC}{2}$
 Mặt khác $EM = AF$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow EM = HF (= AF)$
 Hình thang $EFMH$ có $EM = HF$ (chứng minh trên) nên $EFMH$ là hình thang cân

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Điểm D thuộc cạnh BC . Các hình chiếu của D trên AB , AC theo thứ tự là E , F .

a) Chứng minh rằng $DEAF$ là hình chữ nhật.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $DEAF$. Chứng minh $HO = \frac{1}{2}EF$, từ đó

suy ra tam giác EHF vuông.

c) Tìm vị trí của điểm D để EF có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải

a) Vì $AEDF$ có $\widehat{BAC} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90^\circ$
 Suy ra $AEDF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)
 b) Gọi O là giao điểm của AD và EF
 Suy ra $EF = AD$ và O là trung điểm của AD và EF
 Xét $\triangle AHD$ vuông tại H có O là trung điểm của AD
 Suy ra $HO = \frac{1}{2}AD$; mà $EF = AD \Rightarrow HO = \frac{1}{2}EF$
 Xét $\triangle HEF$ có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh EF và $HO = \frac{1}{2}EF \Rightarrow \triangle HEF$ vuông tại H , hay
 $\widehat{EHF} = 90^\circ$
 c) Ta có $AH \perp BC \Rightarrow H$ là hình chiếu của A trên BC
 Suy ra $AD \geq AH$ (Tính chất đường xiên - hình chiếu)
 $\Rightarrow AD$ nhỏ nhất khi $AD = AH \Rightarrow D$ trùng H
 Mà $AD = EF \Rightarrow EF_{\min} = AH$ khi D trùng H .

