PHÒNG GD & ĐT QUẬN CẦU GIẤY

TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA CLB VĂN HÓA LỚP 9

VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 VÒNG 2

Môn kiểm tra: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút *(Không tính thời gian phát đề)*

Câu 1. (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{5x+3}{x^2-9}$, với $x\neq \pm 3$.

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\dfrac{A}{x+3}$ nhận giá trị nguyên không vượt quá 2.

2) Cho các số thực a,b,c khác 0 thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^7+b^5=2c^3$,

$b^7+c^5=2a^3, c^7+a^5=2b^3$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{1}{a^{2024}}+\dfrac{1}{b^{2024}}+\dfrac{1}{c^{2024}}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình sau: $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2=3x^2+10x+5$.

2) Cho a,b là các số nguyên dương lớn hơn 1, $a<b$ thỏa mãn $b-1$ chia hết cho $a-1$. Gọi c là ước chung lớn nhất của a và b. Chứng minh rằng $c<\dfrac{b-1}{a-1}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho ba số tự nhiên a,b,c thoả mãn $a-b$ là số nguyên tố và $21c^2=ab+2c(a+b)$. Chứng minh rằng: $20c+1$ là số chính phương.

2) Với các số thực thỏa mãn $1\le a,b,c\le 3$ và $a+b+c=5$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=ab+bc+ca$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B=\dfrac{a}{b^2+3}+\dfrac{b}{c^2+3}+\dfrac{c}{a^2+3}$.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình thang $ABCD, AB//CD, AC$ cắt BD tại O. Giả sử các tam giác AOD và BOC nhọn. Kẻ $DF \perp AC$ tại $F; CE \perp BD$ tại E.

a) Chứng minh rằng $OF.OA = OE.OB$;

b) Kẻ $AX \perp BD$ tại $X; BY \perp AC$ tại Y. Chứng minh rằng $XY//EF$;

c) Gọi H, K là trực tâm của tam giác AOD và tam giác BOC. M là trung điểm của HK. Chứng minh rằng: $OM \perp DC$.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm trong mặt phẳng sao cho trong tất cả các tam giác tạo thành từ các điểm này có đúng 4 tam giác cân.

b) Chứng minh rằng tồn tại 5 điểm trong mặt phẳng sao cho trong tất cả các tam giác tạo thành từ các đỉnh này có đúng 8 tam giác cân.

------------------------------Hết------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A=\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x+3}-\frac{5x+3}{x^2-9}$, với $x\neq\pm3$.

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\frac{A}{x+3}$ nhận giá trị nguyên không vượt quá 2.

2) Cho các số thực a,b,c khác 0 thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^7+b^5=2c^3$, $b^7+c^5=2a^3, c^7+a^5=2b^3$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\frac{1}{a^{2024}}+\frac{1}{b^{2024}}+\frac{1}{c^{2024}}$.

Lời giải

1) a) $A=\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x+3}-\frac{5x+3}{x^2-9}=\frac{x^2+3x+3x-9-5x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2+x-12}{(x+3)(x-3)}=\frac{(x+4)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x+4}{x+3}$

Vậy $A=\frac{x+4}{x+3}$.

b) Có: $\frac{A}{x+3}=\frac{(x+4)}{(x+3)^2}$. Đặt $t=x+3\ (t\neq 0;6)$ thì $\frac{A}{x+3}=\frac{t+1}{t^2}$

Nếu $\frac{A}{x+3}\le -1$ thì $\frac{t+1}{t^2}+1\le 0\Rightarrow t^2+t+1\le 0\Rightarrow\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\le 0$ (vô lý)

Do vậy: $\frac{A}{x+3}\in\{0;1;2\}$

+) $\frac{A}{x+3}=0\Rightarrow\frac{t+1}{t^2}=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow x=-4$ (thỏa mãn)

+) $\frac{A}{x+3}=1\Rightarrow t+1=t^2\Rightarrow t\in\left\{\frac{1+\sqrt5}{2};\frac{1-\sqrt5}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{-5+\sqrt5}{2};\frac{-5-\sqrt5}{2}\right\}$ (thỏa mãn)

+) $\frac{A}{x+3}=2\Rightarrow 2t^2=t+1\Rightarrow t\in\left\{1;\frac{-1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{-2;\frac{-7}{2}\right\}$ (thỏa mãn)

Vậy $x\in\left\{-4;-2;\frac{-7}{2};\frac{-5\pm\sqrt5}{2}\right\}$

2) Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa 2 số a và c.

