

## ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 7

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Số hữu tỉ, các phép toán về số hữu tỉ, lũy thừa với số mũ tự nhiên của số hữu tỉ
- Tỉ lệ thức, tính chất dãy tỉ số bằng nhau
- Số vô tỉ, căn bậc hai, căn bậc hai của số thực
- Hình học trực quan
- Góc ở vị trí đặc biệt, hai đường thẳng song song, định lý tổng ba góc trong một tam giác.

### B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

#### I. CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ HỮU TỈ

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 0,2 - \frac{4}{7} + \frac{-6}{5} & \text{b) } 1\frac{4}{23} + \frac{5}{21} - \frac{4}{23} + 0,5 + \frac{16}{21} & \text{c) } \frac{11}{35} - 0,62 + \frac{2}{17} - 0,38 + \frac{24}{35} \\
 \text{d) } \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{11} : \frac{8}{5} + \frac{(-1)^{19}}{11} & \text{e) } \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) - \left(7 - \frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4\right) & \\
 \text{f) } \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{4}{7}\right) : \frac{7}{5} & \text{g) } \left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left|-\frac{1}{9}\right| + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 & \\
 \text{h) } 4 + \left(\frac{2}{3} + 5 - \frac{2023}{\sqrt{2024^2}}\right) - \left(6 + \frac{1}{2024} - \frac{4}{3}\right) & \text{i) } 2 - \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{12} : \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1\frac{4}{9} - 2023^0\right] & \\
 \text{k) } \left(0, (3) + \frac{|-2|}{3}\right) : \frac{\sqrt{25}}{4} - (2^3 + 3^2)^0 & & 
 \end{array}$$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } A = \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} & \text{b) } B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} & \text{c) } C = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} \\
 \text{d) } D = \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} & \text{e) } E = \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}} & \\
 \text{f) } F = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{343}} & \text{g) } G = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{11}{5} + \frac{13}{5}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5}} & \\
 \text{h) } H = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}} & \text{i) } I = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}} & 
 \end{array}$$

**Bài 3.** Tìm  $x$ , biết :

a)  $\frac{2}{3} - \frac{5}{2}x = \frac{-13}{3}$

b)  $-(0,5+x) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

c)  $2x - 2 = 0,5x + 0,7$

d)  $\frac{7}{12} - \left(x + \frac{7}{6}\right) : \frac{6}{5} = \frac{-5}{4}$

e)  $\left(x + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{11}{5}\right) = 0$

f)  $(4\sqrt{x} - 9)\left(3x + \frac{1}{2}\right) = 0$

g)  $x^2 - 1\frac{3}{4} = 2,25$

h)  $\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{6}{25}\right] \cdot 2 = \frac{2^2}{5}$

i)  $\frac{1}{3} - \left|\frac{5}{4} - 2x\right| = \frac{1}{4}$

k)  $3 \cdot (-2)^{5x+8} + 5^2 = 1$

l)  $5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$

m)  $\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$

n)  $(x-10) \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{1}} = \frac{1}{200}$

**Bài 4.** Tìm điều kiện của số hữu tỉ  $x$  để

a)  $-\frac{3}{4}(4x+3) < 0$

b)  $\frac{51}{-8(7x+2)} > 0$

c)  $\frac{x-5,8}{6,2+x} < 0$

d)  $\frac{x^2+1}{3-7,2x} > 0$

**Bài 5.**

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a)  $A = 2x^2 + 9(y-3)^2 + 2024$

b)  $B = \left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{81}{144} - y^2\right)^{10} - \frac{20}{11}$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a)  $C = \frac{1}{|x|+2023} - \frac{(9y^2-36)^8}{3} + 1$

b)  $D = \frac{4}{(x+y+3)^{2024} + 1} + \frac{9}{(y+4)^{2022} + 3} - 3036$

## II. TỈ LỆ THỨC, TÍNH CHẤT DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

**Bài 6.** Tìm các số  $x, y, z$  biết

a)  $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$  và  $x - y = 60$

b)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8}$  và  $x + y + z = 34$

c)  $\frac{x}{10} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  và  $2x - 3y + 4z = 210$

d)  $6x = 4y = 3z$  và  $2x + 3y - 5z = 14$

e)  $\frac{40}{x-30} = \frac{20}{y-15} = \frac{28}{z-21}$  và  $x \cdot y \cdot z = 22400$

e)  $\frac{6x-3z}{5} = \frac{4y-6x}{7} = \frac{3z-4y}{9}$  và  $2x + 3y - 5z = 14$

**Bài 7.** Cho  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  với  $a, b, c, d$  khác 0 và  $c \neq \pm d; 3a \neq 4b; 3c \neq 4d$ . Chứng minh rằng

a)  $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

b)  $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}$

c)  $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$

d)  $\frac{3a+5b}{3a-4b} = \frac{3c+5d}{3c-4d}$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

**III. BÀI TOÁN THỰC TẾ (CÓ LỜI VĂN)****Bài 8.**

Mẹ bạn Minh gửi tiết kiệm 300 000 000 đồng vào một ngân hàng theo thể thức kì hạn 1 năm. Hết thời hạn 1 năm, mẹ bạn Minh nhận được cả vốn lẫn lãi là 321 600 000 đồng. Tính lãi suất ngân hàng theo thể thức gửi tiết kiệm này.

**Bài 9.**

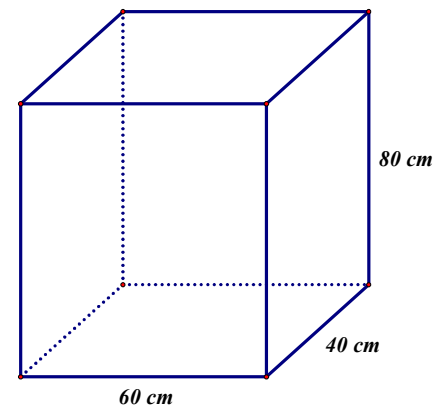
Nhân ngày 30/4, một cửa hàng thời trang giảm giá 20% cho tất cả các sản phẩm. Đặc biệt nếu khách hàng nào có thẻ khách hàng thân thiết của cửa hàng thì được giảm giá thêm 10% trên giá đã giảm.

- a) Chị Thanh là khách hàng thân thiết của cửa hàng, chị đã đến cửa hàng mua một chiếc váy có giá niêm yết là 800 000 đồng. Hỏi chị Thanh phải trả bao nhiêu tiền cho chiếc váy đó?
- b) Cô Minh cũng là một khách hàng thân thiết của cửa hàng, cô đã mua một chiếc túi xách và đã phải trả số tiền là 864 000 đồng. Hỏi giá ban đầu của chiếc túi xách đó là bao nhiêu?

**IV. HÌNH HỌC TRỰC QUAN**

**Bài 10.** Người ta dự định làm một bể cá bằng kính dạng hình hộp chữ nhật (không có nắp đậy) có kích thước như hình vẽ

- a) Tính thể tích của bể cá.
- b) Người ta xả nước vào bể sao cho nước chiếm  $\frac{2}{3}$  thể tích bể. Nếu muốn xả 144  $dm^3$  nước mà kích thước đáy bể không đổi thì chiều cao của bể phải tăng thêm bao nhiêu cm ?

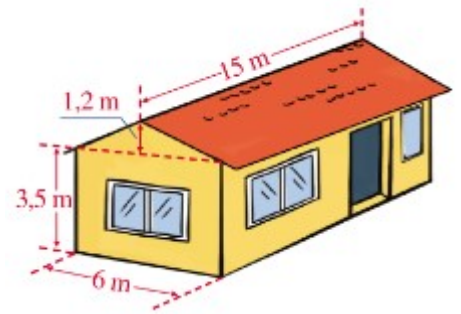


**Bài 11.** Lịch để bàn dưới đây là một hình lăng trụ đứng đáy là tam giác cân với các kích thước được cho như hình vẽ. Tính diện tích bìa để làm quyển lịch



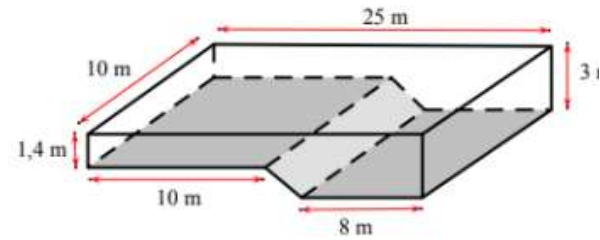
**Bài 12.** Một ngôi nhà có các kích thước như hình vẽ

- Tính thể tích phần không gian được giới hạn bởi ngôi nhà.
- Hỏi phải dùng bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được mặt ngoài ngôi nhà? Biết rằng 1 lít sơn bao phủ được  $8m^2$  tường (không sơn cửa) và tổng diện tích các cửa là  $25m^2$ .



**Bài 13.** Một bể bơi được xây dựng thành hai khu vực với độ sâu khác nhau cho trẻ em và người lớn và các kích thước của lòng bể được cho như hình vẽ.

Hỏi sau bao lâu bể bơi được bơm đầy nước, biết cứ mỗi phút máy bơm được vào bể 500 lít nước.

