UBND QUẬN LONG BIÊN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI KSCL HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN

Năm học: 2024 – 2025

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải phương trình: $13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}-x-61=3\sqrt{(5-x)(x+8)}$

2) Cho $f(n)=\dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức:

$S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(40)$.

Bài 2 (4,0 điểm)

1) Tìm $x,y\in\mathbb{N}$ sao cho $x^3-1993.3^y-2021=0$

2) Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Bài 3 (3,0 điểm)

1) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca\le 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right).$$

2) Cho các số thực $x_1;x_2;...;x_{21}$ thỏa mãn $x_1;x_2;...;x_{21}\ge -2$ và $x_1^3+x_2^3+x_3^3+...+x_{21}^3=12$.

Chứng minh $x_1+x_2+...+x_{21}\le 18$.

Bài 4 (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm E,F lần lượt thay đổi trên các cạnh AB,AC sao cho $EF//BC$. Gọi D là giao điểm của BF và CE, H là hình chiếu của D lên EF. Đường tròn (I) đường kính EF cắt BF,CE tại M,N (M khác F, N khác E)

1) Chứng minh $\sin 2\widehat{DAF}=2\sin\widehat{DAF}.\cos\widehat{DAF}$

2) Chứng minh AD và đường tròn ngoại tiếp ΔHMN cùng đi qua tâm I của đường tròn tâm I.

3) Gọi K,L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E,F lên BC và P,Q tương ứng là giao điểm của EM,FN với BC. Chứng minh tứ giác $AEPL, AFQK$ nội tiếp và $\dfrac{BP.BL}{CQ.CK}$ không đổi khi E,F thay đổi.

4) Chứng minh nếu EL và FK cắt nhau trên đường tròn (I) thì EM và FN cắt nhau trên đường thẳng BC.

Bài 5 (1,0 điểm)

Trong một hội nghị quốc tế có 17 nhà khoa học tham dự, các nhà khoa học trao đổi với nhau bằng 3 ngôn ngữ. Biết rằng mỗi nhà khoa học đều biết ít nhất một ngôn ngữ và tất cả 17 nhà khoa học đều có trao đổi với nhau từng đôi một bằng ít nhất 1 ngôn ngữ. Chứng minh rằng có 3 vị trao đổi bằng cùng một ngôn ngữ.

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}-x-61=3\sqrt{(5-x)(x+8)}$

2) Cho $f(n)=\dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức:

$S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(40)$.

Lời giải

1) $13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}-x-61=3\sqrt{(5-x)(x+8)}$

Điều kiện xác định: $-8\le x\le 5$ (*)

Đặt $\sqrt{5-x}=a;\sqrt{x+8}=b$ với $a,b\ge 0$

Suy ra $a^2+2b^2=x+21$

Thay vào phương trình, ta có:

$$13a+18b-(a^2+2b^2)-40=3ab$$
$$13a+18b=a^2+2b^2+3ab+40$$
$$(a+b)(a+2b)-5(a+2b)-8(a+b)+40=0$$
$$(a+b-5)(a+2b-8)=0$$

Suy ra $a+b=5$ hoặc $a+2b=8$

TH1: $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+8}=5$

$$13+2\sqrt{(5-x)(x+8)}=25$$
$$(5-x)(x+8)=36$$
$$x^2+3x-4=0$$

Suy ra $x=1$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x=-4$ (thỏa mãn điều kiện)

TH2: $\sqrt{5-x}+2\sqrt{x+8}=8$

$$5-x+4(x+8)+4\sqrt{(5-x)(x+8)}=64$$
$$4\sqrt{-x^2-3x+40}=27-3x$$

Với điều kiện (*) hai vế không âm, bình phương hai vế ta có:

$16\left(-x^2-3x+40\right)=9x^2-162x+729$

$25x^2-114x+89=0$

Suy ra $x=1$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x=\dfrac{89}{25}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x\in\left\{1;-4;\dfrac{89}{25}\right\}$.

2) Ta có: $f(n)=\dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\dfrac{(2n+1)-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$

Do đó:

$f(1)=\sqrt{3}-\sqrt{1}$

$f(2)=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

....

$f(40)=\sqrt{81}-\sqrt{79}$

Thay $f(1),f(2),\ldots,f(40)$ vào biểu thức S ta có:

$S=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(40)=\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{81}-\sqrt{79}=\sqrt{81}-\sqrt{1}=8$

Vậy $S=8$.

