TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRƯỜNG TỘ
TỔ TỰ NHIÊN 1
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HSG TOÁN 9 – VÒNG 2

Thời gian làm bài: 120 phút

Ngày thi: 24/09/2024

Bài 1 (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\dfrac{(2024-x)^2+(2024-x)(x-2025)+(x-2025)^2}{(2024-x)^2-(2024-x)(2025-x)+(x-2025)^2}=\dfrac{13}{37}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-5x^2y=-32 \\ y^3-2x^2y=-8 \end{cases}$

Bài 2 (4,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p+1$ bằng lập phương của một số tự nhiên

2) Tìm các số tự nhiên n để $2^4+2^7+2^n$ là số chính phương

Bài 3 (5,0 điểm)

1) Với các số thực dương a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c+1=4abc$

Chứng minh $\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{2b+1}+\dfrac{1}{2c+1}=1.$

2) Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$

Chứng minh $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

3) Cho đa thức $P(x)=x^3+2x^2+3x+4$ có nghiệm thực a

a) Chứng minh $P(x)$ có nghiệm duy nhất.

b) Gọi b là nghiệm thực của đa thức $Q(x)=x^3-8x^2+23x-26$. Chứng minh $a+b=2$

(Chú ý: Không yêu cầu Học sinh chứng minh các đa thức $P(x),Q(x)$ có nghiệm)

Bài 4 (6,0 điểm)

1) Cho tam giác nhọn ABC có $BC=a,CA=b,AB=c$. Chứng minh $\sin\dfrac{A}{2}\leq\dfrac{a}{b+c}$

2) Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng kẻ qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao của OM và BN. Chứng minh

a) $\widehat{OKB}=45^0$

b) CK vuông góc với BN.

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2025 đường thẳng bất kì có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\frac{3}{4}$. Chứng minh rằng có ít nhất 506 đường thẳng trong 2025 đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\dfrac{(2024-x)^2+(2024-x)(x-2025)+(x-2025)^2}{(2024-x)^2-(2024-x)(2025-x)+(x-2025)^2}=\dfrac{13}{37}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-5x^2y=-32 \\ y^3-2x^2y=-8 \end{cases}$

Lời giải

1) Với mọi x ta có:

$$(2024-x)^2+(2024-x)(x-2025)+(x-2025)^2=(2024-x)^2-(2024-x)(2025-x)+(x-2025)^2$$

và $(2024-x)^2+(2024-x)(x-2025)+(x-2025)^2=\left[(2024-x)+\dfrac{1}{2}(x-2025)\right]^2+\dfrac{3}{4}(x-2025)^2>0$

$$\Rightarrow \frac{(2024-x)^2+(2024-x)(x-2025)+(x-2025)^2}{(2024-x)^2+(2024-x)(x-2025)+(x-2025)^2}=1$$

Do đó phương trình vô nghiệm.

2) Ta có: $\begin{cases} x^3-5x^2y=-32 \ (1) \\ y^3-2x^2y=-8 \ \ (2) \end{cases}$

$\Rightarrow x^3-5x^2y=4\left(y^3-2x^2y\right)$

$x^3+3x^2y-4y^3=0$

$\left(x^3-y^3\right)+3\left(x^2y-y^3\right)=0$

$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+3y(x+y)(x-y)=0$

$(x-y)\left(x^2+4xy+4y^2\right)=0$

$(x-y)(x+2y)^2=0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-2y \end{array}\right.$

+) Nếu $x=y$. Từ (2) ta có: $x^3-2x^3=-8$. Khi đó $x=y=2(TM)$

+) Nếu $x=-2y$. Từ (2) ta có: $y^3-2.4y^2.y=-8$. Khi đó $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}}$ $\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-4}{\sqrt[3]{7}};\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}}\right)(TM)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;2);\left(\dfrac{-4}{\sqrt[3]{7}};\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}}\right)\right\}$

Bài 2 (4,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p+1$ bằng lập phương của một số tự nhiên

