

UBND QUẬN HAI BÀ TRUNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN

Năm học: 2024 – 2025

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} = \frac{x+2}{y} \\ 3\sqrt{y} = \frac{y+2}{x} \end{cases}$$

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2 + b^2 = 9; b^2 + c^2 = 16$ và $b^2 = ac$. Tính giá trị của biểu thức $S = ab + bc$.

Bài 2 (5,0 điểm)

1) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^b + b^a$ chia hết cho 4. Chứng minh $a^a + b^b$ chia hết cho 4.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x(y^3 + 1) - x^3 = 2y^3 - 1$.

3) Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m^3 + 6n^2 + 2$ là lập phương của một số tự nhiên, đồng thời $n^2 + 4m + 8$ là số chính phương. Chứng minh $m^2 + 4n$ là số chính phương.

Bài 3 (2,0 điểm)

Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 3$ và $a + b + c = 6$, xét biểu thức

$$T = a(a - 2b) + b(b - 2c) + c(c - 2a)$$

1) Chứng minh $T \geq -12$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của T .

Bài 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) , đường kính AK . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AH . Gọi N là điểm đối xứng với M qua O .

1) Chứng minh MI là đường trung trực của EF và M là trung điểm của HK .

2) Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B và vuông góc với BC tại P . Chứng minh OA vuông góc với EF và hai đường thẳng AP và MH cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (O) .

3) Chứng minh CP đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 5 (2,0 điểm)

Gọi T là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ba chữ số, mà mỗi chữ số của chúng đều là chữ số lẻ.

1) Thầy giáo chọn ngẫu nhiên một số từ tập T . Tính xác suất của biến cố “Số được chọn chia hết cho 5”

2) Ta gọi số tự nhiên có 9 chữ số $\overline{abcdefghi}$ là một số tốt nếu các số $\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}$ là các phần tử (không nhất thiết phân biệt) của tập T , đồng thời $\overline{abc} + \overline{def} = 10 \cdot \overline{ghi}$

a) Chỉ ra một số tốt có 6 chữ số giống nhau

b) Hỏi có tất cả bao nhiêu số tốt?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} = \frac{x+2}{y} \\ 3\sqrt{y} = \frac{y+2}{x} \end{cases}.$$

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2 + b^2 = 9; b^2 + c^2 = 16$ và $b^2 = ac$. Tính giá trị của biểu thức $S = ab + bc$.

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $x > 0, y > 0$

Từ giả thiết có $x + 2 = 3y\sqrt{x}$ và $y + 2 = 3x\sqrt{y}$

Suy ra
$$x - y = 3\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = \frac{3\sqrt{xy}(y - x)}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

Nếu $x \neq y$ thì $-1 = \frac{3\sqrt{xy}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} > 0$ (vô lý)

Do đó $x = y$

Suy ra $x + 2 = 3x\sqrt{x}$

$(\sqrt{x} - 1)(3x + 2\sqrt{x} + 2) = 0$

Mà $3x + 2\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1$ hay $x = 1$

Vậy $x = y = 1$.

2) Từ giả thiết có $a^2 + 2b^2 + c^2 = 25$ suy ra $(a + c)^2 = 25$, mà a và c là 2 số thực dương

Suy ra $a + c = 5$

Lại có $c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$ do đó $(c - a) \cdot 5 = 7$ hay $c - a = \frac{7}{5}$

Suy ra $c = \frac{16}{5}, a = \frac{9}{5}$ nên $b = \frac{12}{5}$

Do đó $S = b(a + c) = 12$. Vậy $S = 12$

Bài 2 (5,0 điểm)

1) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^b + b^a$ chia hết cho 4. Chứng minh $a^a + b^b$ chia hết cho 4.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x(y^3 + 1) - x^3 = 2y^3 - 1$.

3) Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m^3 + 6n^2 + 2$ là lập phương của một số tự nhiên, đồng thời $n^2 + 4m + 8$ là số chính phương. Chứng minh $m^2 + 4n$ là số chính phương.

Lời giải

1) Trước hết do $a^b + b^a : 4$ nên a và b cùng tính chẵn lẻ

Dễ thấy nếu a, b cùng chẵn thì a^a và b^b cùng chia hết cho 4 nên $a^a + b^b : 4$ (điều phải chứng minh).

