ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 8

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. PHẦN ĐẠI SỐ

1. Đơn thức, đa thức;
2. Cộng, trừ, nhân, chia đa thức;
3. Hằng đẳng thức
4. Phân tích đa thức thành nhân tử.

II. PHẦN HÌNH HỌC

1. Định lí Pythagore;
2. Đường trung bình của tam giác, của hình thang;
3. Hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật.

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI NÂNG CAO KHÁC

Tính chất chia hết trong tập hợp số nguyên, số nguyên tố, số chính phương.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm bậc của chúng:

a) $A = x^4 + \frac{1}{3}x^2y - 5xy + xy^2 - x^4 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + xy$

b) $B = 15x^2y^3 - 3xy^3 + 16x^2y^2 - \frac{5}{4}xy^3 + y^3z^4 - 10x^2y^3 + 4,25xy^3 - 5x^2y^3 - 15x^2y^2 - \frac{1}{2}y^3z^4$

c) $C = 3xy - \left\{xyz - \left(2xyz - x^2z\right) - 4x^2z + \left[3x^3y - \left(4xyz - 5x^2z - 3xyz\right)\right]\right\}$

Bài 2. Tính giá trị của đa thức sau:

a) $P = x^3 + x^2y - 5x^2 - x^2y - xy^2 + 5xy + 3(x+y) + 2008$ biết $x + y - 5 = 0$

b) $Q = 6x^3 - 4x^2y - 14y^2 + 21xy + 2021$ biết $2x^2 + 7y = 0$

c) $M = 3x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2$ biết $x^2 + y^2 = 2$

Bài 3.

a) Chứng minh rằng với $x = a + b + c$ thì:

$$(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a) = 5(a+b+c)^2 + ab + ac + bc$$

b) Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

$$H = \left(3x^3y^2 - \frac{1}{2}xz^2 + \frac{5}{3}xyz\right) - \left(2x^3y^2 + \frac{2}{3}xyz\right) - \left(xyz + x^3y^2 - 0,5xz^2 - 2022\right)$$

c) Cho $A = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - y^2$; $B = x + 2y$; $C = 10xy^3 - y^2\left(x + 2y\right)$

Chứng minh rằng $AB - C$ luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của x, y.

Bài 4. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

a) $A=(2x+1)^2-(3x-1)(3x+1)+5x(x-1)$ tại $x=-\dfrac{1}{2}$.

b) $B=(2x-1)^3-(2x+1)(4x^2-2x+1)+(1-3x)^2$ tại $x=-3$.

c) $C=(x+2y)^3-6xy(x+2y)$ tại $x=-0,1;\ y=0,1$.

Bài 5. Tìm x, biết

a) $(2x-7)^2-4(x-9)(x+9)=12x+13$

b) $(x-1)^3-(x-2)(x^2+2x+4)+3x(x+2)=6$.

c) $(x+3)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)-3x^2=42$

d) $4x^3-6x^2+3x-63=0$

Bài 6.

a) Cho $x+y=1$. Tính giá trị biểu thức: $M=4(x^3+y^3)-6(x^2+y^2)$

b) Cho $x-y=12$. Tính giá trị biểu thức: $N=x^3-y^3-36xy$

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5(x+3y)-15x(x+3y)$

b) $(4x-y)(a+b)-(y-4x)(b-1)$

c) $2x^2-x-6xy+3y$

d) $x^4+6x^3-54x-81$

e) $x^2-13x+36$

f) x^3-5x^2+8x-4

g) $81x^4+4$

h) $8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1)-130$

i) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

k) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

Bài 8. Chứng minh rằng :

a) $A=23^6-13^6$ chia hết cho 360.

b) $B=27^5-3^{11}$ chia hết cho 80.

c) $C=n^3+3n^2-n-3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên n lẻ.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, kẻ $AH\perp BC$.

a) Chứng minh: $AB^2+HC^2=AC^2+HB^2$

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm D tùy ý. Nối BD và DC. Chứng minh:

$AB^2+DC^2=AC^2+BD^2$

Bài 10. Cho đoạn thẳng AB dài $7cm$. Lấy điểm C thuộc AB sao cho $AC=2cm$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Lấy điểm D thuộc tia Ax, điểm E thuộc tia By sao cho $AD=10cm$, $BE=1cm$.

a) Tính độ dài DC, CE.

b) Chứng minh rằng: $DC\perp CE$

Bài 11. Hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 10cm$; đáy lớn $CD = 20cm$; đường cao $AH = 12cm$. Tính độ dài các cạnh bên.

Bài 12. Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Trên tia CB lấy điểm N sao cho $CN = CA$. Gọi O là giao của 3 đường phân giác của tam giác ABC; OE, OG, OF lần lượt là đoạn vuông góc kẻ từ O xuống BC; AB; AC. Chứng minh rằng:

a) $AGEM$; $AFEN$ là các hình thang cân b) ΔOMN là tam giác cân

Bài 13. Tam giác ABC có AM là trung tuyến. Trên AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Đoạn CD cắt AM tại I. Chứng minh:

a) $EM // CD$ b) I là trung điểm AM c) $DC = 4.DI$

Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB, CD lấy tương ứng các điểm E, G sao cho $AE = CG$. Trên các cạnh DA, BC lấy tương ứng các điểm H, F sao cho $DH = BF$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành b) Các đường thẳng AC, BD, EG, FH đồng quy

Bài 15. Bên trong hình bình hành $ABCD$ lấy điểm E sao cho $CD = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh rằng $MN \perp DE$.

Bài 16. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH. Gọi I là trung điểm AC. Lấy điểm E sao cho I là trung điểm HE. Gọi là M, N trung điểm HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K. Chứng minh:

a) Tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật. b) $HG = GK = KE$.

Bài 17. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi M là trung điểm AB. Đường thẳng qua C và vuông góc với MD cắt BD ở K. Chứng minh rằng:

a) CA là tia phân giác của góc HCK b) $CH = CK$

Bài 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy điểm M thuộc đường chéo BD. N thuộc tia AM sao cho $AM = MN$. Kẻ NE vuông góc với BC, NF vuông góc với CD. Chứng minh M, E, F thẳng hàng.

