TRƯỜNG THCS NAM TỪ LIÊM
TỔ KHOA HỌC TỰ NHIÊN
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN LẦN I

Năm học: 2024 – 2025

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Bài 1 (4 điểm)

1) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2-b=b^2-c=c^2-a$

Tính giá trị biểu thức $P=ab^2+bc^2+ca^2-a^3-b^3-c^3$.

2) Giải phương trình: $\dfrac{x+11}{x-1}.\left(x+\dfrac{x+11}{x-1}\right)=\dfrac{-10}{x}$

Bài 2 (5 điểm)

1) Tìm số nguyên dương x và y sao cho x^4+4y^4 là số nguyên tố.

2) Cho hai số nguyên a,b thỏa mãn $a+(a+b)^2$ chia hết cho ab.

Chứng minh a là số chính phương.

3) Một tấn hoa quả được chở tới siêu thị, trong đó táo được đóng theo các thùng gỗ $48\ kg$ /thùng, lê được đóng gói trong các thùng gỗ $20\ kg$ /thùng, mận đựng trong hộp giấy theo $14\ kg$ /hộp còn nho đựng trong các hộp giấy theo $10\ kg$ /hộp. Biết rằng số kg táo được chở tới nhiều gấp đôi số kg lê, còn số kg mận và nho là bằng nhau. Hỏi khối lượng mỗi loại hoa quả đã được vận chuyển tới cửa hàng là bao nhiêu kg?

Bài 3 (3 điểm)

1) Một hộp chứa các quả bóng, trong đó $\dfrac{1}{7}$ số bóng có màu xanh, còn lại là bóng có màu đỏ. Sau khi thêm vào hộp 13 quả bóng (màu xanh hoặc màu đỏ) thì số quả bóng màu xanh tăng lên, tuy nhiên tỉ lệ số quả bóng màu xanh so với số quả bóng màu đỏ trong hộp lại giảm đi. Hỏi số lượng quả bóng màu đỏ được thêm mới vào hộp là bao nhiêu?

2) Với a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{a}{a+b+c^2}+\dfrac{b}{b+c+a^2}+\dfrac{c}{c+a+b^2}$.

Bài 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Kẻ $HE \perp AC$, $HF \perp AB$ (với $E \in AC,\ F \in AB$). Gọi I là giao điểm của AH và EF. Đường thẳng qua A song song với BI cắt BC tại K.

1) Chứng minh $BH = BK$ và $BA^2 = BK.BC$.

2) BI cắt AC tại P, CI cắt AB tại Q. Chứng minh $\frac{PA}{PC} = \frac{BA^2}{BC^2}$ và $\frac{PA}{PC} + \frac{QA}{QB} = 1$.

3) Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của EF với BC. Kẻ $HJ \perp AN$ ($J \in AN$). Chứng minh I là trực tâm của tam giác AMN và $BJ \perp CJ$.

Bài 5 (2 điểm)

1) Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 3, 5, 7, 9$

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ tập hợp A.

Tính xác suất của biến cố "*số được chọn là số tự nhiên chia hết cho* 11".

2) Chia 20 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 20 thành hai nhóm như sau:

Nhóm 1: Gồm các số có tổng bằng n.

Nhóm 2: Gồm các số có tích bằng n.

a) Chỉ ra một giá trị n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Tìm giá trị lớn nhất của n.

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (4 điểm)

1) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2-b=b^2-c=c^2-a$

Tính giá trị biểu thức $P=ab^2+bc^2+ca^2-a^3-b^3-c^3$.

2) Giải phương trình: $\dfrac{x+11}{x-1}.\left(x+\dfrac{x+11}{x-1}\right)=\dfrac{-10}{x}$

Lời giải

1) Ta có: $a^2-b=b^2-c=c^2-a$

$\begin{cases} b^2-a^2=c-b \\ c^2-b^2=a-c \\ a^2-c^2=b-a \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a\left(b^2-a^2\right)=ac-ba \\ b\left(c^2-b^2\right)=ab-bc \\ c\left(a^2-c^2\right)=cb-ca \end{cases}$

$$\begin{aligned} P&=ab^2+bc^2+ca^2-a^3-b^3-c^3 \\ &=a\left(b^2-a^2\right)+b\left(c^2-b^2\right)+c\left(a^2-c^2\right) \\ &=(ac-ab)+(ab-bc)+(bc-ca)=0 \end{aligned}$$