Ta xét trường hợp a, b cùng lẻ

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b$

$$\text{Có } a^a + b^b - a^b - b^a = a^b(a^{a-b} - 1) - b^b(b^{a-b} - 1)$$

Mà a, b lẻ nên $a - b : 2$ suy ra $a^{a-b} \equiv 1 \pmod{4}$ và $b^{a-b} \equiv 1 \pmod{4}$

$$\text{Do đó } a^a + b^b - a^b - b^a : 4$$

Mà theo giả thiết có nên $a^a + b^b : 4$

2) Ta có: $x(y^3 + 1) - x^3 = 2y^3 - 1$ (điều kiện: $x, y \in \mathbb{Z}$)

$$xy^3 + x - x^3 = 2y^3 - 1$$

$$y^3(x - 2) = x^3 - x - 1$$

Nếu $x = 2$ thì $VT = 0, VP \neq 0$ (loại)

$$\text{Suy ra } \frac{x^3 - x - 1}{x - 2} = y^3$$

Do đó $x^3 - x - 1 : x - 2$ và $\frac{x^3 - x - 1}{x - 2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

$$\text{Suy ra } x^3 - 8 - (x - 2) + 5 : x - 2 \text{ hay } 5 : x - 2$$

Trường hợp 1: $x - 2 = -5$ hay $x = -3$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{Z}$)

Suy ra $y^3 = 5$ (loại)

Trường hợp 2: $x - 2 = -1$ hay $x = 1$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{Z}$)

Suy ra $y^3 = 1$ hay $y = 1$ (thỏa mãn $y \in \mathbb{Z}$)

Trường hợp 3: $x - 2 = 1$ hay $x = 3$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{Z}$)

Suy ra $y^3 = 23$ (loại)

Trường hợp 4: $x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{Z}$)

Suy ra $y^3 = 67$ (loại)

Vậy $x = y = 1$.

3) Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m^3 + 6n^2 + 2$ là lập phương của một số tự nhiên, đồng thời $n^2 + 4m + 8$ là số chính phương. Chứng minh $m^2 + 4n$ là số chính phương.

Trước hết do $m^3 + 6n^2 + 2 > m^3, n^2 + 4m + 8 > n^2$

Mà $6n^2 + 2 \not\equiv 3m^2 + 3m + 1 \pmod{3}$ và $4m + 8 \not\equiv 2n + 1 \pmod{2}$

Nên $m^3 + 6n^2 + 2 \geq (m + 2)^3$; $n^2 + 4m + 8 \geq (n + 2)^2$

$6n^2 + 2 \geq 6m^2 + 12m + 8$; $4m + 8 \geq 4n + 4$

$n^2 \geq m^2 + 2m + 1$; $m + 1 \geq n$

$n \geq m + 1$; $m + 1 \geq n$

Suy ra $m + 1 = n$ nên $m^2 + 4n = (m + 2)^2$ là số chính phương.

Bài 3 (2,0 điểm)

Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 3$ và $a + b + c = 6$, xét biểu thức

$$T = a(a - 2b) + b(b - 2c) + c(c - 2a)$$

1) Chứng minh $T \geq -12$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của T .

Lời giải

1) Ta có: $T = (a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) = 36 - 4(ab + bc + ca)$

Mặt khác do $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Suy ra $ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 12$

Do đó $T \geq 36 - 4 \cdot 12 = -12$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

2) Vì $0 \leq a, b, c \leq 3$ nên $(3 - a)(3 - b) \geq 0$. Suy ra $ab \geq 3a + 3b - 9$

Tương tự có $bc \geq 3b + 3c - 9$; $ca \geq 3c + 3a - 9$

Do đó $ab + bc + ca \geq 6(a + b + c) - 27 = 9$

Suy ra $T \leq 36 - 4 \cdot 9 = 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có 2 số bằng 3, 1 số bằng 0.