Bài 19.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: $A = x^2 + 8x - 5$; $B = 3x^2 + 5x + 1$;
$C = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3$

b) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức: $M = -x^2 - 6x - 31$; $N = 4 - 7x - 2x^2$;
$P = 2xy + 7 - 3x^2 - y^2$

Bài 20.

a) Cho các số x, y, z thỏa mãn điều kiện: $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$. Tính giá trị biểu thức: $M = (x-4)^{2024} + (y-4)^{2025} + (z-4)^{2026}$

b) Chứng minh rằng không có giá trị $x,\ y$ nào thỏa mãn đẳng thức: $3x^2 + 6y^2 - 12x - 20y + 40 = 0$

Bài 21.

a) Cho $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Tính giá trị biểu thức: $M = (a-b)^{2024} + (b-c)^{2025} + (c-a)^{2026}$

b) Cho ba số a, b, c phân biệt và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính:

$$N = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$$

Bài 22.

a) Tìm số tự nhiên x sao cho $x^2 + 2x + 12$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố q, sao cho tồn tại số nguyên dương n để $n^2 + 22q$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

c) Cho ba số nguyên dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng $ab \vdots a + b + c$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm bậc của chúng:

a) $A = x^4 + \frac{1}{3}x^2y - 5xy + xy^2 - x^4 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + xy$

b) $B = 15x^2y^3 - 3xy^3 + 16x^2y^2 - \frac{5}{4}xy^3 + y^3z^4 - 10x^2y^3 + 4,25xy^3 - 5x^2y^3 - 15x^2y^2 - \frac{1}{2}y^3z^4$

c) $C = 3xy - \left\{xyz - \left(2xyz - x^2z\right) - 4x^2z + \left[3x^3y - \left(4xyz - 5x^2z - 3xyz\right)\right]\right\}$

Lời giải

a) $A = x^4 + \frac{1}{3}x^2y - 5xy + xy^2 - x^4 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + xy$

$= \left(x^4 - x^4\right) + \left(\frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{3}x^2y\right) + \left(-5xy + xy\right) + \left(xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right)$

$= -4xy + \frac{3}{2}xy^2$

Đa thức A có bậc 3.

b) $B = 15x^2y^3 - 3xy^3 + 16x^2y^2 - \frac{5}{4}xy^3 + y^3z^4 - 10x^2y^3 + 4,25xy^3 - 5x^2y^3 - 15x^2y^2 - \frac{1}{2}y^3z^4$

$= \left(15x^2y^3 - 10x^2y^3 - 5x^2y^3\right) + \left(-3xy^3 - \frac{5}{4}xy^3 + 4,25xy^3\right) + \left(16x^2y^2 - 15x^2y^2\right) + \left(y^3z^4 - \frac{1}{2}y^3z^4\right)$

$= x^2y^2 + \frac{1}{2}y^3z^4$

Đa thức B có bậc 7.

c) $C = 3xy - \left\{xyz - \left(2xyz - x^2z\right) - 4x^2z + \left[3x^3y - \left(4xyz - 5x^2z - 3xyz\right)\right]\right\}$

$= 3xy - \left\{xyz - 2xyz + x^2z - 4x^2z + \left[3x^3y - 4xyz + 5x^2z + 3xyz\right]\right\}$

$= 3xy - \left\{xyz - 2xyz + x^2z - 4x^2z + 3x^3y - 4xyz + 5x^2z + 3xyz\right\}$

$= 3xy - xyz + 2xyz - x^2z + 4x^2z - 3x^3y + 4xyz - 5x^2z - 3xyz$

$= 3xy + \left(-xyz + 2xyz + 4xyz - 3xyz\right) + \left(-x^2z + 4x^2z - 5x^2z\right) - 3x^3y$

$= 3xy + 2xyz - 2x^2z - 3x^3y$

Đa thức C có bậc 4.

Bài 2. Tính giá trị của đa thức sau:

a) $P = x^3 + x^2y - 5x^2 - x^2y - xy^2 + 5xy + 3(x+y) + 2008$ biết $x + y - 5 = 0$

b) $Q = 6x^3 - 4x^2y - 14y^2 + 21xy + 2021$ biết $2x^2 + 7y = 0$

c) $M = 3x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2$ biết $x^2 + y^2 = 2$

Lời giải

a) Vì $x + y - 5 = 0 \Rightarrow x + y = 5$

$$\begin{aligned} P &= x^3 + x^2y - 5x^2 - x^2y - xy^2 + 5xy + 3(x+y) + 2008 \\ &= \left(x^3 + x^2y - 5x^2\right) - \left(x^2y + xy^2 - 5xy\right) + 3(x+y) + 2008 \\ &= x^2(x+y-5) - xy(x+y-5) + 3(x+y) + 2008 \\ &= x^2.0 - xy.0 + 3.5 + 2008 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} Q &= 6x^3 - 4x^2y - 14y^2 + 21xy + 2021 \\ &= \left(6x^3 + 21xy\right) - \left(4x^2y + 14y^2\right) + 2021 \\ &= 3x\left(2x^2 + 7y\right) - 2y\left(2x^2 + 7y\right) + 2021 \\ &= 3x.0 - 2y.0 + 2021 \\ &= 2021 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} M &= 3x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2 \\ &= 3x^4 + 3x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2 \\ &= 3x^2(x^2 + y^2) + 2y^2(x^2 + y^2) + 2y^2 \\ &= 3x^2.2 + 2y^2.2 + 2y^2 \\ &= 6x^2 + 6y^2 \\ &= 6(x^2 + y^2) \\ &= 6.2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Bài 3.

a) Chứng minh rằng với $x = a + b + c$ thì:

$(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a) = 5(a+b+c)^2 + ab + ac + bc$

b) Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

$$H = \left(3x^3y^2 - \frac{1}{2}xz^2 + \frac{5}{3}xyz\right) - \left(2x^3y^2 + \frac{2}{3}xyz\right) - \left(xyz + x^3y^2 - 0,5xz^2 - 2022\right)$$

c) Cho $A = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - y^2$; $B = x + 2y$; $C = 10xy^3 - y^2(x + 2y)$

Chứng minh rằng $AB - C$ luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của x, y

Lời giải

a) $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$

$=x^2+ax+bx+ab+x^2+bx+cx+bc+x^2+cx+ax+ac$

$=3x^2+2x\left(a+b+c\right)+ab+ac+bc$

$=3x^2+2x^2+ab+ac+bc$

$=5(a+b+c)^2+ab+ac+bc$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) $H=\left(3x^3y^2-\frac{1}{2}xz^2+\frac{5}{3}xyz\right)-\left(2x^3y^2+\frac{2}{3}xyz\right)-\left(xyz+x^3y^2-0,5xz^2-2022\right)$

$=3x^3y^2-\frac{1}{2}xz^2+\frac{5}{3}xyz-2x^3y^2-\frac{2}{3}xyz-xyz-x^3y^2+0,5xz^2+2022$

$=\left(3x^3y^2-2x^3y^2-x^3y^2\right)+\left(-\frac{1}{2}xz^2+0,5xz^2\right)+\left(\frac{5}{3}xyz-\frac{2}{3}xyz-xyz\right)+2022$

$=2022$

Suy ra giá trị của biểu thức H không phụ thuộc vào giá trị của biến.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có:

$AB-C=\left(x^3-2x^2y+5xy^2-y^2\right)\left(x+2y\right)-10xy^3+y^2\left(x+2y\right)$

$=x^4+2x^3y-2x^3y-4x^2y^2+5x^2y^2+10xy^3-xy^2-2y^3-10xy^3+xy^2+2y^3$

$=x^4+\left(2x^3y-2x^3y\right)+\left(-4x^2y^2+5x^2y^2\right)+\left(10xy^3-10xy^3\right)+\left(-xy^2+xy^2\right)+\left(-2y^3+2y^3\right)$

$=x^4+x^2y^2$

Vì với mọi x,y ta có: $x^4+x^2y^2\geq 0 \Rightarrow AB-C\geq 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

a) $A=\left(2x+1\right)^2-\left(3x-1\right)\left(3x+1\right)+5x\left(x-1\right)$ tại $x=-\frac{1}{2}$.

b) $B=\left(2x-1\right)^3-\left(2x+1\right)\left(4x^2-2x+1\right)+\left(1-3x\right)^2$ tại $x=-3$.

c) $C=\left(x+2y\right)^3-6xy\left(x+2y\right)$ tại $x=-0,1;\ y=0,1$.