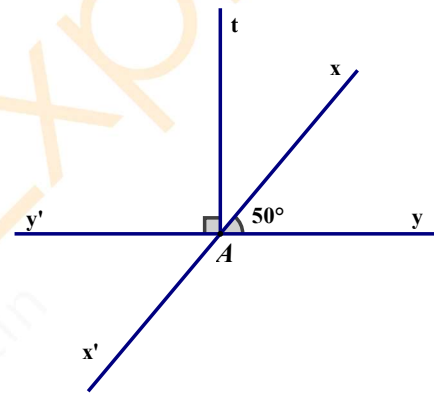


**V. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG**

**Bài 14.** Cho đường thẳng  $xx'$  cắt đường thẳng  $yy'$  tại  $A$ .

Góc  $\widehat{xAy} = 50^\circ$ , tia  $At$  vuông góc với đường thẳng  $yy'$  tại  $A$  (Hình vẽ bên).

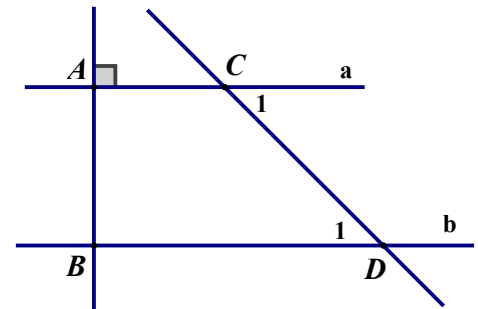
- Vẽ lại hình trên với đúng số đo góc, kể tên các góc kề với góc  $\widehat{x'Ay'}$ .
- Tính số đo các góc  $\widehat{x'Ay'}$ ;  $\widehat{x'Ay}$ ;  $\widehat{xAy'}$ ;  $\widehat{xAt}$ .
- Nếu vẽ thêm 2016 tia phân biệt gốc  $A$  khác với các tia đã cho trên hình thì trên hình có tất cả bao nhiêu góc?



**Bài 15.** Cho hình vẽ dưới đây

Biết  $a \parallel b$ ;  $a \perp AB$  và  $\widehat{C_1} = 45^\circ$ .

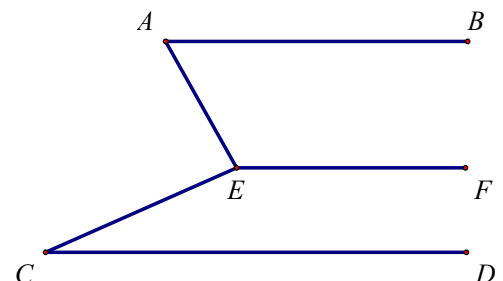
- Chứng tỏ rằng  $b \perp AB$
- Tính số đo  $\widehat{D_1}$ .
- Gọi  $Cm$  và  $Dn$  lần lượt là tia phân giác của  $\widehat{C_1}$  và  $\widehat{CDb}$ .  $Cm$  và  $Dn$  cắt nhau tại  $O$ . Tính  $\widehat{COD}$



**Bài 16.** Cho hình vẽ. Biết

$\widehat{AEC} = \widehat{BAE} + \widehat{DCE}$ ;  $\widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{BAE}$ . Chứng tỏ rằng:

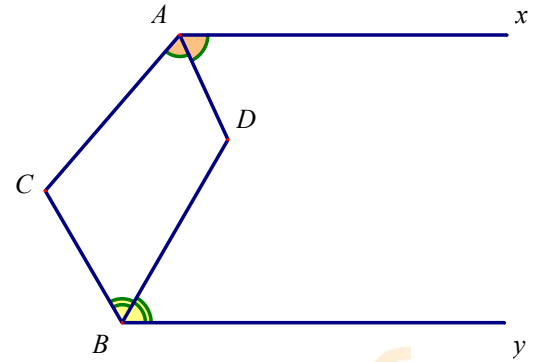
- $AB \parallel EF$
- $CD \parallel EF$



**Bài 17.** Cho hình vẽ sau biết  $Ax \parallel By$ ;  $AD$  là tia phân giác  $\widehat{CAx}$ ;  $BD$  là tia phân giác  $\widehat{CBy}$ .

a) Chứng minh  $\widehat{ADB} = \widehat{DAx} + \widehat{DBy}$ .

b) Chứng minh  $\widehat{ADB} + \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 180^\circ$ .



## VI. CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO

**Bài 18.** Tính hợp lý các biểu thức sau

a)  $A = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{100.103}$

b)  $B = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right)$

c)  $C = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012)$

d)  $D = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2016.2018}\right)\left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)\left(1,08 - \frac{2}{25}\right)$

**Bài 19.**

a) Cho 3 số  $a, b, c \neq 0$  và  $\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$ .

Tính giá trị của biểu thức  $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)$

b) Cho  $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{z+y+z}$

Chứng minh rằng  $A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$  có giá trị nguyên

c) Tìm  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $\frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115}$  và  $x+y+2z = -31$ .

**Bài 20.**

a) Cho  $S_n = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$  (với  $n \in \mathbb{N}$  và  $n > 1$ )

Chứng minh rằng  $S_n$  không là số nguyên.

b) Cho  $S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}$ . Chứng tỏ  $S < \frac{1}{36}$ .

c) Chứng minh rằng:  $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$

**Bài 21.**

a) Tìm các số hữu tỉ  $a, b$  thỏa mãn  $(3\sqrt{5} + 1)a - b + 2 = ab + \sqrt{5}$

b) Cho  $|2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \dots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \leq 0$ .

Chứng minh  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019}$

c) Cho  $x; y; z$  là các số nguyên dương sao cho  $\frac{x + y\sqrt{5}}{y + z\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$

Chứng minh rằng  $x^2 + 2y^2 + z^2$  là số chính phương

d) Tìm các số nguyên  $x, y, z$  sao cho  $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2023$

**Bài 22.**

a) Giả sử có 2015 số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015}$  thỏa mãn  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2015}} = 1008$ .

Chứng minh rằng có ít nhất 2 trong 2015 số nguyên dương đã cho bằng nhau

b) Cho 2019 số nguyên dương  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2019}$  thỏa mãn  $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}^2} \geq 4$ .

Chứng minh rằng ta luôn tìm được ít nhất 3 số bằng nhau.

-----HẾT-----

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Bài 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} 0,2 - \frac{4}{7} + \frac{-6}{5} & \text{b)} 1\frac{4}{23} + \frac{5}{21} - \frac{4}{23} + 0,5 + \frac{16}{21} & \text{c)} \frac{11}{35} - 0,62 + \frac{2}{17} - 0,38 + \frac{24}{35} \\
 \text{d)} \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{11} : \frac{8}{5} + \frac{(-1)^{19}}{11} & \text{e)} \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) - \left(7 - \frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4\right) & \\
 \text{f)} \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{4}{7}\right) : \frac{7}{5} & \text{g)} \left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left|-\frac{1}{9}\right| + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 & \\
 \text{h)} 4 + \left(\frac{2}{3} + 5 - \frac{2023}{\sqrt{2024^2}}\right) - \left(6 + \frac{1}{2024} - \frac{4}{3}\right) & \text{i)} 2 - \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{12} : \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1\frac{4}{9} - 2023^0\right] & \\
 \text{k)} \left(0, (3) + \frac{|-2|}{3}\right) : \frac{\sqrt{25}}{4} - (2^3 + 3^2)^0 & & 
 \end{array}$$

**Lời giải**

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} 0,2 - \frac{4}{7} + \frac{-6}{5} = \frac{1}{5} - \frac{4}{7} - \frac{6}{5} = \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{5}\right) - \frac{4}{7} = -1 - \frac{4}{7} = \frac{-11}{7} \\
 \text{b)} 1\frac{4}{23} + \frac{5}{21} - \frac{4}{23} + 0,5 + \frac{16}{21} = \left(1\frac{4}{23} - \frac{4}{23}\right) + \left(\frac{5}{21} + \frac{16}{21}\right) + 0,5 = 1 + 1 + 0,5 = 2,5 \\
 \text{c)} \frac{11}{35} - 0,62 + \frac{2}{17} - 0,38 + \frac{24}{35} = \left(\frac{11}{35} + \frac{24}{35}\right) + (-0,62 - 0,38) + \frac{2}{17} = 1 - 1 + \frac{2}{17} = \frac{2}{17} \\
 \text{d)} \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{11} : \frac{8}{5} + \frac{(-1)^{19}}{11} = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{8} + \frac{-1}{11} = \frac{2}{11} \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right) - \frac{1}{11} = \frac{2}{11} - \frac{1}{11} = \frac{1}{11} \\
 \text{e)} \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) - \left(7 - \frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4\right) = 2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - 7 + \frac{3}{5} + \frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \\
 = (2 - 7 + 4) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) = -1 + 0 + 0 = -1 \\
 \text{f)} \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{4}{7}\right) : \frac{7}{5} = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{4}{7}\right)\right] \\
 = \frac{5}{7} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\right)\right] = \frac{5}{7} \cdot 0 = 0 \\
 \text{g)} \left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left|-\frac{1}{9}\right| + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{10}{9} \\
 \text{h)} 4 + \left(\frac{2}{3} + 5 - \frac{2023}{\sqrt{2024^2}}\right) - \left(6 + \frac{1}{2024} - \frac{4}{3}\right) = 4 + \frac{2}{3} + 5 - \frac{2023}{2024} - 6 - \frac{1}{2024} + \frac{4}{3} \\
 = (4 + 5 - 6) + \left(-\frac{2023}{2024} - \frac{1}{2024}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = 3 - 1 + 2 = 4
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } 2 - \left[ \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{12} : \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1\frac{4}{9} - 2023^0 \right] &= 2 - \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{12} : \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1\frac{4}{9} - 1 \right] = 2 - \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1\frac{4}{9} - 1 \right] \\ &= 2 - \left( \frac{4}{9} - 1\frac{4}{9} - 1 \right) = 2 - (-2) = 4 \end{aligned}$$

$$\text{k) } \left( 0, (3) + \frac{|-2|}{3} \right) : \frac{\sqrt{25}}{4} - (2^3 + 3^2)^0 = \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) : \frac{5}{4} - 1 = 1 : \frac{5}{4} - 1 = \frac{4}{5} - 1 = \frac{-1}{5}$$

