

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN  
HÀ NỘI – AMSTERDAM**  
Tổ Toán – Tin học

**ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ I**  
**NĂM HỌC: 2022-2023**  
**Môn: TOÁN LỚP 8**  
**Thời gian làm bài: 90 phút**

**Bài 1.** (2,0 điểm) Cho biểu thức  $A = \frac{4x+1}{x-1}$  và  $B = \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1}$  với  $x \neq 1, x \neq -1$ .

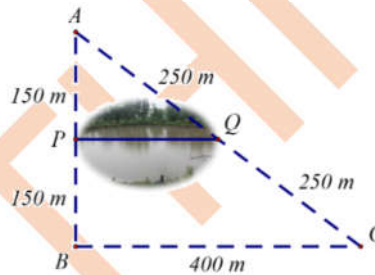
- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  biết  $x = 2$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 3) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $|A.B| = 4x$ .

**Bài 2.** (3,0 điểm)

- 1) Phân tích đa thức  $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$  thành nhân tử
- 2) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$
- 3) Xác định các số thực  $a, b$  để đa thức  $P(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 1$ .

**Bài 3.** (1,0 điểm)

Bác An muốn tính khoảng cách giữa hai vị trí  $P, Q$  ở hai bên bờ cái ao cá. Để làm được điều đó, bác An đã chọn ba vị trí  $A, B, C$  thực hiện đo đạc và vẽ mô phỏng như hình vẽ dưới. Em hãy giúp bác An tính khoảng cách giữa hai điểm  $P$  và  $Q$ .



**Bài 4.** (3,5 điểm)

Cho hình chữ nhật  $ABCD$  ( $AB > 2BC$ ), trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BC = AM$ , trên tia  $CB$  lấy điểm  $N$  sao cho  $CN = BM$ ,  $CM$  cắt  $AN$  tại  $P$ , trên  $CD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = CB$ .

- a) Chứng minh rằng tứ giác  $AMCE$  là hình bình hành.
- b) Chứng minh rằng các tam giác  $ADE$  và  $ECN$  bằng nhau.
- c) Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $AE$  cắt đường thẳng qua  $N$  vuông góc với  $NE$  tại điểm  $F$ . Chứng minh rằng tứ giác  $AENF$  là hình vuông.
- d) Gọi  $K$  là giao điểm của  $EN$  với  $PC$ ,  $L$  là giao điểm của  $EF$  với  $AN$ . Tính tỷ số diện tích của hai tam giác  $NKL$  và  $NEP$ .

**Bài 5.** (0,5 điểm) Với các số thực không âm  $a, b$  thỏa mãn  $a + b = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a+1)(2b+1)$ .

**Hướng dẫn giải**

**Bài 1.** (2,0 điểm) Cho biểu thức  $A = \frac{4x+1}{x-1}$  và  $B = \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1}$  với  $x \neq 1, x \neq -1$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  biết  $x = 2$ .
- 2) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 3) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $|A.B| = 4x$ .

**Lời giải**

1) Ta có:  $x = 2$  (thỏa mãn ĐKXD)

Thay  $x = 2$  vào  $A$  ta có:

$$A = \frac{4.2+1}{2-1} = \frac{9}{1} = 9$$

Vậy giá trị của biểu thức  $A$  bằng 9 khi  $x = 2$

$$2) B = \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3x+1-2x(x+1)+3x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3x+1-2x^2-2x+3x^2-3x}{(x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{x-1}{x+1}$$

Vậy  $B = \frac{x-1}{x+1}$

$$3) A.B = \frac{4x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow A.B = \frac{(4x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow A.B = \frac{4x+1}{x+1}$$

$$\Rightarrow |A.B| = \left| \frac{4x+1}{x+1} \right|$$

Theo đề bài ta có  $|A.B| = 4x$

$$\Rightarrow \left| \frac{4x+1}{x+1} \right| = 4x \quad (x \geq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4x+1}{x+1} = 4x \\ \frac{4x+1}{x+1} = -4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+1 = 4x(x+1) \\ 4x+1 = -4x(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = 4x+1 \\ -4x^2 - 4x = 4x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 1 \\ 4x^2 + 8x + 1 = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1:  $4x^2 = 1$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}, \text{ kết hợp với } x \geq 0 \text{ ta được } x = \frac{1}{2}$$

Trường hợp 2:  $4x^2 + 8x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x+1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy  $x = \frac{1}{2}$  thỏa mãn yêu cầu đề

## Bài 2:

1) Phân tích đa thức  $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$  thành nhân tử.

2) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$ .

3) Xác định các số thực  $a, b$  để đa thức  $P(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 1$ .

### Lời giải

1)  $A = x^4 - 5x^2 + 4$

$$\Rightarrow A = x^4 - x^2 - 4x^2 + 4$$

$$\Rightarrow A = (x^4 - x^2) - (4x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow A = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow A = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow A = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$$

Vậy  $A = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$

$$1) \quad 2x^3 + (x + 1)^3 - 3x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy  $x = 0$  và  $x = -1$  thỏa mãn

2) Vì  $P(x)$  chia hết cho  $x^2 - 1$

$$\text{Suy ra } P(x) = (x^2 - 1).G(x) \quad (*)$$

Thay  $x = 1$  vào (\*) suy ra  $P(1) = 0$

$$\Rightarrow 1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -1 \quad (1)$$

Thay  $x = -1$  vào (\*) suy ra  $P(-1) = 0$

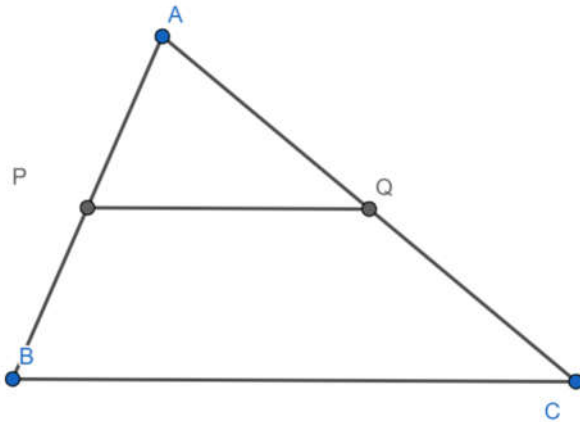
$$\Rightarrow -1 - a + b = 0 \rightarrow b - a = 1 \quad (2)$$

Ta lấy biểu thức (1) cộng biểu thức (2):

$$\Rightarrow (a + b) + (b - a) = -1 + 1 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -1. \text{ Vậy } a = -1 \text{ và } b = 0$$

**Bài 3.** Bác An muốn tính khoảng cách giữa hai vị trí  $P, Q$  ở hai bên bờ cái ao cá. Để làm được điều đó, bác An đã chọn ba vị trí  $A, B, C$  thực hiện đo đạc và vẽ mô phỏng như hình vẽ dưới. Em hãy giúp bác An tính khoảng cách giữa hai điểm  $P$  và  $Q$ .

### Lời giải



Vì  $AP = PB = 150(m)$  nên  $P$  là trung điểm  $AB$ .

$AQ = QC = 250(m)$  nên  $Q$  là trung điểm  $AC$

Xét tam giác  $ABC$  có:

$P$  là trung điểm  $AB$ ;  $Q$  là trung điểm  $AC$

$\Rightarrow PQ$  là đường trung bình tam giác  $ABC$

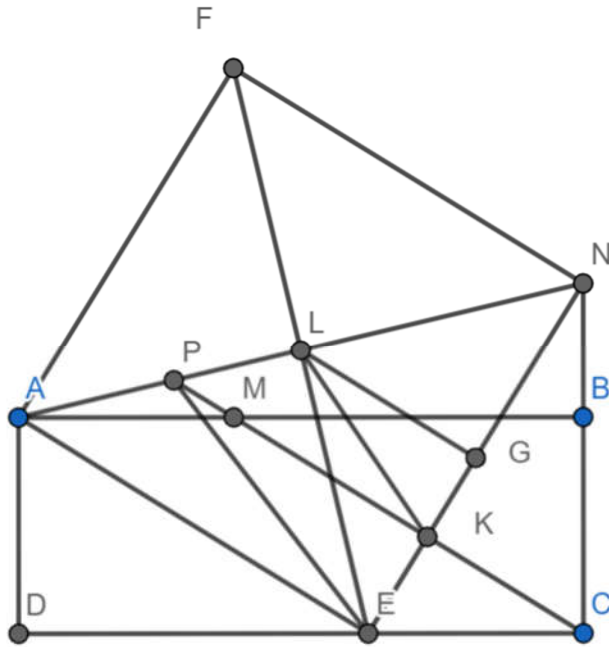
$$x \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 400 = 200(m)$$

Vậy khoảng cách giữa 2 điểm  $P$  và  $Q$  là  $200(m)$

**Bài 4.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  ( $AB > 2BC$ ), trên cạnh  $AB$  lấy  $M$  sao cho  $BC = AM$ , trên tia  $CB$  lấy  $N$  sao cho  $CN = BM$ ,  $CM$  cắt  $AN$  tại  $P$ , trên  $CD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = CB$ .

- Chứng minh rằng tứ giác  $AMCE$  là hình bình hành.
- Chứng minh rằng các tam giác  $ADE$  và  $ECN$  bằng nhau.
- Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $AE$  cắt đường thẳng qua  $N$  vuông góc với  $NE$  tại điểm  $F$ . Chứng minh rằng tứ giác  $AENF$  là hình vuông.
- Gọi  $K$  là giao điểm của  $EN$  với  $PC$ ,  $L$  là giao điểm của  $EF$  với  $AN$ . Tính tỷ số diện tích của hai tam giác  $NKL$  và  $NEP$ .

