UBND QUẬN BA ĐÌNH
TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ
ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI KSCL HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN

Năm học: 2024 – 2025

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x^2-y^2+2y=4 \end{cases}$

2) Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a+2b=ab, b+2c=2bc, c+2a=3ca$. Tính giá trị của biểu thức:

$S=ab+bc+ca-2abc$.

Bài 2 (5,0 điểm)

1) Chứng minh rằng $n^3+17n \vdots 6\ \forall n \in \mathbb{Z}$

2) Tìm $x,y \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $(x+y+1)^2=x^3+y^3+1$.

Bài 3 (2,0 điểm)

Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}$

Bài 4 (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, AC cắt BD tại O. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AC, qua B vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt nhau tại S. Lấy M thuộc ΔSAB thỏa mãn $\widehat{BMD}=90^\circ$.

1) Chứng minh rằng: $P_{SEF}=2SA, \widehat{EOF}=\widehat{AOS}$.

2) OE,OF cắt AB tại P,Q. Chứng minh rằng: $EP.EO+FQ.FO=EF^2$

3) G là trung điểm của EF, SO cắt EF tại I. N đối xứng với G qua I, EO,FO cắt CD tại K,L. Chứng minh rằng ΔNKL cân.

Bài 5 (2,0 điểm)

1) Cho $p,q \in P$ thỏa mãn: $p^2+1 \vdots q, q^2-1 \vdots p$. Chứng minh rằng: $p+q+1$ là hợp số.

2) Thầy viết $n \geq 3$ số thuộc $\mathbb{Z}$ phân biệt thỏa mãn mỗi số được viết là tổng hai số khác nhau trên bảng.

a) Chỉ ra một cách viết thỏa mãn với $n=6$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

------------------------------- HẾT -------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x^2-y^2+2y=4 \end{cases}$

2) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a+2b=ab, b+2c=2bc, c+2a=3ca$. Tính giá trị của biểu thức:

$S=ab+bc+ca-2abc$.

Lời giải

1) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x^2-y^2+2y=4 \end{cases}$ (1)

Từ (1) suy ra $3(2-y)^2-y^2+2y=4$

$$3(4-4y+y^2)-y^2+2y=4$$
$$12-12y+3y^2-y^2+2y=4$$
$$2y^2-10y+8=0$$
$$y^2-5y+4=0$$
$$(y-1)(y-4)=0$$

Suy ra $y=1$ hoặc $y=4$.

+ Với $y=1$ thì $x=2-y=2-1=1$

+ Với $y=4$ thì $x=2-y=2-4=-2$

Vậy $(x,y)\in\{(1,1);(-2,4)\}$

2) Từ giả thiết ta có:

$\begin{cases} a+2b=ab \\ b+2c=2bc \\ c+2a=3ca \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} ac+2bc=abc \\ ab+2ac=2abc \\ bc+2ab=3abc \end{cases}$

Do đó $3(ab+bc+ca)=6abc$

$ab+bc+ca=2abc$

Suy ra $S=ab+bc+ca-2abc=0$

Vậy $S=0$

Bài 2 (5,0 điểm)

1) Chứng minh rằng $n^3+17n \vdots 6\ \forall n\in\mathbb{Z}$

2) Tìm $x,y\in\mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $(x+y+1)^2=x^3+y^3+1$.

Lời giải

1) Ta có: $n^3+17n=n^3-n+18n=n(n-1)(n+1)+18n$

+ Với $n=2k(k\in\mathbb{Z})$ ta có $(2k-1)2k(2k+1)\vdots 2$

+ Với $n=2k+1(k\in\mathbb{Z})$ ta có $2k(2k+1)(2k+2)\vdots 2$

Suy ra $n(n-1)(n+1)\vdots 2$ (1)

+ Với $n=3k(k\in\mathbb{Z})$ ta có $(3k-1)3k(3k+1)\vdots 3$

+ Với $n=3k+1(k\in\mathbb{Z})$ ta có $3k(3k+1)(3k+2)\vdots 3$

+ Với $n=3k+2(k\in\mathbb{Z})$ ta có $(3k+1)(3k+2)(3k+3)=(3k+1)(3k+2)3(k+1)\vdots 3$

Suy ra $n(n-1)(n+1)\vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n(n-1)(n+1)\vdots 6$

Do đó $n^3+17n=n(n-1)(n+1)+18n\vdots 6$ (điều phải chứng minh).