**Bài 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}$$

$$\text{b) } B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$$

$$\text{c) } C = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$$

$$\text{d) } D = \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$$

$$\text{e) } E = \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}}$$

$$\text{f) } F = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{343}}$$

$$\text{g) } G = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{11}}{\frac{4}{5} - \frac{11}{11} + \frac{13}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{5}{5} + \frac{5}{5}}$$

$$\text{h) } H = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

$$\text{i) } I = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}}$$

**Lời giải**

$$\text{a) } A = \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^2 \cdot 2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 2 \cdot 3}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3(5 + 2 \cdot 3)}{2^2(15 - 2^2)} = \frac{2 \cdot 11}{11} = 2$$

$$\text{b) } B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{2^{2 \cdot 6} \cdot 3^6 + (2^3)^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4(3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5(3 + 1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } C = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2^{12} \cdot 3^6 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3^8} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^6(2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7(2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{3 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } D = \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{2^{12} \cdot 13(1 + 5)}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10}(11 + 5)}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{2^2 \cdot 13 \cdot 6}{104} + \frac{3 \cdot 16}{2^4} = 3 + 3 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{e) } E &= \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}} = \frac{5^{10} + 5^{14} + 5^{18}}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}} \\ &= \frac{5^{10} + 5^{14} + 5^{18}}{(5^{11} + 5^{15} + 5^{19}) + (5^{13} + 5^{17} + 5^{21})} = \frac{5^{10}(1 + 5^4 + 5^8)}{5^{11}(1 + 5^4 + 5^8) + 5^{13}(1 + 5^4 + 5^8)} \\ &= \frac{5^{10}(1 + 5^4 + 5^8)}{(1 + 5^4 + 5^8)(5^{11} + 5^{13})} = \frac{5^{10}}{5^{11}(1 + 5^2)} = \frac{1}{5 \cdot 26} = \frac{1}{130} \end{aligned}$$



$$f) F = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{343}} = \frac{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}}{\frac{8}{2} - \frac{4}{7} + \frac{4}{7^2} - \frac{4}{7^3}} = \frac{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}}{4\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$g) G = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)}{5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$h) H = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{4 - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625}\right)}{4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$i) I = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}} = \frac{5\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - 0,3\right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - 0,3} = \frac{5}{13} + 3 = \frac{44}{13}$$

**Bài 3.** Tìm  $x$ , biết:

$$a) \frac{2}{3} - \frac{5}{2}x = \frac{-13}{3} \quad b) -(0,5+x) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad c) 2x - 2 = 0,5x + 0,7 \quad d) \frac{7}{12} - \left(x + \frac{7}{6}\right) : \frac{6}{5} = \frac{-5}{4}$$

$$e) \left(x + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{11}{5}\right) = 0 \quad f) (4\sqrt{x} - 9)\left(3x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad g) x^2 - 1\frac{3}{4} = 2,25 \quad h) \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{6}{25}\right] \cdot 2 = \frac{2^2}{5}$$

$$i) \frac{1}{3} - \left|\frac{5}{4} - 2x\right| = \frac{1}{4} \quad k) 3 \cdot (-2)^{5x+8} + 5^2 = 1 \quad l) 5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$$

$$m) \frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0 \quad n) (x-10) \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \dots + \frac{1}{1}} = \frac{1}{200}$$

**Lời giải**

$a) \frac{2}{3} - \frac{5}{2}x = \frac{-13}{3}$ $\frac{5}{2}x = \frac{2}{3} + \frac{13}{3}$ $\frac{5}{2}x = 5$ $x = 5 : \frac{5}{2}$ $x = 2$ <p>Vậy <math>x = 2</math></p>	$b) -(0,5 + x) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $-\frac{1}{2} - x = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ $x = -1$ <p>Vậy <math>x = -1</math></p>	$c) 2x - 2 = 0,5x + 0,7$ $2x - 0,5x = 0,7 + 2$ $1,5x = 2,7$ $x = 2,7 : 1,5$ $x = \frac{9}{5}$ <p>Vậy <math>x = \frac{9}{5}</math></p>	$d) \frac{7}{12} - \left(x + \frac{7}{6}\right) : \frac{6}{5} = \frac{-5}{4}$ $\left(x + \frac{7}{6}\right) : \frac{6}{5} = \frac{7}{12} + \frac{5}{4}$ $\left(x + \frac{7}{6}\right) : \frac{6}{5} = \frac{11}{6}$ $x + \frac{7}{6} = \frac{11}{6} \cdot \frac{6}{5}$ $x + \frac{7}{6} = \frac{11}{5}$ $x = \frac{11}{5} - \frac{7}{6}$ $x = \frac{31}{30}$ <p>Vậy <math>x = \frac{31}{30}</math></p>
$e) \left(x + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{11}{5}\right) = 0$ <p>TH1: <math>x + \frac{4}{9} = 0</math></p> $x = -\frac{4}{9}$ <p>TH2: <math>x - \frac{11}{5} = 0</math></p> $x = \frac{11}{5}$ <p>Vậy <math>x \in \left\{-\frac{4}{9}; \frac{11}{5}\right\}</math></p>	$f) (4\sqrt{x} - 9)\left(3x + \frac{1}{2}\right) = 0$ <p>ĐKXD: <math>x \geq 0</math></p> <p>TH1:</p> $4\sqrt{x} - 9 = 0$ $\sqrt{x} = \frac{9}{4}$ $x = \frac{81}{16} \text{ (thoả mãn)}$ <p>TH2:</p> $3x + \frac{1}{2} = 0$ $x = \frac{-1}{6} \text{ (loại)}$ <p>Vậy <math>x = \frac{81}{16}</math></p>	$g) x^2 - 1\frac{3}{4} = 2,25$ $x^2 = 2,25 + 1,75$ $x^2 = 4$ <p>Suy ra: <math>x = 2</math> hoặc <math>x = -2</math></p> <p>Vậy <math>x \in \{2; -2\}</math></p>	$h) \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{6}{25}\right] \cdot 2 = \frac{2^2}{5}$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{6}{25} = \frac{2}{5}$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{6}{25}$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{25}$ <p>TH1: <math>x - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}</math></p> $x = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$ <p>TH2: <math>x - \frac{1}{2} = -\frac{4}{5}</math></p> $x = -\frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{-3}{10}$ <p>Vậy <math>x \in \left\{\frac{13}{10}; -\frac{3}{10}\right\}</math></p>

$$i) \frac{1}{3} - \left| \frac{5}{4} - 2x \right| = \frac{1}{4}$$

$$\left| \frac{5}{4} - 2x \right| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\left| \frac{5}{4} - 2x \right| = \frac{1}{12}$$

$$\text{TH1: } \frac{5}{4} - 2x = \frac{1}{12}$$

$$2x = \frac{5}{4} - \frac{1}{12} \Rightarrow 2x = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \frac{7}{12}$$

$$\text{TH2: } \frac{5}{4} - 2x = -\frac{1}{12} \Rightarrow 2x = \frac{5}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{7}{12}; \frac{2}{3} \right\}$$

$$k) 3 \cdot (-2)^{5x+8} + 5^2 = 1$$

$$3 \cdot (-2)^{5x+8} = 1 - 25$$

$$3 \cdot (-2)^{5x+8} = -24$$

$$(-2)^{5x+8} = -8 = (-2)^3$$

$$5x + 8 = 3$$

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

$$\text{Vậy } x = -1$$

$$l) 5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$$

$$5^{x+2}(1+5) = 750$$

$$5^{x+2} \cdot 6 = 750$$

$$5^{x+2} = 125 = 5^3$$

$$x + 2 = 3$$

$$x = 1$$

$$\text{Vậy } x = 1$$

$$m) \frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$$

$$\frac{x+2}{327} + 1 + \frac{x+3}{326} + 1 + \frac{x+4}{325} + 1 + \frac{x+5}{324} + 1$$

$$+ \frac{x+349}{5} - 4 = 0$$

$$\frac{x+329}{327} + \frac{x+329}{326} + \frac{x+329}{325} + \frac{x+329}{324} + \frac{x+329}{5} = 0$$

$$(x+329) \left( \frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} > 0 \text{ nên } x + 329 = 0$$

$$\text{Suy ra } x = -329$$

$$\text{Vậy } x = -329$$

$$n) (x-10) \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{1}} = \frac{1}{200}$$

$$(x-10) \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + 1 + \frac{1}{198} + 1 + \dots + \frac{1}{2} + 1 + 1} = \frac{1}{200}$$

$$(x-10) \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{200}{200} + \frac{1}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2}} = \frac{1}{200}$$

$$(x-10) \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{200 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right)} = \frac{1}{200}$$

$$(x-10) \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{200}$$

$$x - 10 = 1$$

$$x = 11$$

$$\text{Vậy } x = 11$$

**Bài 4.** Tìm điều kiện của số hữu tỉ  $x$  để

a)  $-\frac{3}{4}(4x+3) < 0$       b)  $\frac{51}{-8(7x+2)} > 0$       c)  $\frac{x-5,8}{6,2+x} < 0$       d)  $\frac{x^2+1}{3-7,2x} > 0$