Lời giải

a) $A=(2x+1)^2-(3x-1)(3x+1)+5x(x-1)$ $=4x^2+4x+1-(9x^2-1)+5x^2-5x$ $=4x^2+4x+1-9x^2+1+5x^2-5x$ $=-x+2$ Thay $x=-\frac{1}{2}$ vào A ta được: $A=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ Vậy $A=\frac{5}{2}$ tại $x=-\frac{1}{2}$	c) $C=(x+2y)^3-6xy(x+2y)$ $=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-6x^2y-12xy^2$ $=x^3+8y^3$ Thay $x=-0,1;\ y=0,1$ vào C ta được: $C=(-0,1)^3+8.0,1^3=0,007$ Vậy $C=0,007$ tại $x=-0,1;\ y=0,1$
b) $B=(2x-1)^3-(2x+1)(4x^2-2x+1)+(1-3x)^2$ $=(8x^3-12x^2+6x-1)-(8x^3+1)+(1-6x+9x^2)$ $=8x^3-12x^2+6x-1-8x^3-1+1-6x+9x^2=-3x^2-1$ Thay $x=-3$ vào B ta được: $B=-3.(-3)^2-1=-28$ Vậy $B=-28$ tại $x=-3$	

Bài 5. Tìm x, biết

a) $(2x-7)^2-4(x-9)(x+9)=12x+13$

b) $(x-1)^3-(x-2)(x^2+2x+4)+3x(x+2)=6.$

c) $(x+3)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)-3x^2=42$

d) $4x^3-6x^2+3x-63=0$

Lời giải

a) $(2x-7)^2-4(x-9)(x+9)=12x+13$ $4x^2-28x+49-4(x^2-81)=12x+13$ $4x^2-28x+49-4x^2+324-12x-13=0$ $-40x+360=0$ $-40x=-360$ $x=9$ Vậy $x=9$	b) $(x-1)^3-(x-2)(x^2+2x+4)+3x(x+2)=6$ $x^3-3x^2+3x-1-x^3+8+3x^2+6x=6$ $9x+7=\ 6$ $9x\ =-1$ $x\ =\frac{-1}{9}$ Vậy $x=-\frac{1}{9}$
c) $(x+3)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)-3x^2=42$ $x^3+9x^2+27x+27-x(9x^2+6x+1)+(2x)^3+1^3-3x^2=42$ $x^3+9x^2+27x+27-9x^3-6x^2-x+8x^3+1-3x^2=42$ $26x=14$ $x=\frac{7}{13}$ Vậy $x=\frac{7}{13}$	

d) $4x^3-6x^2+3x-63=0$ $8x^3-12x^2+6x-126=0$ $\left[(2x)^3-3.(2x)^2.1+3.2x.1^3-1^3\right]-125=0$ $(2x-1)^3=125$ $(2x-1)^3=5^3$ $2x-1=5$ $2x=6$ $x=3$ Vậy $x=3$

Bài 6.

a) Cho $x+y=1$. Tính giá trị biểu thức: $M=4\left(x^3+y^3\right)-6\left(x^2+y^2\right)$

b) Cho $x-y=12$. Tính giá trị biểu thức: $N=x^3-y^3-36xy$

Lời giải

a) $M=4\left(x^3+y^3\right)-6\left(x^2+y^2\right)$ $=4\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]-6\left[(x+y)^2-2xy\right]$ $=4(x+y)^3-12xy(x+y)-6(x+y)^2+12xy$ $=4.1^3-12xy.1-6.1^2+12xy$ $=4-12xy-6+12xy$ $=-2$	b) $N=x^3-y^3-36xy$ $=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)-36xy$ $=12\left(x^2+xy+y^2\right)-36xy$ $=12x^2+12xy+12y^2-36xy$ $=12x^2-24xy+12y^2$ $=12\left(x^2-2xy+y^2\right)$ $=12(x-y)^2=12.12^2=1728$

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5(x+3y)-15x(x+3y)$

b) $(4x-y)(a+b)-(y-4x)(b-1)$

c) $2x^2-x-6xy+3y$

d) $x^4+6x^3-54x-81$

e) $x^2-13x+36$

f) x^3-5x^2+8x-4

g) $81x^4+4$

h) $8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1)-130$

i) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

k) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

Lời giải

a) $5(x+3y)-15x(x+3y)=5(x+3y)(1-3x)$

b) $(4x-y)(a+b)-(y-4x)(b-1)$

$=(4x-y)(a+b)+(4x-y)(b-1)$

$=(4x-y)(a+b+b-1)$

$=(4x-y)(a+2b-1)$

c) $2x^2-x-6xy+3y=\left(2x^2-6xy\right)-(x-3y)=2x(x-3y)-1.(x-3y)=(x-3y)(2x-1)$

d) $x^4+6x^3-54x-81$

$=\left(x^4-81\right)+\left(6x^3-54x\right)$

$=\left(x^2+9\right)\left(x^2-9\right)\ +\ 6x\left(x^2-9\right)$

$=\left(x^2-9\right)\left(x^2+9+6x\right)$

$=\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x+3\right)^2$

$=\left(x-3\right)\left(x+3\right)^3$

e) $x^2-13x+36=x^2-4x-9x+36=x\left(x-4\right)-9\left(x-4\right)=\left(x-4\right)\left(x-9\right)$

f) x^3-5x^2+8x-4

$=x^3-x^2-4x^2+4x+4x-4$

$=x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1)$

$=(x-1)(x^2-4x+4)$

$=(x-1)(x-2)^2$

g) $81x^4+4$

$=81x^4+36x^2+4-36x^2$

$=\left(81x^4+36x^2+4\right)-36x^2$

$=\left(9x^2+2\right)^2-\left(6x\right)^2$

$=\left(9x^2+2-6x\right).\left(9x^2+2+6x\right)$

h) Ta có: $8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1)-130$

$=(4x+1)(4x-6)(4x-3)(4x+4)-130$

$=\left[(4x+1)(4x-3)\right].\left[(4x-6)(4x+4)\right]-130$

$=\ (16x^2-8x-3)(16x^2-8x-24)-130$

Đặt $16x^2-8x-24=t$, ta có:

$t(t+21)-130=t^2+21t-130=t^2+26t-5t-130=t(t+26)-5(t+26)=(t+26)(t-5)$

Lúc này: $8(4x+1)(2x-3)(4x-3)(x+1)-130=(16x^2-8x+2)(16x^2-8x-29)$

i) Đặt $P=x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

Giả sử $P=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases} a+c=-7 \\ ac+b+d=14 \\ ad+bc=-7 \\ bd=1 \end{cases}$

Chọn $b=1;\ d=1\Rightarrow\begin{cases} a+c=-7 \\ ac=12 \end{cases}\Rightarrow a=-3;\ c=-4\Rightarrow P=(x^2-3x+1)(x^2-4x+1)$

$k)\ x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
$=x^2(y-z)+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y$
$=x^2(y-z)+(y^2z-z^2y)-(y^2x-z^2x)$
$=x^2(y-z)+yz(y-z)-x(y^2-z^2)$
$=x^2(y-z)+yz(y-z)-x(y-z)(y+z)$
$=(y-z)(x^2+yz-xy-xz)$
$=(y-z)\left[x(x-y)-z(x-y)\right]$
$=(y-z)(x-y)(x-z)$

Bài 8. Chứng minh rằng :

a) $A=23^6-13^6$ chia hết cho 360.

b) $B=27^5-3^{11}$ chia hết cho 80.

c) $C=n^3+3n^2-n-3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên n lẻ.

Lời giải

$a)$ $A=23^6-13^6$ chia hết cho 360

$A=23^6-13^6=\left(23^2\right)^3-\left(13^2\right)^3=\left(23^2-13^2\right)\left(23^4+23^2.13^2+13^4\right)=360\left(23^4+23^2.13^2+13^4\right)\ \vdots\ 360$

Vậy A chia hết cho 360.

$b)$ $B=27^5-3^{11}$ chia hết cho 80

$B=27^5-3^{11}=\left(3^3\right)^5-3^{11}=3^{15}-3^{11}=3^{11}.\left(3^4-1\right)=3^{11}.80\ \vdots\ 80$

Vậy B chia hết cho 80.

$c)$ $C=n^3+3n^2-n-3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên n lẻ

$C=n^3+3n^2-n-3=\left(n^3+3n^2\right)-\left(n+3\right)=n^2\left(n+3\right)-\left(n+3\right)=\left(n+3\right)\left(n^2-1\right)=\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n+3\right)$

Đặt $n=2k+1$ ($k\in\mathbb{Z}$). Khi đó:

$C=\left(2k+1-1\right)\left(2k+1+1\right)\left(2k+1+3\right)=2k\left(2k+2\right)\left(2k+4\right)=2k.2\left(k+1\right).2\left(k+2\right)=8k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$

Vì $k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp

$\Rightarrow k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$ chia hết cho 2 và 3

$\Rightarrow k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\ \vdots\ 6\Rightarrow 8k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\ \vdots\ 48$

Vậy C chia hết cho 48.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, kẻ $AH\perp BC$.

a) Chứng minh: $AB^2+HC^2=AC^2+HB^2$

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm D tùy ý. Nối BD và DC. Chứng minh:

$AB^2+DC^2=AC^2+BD^2$

Lời giải

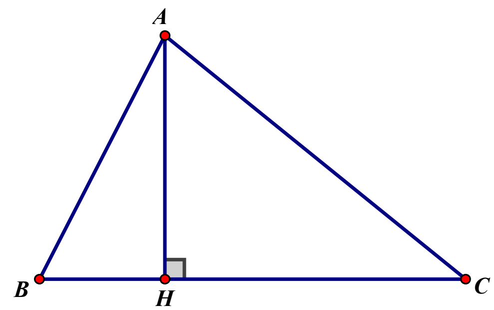
a) Áp dụng định lí Pythagore vào ΔAHB vuông tại H: $AB^2 = AH^2 + HB^2$

$\Rightarrow AB^2 + HC^2 = AH^2 + HB^2 + HC^2$ (1)

Áp dụng định lí Pythagore vào ΔAHC vuông tại H: $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$\Rightarrow AC^2 + HB^2 = AH^2 + HC^2 + HB^2$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$



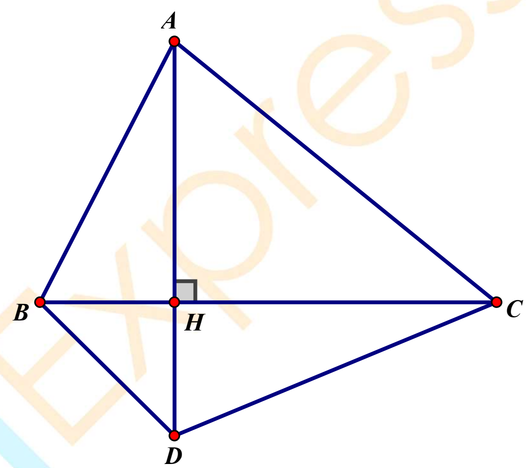
b) Áp dụng định lí Pythagore vào ΔBHD vuông tại $H: BD^2 = HD^2 + BH^2$

Áp dụng định lí Pythagore vào ΔCHD vuông tại H: $DC^2 = HD^2 + CH^2$

$\Rightarrow AB^2 + DC^2 = AH^2 + BH^2 + HD^2 + CH^2$ (3)

$AC^2 + BD^2 = AH^2 + HC^2 + HD^2 + BH^2$ (4)

Từ (3) (4) $\Rightarrow AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$



Bài 10. Cho đoạn thẳng AB dài $7cm$. Lấy điểm C thuộc AB sao cho $AC = 2cm$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Lấy điểm D thuộc tia Ax, điểm E thuộc tia By sao cho $AD = 10cm$, $BE = 1cm$.

a) Tính độ dài DC, CE.

b) Chứng minh rằng: $DC \perp CE$

Lời giải

a) Xét ΔACD vuông tại A.

Áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$DC^2 = AD^2 + AC^2 = 10^2 + 2^2 = 104$

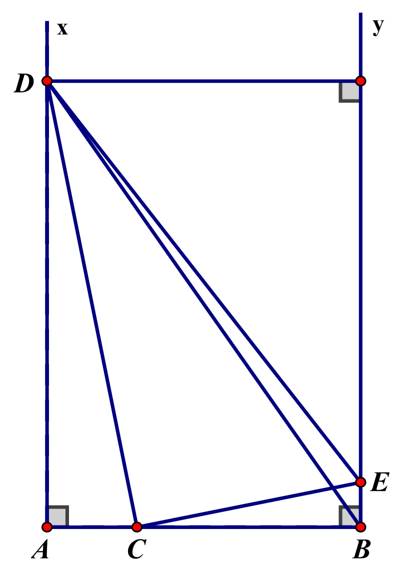
$\Rightarrow DC = \sqrt{104}$ (cm)

Xét ΔBCE vuông tại B.

Áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$CE^2 = BE^2 + BC^2 = 1^2 + 5^2 = 26 \Rightarrow CE = \sqrt{26}$ (cm)

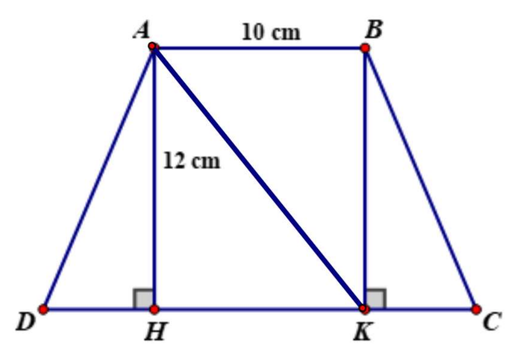
Vậy $DC = \sqrt{104}$ (cm) ; $CE = \sqrt{26}$ (cm)



b) Kẻ $DF \perp By\ (F \in By)$ $AD \perp AB; BF \perp AB \Rightarrow AD // FB$ Suy ra: $\widehat{ADB} = \widehat{FBD}$ (Hai góc ở vị trí so le trong) Chứng minh $\Delta ADB = \Delta BFD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow DF = AB = 7\ cm;\ BF = AD = 10\ cm$ $EF = BF - BE = 10 - 1 = 9\ cm$ Xét ΔDEF vuông tại F. Áp dụng định lí Pythagore, ta có: $DE^2 = DF^2 + FE^2 = 7^2 + 9^2 = 130 \Rightarrow DE = \sqrt{130}\ (cm)$ Xét ΔCDE có: $CD^2 + CE^2 = 104 + 26 = 130 = DE^2$ $\Rightarrow DE^2 = CD^2 + CE^2$ $\Rightarrow\ \Delta CDE$ vuông tại C (Định lí Pythagore đảo) Vậy $DC \perp CE$	

Bài 11. Hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 10cm$; đáy lớn $CD = 20cm$; đường cao $AH = 12cm$. Tính độ dài các cạnh bên.

Lời giải

Kẻ $BK \perp CD\ (K \in CD)$ Khi đó ta có: $AB // HK$ (Do $AB // CD$) $AH // BK$ (do cùng $\perp CD$) Chứng minh $\Delta ABK = \Delta KHA\ (g.c.g)$ $\Rightarrow\ BK = AH = 12(cm);\ HK = AB = 10(cm)$. Xét ΔAHD và ΔBKC có: $\widehat{AHD} = \widehat{BKC} = 90^0$; $AH = BK$ (chứng minh trên);	

$AD = BC$ (vì $ABCD$ là hình thang cân)

$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta BKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DH = CK$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $DC = DH + HK + KC$

$\Rightarrow DH = CK = (DC - HK):2 = (20-10):2 = 5(cm)$

Xét ΔAHD vuông tại H. Áp dụng định lí Pythagore:

$AD^2 = AH^2 + DH^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow AD = 13\ cm$

$\Rightarrow BC = AD = 13\ cm$

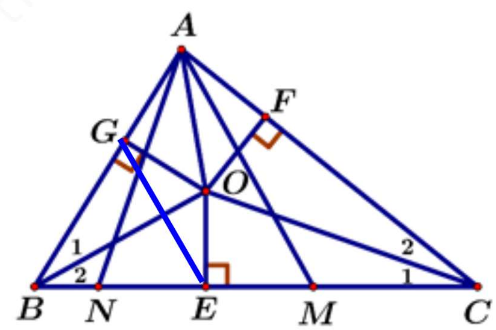
Vậy $BC = AD = 13\ cm$

Bài 12. Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Trên tia CB lấy điểm N sao cho $CN = CA$. Gọi O là giao của 3 đường phân giác của tam giác ABC; OE, OG, OF lần lượt là đoạn vuông góc kẻ từ O xuống BC; AB; AC. Chứng minh rằng:

a) $AGEM$; $AFEN$ là các hình thang cân

b) ΔOMN là tam giác cân

Lời giải



a) Xét ΔBAM có: $BM = BA$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta BAM$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BMA} = \dfrac{180^o - \widehat{ABC}}{2}$ (1)

Xét ΔGOB vuông tại G và ΔEOB vuông tại E có:

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (BO là phân giác của $\widehat{ABC}$)

BO: cạnh chung

$\Rightarrow \Delta GOB = \Delta EOB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow GB = EB$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta BGE$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BEG} = \dfrac{180^o - \widehat{ABC}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BMA} = \widehat{BEG}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $GE // AM$ (3)

Từ $GE//AM$ và $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$

$\Rightarrow AGEM$ là hình thang cân

Chứng minh tương tự, ta có $AFEN$ là hình thang cân.

b) Xét ΔGOA vuông tại G và ΔFOA vuông tại F:

$\widehat{GAO} = \widehat{FAO}$ (AO là phân giác của $\widehat{BAC}$)

AO: cạnh chung

$\Rightarrow \Delta GOA = \Delta FOA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AG = AF$ (hai cạnh tương ứng) (4)

Vì $AGEM$ là hình thang cân $\Rightarrow AG = EM$ (5)

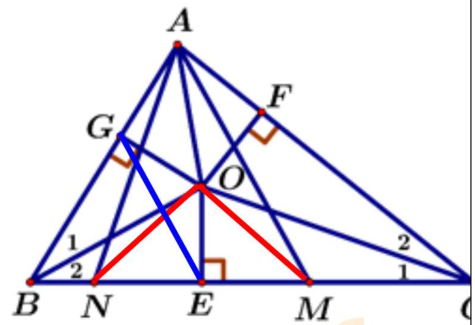
Vì $AFEN$ là hình thang cân $\Rightarrow AF = EN$ (6)

Từ (4) (5) (6) $\Rightarrow EM = EN$

Xét ΔOMN có: OE là đường cao $(OE \perp BC)$

đồng thời OE là đường trung tuyến $(EM = EN)$

$\Rightarrow \Delta OMN$ cân tại O (điều phải chứng minh).



Bài 13. Tam giác ABC có AM là trung tuyến. Trên AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Đoạn CD cắt AM tại I. Chứng minh:

a) $EM // CD$ b) I là trung điểm AM c) $DC = 4.DI$

Lời giải

a) Có $AD = DE \Rightarrow E$ là trung điểm AE

M là trung điểm BC

Ta có EM là đường trung bình của ΔBCD

$\Rightarrow EM // CD$.