Bài 2 (4,0 điểm)

1) Tìm $x,y\in\mathbb{N}$ sao cho $x^3-1993.3^y-2021=0$

2) Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Lời giải

1) Theo bài ra ta có: $x^3-1993.3^y-2021=0$

Suy ra $x^3=1993.3^y+2021$

TH1: $y=0$ suy ra $x^3=1993+2021=4014$ (loại do x không là số tự nhiên)

TH2: $y=1$ suy ra $x^3=1993.3+2021=8000$. Do đó $x=20$ suy ra $(x,y)=(20,1)$

TH3: $y\geq 2$ suy ra $1993.3^y\equiv 0(\text{mod } 9)$

Do đó $1993.3^y+2021\equiv 5(\text{mod } 9)$ hay $x^3\equiv 5(\text{mod } 9)$

Lại có: $\begin{cases} x^3 \equiv 0(\text{mod } 9) \\ x^3 \equiv 1(\text{mod } 9) \\ x^3 \equiv -1(\text{mod } 9) \end{cases}$ nên không tồn tại x thỏa mãn $x^3 \equiv 5(\text{mod } 9)$.

Vậy $(x, y) = (20, 1)$.

2) Đặt $\dfrac{n-23}{n+89} = \dfrac{a^2}{b^2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a,b) = 1$

Suy ra $\begin{cases} n - 23 = ka^2 \\ n + 89 = kb^2 \end{cases} (k \in \mathbb{N}^*)$. Do đó $(n+89)-(n-23) = kb^2 - ka^2 = k(b+a)(b-a)$

Suy ra $112 = k(b+a)(b-a)$ nên $112 \vdots k$. Do đó $k \in \{1;2;4;7;8;14;16;28;56;112\}$.

Ta thấy $b+a; b-a$ cùng tính chẵn lẻ và $b+a > b-a$. Ta có bảng sau:

k	$(b+a)(b-a)$	$b+a$	$b-a$	a	b	$n = ka^2 + 23$	Xét điều kiện
1	112	56	2	27	29	$n = 1.27^2 + 23 = 752$	Thỏa mãn
		28	4	12	16		Loại vì $(a,b) = 1$
		14	8	3	11	$n = 1.3^2 + 23 = 32$	Thỏa mãn
2	56	28	2	13	15	$n = 2.13^2 + 23 = 361$	Thỏa mãn
		14	4	5	9	$n = 2.5^2 + 23 = 73$	Thỏa mãn
4	28	14	2	6	8		Loại vì $(a,b) = 1$
7	16	8	2	3	5	$n = 7.3^2 + 23 = 86$	Thỏa mãn
14	8	4	2	1	3	$n = 14.1^2 + 23 = 37$	Thỏa mãn
16	7	7	1	3	4	$n = 16.3^2 + 23 = 167$	Thỏa mãn
28	4	2	2				Loại vì $b+a > b-a$
112	1	1	1				Loại vì $b+a > b-a$

Vậy $n \in \{32;37;73;86;167;361;752\}$.

Bài 3 (3,0 điểm)

1) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca\le 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right).$$

2) Cho các số thực $x_1;x_2;...;x_{21}$ thỏa mãn $x_1;x_2;...;x_{21}\ge -2$ và $x_1^3+x_2^3+x_3^3+...+x_{21}^3=12$.

Chứng minh $x_1+x_2+...+x_{21}\le 18$.

Lời giải

1) Ta có: $ab+bc+ca\le 3abc$ suy ra $\frac{abc}{c}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{a}\le 3abc$ hay $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\le 3$

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$ suy ra $x+y+z\le 3$

Do đó: $a+b=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$

$$\frac{a^2+b^2}{2a+2b}=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{2(x+y)}{xy}}=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}.\frac{xy}{2(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}$$

Tương tự, ta có: $P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$

$$P=\sqrt{\frac{x+y}{xy}}+\sqrt{\frac{y+z}{yz}}+\sqrt{\frac{x+z}{xz}}-\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}}+\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2yz(y+z)}}+\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2xz(x+z)}}\right)$$

$$P=\sum\sqrt{\frac{x+y}{xy}}-\sum\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có: $A+B\le\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}$ (1)

Thay $A=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}};B=\sqrt{\frac{2xy}{x+y}}$ vào (1) ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}+\sqrt{\frac{2xy}{x+y}}\le\sqrt{2\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{2xy}{x+y}\right)}=\sqrt{2.\frac{(x+y)^2}{x+y}}=\sqrt{2(x+y)}$$