**Lời giải**

<p>a) <math>-\frac{3}{4}(4x+3) &lt; 0</math></p> <p>Vì <math>-\frac{3}{4} &lt; 0</math> nên <math>4x+3 &gt; 0 \Rightarrow x &gt; -\frac{3}{4}</math></p>	<p>b) <math>\frac{51}{-8(7x+2)} &gt; 0</math></p> <p>Vì <math>\frac{51}{-8} &lt; 0</math> nên <math>7x+2 &lt; 0 \Rightarrow x &lt; -\frac{2}{7}</math></p>
<p>c) <math>\frac{x-5,8}{6,2+x} &lt; 0</math></p> <p>Vì <math>x-5,8 &lt; x+6,2</math> nên <math>\begin{cases} x-5,8 &lt; 0 \\ x+6,2 &gt; 0 \end{cases}</math></p> <p><math>\Rightarrow \begin{cases} x &lt; 5,8 \\ x &gt; -6,2 \end{cases}</math> hay <math>-6,2 &lt; x &lt; 5,8</math></p>	<p>d) <math>\frac{x^2+1}{3-7,2x} &gt; 0</math></p> <p>Vì <math>x^2+1 &gt; 0</math> với mọi <math>x</math></p> <p>Nên <math>3-7,2x &gt; 0 \Rightarrow 7,2x &lt; 3 \Rightarrow x &lt; \frac{5}{12}</math></p>

**Bài 5.**

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a)  $A = 2x^2 + 9(y-3)^2 + 2024$

b)  $B = \left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{81}{144} - y^2\right)^{10} - \frac{20}{11}$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a)  $C = \frac{1}{|x|+2023} - \frac{(9y^2-36)^8}{3} + 1$

b)  $D = \frac{4}{(x+y+3)^{2024} + 1} + \frac{9}{(y+4)^{2022} + 3} - 3036$

**Lời giải**

<p>1a) <math>2x^2 + 9(y-3)^2 + 2024</math></p> <p>Ta có <math>x^2 \geq 0</math> với mọi <math>x</math> nên <math>2x^2 \geq 0</math></p> <p><math>(y-3)^2 \geq 0</math> với mọi <math>y</math> nên <math>9(y-3)^2 \geq 0</math></p> <p>Khi đó <math>2x^2 + 9(y-3)^2 \geq 0</math></p> <p>suy ra <math>2x^2 + 9(y-3)^2 + 2024 \geq 2024</math></p> <p>Dấu "=" xảy ra khi <math>\begin{cases} x=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}</math></p> <p>Vậy GTNN của <math>A = 2024</math> khi <math>x=0; y=3</math></p>	<p>1b) <math>B = \left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{81}{144} - y^2\right)^{10} - \frac{20}{11}</math></p> <p>Ta có <math>\left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{14}\right)^2 \geq 0</math> với mọi <math>x</math></p> <p><math>\left(\frac{81}{144} - y^2\right)^{10} \geq 0</math> với mọi <math>y</math></p> <p>Khi đó <math>\left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{81}{144} - y^2\right)^{10} \geq 0</math></p> <p>Suy ra <math>\left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{81}{144} - y^2\right)^{10} - \frac{20}{11} \geq -\frac{20}{11}</math></p> <p>Dấu "=" xảy ra khi <math>\begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{5}{14} = 0 \\ \frac{81}{144} - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = \pm \frac{3}{4} \end{cases}</math></p>
---	---

	Vậy GTNN của $A = -\frac{20}{11}$ khi $(x; y) \in \left\{ \left( -\frac{5}{4}; \frac{3}{4} \right); \left( -\frac{5}{4}; -\frac{3}{4} \right) \right\}$
<p>2a) <math>C = \frac{1}{ x +2023} - \frac{(9y^2-36)^8}{3} + 1</math></p> <p>Ta có <math> x  \geq 0</math> với mọi <math>x \Rightarrow  x +2023 \geq 2023</math></p> $\Rightarrow \frac{1}{ x +2023} \leq \frac{1}{2023}$ <p><math>(9y^2-36)^8 \geq 0</math> với mọi <math>y \Rightarrow \frac{(9y^2-36)^8}{3} \geq 0</math></p> $\Rightarrow -\frac{(9y^2-36)^8}{3} \leq 0$ <p>Khi đó <math>\frac{1}{ x +2023} - \frac{(9y^2-36)^8}{3} \leq \frac{1}{2023}</math></p> $\Rightarrow \frac{1}{ x +2023} - \frac{(9y^2-36)^8}{3} + 1 \leq \frac{2024}{2023}$ <p>Dấu "=" xảy ra khi <math>\begin{cases}  x =0 \\ 9y^2-36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}</math></p> <p>Vậy GTLN của <math>C = \frac{2024}{2023}</math> khi  <math>(x; y) = \{(0; 2); (0; -2)\}</math></p>	<p>2b) <math>D = \frac{4}{(x+y+3)^{2024}+1} + \frac{9}{(y+4)^{2022}+3} - 3036</math></p> <p>Ta có <math>(x+y+3)^{2024} \geq 0</math> với mọi <math>x, y</math></p> $\Rightarrow (x+y+3)^{2024}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{(x+y+3)^{2024}+1} \leq 4$ <p><math>(y+4)^{2022} \geq 0</math> với mọi <math>y \Rightarrow (y+4)^{2022}+3 \geq 3</math></p> $\Rightarrow \frac{9}{(y+4)^{2022}+3} \leq 3$ <p>Khi đó <math>\frac{4}{(x+y+3)^{2024}+1} + \frac{9}{(y+4)^{2022}+3} \leq 4+3=7</math></p> $\Rightarrow \frac{4}{(x+y+3)^{2024}+1} + \frac{9}{(y+4)^{2022}+3} - 3036 \leq -3029$ <p>Dấu "=" xảy ra khi <math>\begin{cases} x+y+3=0 \\ y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}</math></p> <p>Vậy GTLN của <math>D = -3029</math> khi <math>x=1; y=-4</math></p>

### Bài 6. Tìm các số $x, y, z$ biết

a)  $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$  và  $x - y = 60$

b)  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8}$  và  $x + y + z = 34$

c)  $\frac{x}{10} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  và  $2x - 3y + 4z = 210$  d)  $6x = 4y = 3z$  và  $2x + 3y - 5z = 14$

e)  $\frac{40}{x-30} = \frac{20}{y-15} = \frac{28}{z-21}$  và  $x \cdot y \cdot z = 22400$  f)  $\frac{6x-3z}{5} = \frac{4y-6x}{7} = \frac{3z-4y}{9}$  và  $2x + 3y - 5z = 14$

### Lời giải

a) Ta có  $\frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{3}$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

<p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có</p> $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{x-y}{5-3} = \frac{60}{2} = 30$ $\Rightarrow x = 30.5 = 150; y = 30.3 = 90$ <p>Vậy <math>x = 150; y = 90</math></p>	$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{4+5+8} = \frac{34}{17} = 2$ $\Rightarrow x = 2.4 = 8; y = 2.5 = 10; z = 2.8 = 16$ <p>Vậy <math>x = 8; y = 10; z = 16</math></p>
<p>c) Ta có <math>\frac{x}{10} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}</math></p> <p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có</p> $\frac{x}{20} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{2x-3y+4z}{2.20-3.10+4.15} = \frac{210}{70} = 3$ $\Rightarrow x = 3.20 = 60; y = 3.10 = 30; z = 3.15 = 45$ <p>Vậy <math>x = 60; y = 30; z = 45</math></p>	<p>d) Ta có <math>6x = 4y = 3z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}</math></p> <p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có</p> $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{2x+3y-5z}{2.2+3.3-5.4} = \frac{14}{-7} = -2$ $\Rightarrow x = -2.2 = -4; y = -2.3 = -6; z = -2.4 = -8$ <p>Vậy <math>x = -4; y = -6; z = -8</math></p>
<p>e) Từ giả thiết suy ra <math>\frac{x-30}{40} = \frac{y-15}{20} = \frac{z-21}{28}</math></p> $\Rightarrow \frac{x}{40} - \frac{3}{4} = \frac{y}{20} - \frac{3}{4} = \frac{z}{28} - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$ <p>Đặt <math>\frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 40k \\ y = 20k \\ z = 28k \end{cases}</math></p> <p>Khi đó <math>40k.20k.28k = 22400 \Rightarrow k^3 = 1 \Rightarrow k = 1</math></p> <p>Vậy <math>x = 40; y = 20; z = 28</math></p>	<p>f) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có</p> $\frac{6x-3z}{5} = \frac{4y-6x}{7} = \frac{3z-4y}{9}$ $= \frac{6x-3z+4y-6x+3z-4y}{5+7+9} = 0$ <p>Suy ra <math>6x = 4y = 3z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}</math></p> <p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có</p> $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{2x+3y-5z}{2.2+3.3-5.4} = \frac{14}{-7} = -2$ $\Rightarrow x = -2.2 = -4; y = -2.3 = -6; z = -2.4 = -8$ <p>Vậy <math>x = -4; y = -6; z = -8</math></p>

