UBND QUẬN BA ĐÌNH PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP QUẬN CÁC MÔN VĂN HOÁ VÀ KHOA HỌC LỚP 9 NĂM HỌC: 2022 – 2023

Ngày thi: 29 – 11 – 2022
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (5,0 điểm)

① Giải phương trình $x^2 + x - 3 = 3\sqrt{x-1}$.

② Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$, tính $P = (x-1)^{2022} + (y+2)^{2023}$.

Câu 2. (5,0 điểm)

① Cho các số nguyên a, b, c thoả mãn $a - b + c$ và $ab + c^2$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5.

② Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{3n-1} \cdot 5^{n+1} + 96$ là số chính phương.

Câu 3. (2,0 điểm) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$ và $a + b + c = 4$, chứng minh

$$4 < \sqrt{1+ab} + \sqrt{1+bc} + \sqrt{1+ca} \leqslant 5.$$

Câu 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ đường kính AK của (O).

① Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

② Gọi P là giao điểm của AK với BE và Q là giao điểm của AD với BK. Chứng minh $\angle BAD = \angle CAK$ và hai tam giác AEP và BDQ đồng dạng.

③ Chứng minh DE chia đôi đoạn thẳng PQ.

Câu 5. (2,0 điểm)

① Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thoả mãn $x \neq 1$ và $y^2 = \dfrac{x^6 - 1}{x - 1}$.

② Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$. Với mỗi số tự nhiên $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, gọi A_n, B_n, C_n tương ứng là trung điểm các cạnh $B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}B_{n-1}$. Tất cả các đỉnh A_i, B_i, C_1 được tô bởi đúng một trong hai màu xanh hoặc đỏ tùy ý với $i = 1, 2, \ldots, 7$. Chứng minh rằng trong 21 đỉnh A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2, \ldots, 7$ luôn tồn tại 4 đỉnh được tô cùng màu và là 4 đỉnh của một hình thang cân.

Câu 1. (5,0 điểm)

① Giải phương trình $x^2 + x - 3 = 3\sqrt{x-1}$.

② Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$, tính $P = (x-1)^{2022} + (y+2)^{2023}$.

Lời giải.

① Điều kiện xác định là $x \geqslant 1$. Bình phương, chuyển vế, phân tích, ta thu được phương trình hệ quả

$$(x-2)\left(x^3 + 4x^2 + 3x - 9\right) = 0.$$

Chú ý rằng ta có thể đặt thêm điều kiện $x^2 + x - 3 \geqslant 0$, kéo theo $x > \frac{13}{10}$. Do đó

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 9 \geqslant \left(\frac{13}{10}\right)^3 + 4\left(\frac{13}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{13}{10}\right) - 9 = \frac{3857}{1000} > 0.$$

Thử lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

② Đẳng thức ở giả thiết đã cho tương đương với

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0,$$

từ đó ta có $x = 2$ và $y = -1$. Như vậy

$$P = (2-1)^{2022} + (-1+2)^{2023} = 2.$$

□

Câu 2. (5,0 điểm)

① Cho các số nguyên a, b, c thoả mãn $a - b + c$ và $ab + c^2$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5.

② Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{3n-1} \cdot 5^{n+1} + 96$ là số chính phương.

Lời giải.

① Từ các giả thiết đã cho ta có $a - b + c$ chia hết cho 5 và

$$4ab + 4c^2 = 4a(b-c-a) + 4a^2 + 4ac + 4c^2 = 4a(b-c-a) + (2a+c)^2 + 3c^2$$

chia hết cho 5, dẫn đến $(2a+c)^2 + 3c^2$ chia hết cho 5. Chú ý rằng một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể nhận số dư là một trong các số $0, 1, 4$, do đó ta xét các trường hợp sau.

- Nếu $c^2 \equiv 4 \pmod 5$ thì ta có

$$(2a+c)^2 \equiv -3c^2 \equiv -12 \equiv 3 \pmod 5,$$

suy ra c^2 không là số chính phương, mâu thuẫn.

- Nếu $c^2 \equiv 1 \pmod 5$ thì ta có

$$(2a+c)^2 \equiv -3c^2 \equiv -3 \equiv 2 \pmod 5,$$

suy ra c^2 không là số chính phương, mâu thuẫn.