Suy ra $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}+\sqrt{\frac{2xy}{x+y}}\le\sqrt{2(x+y)}$ (2)

Chia cả hai vế của (2) cho $\sqrt{2xy}$ ta có: $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\le\sqrt{\frac{x+y}{xy}}$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\sum\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}}+\sum\frac{1}{\sqrt{x+y}}\le\sum\sqrt{\frac{x+y}{xy}}$$

Mặt khác, ta có:

$$3\left(A^2+B^2+C^2\right)-(A+B+C)^2$$
$$=3\left(A^2+B^2+C^2\right)-\left(A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA\right)$$
$$=(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\ge 0$$

Suy ra $3\left(A^2+B^2+C^2\right)\ge(A+B+C)^2$ hay $A+B+C\le\sqrt{3\left(A^2+B^2+C^2\right)}$ (3)

Thay $A=\sqrt{x+y},B=\sqrt{y+z},C=\sqrt{z+x}$ vào (3) ta có:
$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\le\sqrt{6(x+y+z)}\le 3\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki có: $\frac{A^2}{X}+\frac{B^2}{Y}+\frac{C^2}{Z}\ge\frac{(A+B+C)^2}{X+Y+Z}$ (4)

Thay $A=B=C=1,X=\sqrt{x+y},Y=\sqrt{y+z},Z=\sqrt{z+x}$ vào (4) ta có:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{x+y}}=\frac{1^2}{\sqrt{x+y}}+\frac{1^2}{\sqrt{y+z}}+\frac{1^2}{\sqrt{z+x}}\ge\frac{(1+1+1)^2}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $P=\sum\sqrt{\frac{x+y}{xy}}-\sum\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}}\ge\sum\frac{1}{\sqrt{x+y}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$ hay $P\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2) Vì $x_1 \geq -2$ nên $(x_1+2)(x_1-1)^2 \geq 0$

$x_1^3 - 3x_1 + 2 \geq 0$
$x_1^3 \geq 3x_1 - 2$

Chứng minh tương tự ta có: $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{21}^3 \geq 3(x_1 + x_2 + ... + x_{21}) - 2.21$

$12 \geq 3(x_1 + x_2 + ... + x_{21}) - 2.21$

Suy ra: $54 \geq 3(x_1 + x_2 + ... + x_{21})$

$18 \geq x_1 + x_2 + ... + x_{21}$ (điều phải chứng minh)

Vậy $x_1 + x_2 + ... + x_{21} \leq 18$.

Bài 4 (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm E, F lần lượt thay đổi trên các cạnh AB, AC sao cho $EF \parallel BC$. Gọi D là giao điểm của BF và CE, H là hình chiếu của D lên EF. Đường tròn (I) đường kính EF cắt BF, CE tại M, N (M khác F, N khác E)

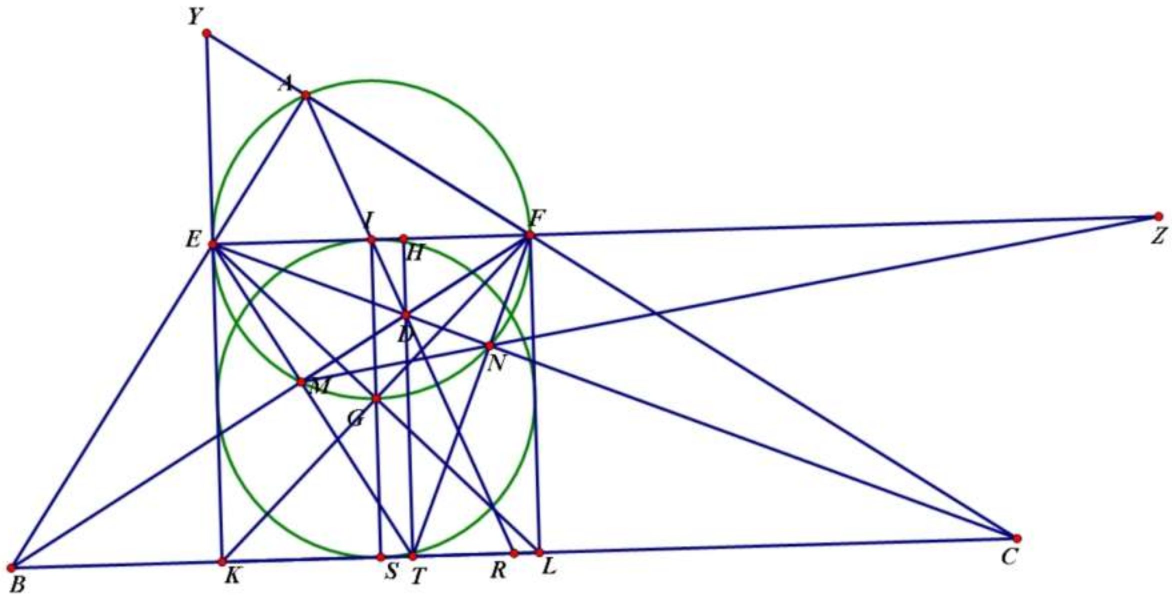
1) Chứng minh $\sin \widehat{2DAF} = 2\sin \widehat{DAF}.\cos \widehat{DAF}$