Bài 4 (6 điểm)

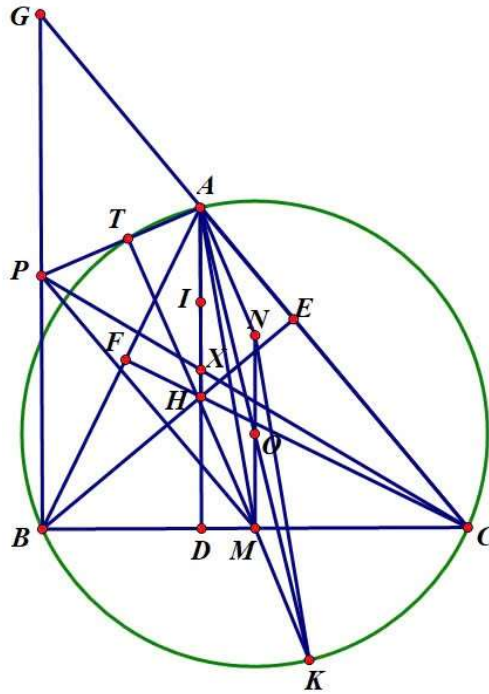
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) , đường kính AK . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AH . Gọi N là điểm đối xứng với M qua O .

1) Chứng minh MI là đường trung trực của EF và M là trung điểm của HK .

2) Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B và vuông góc với BC tại P . Chứng minh OA vuông góc với EF và hai đường thẳng AP và MH cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (O) .

3) Chứng minh CP đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD .

Lời giải



1) Do $\triangle BFC$ vuông tại F và $\triangle BEC$ vuông tại E có M là trung điểm BC

Suy ra $MB = MC = MF = ME$ (đường trung tuyến tam giác vuông).

Mặt khác $\triangle AFH$ vuông tại F và $\triangle AEH$ vuông tại E có I là trung điểm AH

Suy ra $IA = IH = IE = IF$ (đường trung tuyến tam giác vuông).

Có $ME = MF, IE = IF$ suy ra MI là trung trực của EF (điều phải chứng minh).

Do AK là đường kính của (O) nên $BA \perp BK, CA \perp CK$. Suy ra $BK \parallel CH, BH \parallel CK$

Do đó $BHCK$ là hình bình hành nên HK và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mà M là trung điểm BC nên M cũng là trung điểm của HK (điều phải chứng minh).

2) Do O vừa là trung điểm AK vừa là trung điểm MN nên $ANKM$ là hình bình hành.

Suy ra $AN \parallel KM$. Do đó $AP \perp MH$

Gọi T là giao điểm của AP và MH , khi đó có $\widehat{ATK} = 90^\circ$ nên T thuộc đường tròn đường kính AK hay đường tròn (O) .

Do đó AP và MH cắt nhau tại điểm P trên đường tròn (O) (điều phải chứng minh).

Do $MB = MC = ME = MF$ nên $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

$$\text{Suy ra } \widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{OAE}$$

Do đó $AO \perp EF$ (điều phải chứng minh).

3) Gọi G là điểm đối xứng với B qua P .

Xét $\triangle BAP$ và $\triangle BKM$ có:

$$\widehat{PBA} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{MBK} \text{ (do } BA \perp BK \text{ và } BP \perp BM)$$

$$\widehat{BAT} = \widehat{BKT} \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$\text{Suy ra } \triangle BAP \sim \triangle BKM (g - g) \text{ nên } \frac{BP}{BA} = \frac{BM}{BK} \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Mà } BG = 2BP, BC = 2BM \text{ nên } \frac{BG}{BA} = \frac{BC}{BK}.$$

Xét $\triangle BGA$ và $\triangle BCK$ có:

$$\frac{BG}{BA} = \frac{BC}{BK}$$

$$\widehat{GBA} = \widehat{CBK}$$

$$\text{Suy ra } \triangle BGA \sim \triangle BCK (c - g - c)$$

$$\text{Do đó } \widehat{BAG} = \widehat{BKC}, \text{ mà } \widehat{BKC} = 180^\circ - \widehat{BAC} \text{ (hai góc đối đỉnh trong tứ giác nội tiếp)}$$

Nên C, A, G thẳng hàng.

