UBND QUẬN HOÀN KIẾM
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN

Năm học: 2024 – 2025

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Bài 1

1) Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x}+6}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{x+\sqrt{x}+6}$

2) Cho a,b,c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $a^2(b+c-a)=b^2(c+a-b)=c^2(a+b-c)$. Chứng minh rằng $a=b=c$.

Bài 2

1) Cho m,n,p là các số nguyên dương thỏa mãn $m+n+p\,\vdots\,5$, $2mn+3np+4pm\,\vdots\,5$. Chứng minh rằng $m^2+n^2+p^2\,\vdots\,5$.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên (x,y) thỏa mãn $x+2y(x+1)=2xy\left(x+y^2\right)$

Bài 3

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=\dfrac{1}{2}$, $xy+yz+zx=2$. Tìm GTNN của $K=(x+y)(y+z)(z+x)$.

Bài 4

Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AC=2AB$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác trong tam giác ABC cắt nhau tại I. Gọi D,E,F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ I xuống BC,CA,AB. Hai đường thẳng BI và EF cắt nhau tại P.

1) Chứng minh $\Delta BFP \backsim \Delta BIC$, suy ra P thuộc (O).

2) Chứng minh ΔPIC vuông cân và $\dfrac{1}{PI^2}+\dfrac{1}{PB^2}=\dfrac{2}{PD^2}$

3) Tia DI cắt AC và đường tròn (O) tại G,Q. Gọi L là chân đường cao hạ từ P lên BC. Chứng minh rằng tứ giác $DGPL$ là hình vuông.

Bài 5

1) Tìm p,q là số nguyên tố sao cho $p+q$ và $pq+q$ là số chính phương.

2) Cho ô vuông $n\times n$. Mỗi ô có thể có một máy bơm, những ô chung đỉnh có thể bơm cho nhau. Gọi số máy bơm là k. Tìm k nhỏ nhất để mọi ô đều được bơm.

a) $n=4$

b) $n=31$

------------------------------ HẾT ------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1

1) Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}+6}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x+\sqrt{x}+6}$

2) Cho a,b,c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $a^2(b+c-a)=b^2(c+a-b)=c^2(a+b-c)$.
Chứng minh rằng $a=b=c$.

Lời giải

1) Theo bài ra ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}+6}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x+\sqrt{x}+6}$ (1) (Điều kiện xác định: $x\ge 0$)

Từ (1) suy ra $\frac{x+\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+6)(x+6)}=\frac{x+\sqrt{x}+12}{6(x+\sqrt{x}+6)}$

Vì $x+\sqrt{x}+12>0$ nên

$(\sqrt{x}+6)(x+6)=6(x+\sqrt{x}+6)$

$x\sqrt{x}+6x+6\sqrt{x}+36=6x+6\sqrt{x}+36$

Suy ra $x\sqrt{x}=0$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=0$.

2) Theo bài ra ta có: $a^2(b+c-a)=b^2(c+a-b)=c^2(a+b-c)$

Suy ra $a^2b+a^2c-a^3=b^2c+b^2a-b^3$

$(a^2b-b^2a)+(a^2c-b^2c)-(a^3-b^3)=0$

$ab(a-b)+(ca+cb)(a-b)-(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$(a-b)(ab+bc+ca-a^2-ab-b^2)=0$

$(a-b)(a^2+b^2-ac-bc)=0$

Tương tự, ta có: $(b-c)(b^2+c^2-ba-ca)=0$ và $(c-a)(c^2+a^2-cb-ab)=0$

Giả sử a,b,c đôi một phân biệt. Suy ra:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c(a+b) (2)\\ b^2+c^2=a(b+c) (3)\\ c^2+a^2=b(a+c) (4)\end{cases}$$

Trừ vế với vế của (2) cho (3) ta có: $a^2-c^2=b(c-a)$ hay $a+b+c=0$

Suy ra $a^2+b^2=-c^2$ nên $a=b=c=0$ (mâu thuẫn với giả sử)
Vì thế, trong 3 số a,b,c có ít nhất 2 số bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=b$

Suy ra $b^2c=c^2(2b-c)$ hay $b^2c-2bc^2+c^3=0$. Do đó $c(b-c)^2=0$

Mà $c\neq 0$ nên $b=c$.
Vậy $a=b=c$ (điều phải chứng minh).