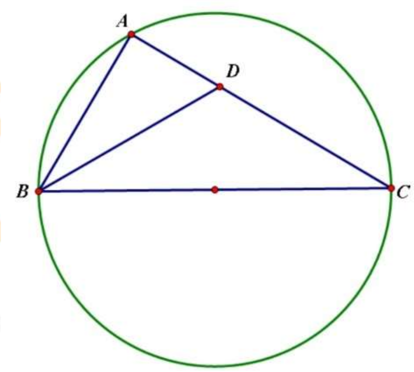
2) Chứng minh AD và đường tròn ngoại tiếp ΔHMN cùng đi qua tâm I của đường tròn tâm I.

3) Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên BC và P, Q tương ứng là giao điểm của EM, FN với BC. Chứng minh tứ giác $AEPL, AFQK$ nội tiếp và $\dfrac{BP.BL}{CQ.CK}$ không đổi khi E, F thay đổi.

4) Chứng minh nếu EL và FK cắt nhau trên đường tròn (I) thì EM và FN cắt nhau trên đường thẳng BC

Lời giải





1) Ta chứng minh $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$.

Xét ΔABC vuông tại A có phân giác BD.

Đặt $\widehat{DBA} = x;\ AB = c;\ AC = b;\ BC = a$

Cần chứng minh $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{2DA}{DB}.\dfrac{BA}{BD}$ hay $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2DA}{DB}.\dfrac{c}{BD}$

Có $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{c}{a}$. Suy ra $\dfrac{AD}{DC+AD} = \dfrac{c}{c+a}$ hay

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{c}{c+a}$

Do đó: $\dfrac{AD}{b} = \dfrac{c}{c+a}$ nên $AD = \dfrac{bc}{c+a}$

Chứng minh $\dfrac{b}{a} = 2AD.\dfrac{c}{BD^2} = \dfrac{2bc}{c+a}.\dfrac{c}{AB^2+AD^2} = \dfrac{2bc^2}{(c+a)\left(c^2+\dfrac{b^2c^2}{(c+a)^2}\right)}$

Có $b\left(c^2(c+a)+\dfrac{b^2c^2}{a+c}\right) = 2abc^2$

$$2ac^2(a+c) = c^2(c+a)^2 + b^2c^2$$

$$2a(a+c) = (c+a)^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 + a^2 + b^2$$

$b^2 + c^2 = a^2$ (định lý Pythagore)

Áp dụng với $x = \widehat{DAF}$ có điều phải chứng minh.

2) Gọi AD giao BC tại R, giao EF tại I', ME giao FN tại T, nên T là trực tâm của ΔDEF
Suy ra: $TD \perp EF$ mà $DH \perp EF$ do đó T, D, H thẳng hàng

Áp dụng định lý Ceva ta có: $\frac{RB}{RC}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB}=1$

Mà $\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FC}$ (định lý Thàles)

Suy ra $\frac{RB}{RC}=1$

Suy ra R là trung điểm của BC, tiếp tục áp dụng định lý Thàles có: $\frac{EI'}{BR}=\frac{AI'}{AR}=\frac{FI'}{CR}$

Suy ra $EI'=FI'$ nên $I \equiv I'$
Do đó: AD đi qua trung điểm của EF

Gọi MN giao EF tại Z. Khi đó áp dụng định lý Menelaus ta có: $\frac{ZE}{ZF}.\frac{NF}{NT}.\frac{MT}{ME}=1$

Áp dụng định lý Ceva ta có: $\frac{HE}{HF}.\frac{NF}{NT}.\frac{MT}{ME}=1$

Suy ra $\frac{ZE}{ZF}=\frac{HE}{HF}$
Ta sẽ chứng minh $ZI.ZH = ZE.ZF$

Đặt $ZF = m, FH = n, HE = p$ $Suy\ ra: \frac{m+n+p}{m}=\frac{p}{n}$ hay $n(m+n+p)=mp$