Vậy $P=0$

2) Điều kiện xác định: $x\neq 0$, $x\neq 1$

Ta có: $\dfrac{x+11}{x-1}\left(x+\dfrac{x+11}{x-1}\right)=\dfrac{-10}{x}$

$$\frac{(x+11)\left(x^2+11\right)}{(x-1)^2}+\frac{10}{x}=0$$

$$x(x+11)\left(x^2+11\right)+10(x-1)^2=0$$

$$x^4+11x^3+21x^2+101x+10=0$$

$$\left(x^4+10x^3+x^2\right)+\left(x^3+10x^2+x\right)+10\left(x^2+10x+1\right)=0$$

$$x^2\left(x^2+10x+1\right)+x\left(x^2+10x+1\right)+10\left(x^2+10x+1\right)=0$$

$$\left(x^2+x+10\right)\left(x^2+10x+1\right)=0$$

Do $x^2+x+10=(x+0,5)^2+9,75>0$

Suy ra $x^2+10x+1=0$

$$(x+5)^2=24$$

Suy ra $-5\pm2\sqrt{6}$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-5+2\sqrt{6};-5-2\sqrt{6}\right\}$.

Bài 2 (5 điểm)

1) Tìm số nguyên dương x và y sao cho x^4+4y^4 là số nguyên tố.

2) Cho hai số nguyên a,b thỏa mãn $a+(a+b)^2$ chia hết cho ab. Chứng minh a là số chính phương.

3) Một tấn hoa quả được chở tới siêu thị, trong đó táo được đóng theo các thùng gỗ $48\ kg$ /thùng, lê được đóng gói trong các thùng gỗ $20\ kg$ /thùng, mận đựng trong hộp giấy theo $14\ kg$ /hộp còn nho đựng trong các hộp giấy theo $10\ kg$ /hộp. Biết rằng số kg táo được chở tới nhiều gấp đôi số kg lê, còn số kg mận và nho là bằng nhau. Hỏi khối lượng mỗi loại hoa quả đã được vận chuyển tới cửa hàng là bao nhiêu kg?

Lời giải

1) Đặt $x^4+4y^4=p$ (p là số nguyên tố) Suy ra $p\geq5$

Ta có: $p=x^4+4y^4=\left(x^2+2y^2\right)^2-4x^2y^2=\left(x^2+2xy+2y^2\right)\left(x^2-2xy+2y^2\right)$

Vì $x^2+2xy+2y^2>x^2-2xy+2y^2$ và p là số nguyên tố

Do đó $x^2-2xy+2y^2=1$. Suy ra $(x-y)^2+y^2=1$ hay $(x-y)^2+\left(y^2-1\right)=0$

Do $x,y\in\mathbb{Z}^+$ nên ta có $(x-y)^2\geq0; y^2-1\geq0$

Dấu = xảy ra khi $x=y=1$ (thoả mãn)

Vậy $x=y=1$ thì x^4+4y^4 là số nguyên tố.

2) Gọi $d=(a;b)$. Đặt $a=dx;\ b=dy\ \left(d,x,y\in\mathbb{Z}^+;(x;y)=1\right)$

Ta có: $a+(a+b)^2 \vdots ab$ hay $a+a^2+b^2 \vdots ab$ (1)

Suy ra $dx-d^2x^2+d^2y^2 \vdots d^2xy$

Do đó $dx \vdots d^2$. Nên $x \vdots d$ (2)

Từ (1) suy ra $a+a^2+b^2 \vdots a$. Vì $a+a^2 \vdots a$ nên $b^2 \vdots a$

Suy ra $d^2y^2 \vdots dx$

Do đó $dy^2 \vdots x$ mà $(x;y)=1$

Suy ra $d \vdots x$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $x = d$ nên $a = x^2$ (điều phải chứng minh).

