TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI – AMSTERDAM
Tổ Toán – Tin học

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ I
NĂM HỌC: 2022-2023
Môn: TOÁN LỚP 9
Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1 *(2,0 điểm)*

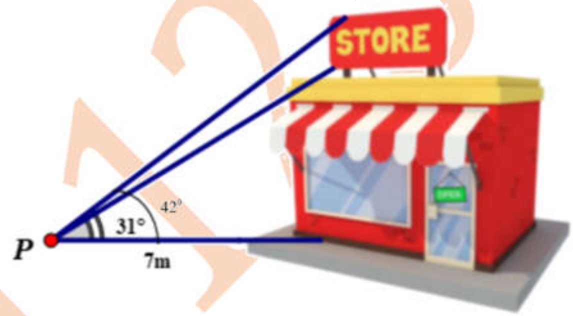
Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B=\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$, với $x>0; x\neq 4$.

a) Tìm các giá trị của x để $A=\dfrac{-3}{5}$.

b) Rút gọn biểu thức $P=B:A$.

c) Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2 *(1,0 điểm)* Một người muốn làm biển quảng cáo cho cửa hàng. Biết rằng từ điểm P cách cửa hàng 7m thì người đó nhìn thấy mái nhà dưới một góc 31° so với phương ngang (như hình vẽ). Cũng từ điểm P người đó sẽ nhìn thấy điểm trên cùng của bảng quảng cáo theo một góc 42° so với phương ngang. Tính chiều cao của biển quảng cáo theo đơn vị m. (lấy sấp xỉ đến một chữ số sau dấu phẩy).



Bài 3 *(2,5 điểm)*

Trên mặt phẳng tọa độ xOy, cho đường thẳng (d_m) có phương trình $y=mx-2m+1$ (với m là tham số).

a) Tìm m để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình $y=-x+3m$.

b) Tìm m để (d_m) cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B phân biệt sao cho $\sin\widehat{BAO}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 4 (3,5 điểm).

Cho hai đường tròn (O) và (O') thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B cố định. Gọi M là trung điểm của OO' và T là điểm đối xứng với A qua M. Đường tròn tâm T bán kính TA tương ứng cắt các đường tròn (O) và (O') tại các giao điểm thứ hai E và F.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng TB và OO' song song với nhau.

b) Chứng minh rằng AE là một tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khác A, khi hai đường tròn (O) và (O') thay đổi nhưng luôn đi qua A và B.

d) Trên đường tròn (O) lấy điểm P bất kì sao cho PA cắt (O') tại giao điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $TP=TQ$.

Bài 5 *(1,0 điểm)*

1) Giải phương trình $x+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+4$.

2) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $z=(x-2y)(y-2x)$.

Chứng minh rằng $\dfrac{9}{xy+xz}+\dfrac{9}{xy+yz}+\dfrac{x^3+y^3}{z}\geq\dfrac{11}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B=\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$, với $x>0; x\neq 4$

a) Tìm các giá trị của x để $A=\dfrac{-3}{5}$.

b) Rút gon biểu thức $P=B:A$.

c) Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$ (ĐK: $x>0; x\neq 4$)

Ta có: $A=\dfrac{-3}{5}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{4-x}=\dfrac{-3}{5}$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=-3(4-x)$

$\Rightarrow (5\sqrt{x})^2=(3(4-x))^2$

$\Rightarrow 25x=9(x^2-8x+16)$

$\Rightarrow 9x^2-97x+144=0$

$\Rightarrow (x-9)(9x-16)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-9=0 \\ 9x-16=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=\dfrac{16}{9} \end{array}\right.$

Thử lại $\Rightarrow x=9$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy $x=9$ để $A=\dfrac{-3}{5}$

b) Ta có:

$B=\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}$

$\Leftrightarrow B=\dfrac{x(\sqrt{x}+1)+x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}$

$\Leftrightarrow B=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}$

$\Leftrightarrow B=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

$\Rightarrow P=B:A=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}:\dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$

$\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2}.\dfrac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$

$\Rightarrow P=(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})$

Vậy $P=(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})$

c) Ta có:

$P=(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow P=-x+\sqrt{x}+2$

$\Leftrightarrow P=-x+\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow P=-\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow P=\dfrac{9}{4}-\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2$

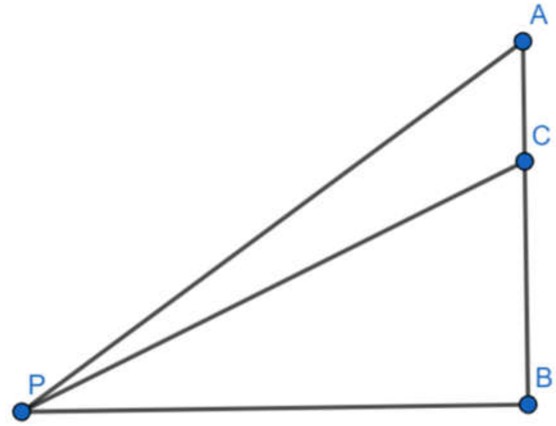
Mà $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow P\leq\dfrac{9}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{9}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{4}$

Bài 2 (1,0 điểm). Một người muốn làm biển quảng cáo cho cửa hàng. Biết rằng từ điểm P cách cửa hàng $7\,\text{m}$ thì người đó nhìn thấy mái nhà dưới một góc 31° so với phương ngang (như hình vẽ). Cũng từ điểm P người đó sẽ nhìn thấy điểm trên cùng của bảng quảng cáo theo một góc 42° so với phương ngang. Tính chiều cao của biển quảng cáo theo đơn vị m. (lấy sấp xỉ đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải



Gọi điểm B là chân cửa hàng; điểm C là mái nhà; điểm A là điểm trên cùng của bảng quảng cáo

Như vậy, theo đề bài ta có: $\widehat{CPB}=31^0;\widehat{APB}=42^0$ và $BP=7(m)$

Ta có tam giác PBC và tam giác PBA là hai tam giác vuông tại B

Vì tam giác PBC vuông tại B nên $\tan\widehat{BPC}=\dfrac{CB}{BP}\Rightarrow\tan 31^0=\dfrac{CB}{7}\Rightarrow CB=7.\tan 31^0$

Vì tam giác APB vuông tại B nên $\tan\widehat{APB}=\dfrac{AB}{BP}\Rightarrow\tan 42^0=\dfrac{AB}{7}\Rightarrow AB=7.\tan 42^0$

$\Rightarrow AB-CB=7.\tan 42^0-7.\tan 31^0=7.\left(\tan 42^0-\tan 31^0\right)\approx 2,1\Rightarrow AC\approx 2,1(m)$

Mà chiều cao của bảng quảng cáo là AC.

Vậy chiều cao của bảng quảng cáo là 2,1 (m)

Bài 3 (2,5 điểm).

Trên mặt phẳng tọa độ xOy, cho đương thẳng (d_m) có phương trình $y=mx-2m+1$ (với m là tham số).

a) Tìm m để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình $y=-x+3m$.

b) Tìm m để (d_m) cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B phân biệt sao cho $\sin\widehat{BAO}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

<u>Lời giải</u>

a) $(d_m): y=mx-2m+1$

Để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình: $y=-x+3m$ khi:

$$\begin{cases}m=-1\\-2m+1\neq 3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\m\neq\dfrac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$$

Vậy $m=-1$ để (d_m) song song với y

b) $(d_m): y = mx - 2m + 1$

- $y=0 \Rightarrow mx-2m+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{2m-1}{m} \Rightarrow A\left(\dfrac{2m-1}{m},0\right) \Rightarrow OA=\left|\dfrac{2m-1}{m}\right|$
- $x=0 \Rightarrow mx-2m+1=-2m+1 \Rightarrow y=-2m+1 \Rightarrow B(0,-2m+1) \Rightarrow OB=|-2m+1|$