Chứng minh $\left(m+\frac{n+p}{2}\right)(m+n)=m(m+n+p)$

$(n+p)(m+n)+2mn=2m(n+p)$

$n(m+n+p)=mp$ (đúng)

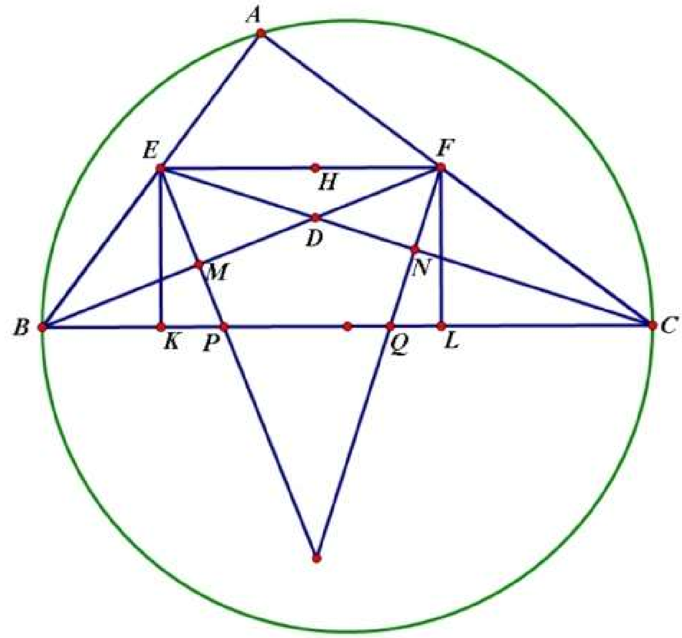
Mặt khác do $EMNF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{NFZ}=\widehat{EMZ}$ (cùng phụ với góc $\widehat{EFN}$)

Do đó: $\Delta NFZ \backsim \Delta EMZ(g-g)$. Suy ra: $\frac{ZF}{ZM}=\frac{ZN}{ZE}$ hay $ZE.ZF = ZM.ZN$

Suy ra $ZI.ZH = ZM.ZN$ hay $\frac{ZI}{ZM}=\frac{ZN}{ZH}$. Suy ra: $\Delta ZHN \backsim \Delta ZMI(c-g-c)$ Do đó: $\widehat{ZHN}=\widehat{ZMI}$

Mà: $\widehat{ZHN}+\widehat{NHI}=180^0$ nên $\widehat{ZHN}+\widehat{ZMI}=180^0$. Do đó tứ giác $MIHN$ nội tiếp
Suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔMHN đi qua I (điều phải chứng minh).

3) Sử dụng hình dưới đây



Ta chứng minh $AEPL$ là tứ giác nội tiếp

Trước hết do $EAFM$ cùng thuộc (I) nên $BM.BF = BE.BA$ (Do $\Delta BAF \backsim \Delta BME(g-g)$)

Mặt khác do P, M, F, L thuộc đường tròn đường kính PF

Nên $BP.BL = BM.BF$ (Do $\Delta BMP \backsim \Delta BLF(g-g)$)

Do đó: $BE.BA = BP.BL$ hay $\dfrac{BE}{BP} = \dfrac{BL}{BA}$ Suy ra: $\Delta BEP \backsim \Delta BLA(c-g-c)$ nên $\widehat{BEP} = \widehat{BLA}$

Mà: $\widehat{BEP} + \widehat{PEA} = 180^0$ nên $\widehat{BLA} + \widehat{PEA} = 180^0$. Suy ra: $AEPL$ là tứ giác nội tiếp

CMTT có $AFQK$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\dfrac{BP.BL}{CQ.CK} = \dfrac{BE}{BA} : \dfrac{CF}{CA} = 1$ (không đổi)

4) Do $FEKL$ là hình chữ nhật mà FK cắt EL trên (I) nên 2 đường chéo vuông góc

Suy ra: $FEKL$ là hình vuông

Gọi EM cắt BC tại T, ta chứng minh F, N, T thẳng hàng hay chứng minh FT vuông góc với CE

Trước hết do $BF \perp ET, FL \perp BT, LF \perp EF$ nên $\Delta BFL \backsim \Delta ETK$ $(g-g)$