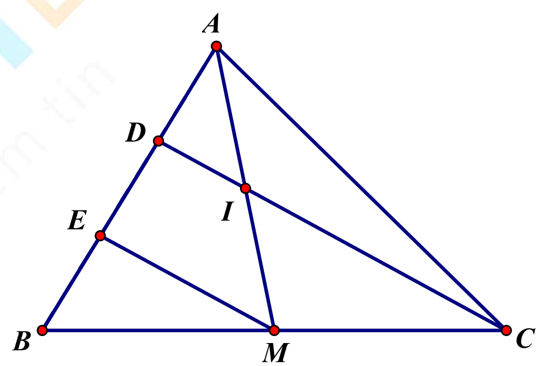
b) DC đi qua trung điểm D của AE và $DI // EM \Rightarrow$ DI là đường trung bình của ΔAEM. Suy ra I là trung điểm của AM

c) Vì DI là đường trung bình của ΔAEM nên

$DI = \dfrac{1}{2}EM$ (1)

Tương tự, ta được: $EM = \dfrac{1}{2}DC$ (2)

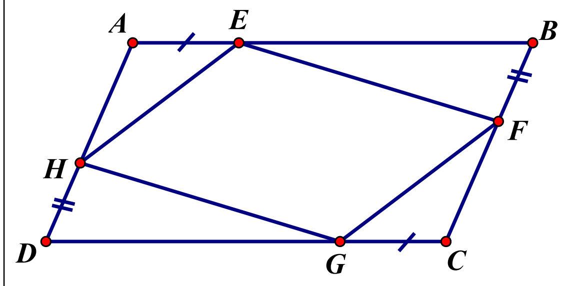
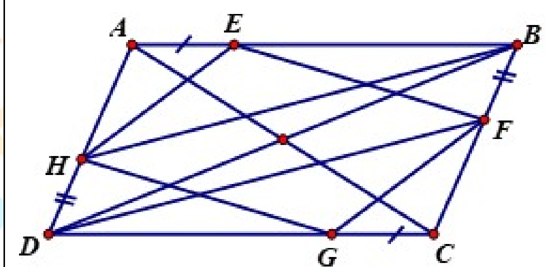
Từ (1) và (2) $\Rightarrow DC = 4DI$ (điều phải chứng minh).



Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB, CD lấy tương ứng các điểm E, G sao cho $AE = CG$. Trên các cạnh DA, BC lấy tương ứng các điểm H, F sao cho $DH = BF$. Chứng minh rằng:

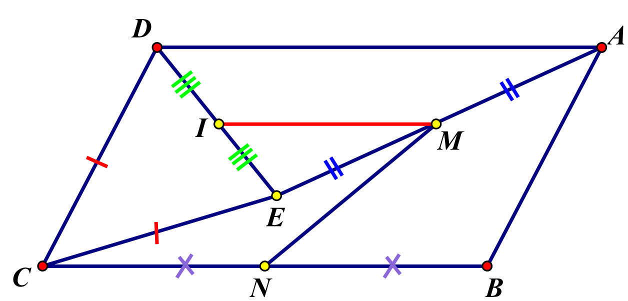
a) Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành b) Các đường thẳng AC, BD, EG, FH đồng quy

Lời giải

a) Ta có: $AB = AE + EB$; $CD = CG + GD$ Mà $AB = CD$ (Do $ABCD$ là hình bình hành); $AE = CG$ (giả thiết) $\Rightarrow EB = GD$ Chứng minh tương tự, ta có: $AH = CF$. Xét ΔBEF và ΔDGH có: $EB = GD$ (chứng minh trên); $\widehat{EBF} = \widehat{GDH}$ (Do $ABCD$ là hình bình hành); $BF = DH$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta BEF = \Delta DGH\ (c.g.c)$ $\Rightarrow EF = GH$ (2 cạnh tương ứng) Chứng minh tương tự: $\Delta AEH = \Delta CGF\,(c.g.c)$ $\Rightarrow EH = GF$ (2 cạnh tương ứng) Xét tứ giác $EFGH$ có $EF = GH$ (chứng minh trên); $EH = GF$ (chứng minh trên) $\Rightarrow EFGH$ là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết)	
b) Vì $ABCD$ là hình bình hành (giả thiết) $\Rightarrow AC, BD$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (1) Vì $EFGH$ là hình bình hành (chứng minh trên) $\Rightarrow HF, EG$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (2) Vì $BF // DH$; $BF = DH \Rightarrow BFDH$ là hình bình hành $\Rightarrow BD, HF$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (3) Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.	

Bài 15. Bên trong hình bình hành $ABCD$ lấy điểm E sao cho $CD = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh rằng $MN \perp DE$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của DE Xét ΔEDA có: $I; M$ lần lượt là trung điểm của $ED; EA$ $\Rightarrow IM$ là đường trung bình của ΔEDA $\Rightarrow IM // AD;\ IM = \frac{1}{2}AD$ (1) Lại có $ABCD$ là hình bình hành (giả thiết) $\Rightarrow AD//BC;\ AD = BC$ (2) Từ (1) (2) $\Rightarrow IM//BC;\ IM = \frac{1}{2}BC$ Mà N là trung điểm của BC (giả thiết)	

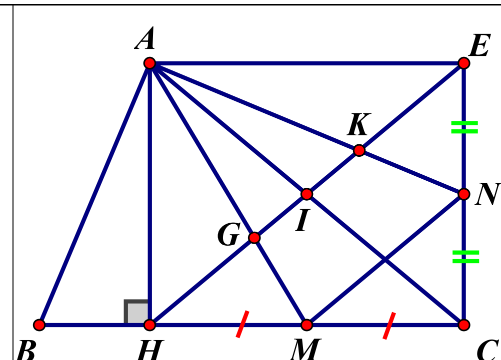
$\Rightarrow CN = \dfrac{1}{2}BC$ Do đó $IM//CN; IM = CN$ Xét tứ giác $IMNC$ có: $IM//CN; IM = CN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow$ $IMNC$ là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow CI//MN$ Xét ΔCDE có $CD = CE$ (giả thiết) $\Rightarrow$ ΔCDE cân tại C Mà I là trung điểm DE $\Rightarrow CI$ là trung tuyến nên đồng thời là đường cao $\Rightarrow CI \perp DE$ Vì $CI//MN$; $CI \perp DE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow MN \perp DE$ (điều phải chứng minh)	

Bài 16. Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm AC. Lấy điểm E sao cho I là trung điểm HE. Gọi là M, N trung điểm HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K. Chứng minh:

a) Tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật.

b) $HG = GK = KE$.