**Bài 7.** Cho  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  với  $a, b, c, d$  khác 0 và  $c \neq \pm d; 3a \neq 4b; 3c \neq 4d$ . Chứng minh rằng

a)  $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$       b)  $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}$       c)  $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$       d)  $\frac{3a+5b}{3a-4b} = \frac{3c+5d}{3c-4d}$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

**Lời giải**

<p>a) Đặt <math>\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}</math></p> $\frac{a-b}{a} = \frac{bk-b}{bk} = \frac{b(k-1)}{bk} = \frac{k-1}{k}$ $\frac{c-d}{c} = \frac{dk-d}{dk} = \frac{d(k-1)}{dk} = \frac{k-1}{k}$ <p>Vậy <math>\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}</math></p>	<p>b) Đặt <math>\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}</math></p> $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \left(\frac{bk-b}{dk-d}\right)^2 = \left(\frac{b(k-1)}{d(k-1)}\right)^2 = \frac{b^2}{d^2}$ $\frac{ab}{cd} = \frac{b^2k}{d^2k} = \frac{b^2}{d^2}$ <p>Vậy <math>\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}</math></p>
---	---

<p>c) Đặt <math>\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}</math></p> $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \left(\frac{bk+b}{dk+d}\right)^3 = \left(\frac{b(k+1)}{d(k+1)}\right)^3 = \frac{b^3}{d^3}$ $\frac{a^3 - b^3}{c^3 - d^3} = \frac{b^3k^3 - b^3}{d^3k^3 - d^3} = \frac{b^3(k^3 - 1)}{d^3(k^3 - 1)} = \frac{b^3}{d^3}$ <p>Vậy <math>\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3 - b^3}{c^3 - d^3}</math></p>	<p>d) Đặt <math>\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}</math></p> $\frac{3a+5b}{3a-4b} = \frac{3bk+5b}{3bk-4b} = \frac{b(3k+5)}{b(3k-4)} = \frac{3k+5}{3k-4}$ $\frac{3c+5d}{3c-4d} = \frac{3dk+5d}{3dk-4d} = \frac{d(3k+5)}{d(3k-4)} = \frac{3k+5}{3k-4}$ <p>Vậy <math>\frac{3a+5b}{3a-4b} = \frac{3c+5d}{3c-4d}</math></p>
---	---

**Bài 8.**

Mẹ bạn Minh gửi tiết kiệm 300 000 000 đồng vào một ngân hàng theo thể thức kì hạn 1 năm. Hết thời hạn 1 năm, mẹ bạn Minh nhận được cả vốn lẫn lãi là 321 600 000 đồng. Tính lãi suất ngân hàng theo thể thức gửi tiết kiệm này.

**Lời giải:**

Số tiền lãi mẹ bạn Minh nhận được là:  $321\,600\,000 - 300\,000\,000 = 21\,600\,000$  (đồng)

Lãi suất ngân hàng là:  $21\,600\,000 : 300\,000\,000 \cdot 100\% = 7,2\%$

Vậy lãi suất của ngân hàng theo thể thức gửi tiết kiệm này là: 7,2%

**Bài 9.**

Nhân ngày 30/4, một cửa hàng thời trang giảm giá 20% cho tất cả các sản phẩm. Đặc biệt nếu khách hàng nào có thẻ khách hàng thân thiết của cửa hàng thì được giảm giá thêm 10% trên giá đã giảm.

a) Chị Thanh là khách hàng thân thiết của cửa hàng, chị đã đến cửa hàng mua một chiếc váy có giá niêm yết là 800 000 đồng. Hỏi chị Thanh phải trả bao nhiêu tiền cho chiếc váy đó?

b) Cô Minh cũng là một khách hàng thân thiết của cửa hàng, cô đã mua một chiếc túi xách và đã phải trả số tiền là 864 000 đồng. Hỏi giá ban đầu của chiếc túi xách đó là bao nhiêu?

**Lời giải**

a) Giá chiếc váy khi được giảm 20% (tức là còn 80% so với giá gốc) là:

$$800\,000 \cdot 80 : 100 = 640\,000 \text{ (đồng)}$$

Giá chiếc váy khi được giảm tiếp 10% là:

$$640\ 000.90 : 100 = 576\ 000 \text{ (đồng)}$$

Vậy chị Thanh phải trả 576 000 đồng cho chiếc váy

b) Giá của chiếc túi trước khi được giảm 10% là:

$$864\ 000.100 : 90 = 960\ 000 \text{ (đồng)}$$

Giá của chiếc túi trước khi được giảm 20% là:

$$960\ 000.100 : 80 = 1\ 200\ 000 \text{ (đồng)}$$

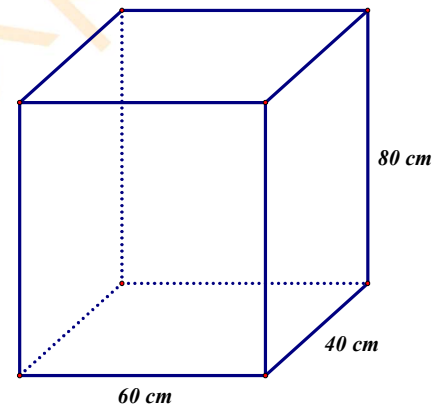
Vậy giá ban đầu của chiếc túi xách đó là 1 200 000 đồng.

**Bài 10.** Người ta dự định làm một bể cá bằng kính dạng hình hộp chữ nhật (không có nắp đậy) có kích thước như hình vẽ

a) Tính thể tích của bể cá.

b) Người ta xả nước vào bể sao cho nước chiếm  $\frac{2}{3}$  thể tích

bể. Nếu muốn xả  $144\text{ dm}^3$  nước mà kích thước đáy bể không đổi thì chiều cao của bể phải tăng thêm bao nhiêu cm ?



**Lời giải**

a) Thể tích của bể cá là  $60.40.80 = 192\ 000\text{ (cm}^3\text{)}$

b) Đổi  $144\text{ dm}^3 = 144\ 000\text{ cm}^3$

Thể tích nước trong bể là  $\frac{2}{3}.192\ 000 = 128\ 000\text{ (cm}^3\text{)}$

Nếu xả thêm  $144\text{ dm}^3$  vào bể thì thể tích nước lúc sau là  $128\ 000 + 144\ 000 = 272\ 000\text{ (cm}^3\text{)}$

Chiều cao của bể lúc sau là  $272\ 000 : (60.40) = \frac{340}{3}\text{ (cm)}$

Vậy chiều cao của bể tăng thêm  $\frac{340}{3} - 80 = \frac{100}{3}\text{ (cm)}$



**Bài 11.** Lịch để bàn dưới đây là một hình lăng trụ đứng đáy là tam giác cân với các kích thước được cho như hình vẽ. Tính diện tích bìa để làm quyển lịch

**Lời giải**



Diện tích bìa để làm quyển lịch chính là diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng.

Diện tích của mặt đáy là  $7 \cdot 25 = 175 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích của hai mặt bên là  $2 \cdot 25 \cdot 18 = 900 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy diện tích xung quanh quyển lịch là  $175 + 900 = 1075 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy diện tích bìa để làm quyển lịch là  $1075 \text{ cm}^2$

**Bài 12.** Một ngôi nhà có các kích thước như hình vẽ

a) Tính thể tích phần không gian được giới hạn bởi ngôi nhà.

b) Hỏi phải dùng bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được ngoài ngôi nhà? Biết rằng 1 lít sơn bao phủ được  $8 \text{ m}^2$  tường (không sơn cửa) và tổng diện tích các cửa là  $18,2 \text{ m}^2$ .