3) Gọi số thùng (hộp) đựng táo, lê, mận, nho, lần lượt là a,b,c,d ($a,b,c,d \in \mathbb{Z}^+$)

Theo bài ra $\begin{cases} 48a + 20b + 14c + 10d = 1000 & (1) \\ 48a = 2.20b = 40b & (2) \\ 14c = 10d & (3) \end{cases}$

$40b + 20b + 10d + 10d = 1000$

$3b + d = 50$ (4)

Từ (2) suy ra $5b = 6a$ nên $b \vdots 6$

Từ (3) suy ra $7c = 5d$ nên $d \vdots 7$

Từ (4) suy ra $3b < 50$ nên $b < \dfrac{50}{3} \approx 16.67$ mà $b \vdots 6$

Suy ra $b \in \{6; 12\}$

Nếu $b = 6$ suy ra $d = 32 \not\vdots\, 7$ (không thỏa mãn)

Nếu $b = 12$ suy ra $d = 14 \vdots 7$ (thoả mãn) nên $a = 10$, $c = 10$

Suy ra có 10 thùng táo, 12 thùng lê, 14 hộp mận, 10 hộp nho
Vậy khối lượng táo, lê, mận, nho lần lượt là 480kg, 240kg, 140kg, 140kg.

Bài 3 (3 điểm)

1) Một hộp chứa các quả bóng, trong đó $\dfrac{1}{7}$ số bóng có màu xanh, còn lại là bóng có màu đỏ. Sau khi thêm vào hộp 13 quả bóng (màu xanh hoặc màu đỏ) thì số quả bóng màu xanh tăng lên, tuy nhiên tỉ lệ số quả bóng màu xanh so với số quả bóng màu đỏ trong hộp lại giảm đi. Hỏi số lượng quả bóng màu đỏ được thêm mới vào hộp là bao nhiêu?

2) Với a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \dfrac{a}{a+b+c^2} + \dfrac{b}{b+c+a^2} + \dfrac{c}{c+a+b^2}$.

Lời giải

1) Gọi a,b lần lượt là số quả bóng màu xanh, đỏ ban đầu; c là số quả bóng màu xanh trong 13 quả bóng thêm. ($a,b,c\in\mathbb{N}^*;c<13$)

Suy ra số quả bóng màu đỏ được thêm vào là: $13-c$ (quả)

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a=\dfrac{1}{7}(a+b)\ (1) \\ \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+13-c}\quad (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $7a=a+b$ nên $b=6a$

Thay vào (2) ta có $\dfrac{a}{6a}>\dfrac{a+c}{6a+13-c}$ nên $\dfrac{a+c}{6a+13-c}<\dfrac{1}{6}$

Do đó $6(a+c)<6a+13-c$ hay $7c<13$ suy ra $c<\dfrac{13}{7}\approx 1{,}9$

Mà $c\in\mathbb{N}^*$ suy ra $c=1$

Vậy số quả bóng màu đỏ được thêm là 12.

2) Do $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$ nên $a,b,c\in[0;1]$

Vì $c(c-1)\le 0$ nên $c^2-c+1\le 1$

Do đó $\dfrac{a}{c^2-c+1}\ge a$

Hay $\dfrac{a}{a+b+c^2}\ge a$

Tương tự $\dfrac{b}{b+c+a^2}\ge b$ và $\dfrac{c}{c+a+b^2}\ge c$

Do đó: $Q\ge a+b+c=1$. Hay giá trị nhỏ nhất của Q bằng 1

Dấu = xảy ra khi $a+b+c=1$, ví dụ $a=1,\ b=c=0$

Ta chứng minh $\dfrac{a}{c^2-c+1}\le\dfrac{27a(c+2)}{49}$ (1)

$$49\le 27(c+2)(c^2-c+1)$$

$$27(c^3+c^2-c+2)\ge 49$$

$$27c^3+27c^2-27c+5\ge 0$$

$$(3c-1)^2(3c+5)\ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Do đó (1) được chứng minh.

Tương tự $\frac{b}{a^2-a+1}\le\frac{27b(a+2)}{49};\frac{c}{b^2-b+1}\le\frac{27c(b+2)}{49}$

Từ đó suy ra $Q\le\frac{27}{49}\left[a(c+2)+b(a+2)+c(b+2)\right]$

$$Q\le\frac{27}{49}(ab+bc+ca+2)\le\frac{27}{49}\left[2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right]$$

$$Q\le\frac{27}{49}\left(2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{7}$$

Hay giá trị lớn nhất của Q bằng $\frac{9}{7}$

Dấu = xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q=1$; giá trị lớn nhất của $Q=\frac{9}{7}$.