### Lời giải



a) Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $AB \parallel CD$

Theo đề bài ta có:  $AM = CB = CE$

Vì  $\left. \begin{array}{l} AM = CE \\ AM \parallel CE \end{array} \right\} \Rightarrow AMCE$  là hình bình hành (DPCM)

b) Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $AB = CD$ ;  $AD = BC$

Mà  $AM = CE$  nên  $AM - AM = CD - CE$

$\Rightarrow BM = DE$

Theo đề bài ta có:  $CN = BM$  nên  $CN = DE$

Xét tam giác  $ADE$  và tam giác  $ECN$  có:

$AD = CE$ ;  $\widehat{ADE} = \widehat{ECN} = 90^\circ$ ;  $DE = CN$

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle ECN$  (c.g.c) (DPCM)

c)  $\Rightarrow AE = EN$  (2 cạnh tương ứng);  $\widehat{AED} = \widehat{ENC}$

$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{CEB} = \widehat{ENC} + \widehat{CEB}$

Mà tam giác  $ECB$  vuông tại  $C$  nên:

$\widehat{ENC} + \widehat{CEB} = 90^\circ$  ( tổng 2 góc nhọn trong tam giác vuông )

$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{CEB} = 90^\circ \Rightarrow 180^\circ - (\widehat{AED} + \widehat{CEB}) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEN} = 90^\circ$

Theo đề bài ta có  $AF$  và  $NF$  vuông góc với  $AE$  và  $NE$

$$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{ENF} = 90^\circ$$

Xét tứ giác  $AENF$  có:  $\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{ENF} = \widehat{AEN} = 90^\circ$

$\Rightarrow AENF$  là hình chữ nhật

Mà ta có  $AE = EN$  (cmt) nên  $AENF$  là hình vuông (DPCM)

d) Gọi  $G$  là chân đường cao từ  $L$  xuống  $EN$

Đặt độ dài cạnh  $PK$  là  $a$ ; độ dài cạnh  $LG$  là  $b$ .

Vì  $AMCE$  là hình bình hành (cmt) nên  $AE$  song song  $CM$

$$\widehat{NPK} = \widehat{NAE} = 45^\circ \text{ ( 2 góc so le trong )}$$

Mà  $AENF$  là hình vuông nên  $\widehat{EAN} = \widehat{ENA} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{NPK} = \widehat{NAE} = 45^\circ$$

Xét tam giác  $NPK$  có:  $\widehat{KPN} + \widehat{KNP} + \widehat{PKN} = 180^\circ$  (tổng 3 góc trong tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{PKN} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta NPK$  vuông cân tại  $K$

$$\Rightarrow PK = KN = a$$

Xét tam giác  $AEN$  có:

$L$  là trung điểm  $AN$  (tính chất hình vuông)

$LG \parallel AE$  (cùng vuông góc  $EN$ )

$\Rightarrow LG$  là đường trung bình  $\Delta AEN$

$$\Rightarrow LG = \frac{1}{2} AE \text{ (tính chất đường trung bình)}$$

$$\Rightarrow AE = 2LG = 2b$$

Mà  $AE = EN$  nên  $EN = 2b$

$$\text{Ta có: } S_{NEP} = \frac{PK \cdot EN}{2} = \frac{a \cdot 2b}{2} = a \cdot b; S_{LKN} = \frac{LG \cdot KN}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{NEP}}{S_{LKN}} = \left( \frac{a \cdot b}{2} \right) : (a \cdot b) = \frac{1}{2}$$

Vậy tỉ số diện tích tam giác  $NKL$  và tam giác  $NEP$  là  $\frac{1}{2}$

**Bài 5.** Với các số thực không âm  $a, b$  thỏa mãn  $a + b = 2$ , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a + 1)(2b + 1)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b$

Thay vào P suy ra:

$$P = (2 - b + 1)(2b + 1)$$

$$\Leftrightarrow P = (3 - b)(2b + 1)$$

$$\Leftrightarrow P = -2b^2 + 5b + 3$$

$$\Leftrightarrow P = -2 \left( b^2 - \frac{5}{2}b + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \right) + 3 + 2 * \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow P = -2 \left( b - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{49}{8}$$

Vì  $a, b$  là các số thực không âm nên  $2 \geq b \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \geq b - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{25}{16} \geq \left( b - \frac{5}{4} \right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{49}{8} \geq -2 \left( b - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{49}{8} \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{49}{8} \geq P \geq 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  là 3 khi  $a = 2$  và  $b = 0$

giá trị lớn nhất của  $P$  là  $\frac{49}{8}$  khi  $a = \frac{3}{4}$  và  $b = \frac{5}{4}$