**Lời giải**

a) Thể tích ngôi nhà được chia thành hai phần:

Phần hình hộp chữ nhật và phần hình lăng trụ đứng tam giác

Thể tích phần ngôi nhà có dạng hình hộp chữ nhật là  $3,5 \cdot 6 \cdot 15 = 315 \text{ (m}^3\text{)}$

Diện tích đáy phần không gian mái nhà có hình lăng trụ đứng là  $\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 = 3,6 \text{ (m}^2\text{)}$

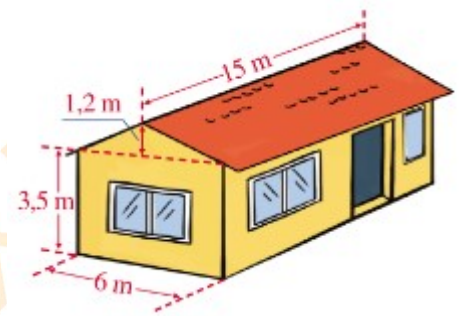
Thể tích phần ngôi nhà có dạng hình lăng trụ đứng là  $3,6 \cdot 15 = 54 \text{ (m}^3\text{)}$

Thể tích phần không gian được giới hạn bởi ngôi nhà là  $54 + 315 = 369 \text{ (m}^3\text{)}$

b) Diện tích xung quanh ngôi nhà là  $2 \cdot 3,5 \cdot (6 + 15) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 = 154,2 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích tường cần sơn là  $154,2 - 18,2 = 136 \text{ (m}^2\text{)}$

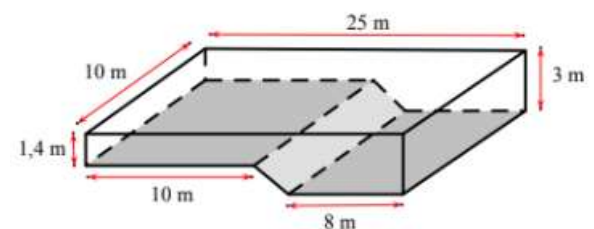
Số lít sơn cần dùng để sơn tường là  $136 : 8 = 17 \text{ (lít)}$



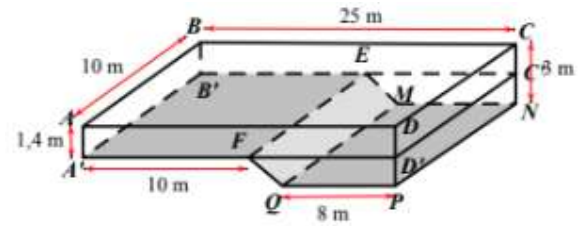
**Bài 13.** Một bể bơi được xây dựng thành hai khu vực với độ sâu khác nhau cho trẻ em và người lớn và các kích thước của lòng bể được cho như hình vẽ.

Hỏi sau bao lâu bể bơi được bơm đầy nước, biết cứ mỗi phút máy bơm được vào bể 500 lít nước.

**Lời giải**



Để tính thể tích bể bơi, ta tính thể tích hình hộp chữ nhật  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  và hình lăng trụ đứng  $EC'NM \cdot FD'PQ$  có đáy là hình thang vuông.



Thể tích hình hộp chữ nhật  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  là:

$$10 \cdot 25 \cdot 1,4 = 350 \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích hình lăng trụ đứng  $EC'NM \cdot FD'PQ$  là:  $\frac{1}{2} \cdot [(25 - 10) + 8] \cdot (3 - 1,4) \cdot 10 = 184 \text{ (m}^3\text{)}$

Thể tích bể bơi là:  $350 + 184 = 534 \text{ (m}^3\text{)}$

Đổi  $534 \text{ m}^3 = 534000 \text{ lít}$

Thời gian bể bơi được bơm đầy nước là  $534000 : 500 = 1068 \text{ (phút)}$

Vậy sau 17 giờ 48 phút thì bể được bơm đầy nước.

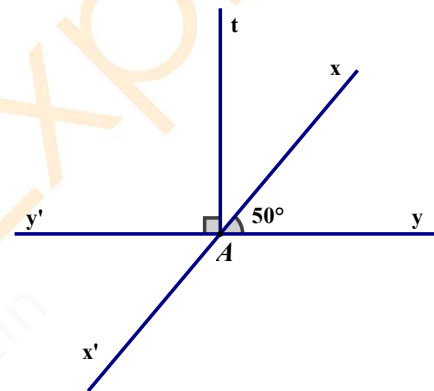
**Bài 14.** Cho đường thẳng  $xx'$  cắt đường thẳng  $yy'$  tại  $A$ .

Góc  $\widehat{xAy} = 50^\circ$ , tia  $At$  vuông góc với đường thẳng  $yy'$  tại  $A$  (Hình vẽ bên).

a) Vẽ lại hình trên với đúng số đo góc, kể tên các góc kề với góc  $\widehat{x'Ay'}$ .

b) Tính số đo các góc  $\widehat{x'Ay'}$ ;  $\widehat{x'Ay}$ ;  $\widehat{xAy'}$ ;  $\widehat{xAt}$ .

c) Nếu vẽ thêm 2016 tia phân biệt gốc  $A$  khác với các tia đã cho trên hình thì trên hình có tất cả bao nhiêu góc?



**Lời giải**

a) Các góc kề với  $\widehat{x'Ay'}$  là  $\widehat{x'Ay}$ ,  $\widehat{y'Ax}$  và  $\widehat{y'At}$ .

b) Tính số đo các góc  $\widehat{x'Ay'}$ ;  $\widehat{x'Ay}$ ;  $\widehat{xAy'}$ ;  $\widehat{xAt}$ .

+) Ta có:  $\widehat{x'Ay'}$  và  $\widehat{xAy}$  là hai góc đối đỉnh  $\Rightarrow \widehat{x'Ay'} = \widehat{xAy} = 50^\circ$ .

+) Ta có:  $\widehat{x'Ay'}$  và  $\widehat{x'Ay}$  là hai góc kề bù

$$\Rightarrow \widehat{x'Ay'} + \widehat{x'Ay} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{x'Ay} = 180^\circ - \widehat{x'Ay'} \Rightarrow \widehat{x'Ay} = 180^\circ - 50^\circ \Rightarrow \widehat{x'Ay} = 130^\circ$$

+) Ta có:  $\widehat{xAy'}$  và  $\widehat{x'Ay}$  là hai góc đối đỉnh  $\Rightarrow \widehat{xAy'} = \widehat{x'Ay} = 130^\circ$ .

+) Ta có:  $At \perp yy'$  tại  $A$  (giả thiết)  $\Rightarrow \widehat{yAt} = 90^\circ$ . Mà  $\widehat{yAt} = \widehat{xAt} + \widehat{xAy}$

$$\Rightarrow \widehat{xAt} + \widehat{xAy} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{xAt} = 90^\circ - \widehat{xAy} \Rightarrow \widehat{xAt} = 90^\circ - 50^\circ \Rightarrow \widehat{xAt} = 40^\circ$$

Vậy  $\widehat{x'Ay'} = 50^\circ$ ;  $\widehat{x'Ay} = 130^\circ$ ;  $\widehat{xAy'} = 130^\circ$ ;  $\widehat{xAt} = 40^\circ$ .

c) Bài toán tổng quát: Giả sử vẽ thêm  $n$  tia phân biệt gốc  $A$  khác với các tia đã cho trên hình thì trên hình có bao nhiêu góc?

Ta có: Hình vẽ ban đầu có 5 tia phân biệt là  $Ax, Ax', Ay, Ay', At$ .

Khi vẽ thêm  $n$  tia phân biệt, lúc này hình vẽ có  $n + 5$  tia phân biệt.

Cứ 1 tia bất kỳ trong  $n + 5$  tia đó tạo với  $n + 4$  tia còn lại ta được  $n + 4$  góc.

Có tổng cộng  $n + 5$  tia nên ta tạo được  $(n + 5)(n + 4)$  góc. Tuy nhiên, mỗi góc trong số này bị lặp lại 2 lần. Ví dụ khi ta lấy tia  $Ax$  hợp với tia  $At$  thành góc  $\widehat{xAt}$  và lấy tia  $At$  hợp với tia  $Ax$  thành góc  $\widehat{tAx}$ . Do mỗi góc bị tính 2 lần nên số góc phân biệt thực tế tạo được là  $\frac{(n+5)(n+4)}{2}$  góc.

Thay  $n = 2016$ , ta được tất cả  $\frac{(2016+5)(2016+4)}{2} = \frac{2021 \cdot 2020}{2} = 2041210$  (góc).

**Bài 15.** Cho hình vẽ dưới đây

Biết  $a \parallel b$ ;  $a \perp AB$  và  $\widehat{C}_1 = 45^\circ$ .

a) Chứng tỏ rằng  $b \perp AB$

b) Tính số đo  $\widehat{D}_1$ .

c) Gọi  $Cm$  và  $Dn$  lần lượt là tia phân giác của  $\widehat{C}_1$  và  $\widehat{CDb}$ .