Bài 4 (6 điểm)

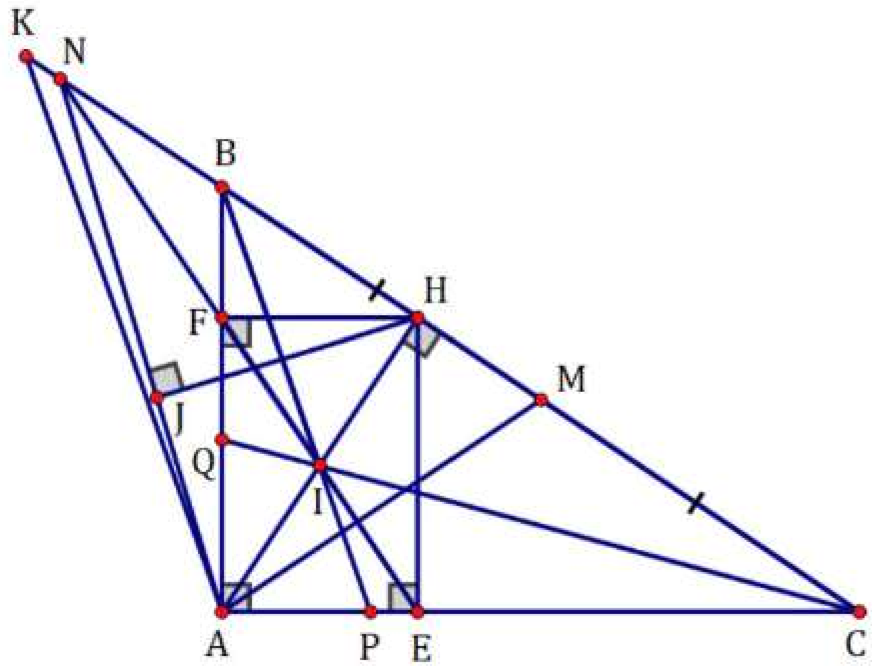
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB<AC$), đường cao AH. Kẻ $HE\perp AC$, $HF\perp AB$ (với $E\in AC$, $F\in AB$). Gọi I là giao điểm của AH và EF. Đường thẳng qua A song song với BI cắt BC tại K.

1) Chứng minh $BH=BK$ và $BA^2=BK.BC$.

2) BI cắt AC tại P, CI cắt AB tại Q. Chứng minh $\frac{PA}{PC}=\frac{BA^2}{BC^2}$ và $\frac{PA}{PC}+\frac{QA}{QB}=1$.

3) Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của EF với BC. Kẻ $HJ\perp AN$ ($J\in AN$). Chứng minh I là trực tâm của tam giác AMN và $BJ\perp CJ$.

Lời giải



1) Do $\widehat{HFA} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\widehat{FAE} = 90^0$ (ΔABC vuông tại A)

Suy ra $HFAE$ là hình chữ nhật.

Do đó I là trung điểm của AH và EF (tính chất)

Xét ΔHAK có I là trung điểm của AH và $BI \parallel AK$

Suy ra BI là đường trung bình của ΔHAK . Suy ra $BH = BK$ (1) (điều phải chứng minh).

Xét ΔABH và ΔCBA ta có

$\widehat{BAC} = \widehat{AHB} = 90^0$

$\widehat{ABC}$ chung

Suy ra $\Delta ABH \backsim \Delta CBA\ (g-g)$. Nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB}$ (cạnh tương ứng). Hay $AB^2 = BH.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BA^2 = BK.BC$ (điều phải chứng minh)

2) Áp dụng định lý Menelauyt cho ΔAHC với cát tuyến BIP ta có:

$\dfrac{PA}{PC}.\dfrac{IH}{IA}.\dfrac{BC}{BH} = 1$ Suy ra $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{BH}{BC}$ (do $IH = IA$)

Mà $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BH.BC}{BC^2} = \dfrac{BA^2}{BC^2}$ Suy ra $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{BA^2}{BC^2}$ (3)

Chứng minh tương tự, ta có: $\dfrac{QA}{QB} = \dfrac{CA^2}{BC^2}$ (4)

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta có: $\dfrac{PA}{PC}+\dfrac{QA}{QB}=\dfrac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1$ (điều phải chứng minh).