2) Với mọi $a,b>0$ ta có : $(a+b)(a-b)^2\ge 0$

$$(a+b)(a^2-2ab+b^2)\ge 0$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$$
$$a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

$$3(a^3+b^3)\ge 3ab(a+b)$$
$$a^3+b^3+3(a^3+b^3)\ge a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3$$

Suy ra: $\dfrac{a^3+b^3}{3}\ge\dfrac{(a+b)^3}{12}$

Đặt $d=\dfrac{a+b+c}{3}>0$, ta có: $\dfrac{c^3+d^3}{3}\ge\dfrac{(c+d)^3}{12}$

Suy ra $\dfrac{a^3+b^3+c^3+d^3}{3}\ge\dfrac{(a+b)^3+(c+d)^3}{12}\ge\dfrac{(a+b+c+d)^3}{48}$ (1)

Thay $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ vào (1) ta có: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ hay $a^3+b^3+c^3\ge\dfrac{(a+b+c)^3}{9}$ (2)

Thay $a=x,b=y,c=1$ vào (2) ta có: $x^3+y^3+1\ge\dfrac{(x+y+1)^3}{9}$

Suy ra $(x+y+1)^2\ge\dfrac{(x+y+1)^3}{9}$

$9\ge x+y+1$

$x+y\le 8$

Mà $x+y\ge 1+1=2$ (do $x,y\in\mathbb{Z}^+$)

Suy ra $x+y\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$

Giải ra ta thấy chỉ có các cặp sau thỏa mãn $(x,y)\in\{(2,3);(3,2)\}$

Vậy $(x,y)\in\{(2,3);(3,2)\}$.

Bài 3 (2,0 điểm)

Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x^2}{x+y^2}+\dfrac{y^2}{y+z^2}+\dfrac{z^2}{z+x^2}$

Lời giải

1) Ta có: $(x-1)^2\ge 0$ suy ra $x^2+1\ge 2x$ hay $x\le\dfrac{x^2+1}{2}$.

Do đó $P=\dfrac{x^2}{x+y^2}+\dfrac{y^2}{y+z^2}+\dfrac{z^2}{z+x^2}\ge\dfrac{x^2}{\dfrac{x^2+1}{2}+y^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{y^2+1}{2}+z^2}+\dfrac{z^2}{\dfrac{z^2+1}{2}+x^2}$

$=2\left(\dfrac{x^2}{x^2+1+2y^2}+\dfrac{y^2}{y^2+1+2z^2}+\dfrac{z^2}{z^2+1+2x^2}\right)$

$$=2\left(\frac{x^4}{x^4+x^2+2x^2y^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2+2y^2z^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2+2z^2x^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki có: $\frac{A^2}{X}+\frac{B^2}{Y}+\frac{C^2}{Z}\geq\frac{(A+B+C)^2}{X+Y+Z}$ (4)

Thay $A=x^2, B=y^2, C=z^2, X=x^4+x^2+2x^2y^2, Y=y^4+y^2+2y^2z^2, Z=z^4+z^2+2z^2x^2$ vào (4) ta có:

$$P=2\left(\frac{x^4}{x^4+x^2+2x^2y^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2+2y^2z^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2+2z^2x^2}\right)$$

$$\geq 2\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+x^2+2x^2y^2+y^4+y^2+2y^2z^2+z^4+z^2+2z^2x^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2+(x^2+y^2+z^2)}\right)=2\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)+1}\right)$$

Ta có : $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\geq 0$$

$$3(x^2+y^2+z^2)\geq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}$$

Suy ra $P=2\left(1-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)+1}\right)\geq 2\left(1-\frac{1}{\frac{(x+y+z)^2}{3}+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{\frac{3^2}{3}+1}\right)=\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$.

Bài 4 (6,0 điểm)