Ta có tam giác OAB là tam giác vuông nên $\sin\widehat{BAO}=\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \dfrac{OB^2}{AB^2}=\dfrac{1}{5}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông OAB có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$\Rightarrow \frac{OB^2}{AB^2}=\frac{OB^2}{OA^2+OB^2}=\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow 5OB^2 = OA^2 + OB^2$$
$$\Rightarrow 4OB^2 = OA^2$$
$$\Rightarrow 2OB = OA$$

Mà ta có: $OA=\left|\dfrac{2m-1}{m}\right|; OB=|-2m+1|$ nên:

$$\left|\frac{2m-1}{m}\right| = 2|-2m+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2m-1}{m}=2(-2m+1)\\ \dfrac{2m-1}{m}=2(-1+2m)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-1=-4m^2+2m\\ 2m-1=-2m+4m^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4m^2=1\\ 4m^2-4m+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm\dfrac{1}{2}\\ (2m-1)^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì 2 điểm A và B trùng nhau (loại)

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho hai đường tròn (O) và (O') thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B cố định. Gọi M là trung điểm OO' và điểm T đối xứng với A qua M. Đường tròn tâm T bán kính TA tương ứng cắt các đường tròn (O) và (O') tại các giao điểm thứ hai E và F.

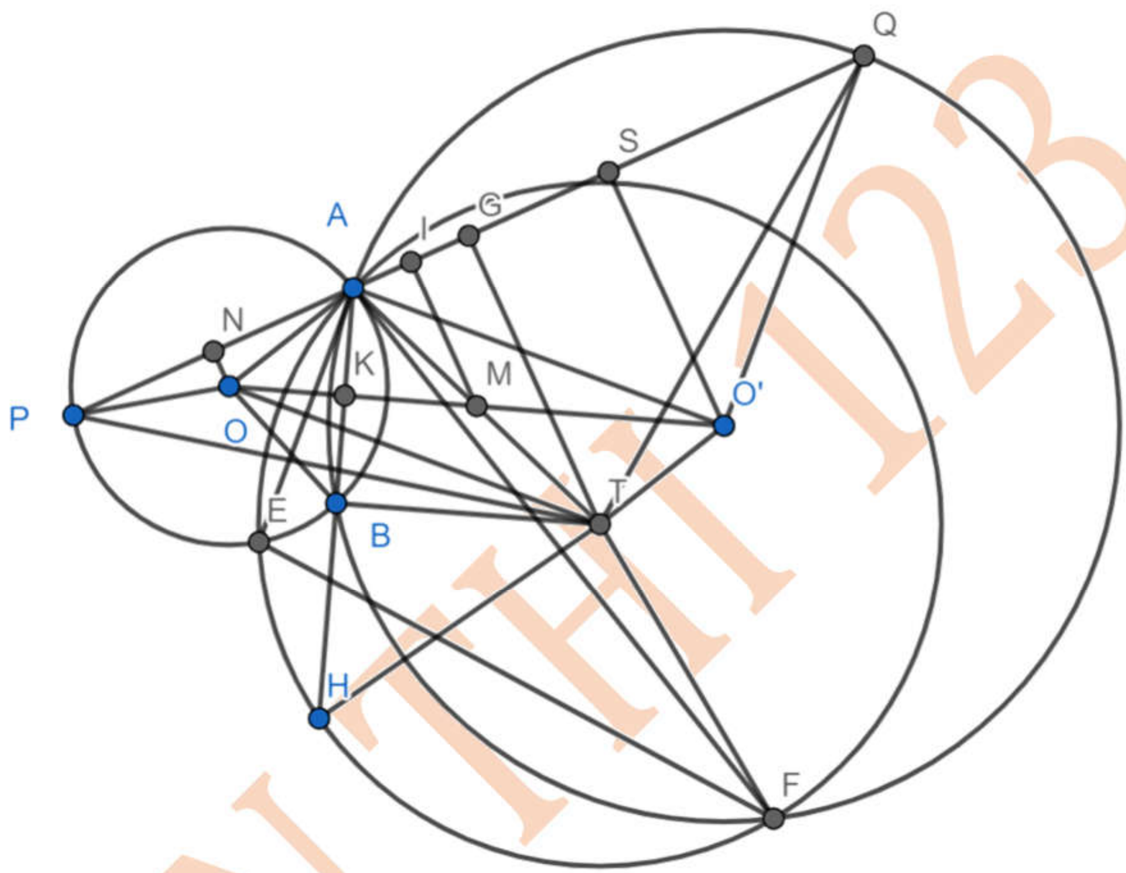
a) Chứng minh rằng các đường thẳng TB và OO' song song với nhau.