3) Ta chứng minh được: $\Delta AHF \backsim ABH\left(g.g\right)$, $\Delta AHE \backsim ACH\left(g.g\right)$

Suy ra $AF.AB = AE.AC = AH^2$

Khi đó $\Delta AFE \backsim \Delta ACB\left(c.g.c\right)$

Suy ra $\widehat{FEA}=\widehat{ABC}$

ΔABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

Suy ra $MA = MB = MC$ (tính chất)

Do đó ΔMAC cân tại M. Suy ra $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}$

Có $\widehat{MAC}+\widehat{FEA}=\widehat{MCA}+\widehat{ABC}=90^o$

Suy ra $AM \perp EF$ hay $NI \perp AM$

Mà $AI \perp MN \,(AH \perp MN)$

Do đó: I là trực tâm của $\triangle AMN$ (điều phải chứng minh).

Vì $\Delta AFE \backsim \Delta ACB\left(c.g.c\right)$ (chứng minh trên) nên $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$

Mà $\widehat{AFE}=\widehat{NFB}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó $\widehat{NFB}=\widehat{ACB}$

Suy ra $\Delta NBF \backsim \Delta NEC\left(g-g\right)$ Suy ra $\dfrac{NF}{NC}=\dfrac{NB}{NE}$ hay $NE.NF = NB.NC \; (5)$

Ta có: $\widehat{NHF}=90^o-\widehat{FHA}=\widehat{AHE}=\widehat{NEH}$ (do $AEHF$ là hình chữ nhật, AH và EF là đường chéo)

Suy ra $\Delta NHF \backsim \Delta NEH\left(g-g\right)$ suy ra $\dfrac{NH}{NE}=\dfrac{NF}{NH}$ hay $NE.NF = NH^2 \; (6)$

Xét $\triangle NHJ$ và $\triangle NAH$ ta có

$\widehat{NJH}=\widehat{AHN}$

$\widehat{ANH}$ chung

Suy ra $\triangle NHJ \backsim \triangle NAH \,(g-g)$

Suy ra $\dfrac{NJ}{NH}=\dfrac{NH}{NA}$ (cạnh tương ứng). Hay $NJ.NA = NH^2 \; (7)$

Từ (5), (6), (7) ta có: $NB.NC = NJ.NA$ hay $\dfrac{NB}{NJ}=\dfrac{NA}{NC}$

Xét ΔNJB và ΔNCA ta có:

$\widehat{ANC}$ chung

$\dfrac{NB}{NJ}=\dfrac{NA}{NC}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta NJB \backsim \Delta NCA(c-g-c)$

Suy ra $\widehat{NBJ}=\widehat{NAC}$ (góc tương ứng)

Mà: $\widehat{NBJ}+\widehat{JBC}=180^0$

Suy ra $\widehat{JAC}+\widehat{JBC}=180^0$

Do đó $BCAJ$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BC

Suy ra $\widehat{BJC}=90^o$, hay $BJ\perp CJ$ (điều phải chứng minh).

Bài 5 (2 điểm)

1) Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,3,5,7,9$

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ tập hợp A.

Tính xác suất của biến cố "*số được chọn là số tự nhiên chia hết cho* 11".

2) Chia 20 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 20 thành hai nhóm như sau:

Nhóm 1: Gồm các số có tổng bằng n.

Nhóm 2: Gồm các số có tích bằng n.

a) Chỉ ra một giá trị n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Tìm giá trị lớn nhất của n.

Lời giải

1. Từ 5 số 1, 3, 5, 7, 9 lập được $C_5^3.3!=60$ số có 3 chữ số khác nhau.

Ta cần tìm số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 11. Gọi số đó là $\overline{abc}$ với a,b,c phân biệt $\in\{1;3;5;7;9\}$

Để $\overline{abc}\,\vdots\,11$ thì $a-b+c\,\vdots\,11$

Có $\begin{cases} a-b+c\ge 1+3-9=-5 \\ a-b+c\le 7+9-1=15 \end{cases}$

Mà $a-b+c\,\vdots\,11 \Rightarrow a-b+c\in\{0;11\}$

Hơn nữa $a-b+c\,\not\vdots\,2$ suy ra $a-b+c=11$

Suy ra $a+c=11+b\le 7+9$ hay $b\le 5$

Với $b=1$ suy ra $a+c=12$ hay $b\leq 5$, nên có 4 cách chọn.

Với $b=3$ suy ra $a+c=14$ hay $(a;c)$ có 2 cách chọn.

Với $b=5$ suy ra $a+c=16$ hay $(a;c)$ có 2 cách chọn.

Khi đó có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố "*số được chọn là số tự nhiên chia hết cho* 11".