2) Tìm các số tự nhiên n để $2^4+2^7+2^n$ là số chính phương

Lời giải

1) Đặt $7p+1=a^3\left(a\in\mathbb{N}\right)(1)$

Do p là số nguyên tố $\Rightarrow p\ge 2\Rightarrow a\ge 3$

Từ (1) $\Rightarrow 7p=a^3-1=(a-1)\left(a^2+a+1\right)$

Với p = 2 $\Rightarrow a^3=15\ (KTM)$

Với p = 3 $\Rightarrow a^3=22\ (KTM)$

Với p = 5 $\Rightarrow a^3=36\ (KTM)$

Với p = 7 $\Rightarrow a^3=50\ (KTM)$

Xét $p>7$. Khi đó, vì p là số nguyên tố và $a-1<a^2+a+1$ nên $\left(a-1;a^2+a+1\right)\in\left\{(1;7p);(7;p)\right\}$

($7p$ chỉ có 4 ước tự nhiên là $1;p;7;7p$)

+) Nếu $\left(a-1;a^2+a+1\right)=(1;7p)\Rightarrow a=2(KTM)$

+) Nếu $\left(a-1;a^2+a+1\right)=(7;p)\Rightarrow a=8(KTM)$

Vậy không tồn tại p thoả mãn.

2) Đặt $2^4+2^7+2^n=a^2\left(a\in\mathbb{N}^*\right)$

Khi đó: $a^2=2^n+16+128=2^n+12^2$

Suy ra $(a+12)(a-12)=2^n\Rightarrow a>12$

Đặt $\begin{cases}a+12=2^x\\a-12=2^y\end{cases}$ với $\left(x,y\in\mathbb{N};x>y\right)$

$\Rightarrow 2^x-2^y=24=2^3.3$

$\Rightarrow 2^y\left(2^{x-y}-1\right)=2^3.3\quad(2)$

Vì $x>y$ nên $x-y\ge 1\Rightarrow 2^{x-y}-1$ là số lẻ

Do đó từ (2) $\Rightarrow 2^y=2^3$ và $2^{x-y}-1=3$

Suy ra $y=3$ và $x=5\Rightarrow a=20$

Lúc đó: $2^n=20^2-12^2=256\Rightarrow n=8(TM)$

Vậy $n=8$.

Bài 3 (5,0 điểm)

1) Với các số thực dương a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c+1=4abc$

Chứng minh $\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{2b+1}+\dfrac{1}{2c+1}=1$.

2) Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$

Chứng minh $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

3) Cho đa thức $P(x)=x^3+2x^2+3x+4$ có nghiệm thực a

a) Chứng minh $P(x)$ có nghiệm duy nhất.

b) Gọi b là nghiệm thực của đa thức $Q(x)=x^3-8x^2+23x-26$. Chứng minh $a+b=2$

(Chú ý: Không yêu cầu Học sinh chứng minh các đa thức $P(x),Q(x)$ có nghiệm)

Lời giải

1) Ta có: $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}$

$$=\frac{(2a+1)(2b+1)+(2b+1)(2c+1)+(2c+1)(2a+1)}{(2a+1)(2b+1)(2c+1)}$$

$$=\frac{4ab+4bc+4ca+4a+4b+4c+3}{8abc+4ab+4bc+4ca+2a+2b+2c+1}$$

$$=\frac{4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+3}{2(a+b+c+1)+4(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+1}$$

$$=\frac{4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+3}{4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+3}=1$$

Vậy $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}=1$ (điều phải chứng minh)

2) Đặt $S=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+bc+ca)$

Ta có: $S=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow S\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(ab+bc+ca)^2}=3\sqrt[3]{\frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$S\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)3abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}}=3\sqrt[3]{\frac{9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{abc}}$$

$$S\ge 3\sqrt[3]{\frac{9abc(a+b+c)}{abc}}=9$$

Vì $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab.bc+bc.ca+ca.ab$ hay

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+bc+ca)\ge(a+b+c)^2$$

$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$ (điều phải chứng minh)

3) a) Giả sử ngoài nghiệm thực a , P(x) còn có 1 nghiệm thực khác là b ($a \neq b$).

Khi đó ta có: $\begin{cases} a^3+2a^2+3a+4=0 \\ b^3+2b^2+3b+4=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(a^3-b^3\right)+2\left(a^2-b^2\right)+3\left(a-b\right)=0$

$\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2+2a+2b+3\right)=0$

Mà $a \neq b$

$\Rightarrow a^2+ab+b^2+2a+2b+3=0$

$2a^2+2ab+2b^2+4a+4b+6=0$

$a^2+b^2+\left(a+b\right)^2+4\left(a+b\right)+6=0$

Hay $a^2+b^2+\left(a+b+2\right)^4+2=0$ (vô lý)

Do đó điều giả sử là sai suy ra $P\left(x\right)$ có nghiệm duy nhất.

b) Từ bài ra ta có: $\begin{cases} a^3+2a^2+3a+4=0 \\ b^3-8b^2+23b-26=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 27a^3+54a^2+81a+108=0 \\ 27b^3-3^3.8b^2+3^3.23b-26.3^3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left(3a+2\right)^3+45a+100=0 \\ \left(3b-8\right)^3+45b-190=0 \end{cases}$

Suy ra $\left(3a-2\right)^3+\left(3b-8\right)^3+45a+45b-90=0$

$$\left(3a+3b-6\right)\left[\left(3a+2\right)^2-\left(3a+2\right)\left(3b-8\right)+\left(3b-8\right)^2+15\right]=0$$

Dễ có $\left(3a+2\right)^2-\left(3a+2\right)\left(3b-8\right)+\left(3b-8\right)^2+15>0$

$\Rightarrow 3a+3b-6=0$ hay $a+b=2$ (điều phải chứng minh)

Bài 4 (6,0 điểm)

1) Cho tam giác nhọn ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Chứng minh $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$

2) Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng kẻ qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao của OM và BN. Chứng minh

a) $\widehat{OKB}=45^0$

b) CK vuông góc với BN.

Lời giải

1) Kẻ đường phân giác AD của ΔABC

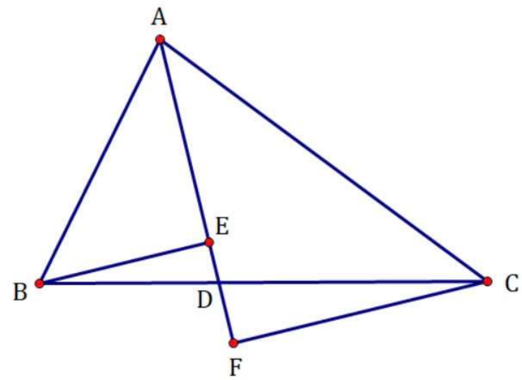
Kẻ $BE \perp AD; CF \perp AD$

$\Rightarrow BE \le BD; CF \le CD$ (tính chất hình chiếu)

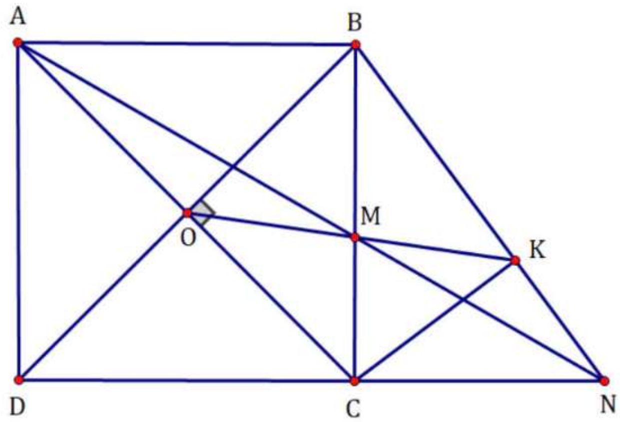
Có $\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \sin\widehat{BAE} = \sin\widehat{CAF} = \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC}$

$\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{BE+CF}{AB+AC} \le \frac{BD+CD}{AB+AC} = \frac{a}{b+c}$.

Suy ra điều phải chứng minh.



2)



a) Vì $AB // CN$ nên theo định lý Thàles ta có: $\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN} = \frac{MB+MC}{AB+CN}$ hay $\frac{MB}{AB} = \frac{BC}{CD+CN} = \frac{BC}{DN}$

Suy ra $BM.DN = AB.BC = AB^2\,(1)$

Xét ΔBAO và ΔBDA ta có: $\widehat{AOB} = \widehat{BAD} = 90^0$; $\widehat{BAO} = \widehat{BDA} = 45^0$

Suy ra $\Delta BAO \backsim \Delta BDA(g.g) \Rightarrow \frac{BA}{BO} = \frac{BD}{BA}$ hay $BO.BD = AB^2\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BM.DN = BO.BD$ Hay $\frac{BO}{BM} = \frac{DN}{DB}(3)$

Mặt khác ta có: $\widehat{OBM} = \widehat{NDB} = 45^0$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \Delta BOM \backsim \Delta DNB(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{BND} \Rightarrow \widehat{DOK} + \widehat{KND} = 180^0$

Do đó $DOKN$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OKN} + \widehat{ODN} = 180^0$ hay $\widehat{OKN} = 135^0$

Suy ra $\widehat{BKO} = 45^0$ (điều phải chứng minh).

b)

Xét ΔBOK và ΔBND ta có: Chung $\widehat{DBN}$; $\widehat{BKO} = \widehat{BDN} = 45^0$

Suy ra $\Delta BOK \backsim \Delta BND(g.g) \Rightarrow \dfrac{BO}{BN}=\dfrac{BK}{BD}$ hay $BO.BD=BK.BN$

Mà $BO.BD=AB^2=BC^2$. Do đó $BC^2=BK.BN$ hay $\dfrac{BC}{BK}=\dfrac{BN}{BC}$

Xét ΔBKC và ΔBCN ta có: Chung $\widehat{CBN}$; $\dfrac{BC}{BK}=\dfrac{BN}{BC}$

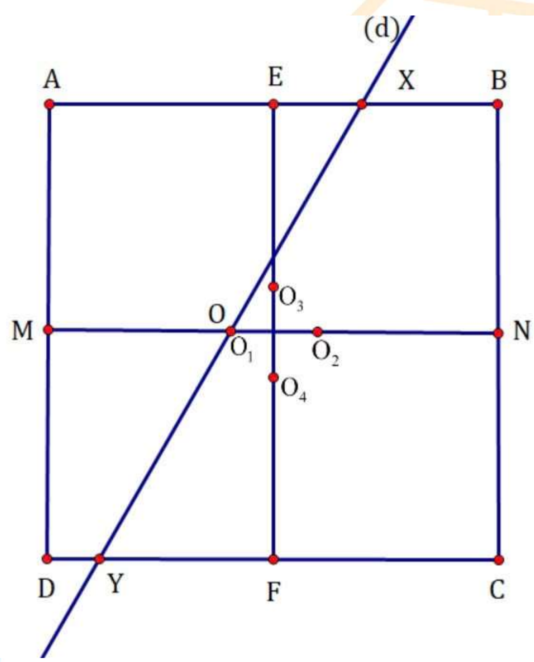
Suy ra $\Delta BKC \backsim \Delta BCN(c.g.c)$ $\Rightarrow \widehat{BKC}=\widehat{BCN}=90^0$

Hay $CK \perp BN$ *(điều phải chứng minh)*

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD và 2025 đường thẳng bất kì có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\dfrac{3}{4}$. Chứng minh rằng có ít nhất 506 đường thẳng trong 2025 đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải



Gọi E, M, F, N lần lượt là trung điểm AB, AD, CD, BC.

Gọi (d) là đường thẳng bất kỳ thoả mãn đề bài. Vì (d) chia hình vuông thành 2 tứ giác nên (d) cắt 2 cạnh đối nhau của hình vuông.

Không mất tính tổng quát, giả sử (d) cắt AB tại X cắt CD tại Y.

Gọi O là giao điểm của (d) với MN.

Khi đó 2 tứ giác tạo thành là $AXDY$ và $BXYC$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\dfrac{S_{AXYD}}{S_{BXYC}}=\dfrac{3}{4}$

Suy ra $\dfrac{(AX+DY).AD}{(BX+CY).BC}=\dfrac{3}{4}$ hay $\dfrac{AX+DY}{BX+CY}=\dfrac{3}{4}$

Suy ra $\dfrac{2MO}{2NO}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{OM}{MN}=\dfrac{3}{7}$

Do đó O là 1 điểm cố định.

Do đó trong trường hợp này, (d) đi qua điểm O cố định. Tương tự với các trường hợp khác, ta chứng minh được rằng (d) luôn đi qua 1 điểm O cố định nào đó trong 4 điểm O_1,O_2,O_3,O_4.(Các điểm này chia MN,EF theo tỉ lệ $3:4$)

Do có 2025 đường thẳng mà chỉ có 4 điểm nên theo nguyên lý Dirichlet

Suy ra tồn tại ít nhất $\left[\dfrac{2025}{4}\right]+1=507$ đường thẳng cùng đi qua 1 điểm.

Suy ra điều phải chứng minh.