Bài 2

1) Cho m,n,p là các số nguyên dương thỏa mãn $m+n+p\,\vdots\,5$, $2mn+3np+4pm\,\vdots\,5$. Chứng minh rằng $m^2+n^2+p^2\,\vdots\,5$.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên (x,y) thỏa mãn $x+2y(x+1)=2xy(x+y^2)$

Lời giải

1) Vì $2mn+3np+4pm\,\vdots\,5$ nên $4mn+6np+8pm\,\vdots\,5$ hay $(3mn+3pm)+(mn+np)+(5np+5pm)\,\vdots\,5$

Suy ra $3m(n+p)+n(m+p)\,\vdots\,5$

Mà $m+n+p\,\vdots\,5$ nên $3m^2+n^2\,\vdots\,5$

Ta có:

$$\left[\begin{array}{l} m^2\equiv 0 \pmod 5 \\ m^2\equiv 1 \pmod 5 \\ m^2\equiv 4 \pmod 5 \end{array}\right. \text{ suy ra } \left[\begin{array}{l} 3m^2\equiv 0 \pmod 5 \\ 3m^2\equiv 3 \pmod 5 \\ 3m^2\equiv 2 \pmod 5 \end{array}\right.$$

Để $3m^2+n^2\,\vdots\,5$ thì $m\,\vdots\,5$ và $n\,\vdots\,5$

Mà $m+n+p\,\vdots\,5$ nên $m\,\vdots\,5, n\,\vdots\,5, p\,\vdots\,5$.

Vậy $m^2+n^2+p^2\,\vdots\,5$ (điều phải chứng minh).

2) Theo bài ra ta có: $x+2y(x+1)=2xy(x+y^2)$

$$x+2xy+2y=2x^2y+2xy^3$$

+) Nếu $y\geq 2$. Mà x,y là số tự nhiên nên:

$$\begin{cases} 2x^2y\geq 2xy \\ 2xy^3\geq 4xy=2xy+2xy>2xy+x \end{cases}$$

Suy ra $VP>VT$ (vô lí). Do đó $y\leq 1$

+) Nếu $y=0$ thì $x=0$

+) Nếu $y=1$ thì $x+2(x+1)=2x(x+1)$

$2x^2-x-2=0$

Suy ra $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ (loại vì $x\in\mathbb{N}$)

Vậy $x=y=0$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 3

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=2$. Tìm GTNN của biểu thức $K=(x+y)(y+z)(z+x)$.

Lời giải

Ta có: $K=(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=2(x+y+z)-\frac{1}{2}$

Do đó để tìm GTNN của K ta cần tìm GTNN của $x+y+z$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2=xy+yz+zx=xy+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\ge 4\sqrt[4]{\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2y}}=2\sqrt[4]{xy}$$

Suy ra $xy\le 1$. Chứng minh tương tự có $yz\le 1$ và $zx\le 1$

Do đó có tối đa 1 số lớn hơn 1.

+) Trường hợp 1: Nếu có 1 số lớn hơn 1

Suy ra $(1-x)(1-y)(1-z)\le 0$

$1+xy+yz+zx-x-y-z-xyz\le 0$

Suy ra $x+y+z\ge\frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $(1-x)(1-y)(1-z)=0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x>1$, $y=1$ suy ra $xy>1$ (mâu thuẫn với $xy\le 1$)

Do đó không có số nào lớn hơn 1.

+) Trường hợp 2: Nếu không có số nào lớn hơn 1

Suy ra $(1-x)(1-y)z\ge 0$

$z+xyz\ge xz+yz$

Chứng minh tương tự ta có: $x+y+z+3xyz\ge 2(xy+yz+zx)$

Suy ra $x+y+z\geq \frac{5}{2}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $(1-x)(1-y)z=0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $xy=1, y=1$ suy ra $x=1,\ z=\frac{1}{2}$.