Vậy xác suất của biến cố "*số được chọn là số tự nhiên chia hết cho* 11" là $\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$

2)

a) Một trường hợp thoả mãn là:

Nhóm 1: $\{1;\,2;\,3;\,5;\,7;\,9;\,10;\,11;\,12;\,13;\,14;\,15;\,16;\,17;\,18;\,19;\,20\}$

Nhóm 2: $\{4;\,6;\,8\}$

Thoả mãn vì: $1+2+3+5+7+9+\ldots+20=4.6.8=192$

b) Giả sử giá trị lớn nhất của $n>192$

Gọi A là tập các số nhóm 1: $A=\{a_1;\,a_2;\,...\,;\,a_k\}$

B là tập các số nhóm 2: $B=\{b_1;\,b_2;\,...\,;\,b_i\}$

Các phần tử thuộc tập hợp A hoặc tập hợp B là: $\{1;\,2;\,...\,;\,20\}$

Không có phần tử nào vừa thuộc tập hợp A vừa thuộc tập hợp B

Có $a_1+a_2+...+a_k=b_1b_2...\,b_i=n$

Suy ra $b_1b_2...b_i+b_1+b_2+...+b_i=1+2+...+20=210$

Nếu $i\geq 6$ suy ra $b_1b_2...b_i\geq 6!=720$ (không thỏa mãn)

Do đó $i\in\{1;\,2;\,3;\,4;\,5\}$. Giả sử $b_1\leq b_2\leq...\leq b_i$

Nếu $i=1\Rightarrow 2b_1=210$ (không thỏa mãn)

Nếu $i=2\Rightarrow b_1b_2+b_1+b_2=210$

Suy ra $(b_1+1)(b_2+1)=211$

Không thỏa mãn vì 211 là số nguyên tố

Do đó: $i\geq 3$

Có $210=b_1b_2...\,b_i+(b_1+b_2+...+b_i)\geq b_1b_2...\,b_i+i\sqrt[i]{b_1b_2...b_i}=n+i\sqrt[i]{n}$

$210\geq n+3.\sqrt[5]{193}>n+8$

$n+8<210$ suy ra $n<202$ hay $n\leq 201$

Khi đó $n \in \{193;\, 194;\, 195;\, \dots;\, 201\}$

Dễ thấy n không thể có ước nguyên tố là một số > 20 (Do $b_i \le 20,\ \forall i$)

Trong tập $n \in \{193;\, 194;\, 195;\, \dots;\, 201\}$, các số có ước nguyên tố lớn hơn 20 là $\{193;194;197;199;201\}$

Suy ra $n \in \{195;\, 196;\, 198;\, 200\}$

- Với $n = 195$ suy ra $b_1 b_2 \dots b_i = 195$ và $b_1 + b_2 + \dots + b_i = 15$

Có $195 = 3.5.13$ chỉ có ước lẻ, suy ra b_i lẻ hay i lẻ

Suy ra $i = 3$ hoặc $i = 5$ mà $i = 5$ không thoả mãn. Nên $i = 3$

Suy ra $(b_1; b_2; b_3) \in \{(3;5;13);(1;13;15)\}$ (không thỏa mãn)

- Với $n = 196$ suy ra $b_1 b_2 \dots b_i = 2^2.7^7$ và $b_1 + b_2 + \dots + b_i = 14$

Suy ra $b_1 \dots b_i < 14$ nên $b_1, b_2, \dots, b_i \in \{1;2;7\}$

Khi đó $b_1 + b_2 + \dots + b_i \le 1 + 2 + 7 = 10$ (không thỏa mãn)

- Với $n = 198$ nên $b_1 b_2 \dots b_i = 2.3^2.11$ và $b_1 + b_2 + \dots + b_i = 12$

Suy ra $b_1 + b_2 + \dots + b_i \ge 2 + 11 = 13$ (không thỏa mãn)

- Với $n = 200$ suy ra $b_1 b_2 \dots b_i = 2^3.5^2$ và $b_1 + b_2 + \dots + b_i = 10$

Do đó $b_1 \dots b_i < 10$ suy ra $b_1, b_2, \dots, b_i \in \{1;2;4;5\}$

Kết hợp $b_1 + b_2 + \dots + b_i = 10$ ta có $(b_1; b_2; \dots; b_i) = (1;4;5)$ (không thỏa mãn).

Do đó $n \le 192$. Với $n = 192$ ta có trường hợp câu a) thoả mãn.

Vậy giá trị lớn nhất của n bằng 192.