Có $a^7+b^5=2c^3; b^7+c^5=2a^3 \Rightarrow \left(a^7-b^7\right)+\left(b^5-c^5\right)+2\left(a^3-c^3\right)=0 \ (1)$

+) Nếu $a\ge b\ge c \Rightarrow a^7-b^7\ge 0; b^5-c^5\ge 0; a^3-c^3\ge 0 \ (2)$

Từ (1), (2) suy ra $a=b=c$

+) Nếu $a\le b\le c \Rightarrow a^7-b^7\le 0; b^5-c^5\le 0; a^3-c^3\le 0 \ (3)$

Từ (1), (3) suy ra $a=b=c$

Do đó, trong mọi trường hợp ta luôn có $a=b=c \Rightarrow a^7+a^5=2a^3$ mà $a\ne 0$. Suy ra:

$a^4+a^2=2$

$\left(a^2+2\right)\left(a^2-1\right)=0$

$\left(a^2+2\right)(a+1)(a-1)=0$

Suy ra $a=b=c=1$ hoặc $a=b=c=-1$

Do đó $P=1+1+1=3$

Vậy $P=3$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình sau: $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2=3x^2+10x+5$.

2) Cho a,b là các số nguyên dương lớn hơn 1, $a<b$ thỏa mãn $b-1$ chia hết cho $a-1$. Gọi c là ước chung lớn nhất của a và b. Chứng minh rằng $c<\dfrac{b-1}{a-1}$.

Lời giải

1) a) Điều kiện xác định: $x\ne -2$. Ta có: $\dfrac{x^2}{(x+2)^2}=3x^2+10x+5$

$x^2=\left(x^2+4x+4\right)\left(3x^2+10x+5\right)$

$x^2=3x^4+22x^3+57x^2+60x+20$

$3x^4+22x^3+56x^2+60x+20=0$

$\left(3x^4+12x^3+6x^2\right)+\left(10x^3+40x^2+20x\right)+\left(10x^2+40x+20\right)=0$

$3x^2\left(x^2+4x+2\right)+10x\left(x^2+4x+2\right)+10\left(x^2+4x+2\right)=0$

$\left(3x^2+10x+10\right)\left(x^2+4x+2\right)=0$

Do $10^2 - 4.3.10 < 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x + 10 = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 2 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $S = \left\{-2 \pm \sqrt{2}\right\}$

2) Đặt $a = cm; b = cn$ thì $(m;n) = 1$

Đặt $b - 1 = (a-1)k \left(m,n,k \in \mathbb{Z}^+\right)$. Khi đó: $cn - 1 = (cm-1)k = kcm - k \Rightarrow k - 1 = c(km - n)(1)$

Do $a < b \Rightarrow a - 1 < b - 1 \Rightarrow k > 1 \Rightarrow k - 1 > 0$ mà $c > 0 \Rightarrow km - n > 0 \Rightarrow km - n \geq 1 \Rightarrow k - 1 \geq c$ (từ (1))

Do đó $c < k$ hay $c < \dfrac{b-1}{a-1}$ (điều phải chứng minh).

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho ba số tự nhiên a,b,c thoả mãn $a-b$ là số nguyên tố và $21c^2 = ab + 2c(a+b)$. Chứng minh rằng: $20c+1$ là số chính phương.

2) Với các số thực thỏa mãn $1 \leq a,b,c \leq 3$ và $a+b+c=5$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = ab + bc + ca$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \dfrac{a}{b^2+3} + \dfrac{b}{c^2+3} + \dfrac{c}{a^2+3}$.