Vậy GTNN của K bằng $\frac{9}{2}$ khi trong ba số x,y,z có hai số bằng 1 và một số bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 4

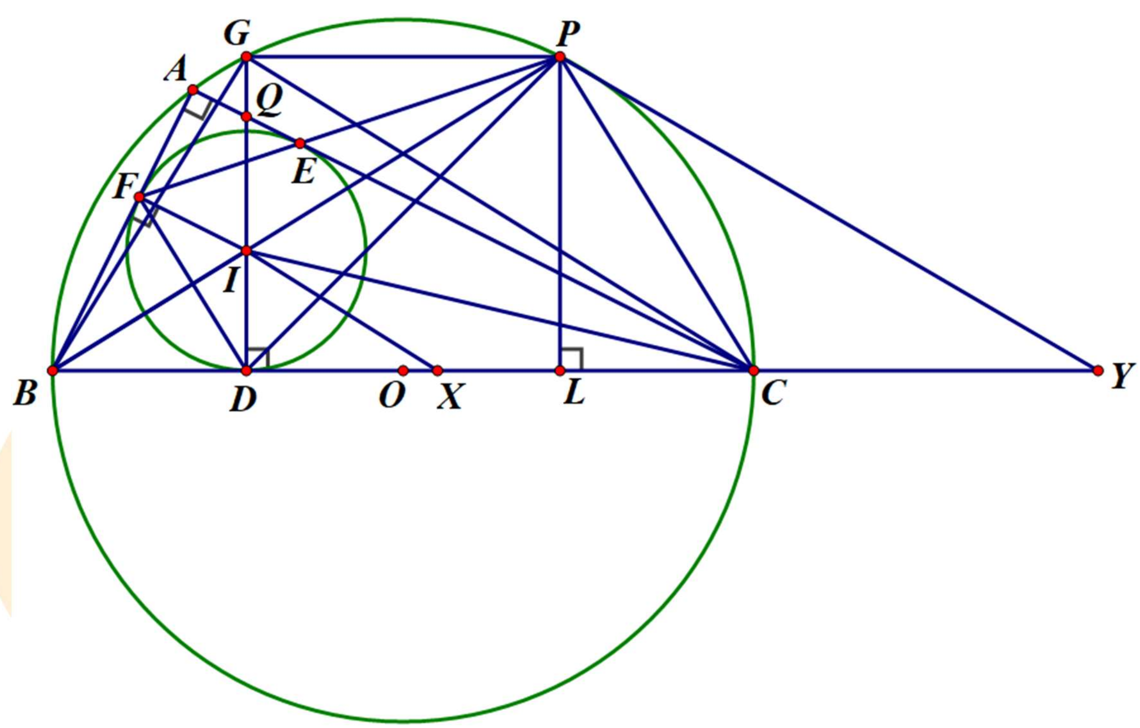
Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AC=2AB$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác trong tam giác ABC cắt nhau tại I. Gọi D,E,F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ I xuống BC,CA,AB. Hai đường thẳng BI và EF cắt nhau tại P.

1) Chứng minh $\Delta BFP \backsim \Delta BIC$, suy ra P thuộc (O).

2) Gọi L là chân đường cao hạ từ P lên BC. Chứng minh ΔPIC vuông cân và $\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{2}{PD^2}$

3) Tia DI cắt AC và đường tròn (O) tại Q,G. Chứng minh rằng tứ giác $DGPL$ là hình vuông.

Lời giải



1) Vì các đường phân giác trong tam giác ABC cắt nhau tại I nên I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Suy ra $AF=AE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Vì $\widehat{BAC}=90^\circ$ (giả thiết) nên ΔAFE vuông cân tại A. Nên $\widehat{AFE}=45^\circ$

Suy ra $\widehat{BFE}=180^\circ-\widehat{AFE}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

Ta có: $\widehat{BIC}=180^\circ-\left(\widehat{IBC}+\widehat{ICB}\right)=180^\circ-\left(\frac{\widehat{ABC}}{2}+\frac{\widehat{ACB}}{2}\right)=180^\circ-\frac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}=90^\circ+\frac{\widehat{BAC}}{2}=135^\circ$

Xét ΔBFP và ΔBIC có:

$\widehat{BFP}=\widehat{BIC}(=135^\circ)$

$\widehat{IBC}=\widehat{FBP}\left(=\frac{\widehat{ABC}}{2}\right)$

Suy ra $\Delta BFP\backsim\Delta BIC(g-g)$ (điều phải chứng minh). Do đó $\frac{BF}{BI}=\frac{BP}{BC}$

Xét ΔBFI và ΔBPC có:

$\frac{BF}{BI}=\frac{BP}{BC}$

$\widehat{FBI}=\widehat{PBC}\left(=\frac{\widehat{ABC}}{2}\right)$

Suy ra $\Delta BFI\backsim\Delta BPC(c-g-c)$. Do đó $\widehat{BPC}=\widehat{BFI}=90^\circ$

Mà BC là đường kính của đường tròn (O) nên P thuộc đường tròn đường kính BC hay P thuộc (O) (điều phải chứng minh).