Suy ra: $\dfrac{LF}{LB} = \dfrac{KT}{KE}$

Ta sẽ chứng minh $\Delta CEK \backsim \Delta FTL$ để có $FT \perp CE$

Mà $LF \perp LT$ và $KE \perp KC$ nên chỉ cần chứng minh $\frac{LT}{LF} = \frac{KE}{KC}$

Mà $\frac{LT}{LF} + \frac{KT}{KE} = 1$ (do $LF = KE = LK = EF$) nên ta cần chứng minh $\frac{LF}{LB} + \frac{KE}{KC} = 1$

Hay cần chứng minh: $\frac{LK}{LB} + \frac{KL}{KC} = 1$. Mà có: $\frac{CL}{CK} + \frac{KL}{KC} = 1$ Nên ta cần chứng minh $\frac{CL}{CK} = \frac{LK}{LB}$

Gọi CA cắt EK tại Y

Ta có: $\Delta FAE \backsim \Delta FEY\ (g-g)$ Suy ra $FA.FY = FE^2 = FL^2$. Do đó: $\frac{FA}{FL} = \frac{FL}{FY}$

Suy ra: $\Delta FAL \backsim \Delta FLY\ (c-g-c)$ nên $\widehat{FYL} = \widehat{FLA}$

Mặt khác do A, F, L, B thuộc đường tròn đường kính BF nên $\widehat{FLA} = \widehat{FBA} = 90^0 - \widehat{AFB}$

Suy ra $YL \perp BF$. Suy ra $YL \parallel ET$

Từ $YL \parallel ET$; $LF \parallel KY$ và $\Delta BFL \backsim \Delta ETK$ ta có: $\frac{CL}{CK} = \frac{LF}{KY} = \frac{KL}{KY} = \frac{KT}{KE} = \frac{LF}{LB} = \frac{LK}{LB}$

Do vậy: $\frac{CL}{CK} = \frac{LK}{LB}$ (đúng).

Vậy EM và FN đồng quy tại T

Bài 5 (1,0 điểm)

Trong một hội nghị quốc tế có 17 nhà khoa học tham dự, các nhà khoa học trao đổi với nhau bằng 3 ngôn ngữ. Biết rằng mỗi nhà khoa học đều biết ít nhất một ngôn ngữ và tất cả 17 nhà khoa học đều có trao đổi với nhau từng đôi một bằng ít nhất 1 ngôn ngữ. Chứng minh rằng có 3 vị trao đổi bằng cùng một ngôn ngữ.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Xét 6 điểm bất kỳ đôi một được nối với nhau, mỗi đoạn được tô xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng có 1 tam giác được tô 3 cạnh cùng màu

Thật vậy xét 6 điểm bất kì A, B, C, D, E, F. Xét điểm A, khi đó A được nối với 5 điểm khác nên theo nguyên lý Dirichlet phải có 3 đoạn cùng màu, giả sử là 3 đoạn đó màu đỏ. Giả sử 3 đoạn đó là AB, AC, AD.

Khi đó nếu BC hoặc BD hoặc CD được tô đỏ thì có ngay điều phải chứng minh.

Nếu không thì cả 3 đoạn này phải được tô xanh cũng suy ra điều phải chứng minh.

Vậy bổ đề được chứng minh

Trở lại bài toán, ta coi mỗi nhà khoa học là 1 điểm, 2 điểm được nối khi 2 nhà khoa học giao tiếp với nhau và được tô 3 màu theo 3 ngôn ngữ, ta sẽ chứng minh tồn tại 1 tam giác được tô 3 cạnh cùng màu.

Giả sử 3 màu đó là xanh, đỏ, vàng

Ta chọn 1 điểm bất kỳ, gọi là A. Khi đó điểm này được nối với 16 điểm khác mà có 3 màu nên theo nguyên lý Dirichlet phải có 6 đoạn thẳng cùng màu, giả sử là màu đỏ. Ta giả sử 6 đoạn đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG.

Nếu 1 trong các đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ trong 6 điểm B, C, D, E, F, G được tô đỏ thì cho ta ngay điều phải chứng minh.

Trái lại, nếu tất cả các đoạn nối 6 điểm B, C, D, E, F, G đều chỉ được tô xanh hoặc vàng thì ta áp dụng bổ đề trên sẽ suy ra có 1 tam giác có 3 cạnh được tô xanh hoặc vàng.

Hay trong 17 nhà khoa học tham dự hội nghị, có ba vị trao đổi với nhau bằng cùng một ngôn ngữ (điều phải chứng minh).