b) Chứng minh rằng AE là một tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định, khác A, khi hai đường tròn (O) và (O') thay đổi, nhưng luôn đi qua A,B

d) Trên đường tròn (O) lấy điểm P bất kỳ sao cho PA cắt (O') tại giao điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $TP=TQ$.

Lời giải



a) Gọi giao điểm của AB và OO' là K

Vì A,B là 2 giao điểm của (O) và (O') nên OO' là trung trực của AB

$\Rightarrow OO'$ đi qua trung điểm $AB \Rightarrow K$ là trung điểm AB

Xét tam giác ABT có:

M là trung điểm AT; K là trung điểm AB

$\Rightarrow MK$ là đường trung bình tam giác ABT $\Rightarrow$ $MK // BT$

$\Rightarrow OO' // BT$ (DPCM)

b) Vì E thuộc đường tròn tâm T bán kính TA nên $TE=TA$

Ta có: $\begin{cases} TE = TA \\ OA = OE \end{cases} \Rightarrow OT$ là đường trung trực $AE \Rightarrow OT \perp EA$

Mà $O'A \,//\, OT$ nên AE vuông góc OA'

$\Rightarrow AE$ là tiếp tuyến của (O')

c) Ta có BT song song OO' mà AB vuông góc OO'

$\Rightarrow BT \perp AB \Rightarrow \widehat{ABT} = 90^0$

Lấy H đối xứng với A qua B $\Rightarrow BA = HB$

Xét tam giác TBA và tam giác TBH có:

BT chung; $\widehat{TBA} = \widehat{TBH} = 90^0; BA = BH$

$\Rightarrow \Delta TBA = \Delta TBH\,(c.g.c) \Rightarrow TH = TA$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow TA = TE = TF = TH \Rightarrow H$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAEF

Mà A, B cố định nên H cố định

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua điểm H cố định.

d) Gọi chân đường cao từ O, O', M và T xuống PQ lần lượt là N, S, I và G

Vì A và P nằm trên đường tròn (O) $\Rightarrow N$ là trung điểm AP $\Rightarrow NP = NA$

Vì A và Q nằm trên đường tròn (O') $\Rightarrow S$ là trung điểm AQ $\Rightarrow SQ = SA$

Ta có ON và $O'S$ cùng vuông góc với PQ nên ON song song $O'S$

$\Rightarrow ONSO'$ là hình thang

Mà M là trung điểm $OO'; MI \,//\, ON$ và $O'S$ (vì cùng vuông góc với PQ)

$\Rightarrow MI$ là đường trung bình hình thang $ONSO'$

$\Rightarrow IN = IS$

Xét tam giác ATG có:

M là trung điểm $AT; MI \,//\, TG$ (vì cùng vuông góc với PQ)

$\Rightarrow MI$ là đường trung bình ΔATG

$\Rightarrow I$ là trung điểm $AG \Rightarrow IA = IG \Rightarrow GA = 2IA$

Ta có: $GP - GQ = GA + AP - (AQ - AG) = 2GA + AP - AQ = 2GA + 2NA - 2AS$

$= 2\left(GA + NA - AS\right) = 2\left(GA + \left(IN - IA\right) - \left(AI + IS\right)\right) = 2\left(GA - 2IA + IN - IS\right)$

Mà $GA = 2IA; IN = IS\left(cmt\right) \Rightarrow 2\left(GA - 2IA + IN - IS\right) = 0 \Rightarrow GP = GQ$

Xét tam giác TGP và tam giác TGQ có:

TG chung; $\widehat{TGP} = \widehat{TGQ} = 90^0; GP = GQ$

$\Rightarrow \Delta TGP = \Delta TGQ\left(c.g.c\right) \Rightarrow TP = TG$ (2 cạnh tương ứng)

Vậy $TP = TG$ (Đpcm)

Bài 5 (1,0 điểm)

1) Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 4$

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $z = (x - 2y)(y - 2x)$.