2) Vì $\widehat{BPC}=90^\circ$ nên ΔPIC vuông tại P

Mà $\widehat{PIC}=180^\circ-\widehat{BIC}=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

Suy ra ΔPIC vuông cân tại P. Do đó $PI=PC$ (điều phải chứng minh).

Mặt khác, BF và BD là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $BF=BD$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra ΔBDF cân tại B.

Mà $IF=ID$. Suy ra BI là đường trung trực của DF hay $PF=PD$. Suy ra ΔPDF cân tại P.

Ta có: $\widehat{BFP}=\widehat{BFD}+\widehat{DFP}$

$\widehat{BDP}=\widehat{BDF}+\widehat{FDP}$

Mà $\widehat{BFD}=\widehat{BDF}$ (vì ΔBDF cân tại B) và $\widehat{PFD}=\widehat{PDF}$ (vì ΔPDF cân tại P)

Suy ra $\widehat{BFP}=\widehat{BDP}=135^\circ$

Do đó $\widehat{PDL}=180^\circ-\widehat{BDP}=180^\circ-135^\circ=45^\circ$. Suy ra ΔPDL vuông cân tại L.

Nên $PD^2 = 2PL^2$ hay $\frac{2}{PD^2} = \frac{1}{PL^2}$.

Do đó ta cần chứng minh: $\frac{1}{PB^2} + \frac{1}{PC^2} = \frac{1}{PL^2}$

$\left(\frac{PL}{PB}\right)^2 + \left(\frac{PL}{PC}\right)^2 = 1$

Vì $\Delta PLB \backsim \Delta CPB(g-g)$ nên $\frac{PL}{PB} = \frac{CP}{CB}$

Vì $\Delta PLC \backsim \Delta BPC(g-g)$ nên $\frac{PL}{PC} = \frac{BP}{BC}$

Suy ra $\left(\frac{PL}{PB}\right)^2 + \left(\frac{PL}{PC}\right)^2 = 1$ (Do ΔBPC vuông tại ΔBPC vuông tại P nên $BP^2 + CP^2 = BC^2$)

Vậy ta có $\frac{1}{PB^2} + \frac{1}{PC^2} = \frac{2}{PD^2}$ (điều phải chứng minh).

3) Gọi X, Y lần lượt thuộc tia CB và tia đối của tia CB sao cho $CX = CY = AB$.
Đặt $b = AC, c = AB, a = BC$.
Ta có:
$AE = b - CE = b - CD = b - (a - BD) = b - (a - BF) = b - a + BF = b - a + (c - AF) = b - a + c - AF$

Mà $AE = AF$ nên $AE = \frac{b+c-a}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta có: $BD = \frac{a+c-b}{2}$, $CD = \frac{a+b-c}{2}$.

Mặt khác, ta có: $b = 2c$ nên $BD = \frac{a-c}{2}$, $CD = \frac{a+c}{2}$

Suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{BX}{BY}$

Mà $BX = a - CX = a - c = 2BD$
$BY = a + c = 2BL$

Suy ra $\frac{BX}{BY} = \frac{BD}{BL}$. Do đó $BL = DC$. Hay $BD = LC$.(1)

Qua G kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại P'.

Ta có: $\widehat{GP'B} = \widehat{GCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung GB)

Mà $GP' // CB$ nên $\widehat{GP'B} = \widehat{P'BC}$. Suy ra $\widehat{GCB} = \widehat{P'BC}$

Lại có: $\widehat{BP'C} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó $\Delta GCB = \Delta P'BC$ $(ch - gn)$ nên $BG = CP'$. Kẻ $P'L' \perp BC$

Suy ra $\Delta GDB = \Delta P'L'C(ch - cgv)$ nên $BD = L'C$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $L' \equiv L$ nên $P' \equiv P$.