Gọi X là giao điểm của CP và AD .

$$\text{Do } AH \parallel BG \text{ nên theo định lý Thales có } \frac{AX}{PG} = \frac{CX}{CP} = \frac{DX}{BP}, \text{ mà } PG = PB \text{ nên } AX = DX$$

Vậy CP đi qua trung điểm AD (điều phải chứng minh).

Bài 5 (2,0 điểm)

Gọi T là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ba chữ số, mà mỗi chữ số của chúng đều là chữ số lẻ.

1) Thầy giáo chọn ngẫu nhiên một số từ tập T. Tính xác suất của biến cố “Số được chọn chia hết cho 5”

2) Ta gọi số tự nhiên có 9 chữ số $\overline{abcdefghi}$ là một số tốt nếu các số $\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}$ là các phần tử (không nhất thiết phân biệt) của tập T, đồng thời $\overline{abc} + \overline{def} = 10 \cdot \overline{ghi}$

a) Chỉ ra một số tốt có 6 chữ số giống nhau

b) Hỏi có tất cả bao nhiêu số tốt?

Lời giải

1) Mỗi chữ số từ hàng trăm, hàng chục và hàng đơn vị của 1 số thuộc T có 5 cách chọn do có các chữ số lẻ là "1,3,5,7,9". Suy ra $|T| = 5^3 = 125$

Để một số chia hết cho 5 thì chữ số cuối phải là 0 hoặc 5, mà T chỉ bao gồm các số tự nhiên được tạo thành từ các chữ số lẻ nên chữ số cuối là 5. Số các số như vậy là $5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

Suy ra xác suất của biến cố “Số được chọn chia hết cho 5” là $\frac{25}{125} = \frac{1}{5}$

2) Trước hết do $\overline{abc} + \overline{def} = 10 \cdot \overline{ghi}$ mà $\overline{abc} + \overline{def} < 2000$ nên $g < 2$

Suy ra $g = 1$

Có $100a + 10b + c + 100d + 10e + f = 1000 + 100h + 10i$

$$100(a + d - h) + 10(b + e - i) + c + f - 1000 = 0$$

Suy ra $c + f \equiv 0 \pmod{10}$ mà $0 < c + f < 20$ nên $c + f = 10$

$$\text{Do đó } 10(a + d - h) + (b + e - i) - 99 = 0$$

Do $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ là các chữ số lẻ nên đặt $a = 2a' - 1, b = 2b' - 1, c = 2c' - 1, d = 2d' - 1, e = 2e' - 1, f = 2f' - 1, g = 2g' - 1, h = 2h' - 1, i = 2i' - 1$ ($a', b', c', d', e', f', g', h', i' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Từ đó thay vào có $10(a' + d' - h') + (b' + e' - i') = 55$ và $c' + f' = 6$

Suy ra $b' + e' - i' \equiv 5 \pmod{5}$ mà $-10 < b' + e' - i' < 10$ nên $b' + e' - i' \in \{-5, 0, 5\}$

Nhưng do 55 không chia hết cho 10 nên $b' + e' - i' \neq 0$ đồng thời $b' + e' - i' > -5$

Suy ra $b' + e' - i' = 5, a' + d' - h' = 5$

Mà $i' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ nên cần có $6 \leq b' + e' \leq 10$ với mọi cách chọn của $b' + e'$ thì có duy nhất một cách chọn i' nên ta chỉ cần đếm số cách chọn b', e' .

Với mỗi giá trị $b' + e'$, ta chỉ cần chọn b' thì sẽ có 1 cách chọn e' , tuy nhiên với $b' + e' = 7$ thì $b', e' \geq 2$

Tương tự với $b' + e' = 8$ thì $b', e' \geq 3, b' + e' = 9$ thì $b', e' \geq 4$ còn $b' + e' = 10$ thì $b' = e' = 5$.

Suy ra số cách chọn b', e' là $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ nên có 15 cách chọn b', e', i' .

Tương tự với a', d', h' cũng có 15 cách chọn, còn $c' + f' = 6$ thì lập luận tương tự cũng có 5 cách chọn.

Suy ra số cách chọn $a', b', c', d', e', f', g', h', i'$ là $15.15.15 = 1125$.