Chứng minh rằng $\dfrac{9}{xy + xz} + \dfrac{9}{xy + yz} + \dfrac{x^3 + y^3}{z} \geq \dfrac{11}{2}$.

Lời giải

1) Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 4$ (ĐK: $x > 1$)

Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = a$ (ĐK: $a > 0$)

$\Rightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 = a^2$

$\Rightarrow x + 1 + x - 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} = a^2$

$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 1} = a^2$

$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{a^2}{2}$

Thay vào giả thiết đề bài ta có:

$\dfrac{a^2}{2} = a + 4 \Leftrightarrow a^2 = 2a + 8 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 9 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 3 \\ a - 1 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right.$

Mà $a > 0$ nên $a = 4$

$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{a^2}{2} = 8$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 8 - x$

$\Rightarrow x^2 - 1 = (8 - x)^2$

$\Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 16x + 64$

$\Rightarrow 16x = 64 + 1$

$\Rightarrow x=\dfrac{65}{16}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy $x=\dfrac{65}{16}$ là nghiệm của phương trình

2) Ta có:

$z=(x-2y)(y-2x)=-2x^2+5xy-2y^2$

$\Rightarrow z=xy-(2x^2-4xy+2y^2)$

$\Rightarrow z=xy-2(x-y)^2$

Mà $(x-y)^2\geq 0$ với mọi x,y nên $z\leq xy$

$$\Rightarrow \frac{9}{xy+xz}\geq\frac{9}{xy+x^2y}\Rightarrow\frac{9}{xy+xz}\geq\frac{9}{xy(x+1)}$$

Tương tự $\Rightarrow \dfrac{9}{xy+yz}\geq\dfrac{9}{xy(y+1)}$

$$\frac{x^3+y^3}{z}\geq\frac{x^3+y^3}{xy}\Rightarrow\frac{x^3+y^3}{z}\geq\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy cho 2 số dương ta có:

- $\dfrac{x^2}{y}+y\geq 2\sqrt{\dfrac{x^2}{y}.y}\Rightarrow\dfrac{x^2}{y}+y\geq 2x$
- $\dfrac{y^2}{x}+x\geq 2\sqrt{\dfrac{y^2}{x}.x}\Rightarrow\dfrac{y^2}{x}+x\geq 2y$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+x+y\geq 2(x+y)$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng cộng mẫu ta có:

$$\frac{9}{xy(x+1)}+\frac{9}{xy(y+1)}\geq\frac{(3+3)^2}{xy(x+y+2)}\Rightarrow\frac{9}{xy(x+1)}+\frac{9}{xy(y+1)}\geq\frac{36}{xy(x+y+2)}$$

Mà $xy\leq\dfrac{(x+y)^2}{4}$ nên $\dfrac{9}{xy(x+1)}+\dfrac{9}{xy(y+1)}\geq\dfrac{144}{(x+y)^2(x+y+2)}$

$$\Rightarrow A\geq\frac{144}{(x+y)^2(x+y+2)}+x+y$$

Đặt $x+y=a$

$\Rightarrow A \geq \dfrac{144}{a^2(a+2)} + a$

Ta đi chứng minh: $\dfrac{144}{a^2(a+2)} + a \geq \dfrac{11}{2}$

$\Leftrightarrow 288 + 2a^4 + 4a^3 \geq 11a^3 + 22a^2$

$\Leftrightarrow 2a^4 - 7a^3 - 22a^2 + 288 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-4)^2(2a^2 + 9a + 18) \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy $\dfrac{9}{xy+xz} + \dfrac{9}{xy+yz} + \dfrac{x^3+y^3}{z} \geq \dfrac{11}{2}$ (DPCM)

Dấu "=" khi và chỉ khi $x = y = 2;\ z = 4$