- Nếu $c^2 \equiv 0 \pmod 5$ thì $(2a+c)^2 \equiv -3c^2 \equiv 0 \pmod 5$, khi đó cả a và c chia hết cho 5, kéo theo cả a, b, c đều chia hết cho 5, từ đó có $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5.

② Với $n \geqslant 3$, ta có $2^{3n-1} \cdot 5^{n+1} + 96$ chia hết cho 32 nhưng không chia hết cho 64, do đó $2^{3n-1} \cdot 5^{n+1} + 96$ không là số chính phương, mâu thuẫn. Với $n = 1, n = 2$, thử trực tiếp, ta thấy chúng đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 3. (2,0 điểm) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$ và $a+b+c=4$, chứng minh
$$4 < \sqrt{1+ab}+\sqrt{1+bc}+\sqrt{1+ca} \leqslant 5.$$

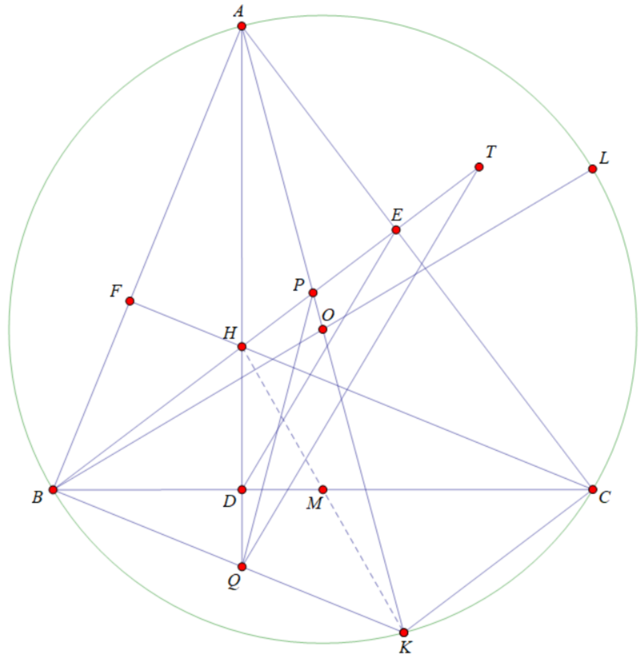
Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có
$$\begin{aligned}\frac{5}{3}\sqrt{1+ab}+\frac{5}{3}\sqrt{1+bc}+\frac{5}{3}\sqrt{1+ca} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{25}{9}+1+ab\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{25}{9}+1+bc\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{25}{9}+1+ca\right)\\ &= \frac{17}{3}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\\ &\leqslant \frac{17}{3}+\frac{1}{6}\left(a+b+c\right)^2\\ &= \frac{25}{3},\end{aligned}$$
do đó $\sqrt{1+ab}+\sqrt{1+bc}+\sqrt{1+ca} \leqslant 5$. Dấu bằng xảy ra tại $a=b=c=\dfrac{5}{3}$.
Tiếp theo, ta phát biểu bất đẳng thức bổ đề: Với mọi số thực dương x, y ta luôn có
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y} \geqslant \sqrt{1+x+y}+1.$$
Phần chứng minh bất đẳng thức này xin nhường lại cho bạn đọc. Áp dụng bất đẳng thức bên trên ta có
$$\sqrt{1+ab}+\sqrt{1+bc}+\sqrt{1+ca} \geqslant 1+\sqrt{1+ab+bc}+\sqrt{1+ca} \geqslant 2+\sqrt{1+ab+bc+ca}.$$
Mặt khác, từ giả thiết $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$ ta còn có $(a-2)(b-2)(c-2) \leqslant 0$, kéo theo
$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8 \leqslant 0.$$
Chú ý rằng $a+b+c=4$ và $abc \geqslant 0$, từ đó ta có $ab+bc+ca \geqslant 4$. Do đó
$$2+\sqrt{1+ab+bc+ca} \geqslant 2+\sqrt{1+4} = 2+\sqrt{5} > 4.$$
Bất đẳng thức đã cho được chứng minh. □

Câu 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ đường kính AK của (O).

1. Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.
2. Gọi P là giao điểm của AK với BE và Q là giao điểm của AD với BK. Chứng minh $\angle BAD = \angle CAK$ và hai tam giác AEP và BDQ đồng dạng.
3. Chứng minh DE chia đôi đoạn thẳng PQ.

Lời giải.

1. Tứ giác $BHCK$ có các cặp cạnh bên song song do chúng cùng vuông góc với AB, AC, suy ra tứ giác $BHCK$ là hình bình hành. Vậy đoạn HK đi qua trung điểm M của BC.
2. Kẻ đường kính BL của đường tròn. Ta có
$$\begin{aligned}\angle CAK = \frac{\angle COK}{2} &= \frac{\angle COB}{2}-\frac{\angle BOK}{2}\\ &= \frac{180^\circ-2\angle OBC}{2}-\frac{180^\circ-\angle OBK}{2}\\ &= \angle KBC\\ &= \angle HCB\\ &= \angle BAD,\end{aligned}$$
từ đây kết hợp với $\angle AEP = \angle BDQ$ ta có hai tam giác AEP và BDQ đồng dạng.



③ Lấy T đối xứng P qua AC. Từ cách dựng điểm T và từ cặp đồng dạng vừa chứng minh ta có

$$\frac{BD}{AE} = \frac{QD}{PE} = \frac{QD}{TE}.$$

Mặt khác, do hai tam giác BHD và AHE đồng dạng nên

$$\frac{BD}{AE} = \frac{HD}{HE}.$$

Do đó $\dfrac{HD}{HE} = \dfrac{QD}{TE}$. Theo định lí Thales đảo thì $DE \parallel TQ$. Tam giác PQT có $DE \parallel QT$ và E là trung điểm PT nên DE đi qua trung điểm của PQ. Bài toán được chứng minh.

□

Câu 5. (2,0 điểm)

① Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thoả mãn $x \neq 1$ và $y^2 = \dfrac{x^6 - 1}{x - 1}$.

② Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$. Với mỗi số tự nhiên $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, gọi A_n, B_n, C_n tương ứng là trung điểm các cạnh $B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}B_{n-1}$. Tất cả các đỉnh A_i, B_i, C_1 được tô bởi đúng một trong hai màu xanh hoặc đỏ tùy ý với $i = 1, 2, \ldots, 7$. Chứng minh rằng trong 21 đỉnh A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2, \ldots, 7$ luôn tồn tại 4 đỉnh được tô cùng màu và là 4 đỉnh của một hình thang cân.

Lời giải.

① Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $(x; y)$ thoả mãn. Ta có

$$y^2 = \left(x^3 + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Do $\gcd\left(x + 1, x^2 + x + 1\right) = \gcd\left(x^2 - x + 1, x^2 + x + 1\right) = 1$ nên ta có

$$\gcd\left(x^3 + 1, x^2 + x + 1\right) = 1,$$

kéo theo $x^3 + 1$ và $x^2 + x + 1$ là số chính phương. Mặt khác, do

$$x^2 < x^2 + x + 1 \leqslant (x + 1)^2$$

nên ta suy ra $x^2 + x + 1 = (x + 1)^2$. Từ đó ta tìm được $x = 0$, kéo theo $y = 1$.

② Nếu tồn tại các điểm B_i, C_i, B_j, C_j được tô cùng màu, hiển nhiên hình thang $B_iC_iC_jB_j$ cân. Ngược lại, nếu B_i, C_i khác màu nhau với mọi $i, j \leqslant 7$, do có 7 đoạn B_iC_i và chỉ có đúng 2 cách tô màu

2 đỉnh của 1 đoạn ấy (là xanh – đỏ và đỏ – xanh) nên tồn tại ít nhất 4 đoạn cùng cách tô màu. Không mất tổng quát, ta giả sử các điểm B_a, B_b, B_c, B_d được tô xanh, các điểm C_a, C_b, C_c, C_d được tô đỏ. Trong 4 điểm A_a, A_b, A_c, A_d, tồn tại ít nhất 2 điểm cùng màu, giả sử A_a, A_b cùng màu xanh. Lúc này hình thang $A_aA_bB_bB_a$ cân. Vậy ta có điều phải chứng minh.

□