Lời giải

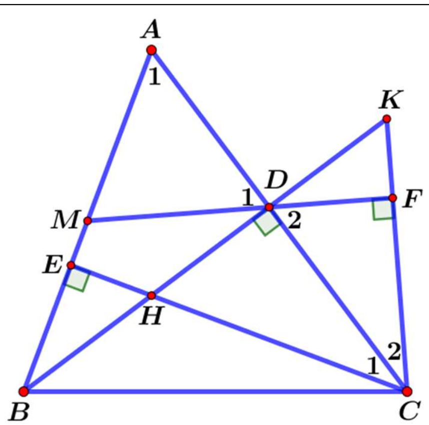
a) Xét tứ giác $AHCE$ có: Các đường chéo AC và HE cắt nhau tại I I đồng thời là trung điểm của AC và HE $\Rightarrow$ $AHCE$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết) Hình bình hành $AHCE$ có: $\widehat{AHC} = 90^0$ (Do $AH \perp BC$) $\Rightarrow$ $AHCE$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)	

b) Xét ΔAHC có các trung tuyến AM và HI cắt nhau tại G $\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔAHC $\Rightarrow HG=\frac{2}{3}.HI=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.HE=\frac{1}{3}HE$ (1) Chứng minh tương tự ta cũng có $EK=\frac{1}{3}.HE$ (2) Mà $HE=HG+GK+KE$ $\Rightarrow GK=HE-(HG+KE)=HE-\left(\frac{1}{3}HE+\frac{1}{3}HE\right)=\frac{1}{3}.HE$ Do đó $GK=\frac{1}{3}HE$ (3) Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow HG=GK=KE$	

Bài 17. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi M là trung điểm AB. Đường thẳng qua C và vuông góc với MD cắt BD ở K. Chứng minh rằng:

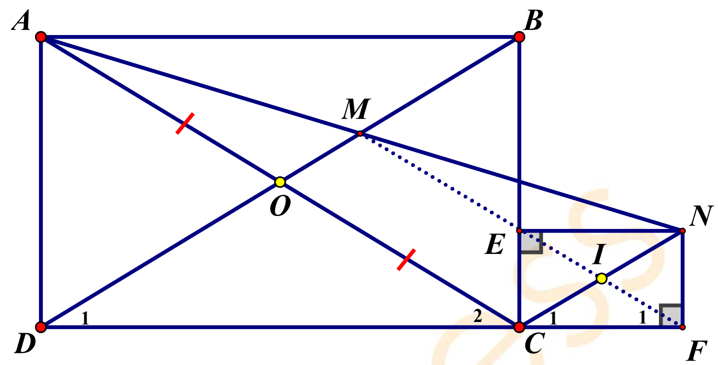
a) CA là tia phân giác của góc HCK b) $CH=CK$

Lời giải

 b) Xét $\triangle HCK$, có: CA là phân giác của $\widehat{HCK}$; CA là đường cao $\Rightarrow \triangle HCK$ cân tại C Vậy $CH=CK$.	a) ΔADB vuông tại D, có DM là đường trung tuyến (do M là trung điểm AB) $\Rightarrow DM=MA=MB=\frac{1}{2}AB$ $\Rightarrow \Delta AMD$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{A_1}$ Gọi F là giao của MD và CK Do ΔDFC vuông tại F nên $\widehat{C_2}=90^o-\widehat{D_2}$ Mà $\widehat{D_2}=\widehat{D_1}$ (đối đỉnh), $\widehat{D_1}=\widehat{A_1}$ (chứng minh trên)$\Rightarrow \widehat{C_2}=90^o-\widehat{A_1}$ Lại có: $\widehat{C_1}=90^o-\widehat{A_1}$ (do ΔAEC vuông tại E) $\Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ Vậy CA là phân giác của $\widehat{HCK}$.

Bài 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy điểm M thuộc đường chéo BD. N thuộc tia AM sao cho $AM = MN$. Kẻ NE vuông góc với BC, NF vuông góc với CD. Chứng minh M, E, F thẳng hàng.

Lời giải



Gọi giao điểm của AC và BD là O

giao điểm của CN và EF là I

Xét tứ giác $ENFC$ có:

$\widehat{NEC} = \widehat{ECF} = \widehat{NFC} = 90^0$

$\Rightarrow ENFC$ là hình chữ nhật

Vì $ABCD$; $ENFC$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$; $IE = IF = IN = IC$

Xét ΔANC có MI là đường trung bình $\Rightarrow MI // AC$ (1)

OM là đường trung bình $\Rightarrow OM // CN \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (hai góc đồng vị)

Mà $\widehat{C_1} = \widehat{F_1}$; $\widehat{D_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow IF // OC$ hay $IF // AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M$; I; F thẳng hàng; E; I; F mà thẳng hàng $\Rightarrow M$; E; F thẳng hàng.

Bài 19.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: $A = x^2 + 8x - 5$; $B = 3x^2 + 5x + 1$; $C = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3$

b) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức: $M = -x^2 - 6x - 31$; $N = 4 - 7x - 2x^2$; $P = 2xy + 7 - 3x^2 - y^2$

Lời giải

a) Ta có: $A = x^2 + 8x - 5 = (x^2 + 8x + 16) - 21 = (x+4)^2 - 21$

Với mọi x ta có: $(x+4)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+4)^2 - 21 \geq -21 \Rightarrow A \geq -21$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(x+4\right)^2 = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

Vậy GTNN $A = -21$ tại $x = -4$

Ta có:

$$B = 3x^2 + 5x + 1 = 3.\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3.\left[x^2 + 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right] = 3.\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right] = 3.\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$$

Với mọi x ta có: $3.\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow 3.\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} \ge -\frac{13}{12} \Rightarrow B \ge -\frac{13}{12}$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 = 0 \Rightarrow x+\frac{5}{6}=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{6}$

Vậy GTNN $B=-\frac{13}{12}$ tại $x=-\frac{5}{6}$

Ta có: $C = x^2+y^2-4x+2y+3 = (x^2-2.x.2+2^2)+(y^2+2y+1)-2=(x-2)^2+(y+1)^2-2$

Với mọi x,y ta có: $\begin{cases}(x-2)^2\ge 0\\(y+1)^2\ge 0\end{cases} \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \ge 0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2-2 \ge -2 \Rightarrow C \ge -2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}(x-2)^2=0\\(y+1)^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2=0\\y+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

Vậy GTNN của C bằng -2 khi $x=2;\ y=-1$

b) Ta có:

$M=-x^2-6x-31=-(x^2+6x+31)=-\left[(x^2+6x+9)+22\right]=-\left[(x+3)^2+22\right]=-(x+3)^2-22$

Với mọi x ta có: $(x+3)^2\ge 0 \Rightarrow -(x+3)^2 \le 0 \Rightarrow -(x+3)^2-22 \le -22 \Rightarrow M \le -22$

Dấu "=" xảy ra khi $(x+3)^2=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

Vậy GTLN $M=-22$ tại $x=-3$

Ta có:

$$\begin{aligned}
N &= 4-7x-2x^2\\
&= -2\left(x^2+\frac{7}{2}x-2\right)\\
&= -2\left[x^2+2.x.\frac{7}{4}+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right]\\
&= -2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right]\\
&= -2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\frac{81}{8}
\end{aligned}$$