Lời giải

1) Đặt $p = a - b$ thì p là số nguyên tố

Ta có: $21c^2 = ab + 2c(a+b) \Rightarrow 25c^2 = (a+2c)(b+2c)$

Gọi $u = (a+2c; b+2c)\left(u \in \mathbb{Z}^+\right)$

Suy ra $a + 2c \,\vdots\, u;\ b + 2c \,\vdots\, u \Rightarrow a - b \,\vdots\, u \Rightarrow p \,\vdots\, u \Rightarrow u \in \{1; p\}$

+) Nếu $u = 1 \Rightarrow a + 2c = x^2; b + 2c = y^2$

Với $(x;y) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = p = (x+y)(x-y) \Rightarrow x + y = p;\ x - y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{p+1}{2}; y = \dfrac{p-1}{2}$

Lúc đó $5c = xy = \dfrac{p^2-1}{4} \Rightarrow 20c + 1 = p^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh).

+) Nếu $u = p \Rightarrow a + 2c = px^2; b + 2c = py^2$

Với $(x;y)=1 \Rightarrow p(x^2-y^2)=p \Rightarrow x^2-y^2=1 \Rightarrow (x+y)(x-y)=1 \Rightarrow x+y=x-y=1 \Rightarrow x=1; y=0$

(vô lý)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2) a) Vì $1 \le a,b,c \le 3$

Nên $\begin{cases}(a-1)(b-1)(c-1) \ge 0\\(a-3)(b-3)(c-3) \le 0\end{cases}$

Do đó $(a-1)(b-1)(c-1) \ge (a-3)(b-3)(c-3)$

$abc-ab-bc-ca+a+b+c-1 \ge abc-3ab-3bc-3ca+9a+9b+9c-27$

$2(ab+bc+ca) \ge 8(a+b+c)-26=14$

Suy ra $A \ge 7$. Dấu "=" xảy ra khi ví dụ $a=1, b=1, c=3$

Vậy GTNN của A = 7

b) Dễ có: $(b-1)(b-3) \le 0 \Rightarrow b^2+3 \le 4b$

Tương tự: $a^2+3 \le 4a;\ c^2+3 \le 4c$

Khi đó: $B=\dfrac{a}{b^2+3}+\dfrac{b}{c^2+3}+\dfrac{c}{a^2+3}$. Suy ra:

$$3B=(a+b+c)-\left(\frac{ab^2}{b^2+3}+\frac{bc^2}{c^2+3}+\frac{ca^2}{a^2+3}\right) \le (a+b+c)-\left(\frac{ab^2}{4b}+\frac{bc^2}{4c}+\frac{ca^2}{4a}\right)$$

$$=5-\frac{1}{4}(ab+bc+ca) \le 5-\frac{7}{4}=\frac{13}{4}$$

Do đó $3B \le \dfrac{13}{4}$ hay $B \le \dfrac{13}{12}$. Dấu "=" xảy ra khi ví dụ $a=b=1; c=3$

Vậy GTLN của B = $\dfrac{13}{12}$.

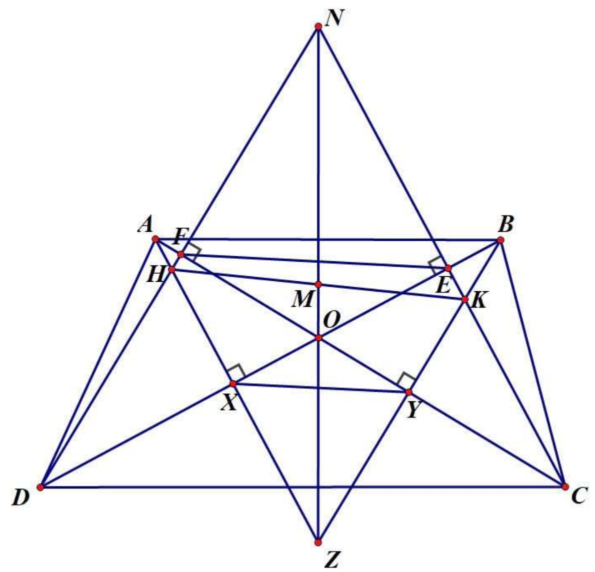
Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình thang $ABCD, AB//CD, AC$ cắt BD tại O. Giả sử các tam giác AOD và BOC nhọn. Kẻ $DF \perp AC$ tại $F; CE \perp BD$ tại E.

a) Chứng minh rằng $OF.OA=OE.OB$;

b) Kẻ $AX \perp BD$ tại $X; BY \perp AC$ tại Y. Chứng minh rằng $XY//EF$;

c) Gọi H, K là trực tâm của tam giác AOD và tam giác BOC. M là trung điểm của HK. Chứng minh rằng: $OM \perp DC$.