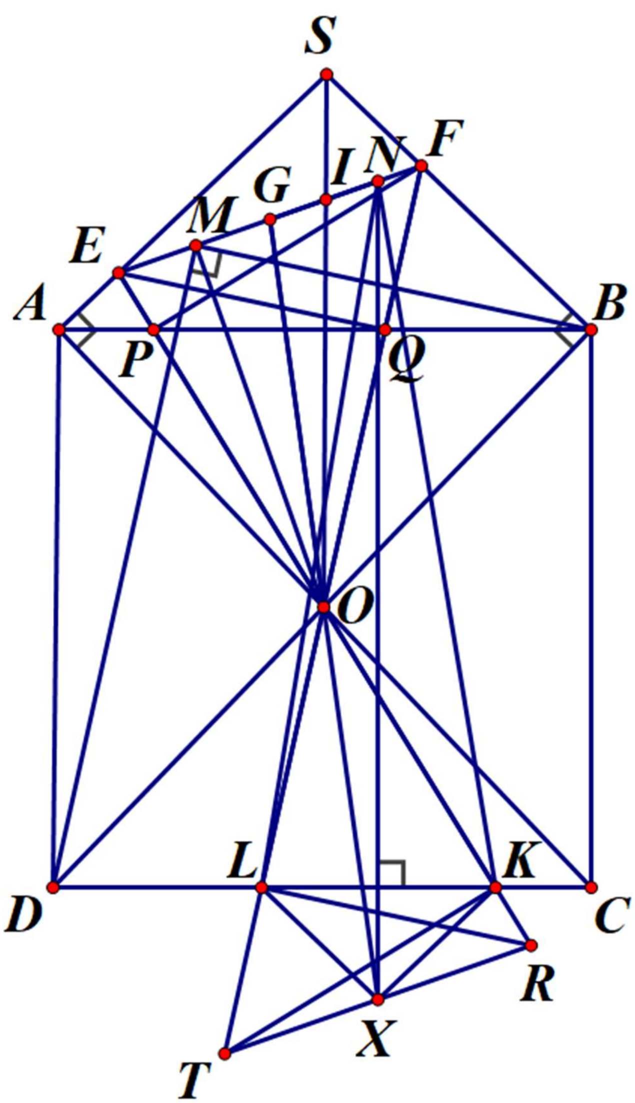
Cho hình vuông $ABCD$, AC cắt BD tại O. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AC, qua B vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt nhau tại S. Lấy M thuộc ΔSAB thỏa mãn $\widehat{BMD} = 90°$.

1) Chứng minh rằng: $P_{\Delta SEF} = 2SA, \widehat{EOF} = \widehat{AOS}$.

2) OE, OF cắt AB tại P, Q. Chứng minh rằng: $EP.EO + FQ.FO = EF^2$

3) G là trung điểm của EF, SO cắt EF tại I. N đối xứng với G qua I, EO, FO cắt CD tại K, L. Chứng minh rằng ΔNKL cân.

Lời giải



1) Do $ABCD$ là hình vuông nên hai đường chéo $AC = BD$ và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Suy ra $OA = OB = OC = OD$.

Ta có : $\widehat{BMD} = 90°$ nên ΔBMD vuông tại M. Mà OM là đường trung tuyến ứng với cạnh BD (do $OB = OD$). Nên $MO = OB = OD$.

Mà $OB = OA$ suy ra $OM = OA$

Xét ΔEAO và ΔEMO có:

$\widehat{EAO} = \widehat{EMO} = 90^\circ$

$OM = OA$

EO chung

Suy ra $\Delta EAO = \Delta EMO(ch - cgv)$ nên $EM = EA$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta FOM = \Delta FOB(ch - cgv)$ nên $FM = FB$

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$ tại O hay $OA \perp OB$

Xét tứ giác $ASBO$ có: $\widehat{SAB} = \widehat{AOB} = \widehat{SBO} = 90^\circ$ suy ra $ASBO$ là hình chữ nhật.

Mà $OB = OA$ nên $ASBO$ là hình vuông suy ra $SA = SB$. Do đó ΔSAB cân tại S nên $SA = SB$

Suy ra $P_{\Delta SEF} = SE + EF + FS = SE + EM + MF + FS = SE + EA + FB + FS = SA + SB = 2SA$

(điều phải chứng minh).

+) Vì $\Delta EAO = \Delta EMO$ (chứng minh trên) nên $\widehat{EOM} = \widehat{EOA}$ (2 góc tương ứng)

Vì $\Delta FOM = \Delta FOB$ (chứng minh trên) nên $\widehat{FOM} = \widehat{FOB}$

Suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{EOM} + \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{MOA}}{2} + \dfrac{\widehat{MOB}}{2} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \widehat{SOA}$ (điều phải chứng minh).