Với mọi x ta có: $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow -2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2 \le 0 \Rightarrow -2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\frac{81}{8} \le \frac{81}{8} \Rightarrow N \le \frac{81}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=0 \Rightarrow x+\frac{7}{4}=0 \Rightarrow x=-\frac{7}{4}$

Vậy GTLN $N=\frac{81}{8}$ tại $x=-\frac{7}{4}$

Ta có: $P=2xy+7-3x^2-y^2=-2x^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)+7=-2x^2-(x-y)^2+7$

Vì $2x^2 \geq 0$ với mọi x; $(x-y)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$\Rightarrow -2x^2 \leq 0$ với mọi $x; -(x-y)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$\Rightarrow -2x^2-(x-y)^2+7 \leq 7$ với mọi x, y

Hay $P \leq 7$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi $-2x^2=0$ và $-(x-y)^2=0$

$\Rightarrow x=0$ và $x-y=0 \Rightarrow x=y=0$

Vậy GTLN của P bằng 7 khi $x=y=0$

Bài 20.

a) Cho các số x, y, z thỏa mãn điều kiện: $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4xz+2yz-6y-10z+34=0$. Tính giá trị biểu thức: $M=(x-4)^{2024}+(y-4)^{2025}+(z-4)^{2026}$

b) Chứng minh rằng không có giá trị $x,\ y$ nào thỏa mãn đẳng thức: $3x^2+6y^2-12x-20y+40=0$

Lời giải

a) Ta có: $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4xz+2yz-6y-10z+34=0$

$\Rightarrow \left(4x^2-4xy-4xz+y^2+2yz+z^2\right)+\left(y^2-6y+9\right)+\left(z^2-10z+25\right)=0$

$\Rightarrow \left[(2x)^2-2.2x.(y+z)+(y+z)^2\right]+(y-3)^2+(z-5)^2=0$

$\Rightarrow (2x-y-z)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=0$

Vì $(2x-y-z)^2 \geq 0$; $(y-3)^2 \geq 0$; $(z-5)^2 \geq 0$ với mọi x, y, z

$$\Rightarrow \begin{cases}(2x-y-z)^2=0\\(y-3)^2=0\\(z-5)^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-y-z=0\\y-3=0\\z-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=4\\y=3\\z=5\end{cases}$$

Khi đó $M=(4-4)^{2024}+(3-4)^{2025}+(5-4)^{2026}=0^{2024}+(-1)^{2025}+1^{2026}=(-1)+1=0$

Vậy $M=0$.

b) Ta có: $3x^2+6y^2-12x-20y+40=(3x^2-12x+12)+(4y^2-20y+25)+2y^2+3$

$=3(x-2)^2+(2y-5)^2+2y^2+3\geq 3>0$ (trái với đề bài)

Vậy không có giá trị x,y nào thỏa mãn đẳng thức: $3x^2+6y^2-12x-20y+40=0$

Bài 21.

a) Cho $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Tính giá trị biểu thức: $M=(a-b)^{2024}+(b-c)^{2025}+(c-a)^{2026}$

b) Cho ba số a,b,c phân biệt và $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính:

$$N=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$$

Lời giải

a) Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Rightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

Vì $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\Rightarrow a=b=c\Rightarrow a-b=b-c=c-a=0$

$\Rightarrow M=0^{2024}+0^{2025}+0^{2026}=0$

Vậy $M=0$.

b) Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a=b=c\end{array}\right.$$

Vì a,b,c phân biệt nên suy ra $a+b+c=0$

Do đó:

$$N=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$$
$$=\frac{ab^2}{a^2+b^2-(a+b)^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-(b+c)^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-(c+a)^2}$$
$$=\frac{ab^2}{-2ab}+\frac{bc^2}{-2bc}+\frac{ca^2}{-2ca}$$
$$=\frac{b}{-2}+\frac{c}{-2}+\frac{a}{-2}$$
$$=\frac{b+c+a}{-2}=\frac{0}{-2}=0$$

Bài 22.

a) Tìm số tự nhiên x sao cho $x^2+2x+12$ là số chính phương .

b) Tìm tất cả các số nguyên tố q, sao cho tồn tại số nguyên dương n để n^2+22q là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

c) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh rằng $ab \vdots a+b+c$.

Lời giải

a) Vì $x^2+2x+12$ là số chính phương nên đặt $x^2+2x+12=k^2\ (k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow (x^2+2x+1)+11=k^2 \Rightarrow k^2-(x+1)^2=11 \Rightarrow (k+x+1)(k-x-1)=11$

Vì $k+x+1>k-x-1$

$\Rightarrow \begin{cases}k+x+1=11\\k-x-1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k+x=10\\k-x=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=10-x\\k=x+2\end{cases} \Rightarrow 10-x=x+2 \Rightarrow x=4$

Thử lại: Với $x=4$ thì $x^2+2x+12=4^2+2.4+12=36=6^2$ là một số chính phương.

Vậy $x=4$

b) Đặt $n^2+22q=11^a$.

Trường hợp 1: Nếu $a=1$ thì $n^2+22q=11$. Vì $n^2\ge 1;\ q\ge 2$ nên $n^2+22q>11$ (loại).	Trường hợp 2: Nếu $a>1\Rightarrow a\ge 2$. Ta có: $\begin{cases}22q\vdots 11\\11^a\vdots 11\end{cases}\Rightarrow n^2\vdots 11\Rightarrow n\vdots 11\Rightarrow n^2\vdots 11^2$. Mà $11^a\vdots 11^2$ (do $a\ge 2$) $\Rightarrow 22q\vdots 11^2\Rightarrow q\vdots 11\Rightarrow q=11$ (do q là số nguyên tố).

Với $q=11$ thì $n^2+242=11^a$.

Nhận thấy cặp $(n;a)=(33;3)$ thỏa mãn $n^2+242=11^a$ nên với $q=11$ thì tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $q=11$.

c) Ta có: $a^2+b^2=c^2$

$\Rightarrow\ a^2+b^2-c^2=0$

$\Rightarrow\ (a+b)^2-c^2=2ab$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)=2ab$

$\Rightarrow ab=\dfrac{(a+b-c)(a+b+c)}{2}=\dfrac{a+b-c}{2}.(a+b+c)\ \ (1)$

Vì $\left(a+b+c\right)-\left(a+b-c\right)=2c \Rightarrow a+b+c$ và $a+b-c$ cùng tính chẵn lẻ

Mà $(a+b+c)(a+b-c)=2ab \Rightarrow a+b+c$ và $a+b-c$ cùng chẵn $\Rightarrow \dfrac{a+b-c}{2}\in\mathbb{Z}\ \ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ab\ \vdots\ (a+b+c)$. Ta được điều phải chứng minh.