Suy ra $DLPG$ là hình chữ nhật. Mà $\widehat{PDL} = 45^\circ$ nên $DLPG$ là hình vuông (điều phải chứng minh).

Bài 5

1) Tìm p, q là số nguyên tố sao cho $p+q$ và $pq+q$ là số chính phương.

2) Cho ô vuông $n \times n$. Mỗi ô có thể có một máy bơm, những ô chung đỉnh có thể bơm cho nhau. Gọi số máy bơm là k. Tìm k nhỏ nhất để mọi ô đều được bơm.

a) $n = 4$

b) $n = 31$

Lời giải

1) Trước hết ta xét trường hợp p hoặc q chẵn, mà p, q là số nguyên tố nên ta có:

+) Nếu $p = 2$

Suy ra $q+2, 3q$ là số chính phương, mà $3q \vdots 3$ nên $3q \vdots 9$. Do đó $q \vdots 3$ hay $q = 3$ (không thỏa mãn)

+) Nếu $p \geq 3$

Nếu $p+1 \not\vdots\, q$ thì $(q, p+1) = 1$ nên $q, p+1$ là số chính phương.

Suy ra q vừa là số nguyên tố vừa là số chính phương (vô lí).

Do đó, $p+1 \vdots q$ nên $p+1 \geq q$

- Nếu $p+1 = q$ thì ta dễ thấy p, q khác chẵn lẻ nên $p = 2, q = 3$ (không thỏa mãn).

Mà $(p+1)q$ là số chính phương nên $\dfrac{p+1}{q}$ là số chính phương.

Suy ra $p+1 \geq 4q$.

Đặt $p+q = x^2, pq+q = y^2 (x, y \in \mathbb{N}^*, y > x)$

Suy ra $(y-x)(y+x) = p(q-1)$

Mặt khác do $p+1 \geq 4q$ nên:

$$\begin{cases} x^2 = p+q \le p + \dfrac{p+1}{4} = \dfrac{5p+1}{4} < p^2 \\ y^2 = (p+1)q \le (p+1)\dfrac{p+1}{4} = \dfrac{(p+1)^2}{4} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x < p \\ y \le \dfrac{p+1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $0 < y - x < p$ nên $y + x \vdots p$ và $y + x = p$ (do $y + x < 2p$)

Suy ra $y - x = q - 1$ hay $y = \dfrac{p+q-1}{2}$

Suy ra $4pq + 4q = (p+q-1)^2$

$4pq + 4q = p^2 + q^2 + 1 + 2pq - 2p - 2q$

$p^2 + q^2 - 2pq + 1 - 2p - 6q = 0$

Lại thấy do $(y-x)(y+x) = p(q-1)$

Nếu $q \ne 2$ thì $VP \vdots 2$ nên ít nhất một trong 2 số $y - x$, $y + x$ phải chia hết cho 2.

Mà $y - x$ và $y - x$ cùng tính chẵn lẻ nên cả hai cùng chia hết cho 2.

Mà p lẻ nên $q - 1 \vdots 4$ suy ra $q \ge 5$

Do đó $p - q \ge 3q + 1 \ge 16$

Suy ra $0 = p^2 + q^2 - 2pq + 1 - 2p - 6q \ge 16(p-q) + 1 - 2p - 6q = 14p - 22q + 1 > 0$ (vô lí)

Do đó $q \vdots 2$ nên $q = 2$ (thỏa mãn)

Suy ra $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = p \end{cases}$ nên $x = \dfrac{p-1}{2}$.

