ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN CẦU GIẤY

Năm học: 2024 – 2025

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Bài 1

1) Cho các số thực $a,b,c \neq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} a^2+ab=c^2+bc \\ a^2+ac=b^2+bc \end{cases}$

Tính $A=2024\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$.

2) Cho $f(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 2026 và $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 2027. Tìm số dư của $f(x)$ khi chia cho x^2-5x+6.

Bài 2

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+3=4x \\ x^3+12x+y^3=6x^2+9 \end{cases}$

2) Cho 100 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 100. Biết rằng a,b lần lượt là chữ số hàng chục và hàng đơn vị của 24^{2024}. Tính xác suất của biến cố "Rút được tấm thẻ có số thứ tự lớn hơn $\overline{ab}$".

Bài 3

1) Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^2+y^2=17-2xy$.

2) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Bài 4

Cho hình vuông $ABCD$ với O là giao điểm của AC và BD. Hai điểm E,F lần lượt nằm trêm hai cạnh BC,CD sao cho $\widehat{FAE}=45^\circ$. Gọi AE cắt BD tại N, AE cắt CD tại M.

1) Chứng minh $\cos\widehat{MAC}=\sin\widehat{DFA}$ và $\Delta ANB \backsim \Delta AFC$.

2) Chứng minh $BC^2+DF^2=2AN^2$

3) Gọi OE cắt BM tại Q, DE cắt AB tại I. Chứng minh ba điểm C,Q,I thẳng hàng.

Bài 5

Cho S là tập gồm 2024 số nguyên dương thỏa mãn điều kiện trong bốn số bất kì của S, luôn tồn tại một số là ước của mỗi số còn lại hoặc tồn tại một số bằng tổng của ba số còn lại. Chứng minh rằng S chứa một số là ước của 2023 số còn lại.

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1

1) Cho các số thực $a,b,c \neq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} a^2+ab=c^2+bc \\ a^2+ac=b^2+bc \end{cases}$

Tính $A=2024\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

2) Cho $f(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 2026 và $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 2027. Tìm số dư của $f(x)$ khi chia cho x^2-5x+6.

Lời giải

1) Biến đổi hệ phương trình đã cho ta có: $\begin{cases} (a-c)(a+b+c)=0 \\ (a-b)(a+b+c)=0 \end{cases}$

Suy ra $(a-c)(a+b+c)=(a-b)(a+b+c)=0$

Trường hợp 1: $a+b+c=0$

Suy ra $A=\dfrac{2024(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\dfrac{2024(-a)(-b)(-c)}{abc}=-2024$

Trường hợp 2: $a-b=a-c=0$ hay $a=b=c$

Suy ra $A=2024(1+1)(1+1)(1+1)=16184$

Vậy $A=-2024$ hoặc $A=16184$

2) Từ giả thiết có $f(x)=(x-2)P(x)+2026=(x-3)Q(x)+2027$ với $P(x),Q(x)$ lần lượt là thương của phép chia $f(x)$ cho $x-2$ và $x-3$

Xét phép chia $f(x)$ cho x^2-5x+6, do đa thức chia bậc 2 nên đa thức dư có bậc cao nhất là 1, đặt đa thức dư là $ax+b$, đa thức thương là $g(x)$

Suy ra $f(x)=\left(x^2-5x+6\right)g(x)+ax+b=(x-2)(x-3)g(x)+ax+b$

Với $f(x)=(x-2)P(x)+2026$ suy ra $f(2)=2a+b=2026$

Với $f(x)=(x-3)Q(x)+2027$ suy ra $f(3)=3a+b=2027$

Suy ra $a=1,\ b=2024$. Vậy $f(x)$ chia x^2-5x+6 dư $x+2024$.

Bài 2

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+3=4x \\ x^3+12x+y^3=6x^2+9 \end{cases}$

2) Cho 100 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 100. Biết rằng a,b lần lượt là chữ số hàng chục và hàng đơn vị của 24^{2024}. Tính xác suất của biến cố "Rút được tấm thẻ có số thứ tự lớn hơn $\overline{ab}$".

Lời giải

1) Biến đổi hệ phương trình đã cho ta có: $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=1 \\ (x-2)^3+y^3=1 \end{cases}$

Đặt $x-2=z$

Suy ra $z^2+y^2=1$ và $z^3+y^3=1$ (*)

Do đó $\left(z^2+y^2\right)^3=\left(z^3+y^3\right)^2$

$z^6+y^6+3z^4y^2+3z^2y^4=z^6+y^6+2y^3z^3$

$3z^4y^2+3z^2y^4=2y^3z^3$

Trường hợp 1: $yz\neq 0$

Suy ra $3z^2+3y^2=2yz$

$(y-z)^2+2y^2+2z^2=0$

$y=z=0$ (loại)

Trường hợp 2: $yz=0$. Suy ra ít nhất 1 trong 2 số y,z bằng 0
+) Không mất tính chất tổng quát, giả sử $y=0$, $z\neq 0$

Thay $y=0$ vào (*) ta có: $z^3=z^2=1$ suy ra $z=1$ (thỏa mãn). Khi đó $x-2=1$ suy ra $x=3$

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm $(3;0)$

+) Giả sử $z=0$ suy ra $x=2$, $y\neq 0$

Thay $z=0$ vào (*) suy ra $y=1$

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm $(2;1)$

+) $y=0$, $z=0$. Thay vào (*) ta được 0 = 1 (vô lí). Do đó trường hợp này loại

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(3;0)$, $(2;1)$

2) Trước hết ta thấy $24.24=576=-24(\text{mod } 100)$

$24^3=13824=24(\text{mod } 100)$

Với $k\in\mathbb{N}^*$ thì $24^{2k}=-24(\text{mod } 100)$

Với $k\in\mathbb{N}$ thì $24^{2k+1}=24(\text{mod } 100)$

Suy ra $24^{2024}\equiv 76(\text{mod } 100)$

Do đó $a=7, b=6$

Vì thế ta cần tính xác suất rút được tấm thẻ có số thứ tự lớn hơn 76.

Từ 77 đến 100 có 24 số, từ 1 đến 100 có 100 số nên xác suất của biến cố đó là $\frac{24}{100}=\frac{6}{25}$

Vậy xác suất của biến cố "Rút được tấm thẻ có số thứ tự lớn hơn $\overline{ab}$" là $\frac{6}{25}$.

Bài 3

1) Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^2+y^2=17-2xy$.

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Lời giải

1) Từ giả thiết có $(x^2+2xy+y^2)+4x^2=17$ hay $(x+y)^2+(2x)^2=17$

Mà chỉ có một cặp 2 số chính phương có tổng là 17 là 16 và 1.

Mặt khác, vì $(2x)^2$ là số chính phương chẵn nên $(2x)^2=16$; $(x+y)^2=1$

Suy ra $2x=\pm 4$; $x+y=\pm 1$

Do đó các bộ số (x, y) thỏa mãn là $(2,-1);(2,-3);(-2,3);(-2,1)$

Vậy $(x, y)=(2,-1);(2,-3);(-2,3);(-2,1)$.

2) Trong 3 số $(2x-1),(2y-1),(2z-1)$ luôn tồn tại 2 số có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(2x-1)(2y-1)\geq 0$

Hay $4xy\geq 2x+2y-1$

Suy ra $4xyz\geq 2z(z+y)-z$ (với x,y,z là số thực dương)

Từ giả thiết ta có: $2x^2+2y^2+2z^2+4xyz=2$

Do đó $2\geq 2x^2+2y^2+2z^2+2z(z+y)-z$

Hay $2\geq (x-y)^2+(x+y)^2+2z^2+2z(x+y)-z$

$$2\geq (x-y)^2+(x+y+z)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Vì $(x-y)^2\geq 0,\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ suy ra $2\geq (x+y+z)^2-\frac{1}{4}$

Hay $P^2\leq\frac{9}{4}$. Suy ra $P\leq\frac{3}{2}$ hoặc $P\geq\frac{-3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

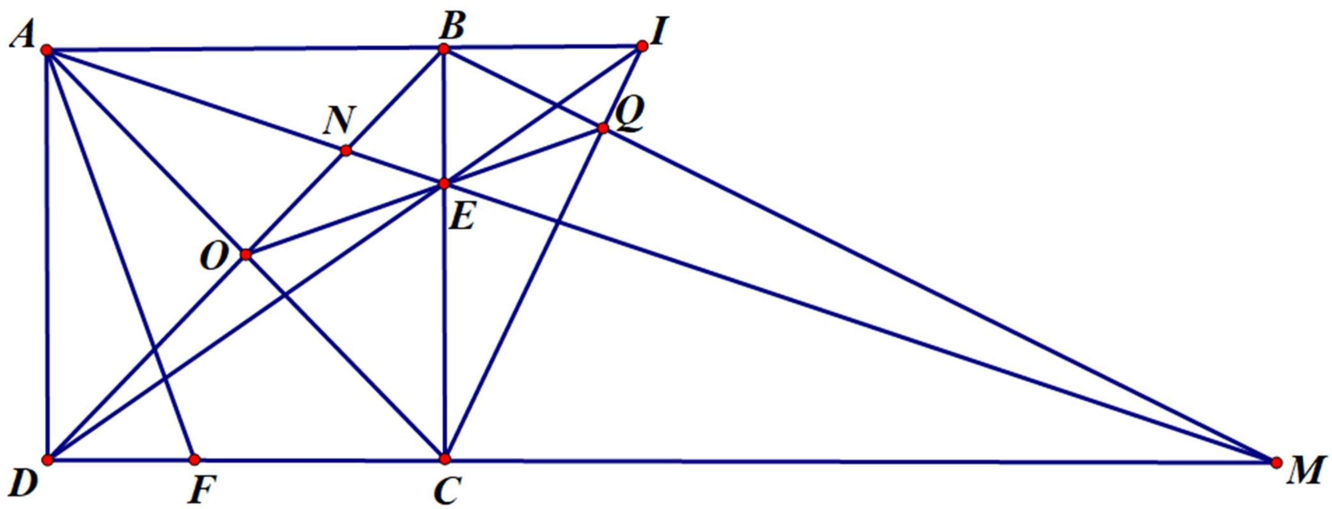
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Bài 4

Cho hình vuông $ABCD$ với O là giao điểm của AC và BD. Hai điểm E,F lần lượt nằm trêm hai cạnh BC,CD sao cho $\widehat{FAE}=45^\circ$. Gọi AE cắt BD tại N, AE cắt CD tại M.

1) Chứng minh $\cos\widehat{MAC}=\sin\widehat{DFA}$ và $\Delta ANB\backsim\Delta AFC$.
2) Chứng minh $BC^2+DF^2=2AN^2$
3) Gọi OE cắt BM tại Q, DE cắt AB tại I. Chứng minh ba điểm C,Q,I thẳng hàng.

Lời giải



1) Trước hết do $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{CAD}=45^\circ$, mà $\widehat{EAF}=45^\circ$ suy ra $\widehat{MAC}=\widehat{FAD}$

Mà $\widehat{FAD}+\widehat{DFA}=90^\circ$ nên $\cos\widehat{MAC}=\sin\widehat{DFA}$ (điều phải chứng minh)

Do $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{CAB}=45^\circ$, mà $\widehat{EAF}=45^\circ$ suy ra $\widehat{FAC}=\widehat{NAB}$

Mặt khác do $ABCD$ là hình vuông nên ta cũng có $\widehat{ACF}=\widehat{ABN}=45^\circ$

Suy ra $\Delta AFC\backsim\Delta ANB(g-g)$ (điều phải chứng minh)

2) Vì $\Delta AFC\backsim\Delta ANB$ (chứng minh trên) nên $\dfrac{AF}{AN}=\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ (do ΔABC vuông cân tại B)

Suy ra $2AN^2=AF^2$, mà $BC^2=AD^2$

Vì ΔADF vuông tại D nên $AD^2+DF^2=AF^2$ (định lí Pythagore)

Do đó $BC^2+DF^2=2AN^2$ (điều phải chứng minh).

3) Kẻ $CQ'\perp BM$ sao cho $Q'\in BM$. Suy ra $\widehat{BQ'C}=90^\circ$

Do đó $\Delta BQ'C$ vuông tại Q', cạnh huyền BC. Nên B,Q',C cùng thuộc đường tròn đường kính BC.(1)

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD$ tại O. Suy ra $\widehat{BOC}=90^\circ$ nên ΔBOC vuông tại O, cạnh huyền BC. Do đó B,O,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra B,Q',C,O cùng thuộc đường tròn đường kính BC. Nên tứ giác $BQ'CO$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

Nên $\widehat{BCQ'} = \widehat{BOQ'}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BQ'}$ của đường tròn đường kính BC)

Mặt khác có $\widehat{BCQ'} = \widehat{BMD}$ (cùng phụ $\widehat{CBM}$) nên $\widehat{BMD} = \widehat{BOQ'}$

Ta có: $AB // CM$ (do $ABCD$ là hình vuông)

Suy ra $\dfrac{AB}{CM} = \dfrac{EB}{EC}$ (định lí Thàles)

Nên $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{AB}{AB + CM} = \dfrac{AB}{DM}$

Suy ra $BE.DM = AB.BC = BC^2$

Vì $\Delta BOC \backsim \Delta BCD (g - g)$ nên $BC^2 = BO.BD$

Suy ra $BE.DM = BO.BD$ hay $\dfrac{BE}{BO} = \dfrac{DB}{DM}$

Mà $\widehat{EBO} = \widehat{BDM} = 45^\circ$ nên $\Delta BEO \backsim \Delta DBM (c - g - c)$

Suy ra $\widehat{BOE} = \widehat{BMD} = \widehat{BOQ'}$

Do đó O, E, Q' thẳng hàng nên OE cắt BM tại Q và Q'. Suy ra $Q \equiv Q'$.

Chứng minh tương tự, đặt Q'' là giao điểm của OE và CI suy ra $Q'' \equiv Q$.

Vậy C, Q, I thẳng hàng (điều phải chứng minh).

Bài 5

Cho S là tập gồm 2024 số nguyên dương thỏa mãn điều kiện trong bốn số bất kì của S, luôn tồn tại một số là ước của mỗi số còn lại hoặc tồn tại một số bằng tổng của ba số còn lại. Chứng minh rằng S chứa một số là ước của 2023 số còn lại.

Lời giải

Gọi 2024 số nguyên dương của tập S lần lượt là $x_1, x_2, ..., x_{2024}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < .... < x_{2024}$

Khi đó tồn tại ba số x_i, x_{i+1}, x_{i+2} với $1 \le i \le 2020$ sao cho x_i không là ước của hai số còn lại.

Xét 4 số $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{2024}$ khi đó $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = x_{2024}$ (1)

Tiếp tục, ta xét 4 số $x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{2024}$

Vì $x_{i+3} > x_i$ nên $x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} > x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = x_{2024}$

Suy ra trong 4 số $x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{2024}$ không có số nào bằng tổng của ba số còn lại.

Do đó x_{i+1} là ước của $x_{i+2}, x_{i+3}, x_{2024}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x_i \vdots x_{i+1}$ (vô lí vì $0 < x_i < x_{i+1}$)

Suy ra tất cả các bộ ba số x_i, x_{i+1}, x_{i+2} với $i = \overline{1,2020}$ đều thỏa mãn với x_i là ước của x_{i+1} và x_{i+2}

Do đó x_1 là ước của $x_2, \ldots., x_{2022}$, ta lại xét 4 số x_1, x_2, x_3, x_{2023} thì dù thỏa mãn tính chất nào trong 2 tính chất đã cho của đề bài đều cho thấy $x_{2023} \vdots x_1$, tương tự thì $x_{2024} \vdots x_1$

Vậy x_1 là ước của 2023 phần tử còn lại thuộc S hay S chứa một số là ước của 2023 số còn lại(điều phải chứng minh).