2) Vì $\Delta EAO = \Delta EMO$ (chứng minh trên) nên $\widehat{MEO} = \widehat{AEO}$ (2 góc tương ứng) hay $\widehat{AEP} = \widehat{FEO}$

Vì $ASBO$ là hình vuông (chứng minh trên) nên hai đường chéo AB, OS lần lượt là hai tia phân giác của $\widehat{SAO}$ và $\widehat{AOB}$ suy ra $\widehat{SAB} = \widehat{AOS} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Mà $\widehat{EOF} = \widehat{AOS}$ (chứng minh trên) suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{SAB}$ hay $\widehat{EOF} = \widehat{EAP}$

Xét ΔEAP và ΔEOF có:

$\widehat{EOF} = \widehat{EAP}$

$\widehat{AEP} = \widehat{FEO}$

Suy ra $\Delta EAP \backsim \Delta EOF(g - g)$ nên $\dfrac{EA}{EO} = \dfrac{EP}{EF}$ (cạnh tương ứng)

Xét ΔEPF và ΔEAO có:

$\dfrac{EA}{EO}=\dfrac{EP}{EF}$

$\widehat{AEO}=\widehat{FEO}$ (do $\widehat{MEO}=\widehat{AEO}$)

Suy ra $\Delta EPF \backsim \Delta EAO(c-g-c)$ suy ra $\widehat{EPF}=\widehat{EAO}=90^\circ$ hay $FP\perp EO$.

Chứng minh tương tự, ta có $EQ\perp FO$

Xét ΔEMO và ΔEPF có:

$\widehat{PEF}$ chung

$\widehat{EPF}=\widehat{EMO}=90^\circ$

Suy ra $\Delta EMO \backsim \Delta EPF(g-g)$ suy ra $\dfrac{EM}{EO}=\dfrac{EP}{EF}$ (cạnh tương ứng)

Suy ra $EP.EO=EM.EF$

Chứng minh tương tự, ta có: $FQ.FO=FM.FE$

Do đó $EP.EO+FQ.FO=EM.EF+FM.FE=EF\left(EM+FM\right)=EF.EF=EF^2$ (điều phải chứng minh).

3) Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với DC cắt GO tại X.

Qua X kẻ đường thẳng song song với EF cắt OE,OF lần lượt tại R,T.

Vì $ASBO$ là hình vuông (chứng minh trên) nên $SO\perp AB$ hay $SI\perp CD$ (do $AB//CD$)

Xét ΔNGX có:

$IO//NX(\perp CD)$

I là trung điểm của GN

Suy ra O là trung điểm GX (đường trung bình của tam giác)

Xét ΔOGE và ΔOXR có:

$\widehat{OGE}=\widehat{OXR}$ (hai góc so le trong)

$OG=OX$ (chứng minh trên)

$\widehat{XOR}=\widehat{GOE}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó $\Delta OGE=\Delta OXR(g-c-g)$ suy ra $OE=OR$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔOGF và ΔOXT có:

$\widehat{OGF} = \widehat{OXT}$ (hai góc so le trong)

$OG = OX$ (chứng minh trên)

$\widehat{XOT} = \widehat{GOF}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó $\Delta OGF = \Delta OXT(g-c-g)$ suy ra $OF = OT$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó $\Delta OKT = \Delta OPF(c-g-c)$

Suy ra $\widehat{OKT} = \widehat{OPF} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự, ta có: $\widehat{RLT} = 90^\circ$

Vì $GE = GF$ mà $GF = XT$ (do $\Delta OGF = \Delta OXT$) và $GE = XR$ (do $\Delta OGE = \Delta OXR$)

Suy ra $XT = XR$ nên $LX = XT = XR = XK$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

Do đó $LX = XK$ mà $NX \perp DC$ nên NX là trung trực của LK

Suy ra $NL = NK$

Vậy ΔNLK cân tại N (điều phải chứng minh).

Bài 5 (2,0 điểm)

1) Cho $p,q \in P$ thỏa mãn: $p^2+1 \vdots q, q^2-1 \vdots p$. Chứng minh rằng: $p+q+1$ là hợp số.

2) Thầy viết $n \geq 3$ số thuộc $\mathbb{Z}$ phân biệt thỏa mãn mỗi số được viết là tổng hai số khác nhau trên bảng.

a) Chỉ ra một cách viết thỏa mãn với $n = 6$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

Lời giải

1) Ta có: $q^2-1 \vdots p$ hay $(q-1)(q+1) \vdots p$. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} q-1 \vdots p \\ q+1 \vdots p \end{array}\right.$

TH1: $q-1 \vdots p$. Đặt $q-1 = kp\,(k \in Z)$

Suy ra: $k^2+1 \vdots q$

Mà $p^2+1 \vdots q$ (giả thiết) nên $(k-p)(k+p) \vdots q$. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} k-p \vdots q \\ k+p \vdots q \end{array}\right.$