Do đó $4(p+2) = (p-1)^2$

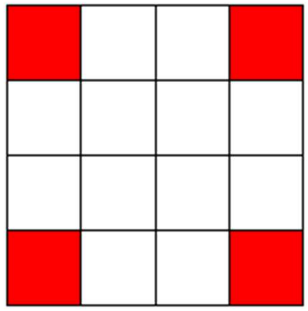
$p^2 - 6p - 7 = 0$

$(p-7)(p+1) = 0$

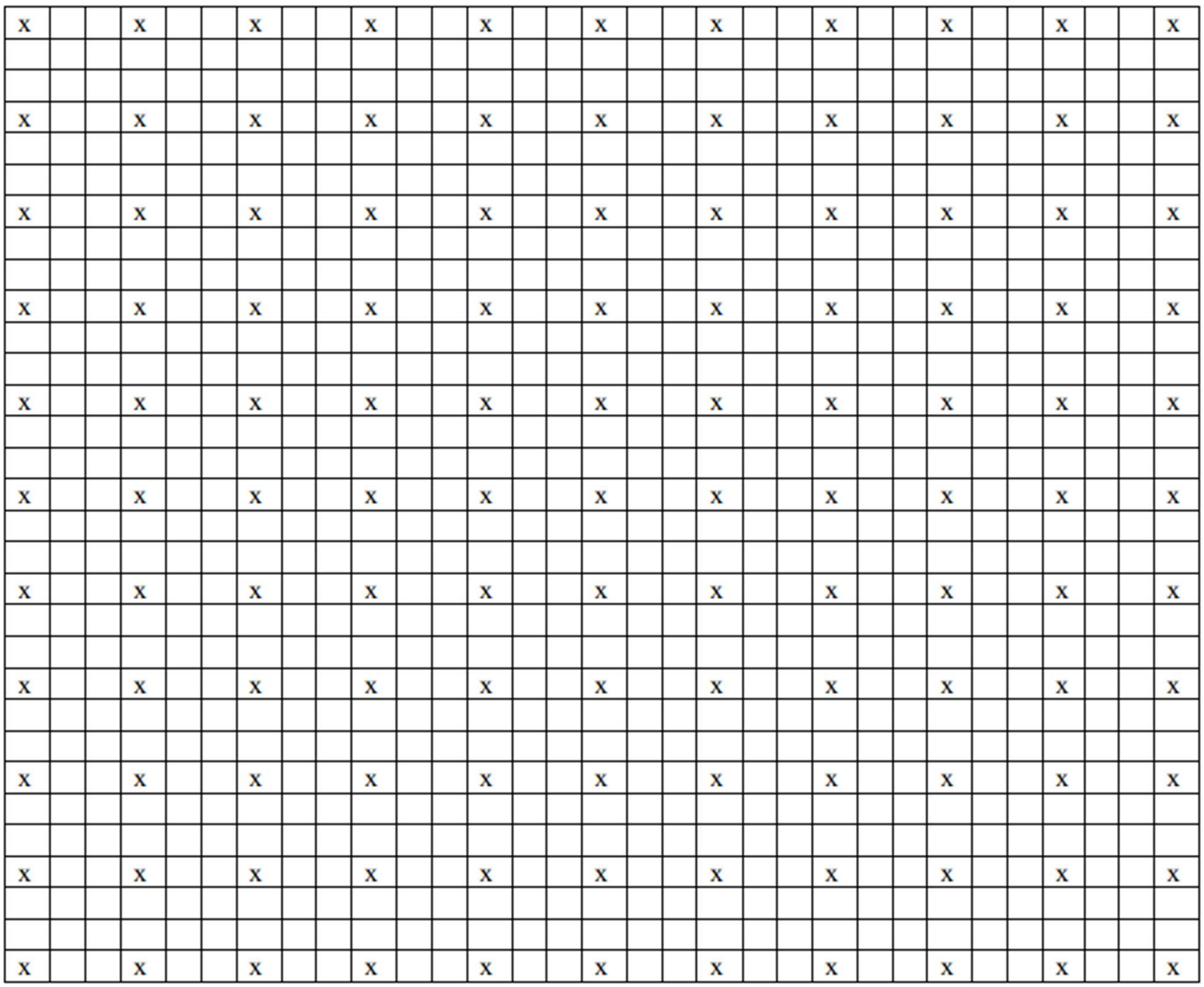
Suy ra $p = 7$ (thỏa mãn)

Vậy $p = 7$, $q = 2$.

2) a) Tô màu 4 ô sau, nhận thấy mỗi một máy chỉ bơm được tối đa 1 ô được tô đỏ nên cần ít nhất 4 máy bơm để bơm được hết tất cả các ô. Dấu $"="$ xảy ra khi đặt máy bơm ở đúng 4 ô màu đỏ.



b)



Đánh dấu x vào các ô như trên bảng, nhận thấy mỗi máy bơm chỉ bơm được tối đa 1 ô được đánh dấu x. Vậy cần tối thiểu số máy bơm bằng số dấu x là 121. Dấu “=” xảy ra khi ta đặt các máy bơm vào các ô được đánh dấu x.