$Cm$  và  $Dn$  cắt nhau tại  $O$ . Tính  $\widehat{COD}$

**Lời giải**

a) Vì  $a \parallel b$ ;  $a \perp AB$  nên  $b \perp AB$  (định lý)

b) Vì  $a \parallel b$  nên  $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$  (hai góc so le trong)

suy ra  $\widehat{D}_1 = 45^\circ$

c) Ta có  $\widehat{D}_1$  và  $\widehat{CDb}$  là hai góc kề bù nên

$$\widehat{D}_1 + \widehat{CDb} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CDb} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Kẻ tia  $Ox$  song song với đường thẳng  $a$  và  $b$

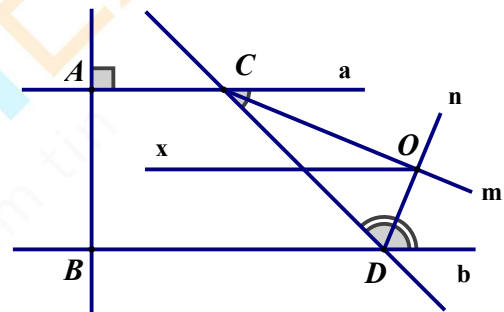
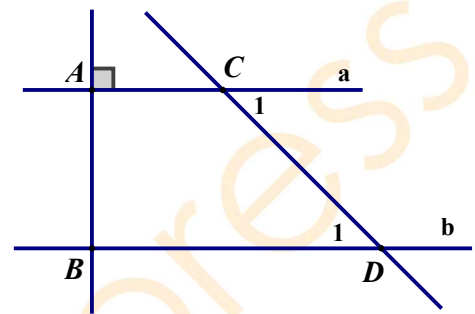
$$\text{Vì } Cm \text{ là phân giác của } \widehat{C}_1 \text{ nên } \widehat{mCa} = \widehat{mCD} = \frac{\widehat{C}_1}{2} = 22,5^\circ$$

$$\text{Vì } Dn \text{ là phân giác } \widehat{CDb} \text{ nên } \widehat{CDn} = \widehat{nDb} = \frac{\widehat{CDb}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ$$

$$\text{Lại có } Ox \parallel a \Rightarrow \widehat{OCa} = \widehat{COx} = 22,5^\circ \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$Ox \parallel b \Rightarrow \widehat{DOx} = \widehat{ODb} = 67,5^\circ \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{COD} = \widehat{COx} + \widehat{DOx} = 22,5^\circ + 67,5^\circ = 90^\circ. \text{ Vậy } \widehat{COD} = 90^\circ$$



**Bài 16.** Cho hình vẽ. Biết

$\widehat{AEC} = \widehat{BAE} + \widehat{DCE}$ ;  $\widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{BAE}$ . Chứng tỏ rằng:

- a)  $AB \parallel EF$       b)  $CD \parallel EF$

**Lời giải**

a) Ta có  $\widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{AEF} + \widehat{BAE} = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí trong cùng phía

Suy ra  $AB \parallel EF$  (dấu hiệu nhận biết)

b) Gọi  $EG$  là tia đối của tia  $EF$

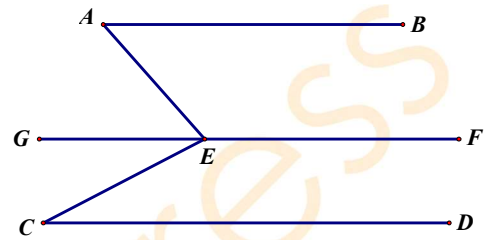
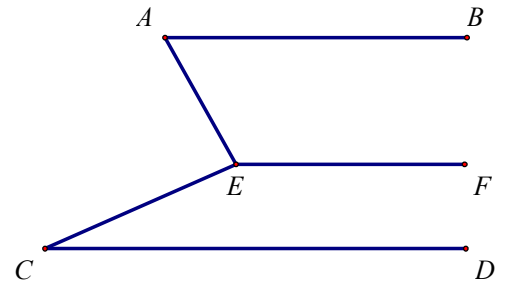
Vì  $AB \parallel EF$  nên  $AB \parallel EG \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{AEG}$  (hai góc so le trong)

Khi đó  $\widehat{AEC} = \widehat{BAE} + \widehat{DCE} = \widehat{AEG} + \widehat{DCE}$

Mặt khác  $\widehat{AEC} = \widehat{AEG} + \widehat{CEG}$ . Suy ra  $\widehat{DCE} = \widehat{CEG}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong

Suy ra  $CD \parallel EF$  (dấu hiệu nhận biết)



**Bài 17.** Cho hình vẽ sau biết  $Ax \parallel By$ ;  $AD$  là tia phân giác

$\widehat{CAx}$ ;  $BD$  là tia phân giác  $\widehat{CBy}$ .

a) Chứng minh  $\widehat{ADB} = \widehat{DAx} + \widehat{DBy}$ .

b) Chứng minh  $\widehat{ADB} + \frac{1}{2} \widehat{ACB} = 180^\circ$ .

**Lời giải**

a) Từ  $D$  kẻ  $Dz$  song song với  $Ax$  và  $By$

Vì  $Dz \parallel Ax$  nên  $\widehat{A_1} = \widehat{ADz}$  (hai góc so le trong)

Vì  $Dz \parallel By$  nên  $\widehat{B_1} = \widehat{BDz}$  (hai góc so le trong)

Suy ra  $\widehat{ADB} = \widehat{ADz} + \widehat{BDz} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \widehat{DAx} + \widehat{DBy}$

b) Từ  $C$  kẻ  $Ct \parallel Ax \parallel By$

Ta có  $\widehat{ADB} + \frac{1}{2} \widehat{ACB} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \frac{1}{2} \widehat{ACB}$

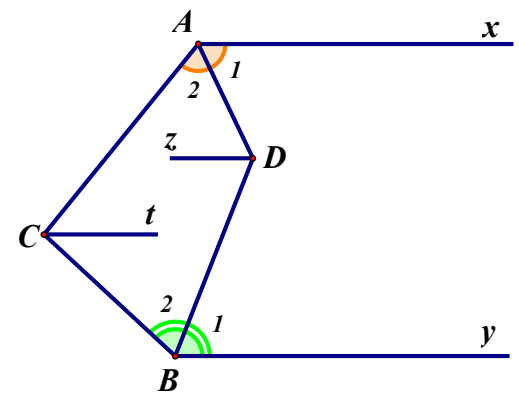
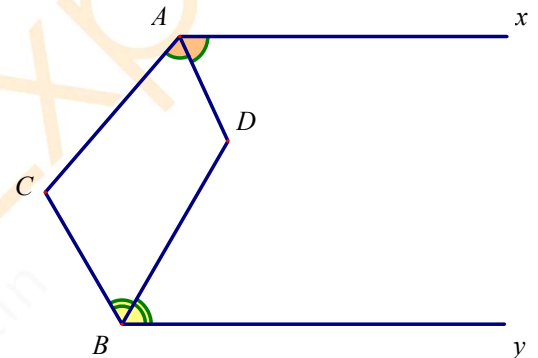
$$= \frac{\widehat{CAx}}{2} + \frac{\widehat{CBy}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{CAx} + \widehat{CBy} + \widehat{ACB})$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{CAx} + \widehat{CBy} + \widehat{ACt} + \widehat{BCt})$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{CAx} + \widehat{ACt}) + \frac{1}{2} (\widehat{CBy} + \widehat{BCt})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ + \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 180^\circ$$



**Bài 18.** Tính hợp lý các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{100.103}$$

$$\text{b) } B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right)$$

$$\text{c) } C = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012)$$

$$\text{d) } D = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2016.2018}\right) \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right) \left(1,08 - \frac{2}{25}\right)$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{100.103} = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{100.103} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{103} \right) = \frac{34}{103} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \dots \frac{209}{210} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{28}{30} \dots \frac{418}{420} \\ &= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \dots \frac{19.22}{20.21} = \frac{(1.2.3.4 \dots 19)}{(2.3.4.5 \dots 20)} \cdot \frac{(4.5.6.7 \dots 22)}{(3.4.5.6 \dots 21)} = \frac{1}{20} \cdot \frac{22}{3} = \frac{11}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{2012} \cdot \frac{2012.2013}{2} \\ &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2013}{2} = \frac{1}{2}(2+3+4+5+\dots+2013) \\ &= \frac{1}{2}(1+2+3+4+5+\dots+2013-1) = \frac{1}{2} \left( \frac{2012.2013}{2} - 1 \right) = \frac{2025077}{2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } 1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } D &= \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdot \frac{5^2}{4.6} \dots \frac{2018^2}{2017.2019} \cdot \left( \frac{27}{25} - \frac{2}{25} \right) \\ &= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \dots 2018^2}{1.2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \dots 2017^2 \cdot 2018.2019} = \frac{2}{2019} \end{aligned}$$

**Bài 19.**

a) Cho 3 số  $a, b, c \neq 0$  và  $\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$ .

Tính giá trị của biểu thức  $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

b) Cho  $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{z+y+z}$

Chứng minh rằng  $A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$  có giá trị nguyên

c) Tìm  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $\frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115}$  và  $x+y+2z = -31$ .