+) $k-p \vdots q$

Có: $q-1 = kp$. Suy ra: $p,k < q$. Do đó: $-q < p-k < q$

Mà $k-p \vdots q$ nên $k-p = 0$

Suy ra: $q = p^2+1$

Ta có: $p+q+1=p^2+p+2=p(p+1)+2\vdots 2$. Mà $p+q+1>2$ nên $p+q+1$ là hợp số

+) $k+p\vdots q$

Có: $q-1=kp$. Suy ra: $p,k<q$. Do đó: $0<p+k<2q$

Mà $k+p\vdots q$ nên $p+k=q$

Suy ra: $k=q-p$

Do đó: $q-1=kp=(q-p)p=pq-p^2$ hay $p^2-1=pq-q$

Suy ra: $p^2-1\vdots q$

Mà $p^2+1\vdots q$

Suy ra: $2\vdots q$. Do đó $q=2$

Ta có: $q^2-1\vdots p$ hay $3\vdots p$. Do đó $p=3$

Vậy nên $p+q+1=3+2+1=6$ là hợp số.

TH2: $q+1\vdots p$. Suy ra: $p+q+1\vdots p$

Mà $p+q+1>p$ nên $p+q+1$ là hợp số *(điều phải chứng minh).*

2)

a) $n=6$ tập số thỏa mãn là $-3;-2;-1;1;2;3$

b) Nhận xét: $n\geq 3$

Trường hợp 1: $n=3$

Giả sử $a_1<a_2<a_3$ thoả mãn yêu cầu đề bài

Theo yêu cầu đề suy ra $\begin{cases} a_1+a_2=a_3 \\ a_2+a_3=a_1 \\ a_3+a_1=a_2 \end{cases}$

Suy ra $a_1=a_2=a_3$ (vô lí)

Trường hợp 2: $n=4$

Gỉa sử $a_1<a_2<a_3<a_4$ thỏa mãn yêu cầu đề

+) Khả năng 1: Trong 4 số có 1 số là 0

Như vậy 3 số còn lại sẽ phải thỏa mãn mỗi số bằng tổng 2 số khác trên bảng (loại do trường hợp $n=3$ không thỏa mãn)

+) Khả năng 2 : Trong 4 số không có số 0

- Nếu cả 4 số đều dương:

Ta có $a_1 < a_2 < a_2 + a_3 \le a_i + a_j$ với mọi $2 \le i \le j \le 4$ (loại)

- Nếu có 3 số âm, 1 số dương

Ta có: $a_4 > 0; a_1; a_2; a_3 < 0$

Suy ra $a_4 > 0 > a_i + a_j$ với mọi $1 \le i \le j \le 3$ (loại)

- Nếu có 2 số âm, 2 số dương

Ta có: $a_4; a_3 > 0; a_1; a_2 < 0$

Suy ra : $a_4 > a_3 > a_3 + a_1;\ a_3 + a_2;\ a_1 + a_2$ (loại)

- Nếu có 1 số âm, 3 số dương

Ta có: $a_4; a_3; a_2 > 0; a_1 < 0$

$\rightarrow a_1 < 0 < a_i + a_j$ với mọi $2 \le i \le j \le 4$ (loại)

- Nếu cả 4 số đều âm:

Ta có $a_4 > a_4 + a_3 \ge a_i + a_j$ với mọi $1 \le i \le j \le 3$ (loại)

Trường hợp 3: $n = 5$

Gỉa sử $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ thỏa mãn yêu cầu đề.

+) Khả năng 1 : trong 5 số có 1 số bằng 0

Như vậy 4 số còn lại sẽ phải thỏa mãn mỗi số bằng tổng 2 số khác trên bảng (loại do trường hợp $\text{n} = 4$ không thỏa mãn)

+) Khả năng 2 : trong 5 số không có số 0

Như vậy 5 số là số nguyên âm hoặc số nguyên dương.

Theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất 3 số thuộc cùng 1 loại số (nguyên âm hoặc nguyên dương).

- Nếu ít nhất 3 số là số nguyên dương:

Suy ra $a_5 > a_4 > a_3 > 0$

Ta có $a_1 < a_2 < a_2 + a_3 \le a_i + a_j$ với mọi $2 \le i \le j \le 4$ (loại)

- Nếu ít nhất 3 số là số nguyên âm:

Suy ra $0 > a_3 > a_2 > a_1$

Ta có $a_5 > a_4 > a_4 + a_3 \ge a_i + a_j$ với mọi $1 \le i \le j \le 4$ (loại)

Như vậy $n = 3;4;5$ đều không thỏa mãn

Vậy GTNN của $n = 6$ (ví dụ như câu a).