Lời giải



a) Vì $AB//CD$ nên $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}$. Suy ra $OA.OD=OC.OB(1)$

$\Delta ODF\backsim\Delta OCE(g.g)\Rightarrow\dfrac{OD}{OF}=\dfrac{OC}{OE}$. Suy ra $OD.OE=OF.OC(2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow OA.OD.OC.OF=OB.OC.OD.OE$ Suy ra $OF.OA=OE.OB$ (điều phải chứng minh)

b) Vì $\widehat{AXB}=90^0$ nên ΔAXB vuông tại X, cạnh huyền AB. Suy ra A,X,B cùng thuộc đường tròn đường kính AB. Tương tự, A,Y,B cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

Do đó A,X,Y,B cùng thuộc đường tròn đường kính AB. Nên $AXYB$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{OXY}=\widehat{OAB}(3)$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BY}$)

Tương tự, $DFEC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{OEF}=\widehat{OCD}(4)$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{FD}$)

Vì $AB//CD$ nên $\widehat{OAB}=\widehat{OCD}(5)$

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow\widehat{OXY}=\widehat{OEF}\Rightarrow XY//EF$ (điều phải chứng minh).

c) Có H là giao điểm AX và DF

Và K là giao điểm BY và CE

Gọi Z, N lần lượt là trực tâm $\Delta OAB,\Delta OCD$ Suy ra $OZ\perp AB;ON\perp CD$ mà $AB//CD$

Suy ra O,Z,N thẳng hàng và $ON \perp CD(1)$

Vì $AX//CE$ nên $HZ//NK$

Tương tự: $KZ//HN$

Suy ra $HNKZ$ là hình bình hành

Do đó M cũng là trung điểm NZ (2)

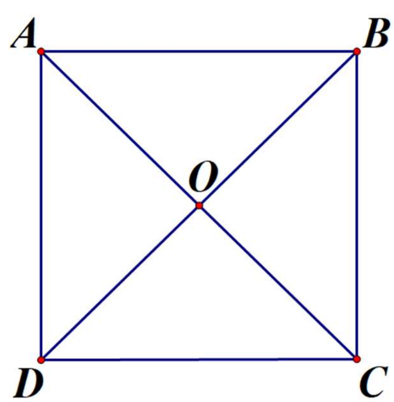
Từ (1), (2) suy ra $OM \perp DC$ (điều phải chứng minh).

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm trong mặt phẳng sao cho trong tất cả các tam giác tạo thành từ các điểm này có đúng 4 tam giác cân.

b) Chứng minh rằng tồn tại 5 điểm trong mặt phẳng sao cho trong tất cả các tam giác tạo thành từ các đỉnh này có đúng 8 tam giác cân.

Lời giải



a) Xét 4 điểm A,B,C,D tạo thành 1 hình vuông

Vậy có 4 tam giác cân là $\Delta ABC,\Delta ABD,\Delta BCD,\Delta ACD$ suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC,BD của hình vuông $ABCD$. Khi đó, 5 điểm A,B,C,D,O thoả mãn đề bài. Thật vậy, do A,O,C và B,O,D thẳng hàng nên chỉ có đúng 8 tam giác được tạo thành từ 5 điểm này, đó là:

$\Delta ABC,\Delta ABD,\Delta BCD,\Delta ACD,\Delta AOB,\Delta BOC,\Delta COD,\Delta DOA$ và cả 8 tam giác này đều là tam giác cân (điều phải chứng minh).

------------------------------Hết----------------------