**Lời giải**

a) Nếu  $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases}$

Ta có:  $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-a}{b} \cdot \frac{-b}{c} = -1$

Nếu  $a+b+c \neq 0$  Ta có:

$$\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b} = \frac{-2021c-2021b-2021a}{c+b+a} = -2021$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-2023c = -2021c \\ b+c-2023a = -2021a \\ c+a-2023b = -2021b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 3c \\ b+c+a = 3a \\ c+a+b = 3b \end{cases} \Rightarrow a=b=c$$

Ta có:  $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = y+z+t \\ 3y = z+t+x \\ 3z = t+x+y \\ 3t = x+y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = z+t \\ y+z = t+x \\ z+t = x+y \\ t+x = y+z \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z} = 1+1+1+1 = 4 \in \mathbb{Z}$$

Vậy biểu thức A có giá trị nguyên. (điều phải chứng minh)

$$\text{c) Ta có: } \frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115}. \text{ Hay } \frac{x+3y}{19} = \frac{y+3z}{38} = \frac{z+3x}{23}$$

$$\text{Theo giả thiết } x+y+2z = -31 \Rightarrow x+y+z = -31-z$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+3y}{19} = \frac{y+3z}{38} = \frac{z+3x}{23} = \frac{x+3y+y+3z+z+3x}{19+38+23} = \frac{4(x+y+z)}{80} = \frac{x+y+z}{20} = \frac{-31-z}{20}$$

$$\text{Có: } \frac{y+3z}{38} = \frac{-31-z}{20} \Rightarrow 20y+60z = -31.38-38z \Rightarrow y = \frac{-1178-98z}{20}$$

$$\frac{z+3x}{23} = \frac{-31-z}{20} \Rightarrow 20z+60x = -31.23-23z \Rightarrow x = \frac{-713-43z}{60}$$

$$\text{Thay } x = \frac{-713-43z}{60}; y = \frac{-1178-98z}{20} \text{ vào } x+y+2z = -31$$

$$\text{Ta có: } \frac{-713-43z}{60} + \frac{-1178-98z}{20} + 2z = -31$$

$$-713-43z-3534-294z+120z = -1860$$

$$-217z = 2387$$

$$z = -11$$

$$\text{Có: } \frac{y+3z}{38} = \frac{-31-(-11)}{20} = -1 \Rightarrow y = -5$$

$$\frac{z+3x}{23} = \frac{-31-(-11)}{20} = -1 \Rightarrow x = -4$$

$$\text{Vậy } x = -4; y = -5; z = -11$$

**Bài 20.**

$$\text{a) Cho } S_n = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} \text{ (với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n > 1)$$

Chứng minh rằng  $S_n$  không là số nguyên.

$$\text{b) Cho } S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}. \text{ Chứng tỏ } S < \frac{1}{36}.$$

$$\text{c) Chứng minh rằng: } \frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$$

**Lời giải**

$$\text{a) Có } S_n = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (n-1) - \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Do } A > 0 \text{ nên } S_n < n-1$$

Mặt khác  $A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (\text{do } \frac{1}{n} > 0)$$

$\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1$  nên  $S_n$  không là số nguyên

b)  $S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}$ .

$$7S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{69}{7^{69}}$$

$$\Rightarrow 7S - S = \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{69}{7^{69}}\right) - \left(\frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}\right)$$

$$6S = \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{69}}\right) - \frac{69}{7^{70}}$$

Đặt  $Q = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{69}}$

$$7Q = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{68}}$$

$$\Rightarrow 7Q - Q = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{68}}\right) - \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{69}}\right)$$

$$6Q = \frac{1}{7} - \frac{1}{7^{69}}$$

$$Q = \frac{1}{42} - \frac{1}{6.7^{69}}$$

Do đó  $6S = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} - \frac{1}{6.7^{69}} - \frac{69}{7^{70}} < \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{36} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

c) \*) Với  $n > 1$ , ta có  $0 < (n-1)n(n+1) = n^3 - n < n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3} < \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$

Do đó:  $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024} = B$

Ta có  $\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right]$  nên

$$B = \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} \right)$$



$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2023.2024}$$

$$= \frac{1}{40} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2023.2024} < \frac{1}{40}$$

Vậy  $A < B < \frac{1}{40}$  (1)

\*) Với  $n > 1$ , ta có  $\frac{1}{n^3} > \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Do đó:  $A > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024.2025}$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5.6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2024.2025}$$

$$= \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{13-1}{780} = \frac{1}{65}$$

Vậy  $A > \frac{1}{65}$  (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

### Bài 21.

a) Tìm các số hữu tỉ  $a, b$  thỏa mãn  $(3\sqrt{5} + 1)a - b + 2 = ab + \sqrt{5}$

b) Cho  $|2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \dots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \leq 0$ .

Chứng minh  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019}$

c) Cho  $x, y, z$  là các số nguyên dương sao cho  $\frac{x + y\sqrt{5}}{y + z\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$

Chứng minh rằng  $x^2 + 2y^2 + z^2$  là số chính phương

d) Tìm các số nguyên  $x, y, z$  sao cho  $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2023$

### Lời giải

a)  $(3\sqrt{5} + 1)a - b + 2 = ab + \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}(3a - 1) = ab - a + b - 2$

TH1:  $3a - 1 \neq 0$  thì  $\sqrt{5} = \frac{ab - a + b - 2}{3a - 1} \in \mathbb{Q}$  (vô lý vì  $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ )

TH2:  $3a - 1 = 0 \Rightarrow ab - a + b - 2 = 0$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 3a - 1 = 0 \\ ab - a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } a = \frac{1}{3}; b = \frac{7}{4}$$

$$\text{b) Ta có } |2019x_2 - 2018y_2| \geq 0$$

$$|2019x_2 - 2018y_2| \geq 0$$

...

$$|2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \geq 0$$

$$\Rightarrow |2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \dots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \geq 0.$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } |2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \dots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \leq 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} |2019x_1 - 2018y_1| = 0 \\ |2019x_2 - 2018y_2| = 0 \\ \vdots \\ |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2019x_1 = 2018y_1 \\ 2019x_2 = 2018y_2 \\ \vdots \\ 2019x_{2018} = 2018y_{2018} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{2018}}{y_{2018}} = \frac{2018}{2019}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{2018}}{y_{2018}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

$$\text{c) Đặt } \frac{x + y\sqrt{5}}{y + z\sqrt{5}} = m \text{ (} m \in \mathbb{Q} \text{)}$$

$$\Rightarrow x + y\sqrt{5} = m.(y + z\sqrt{5})$$

$$x + y\sqrt{5} = my + mz\sqrt{5}$$

$$y\sqrt{5} - mz\sqrt{5} = my - x$$

$$\sqrt{5}.(y - mz) = my - x$$

Xét hai trường hợp:

$$\text{TH1: } y - mz \neq 0 \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{my - x}{y - mz}$$

Vì  $\sqrt{5}$  là số vô tỉ, mà  $\frac{my - x}{y - mz}$  là số hữu tỉ (Do  $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ ;  $m \in \mathbb{Q}$ )  $\Rightarrow$  loại TH này.

$$\text{TH2: } y - mz = 0$$

$$\Rightarrow y = mz \text{ và } my - x = 0$$

$$\Rightarrow y = mz \text{ và } x = my$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{my}{mz} = \frac{y}{z} \Rightarrow y^2 = xz$$

Do đó  $x^2 + 2y^2 + z^2 = x^2 + 2xz + z^2 = (x^2 + xz) + (xz + z^2) = x(x+z) + z(x+z) = (x+z)^2$  là số chính phương.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

d) Ta chứng minh  $|a| + a \div 2$  với mọi  $a$

Nếu  $a \geq 0$  thì  $|a| + a = 2a \div 2$

Nếu  $a < 0$  thì  $|a| + a = -a + a = 0 \div 2$

Vậy  $|a| + a \div 2$  với mọi  $a$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |x-y| + x-y \div 2 \\ |y-z| + y-z \div 2 \\ |z-x| + z-x \div 2 \end{cases} \Rightarrow (|x-y| + |y-z| + |z-x|) + (x-y + y-z + z-x) \div 2$$

Hay  $|x-y| + |y-z| + |z-x| \div 2$  mà  $2023 \nmid 2$

Vậy không có  $x, y, z$  thoả mãn đề bài.

**Bài 22.**

a) Giả sử có 2015 số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015}$  thoả mãn  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2015}} = 1008$ .

Chứng minh rằng có ít nhất 2 trong 2015 số nguyên dương đã cho bằng nhau

b) Cho 2019 số nguyên dương  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2019}$  thoả mãn  $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}^2} \geq 4$ .

Chứng minh rằng ta luôn tìm được ít nhất 3 số bằng nhau.

**Lời giải**

a) Không mất tính tổng quát. Giả sử  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2015}$ .

$$\text{Suy ra: } a_1 \geq 1; a_2 \geq 2; \dots; a_{2015} \geq 2015 \Rightarrow A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2015}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2015}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{2016}{2} = 1008 \text{ (mâu thuẫn với giả thiết)}$$

Vậy có ít nhất 2 trong 2015 số nguyên dương đã cho bằng nhau.

b) **TH1:** Trong 2019 số đã cho không tồn tại 2 số có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Không mất tính tổng quát ta giả sử  $1 \leq |a_1| < |a_2| < \dots < |a_{2019}|$ , khi đó  $|a_2| \geq 2; |a_3| \geq 3; \dots; |a_{2019}| \geq 2019$

$$\text{Ta có } \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2018.2019}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}^2} < 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} = 2 - \frac{1}{2019} < 2 < 4 \text{ (trái với giả thiết)}$$

**TH2:** Trong 2019 số đã cho có tối đa 2 số có giá trị tuyệt đối bằng nhau

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}^2} \leq 2 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1009^2} \right) + \frac{1}{1010^2}$$

$$< 2 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1009^2} + \frac{1}{1010^2} \right) < 2 \left( 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{1009.1010} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}^2} < 2 \left( 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1009} - \frac{1}{1010} \right) = 2 \left( 2 - \frac{1}{1010} \right) < 4 \text{ (không thỏa}$$

mãn điều kiện)

Vậy trong 2019 số đã cho tồn tại ít nhất 3 số bằng nhau.



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin