MỤC LỤC

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 04 tháng 01 năm 2020
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giả sử phương trình $x^2-2x+a=0$ với a là số thực có 2 nghiệm x_1,x_2.

Chứng minh rằng $(4x_1-x_1^2+x_2^2)$ là số nguyên

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ (x+y+1)(5+2xy+x+y)=27. \end{cases}$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y nguyên thỏa mãn: $y=\dfrac{x^3+1}{x^4+1}$

2) Với a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca+\frac{a(a-b)^2}{2(c+b)}+\frac{b(b-c)^2}{2(c+a)}+\frac{c(c-a)^2}{2(a+b)}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình vuông $MNPQ$ sao cho M,N lần lượt thuộc các cạnh AB,AC, còn P,Q thuộc cạnh BC.

1) Chứng minh rằng $BQ.CP=MN^2$.

2) Gọi giao điểm của BN và MQ là E. Chứng minh rằng $PE//CM$.

3) Đường tròn (O) ngoại tiếp hình vuông $MNPQ$ cắt NB, MC theo thứ tự tại K, L $(K\ne N, L\ne M)$, QK cắt PL tại S, CM cắt NP tại F. Chứng minh rằng: $\angle KSE=\angle LSF$

Câu IV (1 điểm). Với $-1\le x\le 1$, $a_1,a_2,a_3\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$(a_1+x)(a_2+x)(a_3+x)\le 4(a_1a_2a_3+x)$$

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 05 tháng 01 năm 2020
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm)

1) Chứng minh rằng:

$$S=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\ldots-2018^2+2019^2=2039190$$

2) Giải phương trình:

$$3+2\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x}=x+5+2\sqrt{x+1}$$

Câu II (3 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số (m,n) nguyên dương thỏa mãn:

$$n!+505=m^2$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sqrt{9x^2+6x+2}+3\sqrt{x^2-2x+2}$$

Câu III (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O). H là trực tâm tam giác ABC. M là trung điểm BC. N đối xứng M với qua O.

1) Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại P. CP cắt AH tại Q. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tam giác QBC.

2) Gọi giao điểm khác N của AN với đường tròn đường kính MN là K. L đối xứng với K qua O. Chứng minh rằng LH và AP cắt nhau tại G trên (O).

3) Gọi J là trực tâm tam giác OBC. Chứng minh rằng JH đi qua điểm đối xứng của G qua BC.

Câu IV (1 điểm) Có thể chia tập hợp $M=\{1,2,3,4,\ldots,20\}$ thành các tập hợp con không giao nhau đôi một sao cho mỗi tập hợp con tồn tại một số bằng tổng các số còn lại của nó hay không?

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 27 tháng 03 năm 2021
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải phương trình

$$8x^9+x^3=3x^2+4x+2$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\7y^3+6xy(x+2y)=25\end{cases}$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y nguyên không âm thỏa mãn:

$$(x+y)(x^3+1)=x^4+3$$

2) Với $0<a\le b\le 2$, $b+2a\ge 2ab$, tìm giá trị lớn nhất của:

$$M=a^4+b^4$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E,F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A thì G nằm trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C của (O).

1) Chứng minh rằng hai tam giác GEC và GFB đồng dạng.

2) Gọi AD là đường kính của (O). GD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF tại K khác G.

Chứng minh rằng $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AK}{AD}$.

3) Giả sử trung trực của EF đi qua trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\dfrac{GE}{GF}=\dfrac{KE}{KF}$.

Câu IV (1 điểm). Chúng ta thêm dấu "$+$" hoặc "$-$" vào dãy các số $1,2,3,\ldots,2005$ sao cho tổng đại số của dãy nhận được là không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của các tổng đại số nhận được.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 28 tháng 03 năm 2021
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^8\left(1+x^2\right)+y^8\left(1+y^2\right)=4 \end{cases}$$

2) Chứng minh rằng $7.5^n+12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi n nguyên dương.

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y,z nguyên dương thỏa mãn

$$x+y+1=xyz.$$

2) Với $x,y,z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại các điểm D,E,F. Các đường thẳng IB,IC theo thứ tự cắt tại EF tại M,N.

1) Chứng minh rằng tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2) Giao điểm của hai đường thẳng DM,DN với (I) là Q,P khác D. Chứng minh rằng $PQ\parallel BC$
3) Gọi giao điểm của CP và BQ là J. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên EF. Chứng minh rằng DJ và AK cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu IV (1 điểm). Cho dãy số thực $x_1,x_2,\dots,x_n$ thuộc đoạn $[-1,1]$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 18 tháng 02 năm 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^3+y^3+12(x+y)=26 \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$x+5+\sqrt[3]{3x+5}=8x^3.$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn

$$(x+y)(x^2+x+2)=x+3$$

2) Với $a,b,c>0$, thỏa mãn $2+a+b+c=abc$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. Phân giác $\angle BAC$ cắt BC tại D. Trên trung trực AD lấy điểm K sao cho $KD\perp BC$.

1) Chứng minh rằng $\angle KAB=90^\circ-\angle ACB$
2) Gọi J là hình chiếu vuông góc của D lên KB. Chứng minh rằng tứ giác $AJDC$ nội tiếp
3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC cắt KC tại L khác C. Chứng minh rằng $DL\perp KC$.

Câu IV (1 điểm). Hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài các cạnh $AB=DC=4cm, AD=CB=5cm$. Cho 9 điểm phân biệt đôi một bên trong hình chữ nhật. Chứng minh rằng có tồn tại một tam giác có 3 đỉnh thuộc tập M gồm 4 đỉnh A,B,C,D và 9 điểm trong phân biệt, có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $1cm^2$.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 19 tháng 02 năm 2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+2y)(2y+1)(x+1)+2xy=20\\(3+xy)(2xy+2y+x)=20\end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}=2+|x-1|.$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn

$$3x^2+8x+29=y(2x+y).$$

2) Với $x, y, z \geq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+y}+\sqrt[3]{1+z}-\sqrt[3]{1+x+y+z}$$

Câu III (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm P di chuyển trên cung nhỏ AD. Gọi giao điểm của PB và PC với AD lần lượt là M và N; giao điểm của PB và AC là Q; giao điểm của PC và BD là R.

1) Chứng minh rằng $MR \perp NQ$.

2) Chứng minh rằng hai tam giác AMQ và DRN đồng dạng.

3) Gọi S là hình chiếu vuông góc của Q lên AB; gọi T là hình chiếu vuông góc của R lên CD; I là giao điểm của QR và ST. Chứng minh rằng đường thẳng PI luôn đi qua điểm cố định khi P thay đổi.

Câu IV (1 điểm). Xét 20 số $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20} \leq 70$ nguyên dương.

Chứng minh rằng trong các số hiệu $a_i - a_k$ $(1 \leq k < j \leq 20)$ có ít nhất 4 số bằng nhau.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 2)
Ngày 18 tháng 03 năm 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải phương trình $7x+6\sqrt{x+2}+2=2\sqrt{7x^2+16x+4}+3\sqrt{7x+2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(2x-y)=1 \\ 8x^3-y^3=x^2y^2+6 \end{cases}$.

Câu II (3 điểm).

1) Tìm các cặp số nguyên dương x, y thoả mãn

$$x^2y^2+4=4x^2+y^2+3x+3y.$$

2) Với các số thực dương a và b, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+3b}{\sqrt{2a^2+2ab+5b^2}}+\frac{3a+b}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PBA=\angle PCA$. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AEPF$ là một hình bình hành.

1) Chứng minh rằng hai tam giác PFB và PEC đồng dạng.

2) Gọi giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) là X, Y. Chứng minh rằng $EX.EY=FX.FY$.

3) Gọi AZ là đường kính của (O). Chứng minh rằng P là trực tâm tam giác XYZ.

Câu IV (1 điểm). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\ge\frac{5}{2}.$$

------------------------HẾT------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 2)
Ngày 19 tháng 03 năm 2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I.

1) Giải phương trình $3x^2+3x=(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+2$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=14x-y-11 \\ 3x^2-y^2=14x+y-13 \end{cases}$

Câu II.

1) Tìm các số nguyên tố p,q sao cho $4p+q$ và $9p+q$ là các bình phương của số tự nhiên.

2) Với các số thực dương a,b có tổng bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{\frac{1-a}{1+7a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+7b}}$$

Câu III. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB//CD$ và $DA=AB=BC$. (K) là đường tròn đi qua A và B đồng thời tiếp xúc AD và BC. P là một điểm thuộc (K) và nằm trong hình thang. Giả sử PA,PB lần lượt cắt cạnh CD tại E,F. Giả sử BE,AF theo thứ tự cắt AD,BC tại M,N.

1) Chứng minh rằng ba tam giác PAB,CBF và DEA đồng dạng.

2) Chứng minh rằng $NF.ME=NA.MB$

3) Chứng mình rằng $PM=PN$

Câu IV. Cho n là số nguyên dương. Xét $2n+1$ số nguyên dương phân biệt có tổng nhỏ hơn $(n+1)(3x+1)$. Chứng minh rằng trong $2n+1$ số nguyên dương được xét trên, tồn tại hai số có tổng là $2n+1$.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 3)
Ngày 15 tháng 04 năm 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+8y^3=9 \\ (x+2y)(6xy+1)=21 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $3x+2\sqrt{4x+5}=1+4\sqrt{x+3}$.

Câu II (3 điểm).

1) Với a,b,c là những số nguyên thoả mãn $a^5+b^5=29c^5+30$. Chứng minh rằng $a+b+c$ chia hết cho 30.

2) Với $a,b,c\ge 1$, chứng minh rằng $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\sqrt{a(bc+1)}$.

Câu III (3 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$. Giả sử P là điểm nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{APB}+\widehat{CPD}=180°$.

1) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APB và CPD có bán kính bằng nhau

2) Chứng minh ràng dây cung chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PCD vuông góc BC.

3) Chứng minh rằng hai tam giác PAB và PCD có cùng trực tâm.

Câu IV (1 điểm). Tìm p nguyên tố sao cho p^2-p+1 là lập phương của số nguyên dương.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 3)
Ngày 16 tháng 04 năm 2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ y^3+10x+13y+2=26x^3 \end{cases}$

2) Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x-1}}$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm $x,\ y$ nguyên dương thỏa mãn $9^x-7^x=2^y$

2) Với $a,\ b,\ c\ge 1$, chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\dfrac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\dfrac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\dfrac{a+b+c}{4}$

Câu II (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có đường cao $BE,\ CF$ ($E,\ F$ lần lượt thuộc cạnh $CA,\ AB$) và M là trung điểm của BC. Gọi (K) và (L) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác MFB và MCE.

1) Chứng minh rằng $\widehat{BKF}-\widehat{CLE}=\widehat{ACB}-\widehat{ABC}$

2) Gọi R_K và R_L lần lượt là bán kính của (K) và (L). Chứng minh rằng $\dfrac{R_K}{R_L}=\dfrac{MK}{ML}.\dfrac{BF}{CE}$

3) Chứng minh rằng MH và hai tiếp tuyến chung của (K) và (L) đồng quy.

Câu IV (1 điểm). Giả sử tại mỗi điểm của một ngũ giác ta viết một số nguyên sao cho tổng các số là dương. Nếu 3 đỉnh liên tiếp viết các số $x,\ y,\ z$ và $y<0$ ta thay thế 3 số này bởi các số $x+y,\ -y,\ z+y$ tương ứng. Nhưng phép biến đổi như vậy được thực hiện nếu ít nhất một trong 5 số là âm. Hỏi quá trình như trên có kết thúc sau một số hữu hạn bước?

------------------------HẾT------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 20 tháng 01 năm 2024
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3,0 điểm).

1) Giải phương trình $2x+\sqrt{3x+1}=2+2\sqrt{2-x}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\ y^3+17=6x(x+2).\end{cases}$

Câu II (3,0 điểm).

1) Tìm x,y nguyên thoả mãn $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

2. Với $a,b,c\in\mathbb{R}$, chứng minh rằng $a^4+\dfrac{b^4}{8}+\dfrac{c^4}{27}\geq 6\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^4$.

Câu III (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh CA và AB sao cho EF song song với BC. Các đường thẳng BE và CF theo thứ tự cắt các tiếp tuyến tại C và B của (O) lần lượt tại K và L.

1) Đường thẳng qua B và song song với AC theo thứ tự cắt KC và KA tại X và Y. Chứng minh rằng hai tam giác XBC và BCA đồng dạng.

2) Đường thẳng qua C song song với AB theo thứ tự cắt LB và LA lần lượt tại Z và T. Chứng minh rằng $\dfrac{XB}{ZC}=\dfrac{AF}{AE}$.

3) Đường thẳng qua E song song với AB lần lượt cắt AK và AL tại M và N. Đường thẳng qua F song song với AC lần lượt cắt AK và AL tại P và Q. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P và Q cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV (1,0 điểm). Với $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng $(a+1)(b+1)(c+1)\geq 27$.

--------------------------HẾT--------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 21 tháng 01 năm 2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+2y)(y^2+1)+(y+2x)=3(y^2+2)\\(y+2x)(x^2+1)=x+2y+3x^2\end{cases}$

2) Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-2x}=1+\sqrt[4]{2-x}$.

Câu II (3,0 điểm).

1) Với p,q,r,s là những số nguyên tố thoả mãn $5<p<q<r<s<p+10$.
Chứng minh rằng tổng của 4 số nguyên tố chia hết cho 60.

2. Với $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Câu III (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn đường cao BE, CF cắt nhau tại H (E,F lần lượt nằm trên các cạnh CA, AB). Gọi M là trung điểm BC. Gọi K là hình chiếu của H trên AM.

1) Chứng minh rằng bốn điểm B,C,K,H cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi (J) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBF và MCE. Chứng minh rằng (J) và (L) cùng đi qua K.

3) Gọi P là điểm đối xứng của A qua BC. Chứng minh rằng phân giác các góc $\widehat{BPC}$ và $\widehat{JML}$ đồng quy với JL.

Câu IV (1,0 điểm). Với x,y,z là những số nguyên dương thoả mãn $x+y+z=100$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x!y!z!$.

(Trong đó $x!=x(x-1)(x-2)...2\times1$)

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 2)
Ngày 9 tháng 03 năm 2024
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I.

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+4\right)=6$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 5x+4y+y^2-xy=9. \end{cases}$

Bài II.

1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$7x^2-30xy+7y^2=4(x+y)+932024.$$

2) Với các số thực dương a và b thoả mãn $a+b=2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}.$$

Bài III.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F. P là điểm bất kì nằm trên (I) và không nằm trong tam giác AEF. $(J), (K)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác BPF, CPE. (J) giao (K) tại M khác P.

1) Chứng minh rằng $\widehat{EPF}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

2) Chứng minh rằng B, C, I, M cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi L là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O). Chứng minh rằng L, I, J, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài IV.

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}\ge 3\sqrt{2}.$$

--------------------------- HẾT ---------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 2)
Ngày 10 tháng 03 năm 2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I.

1) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{3x+1}=x^3+3x^2+5x+3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x(y^2-1)=4(x^2+y^2)\\5y(x^2+1)=3(x^2+y^2)\end{cases}$

Bài II.

1) Tìm các số tự nhiên n sao cho 3^n+n^2+3 là bình phương của một số tự nhiên.

2) Với các số thực dương a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$, tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}.$$

Bài III.

Cho tam giác ABC có BC là cạnh nhỏ nhất. Trên cạnh AC, AB lấy các điểm E,F sao cho $\widehat{EBC}=\widehat{FCB}=\widehat{BAC}$. Tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác AEF giao nhau tại Q. BE giao CF tại K.

a) Chứng minh rằng E,F,Q,K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $JB=JC$.

c) QK giao AB, AC lần lượt tại T,S. Chứng minh rằng $QT=KS$.

Bài IV.

Cho n là số nguyên dương. Ban đầu, trên một bảng trắng có viết đúng $(n+1)^2$ số nguyên dương phân biệt là các ước của 10^n. Mỗi bước ta chọn 2 số a,b phân biệt bất kỳ trên bảng, sau đó xoá số này và viết thêm 2 số (bằng nhau) có giá trị là ước chung lớn nhất của a và b. Tiếp tục thực hiện như vậy cho đến khi tất cả các số trên bảng bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của các bước thực hiện có thể có.

---------------------------- HẾT ----------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ CHUYÊN KHTN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 04 tháng 01 năm 2020
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giả sử phương trình $x^2-2x+a=0$ với a là số thực có 2 nghiệm x_1,x_2.

Chứng minh rằng $(4x_1-x_1^2+x_2^2)$ là số nguyên

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ (x+y+1)(5+2xy+x+y)=27. \end{cases}$$

Lời giải

1) $4x_1-{x_1}^2+{x_2}^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)+4x_1$

Theo định lý Viet : $x_2+x_1=2 \Rightarrow 4x_1-{x_1}^2+{x_2}^2=2(x_2-x_1)+4x_1=2(x_2+x_1)=4$

2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ (x+y+1)(5+2xy+x+y)=27 \end{cases}$

$\Rightarrow (x+y+1)(x^2+y^2+1+2xy+2x+2y)=27$

$\Leftrightarrow (x+y+1)^3=27 \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y nguyên thỏa mãn: $y=\dfrac{x^3+1}{x^4+1}$

2) Với a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca+\frac{a(a-b)^2}{2(c+b)}+\frac{b(b-c)^2}{2(c+a)}+\frac{c(c-a)^2}{2(a+b)}.$$

Lời giải

1) $y=\dfrac{x^3+1}{x^4+1} \Rightarrow x^4+1 \mid x^3+1 \Rightarrow x^4+1 \mid x^4+x=x^4+1+x-1$

Ta có: $x^4+1 \mid x-1 \Rightarrow x^4+1 \mid x^3-1=x^3+1-2 \Rightarrow x^4+1 \mid 2 \Rightarrow x^4+1 \in \{1;2\}$

Từ $x^4+1=1 \Rightarrow (x=0,y=1), x^4+1=2 \Rightarrow (x=1,y=1),(x=-1,y=0)$

2) Ta có $(1-\alpha)(a-b)^2 \ge 0$ $(0<\alpha<1)$ suy ra $a^2+b^2 \ge 2ab+\alpha(a-b)^2$

Với $0<\alpha,\beta,\gamma<1$ ta có $b^2+c^2 \ge 2bc+\beta(b-c)^2$; $c^2+a^2 \ge 2ca+\gamma(c-a)^2$

Cộng 3 bất đẳng thức $\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca+\frac{\alpha}{2}(a-b)^2+\frac{\beta}{2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{2}(c-a)^2$

Vì a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác, chọn $\alpha=\frac{a}{c+b}$, $\beta=\frac{b}{c+a}$, $\gamma=\frac{c}{a+b}$

Ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

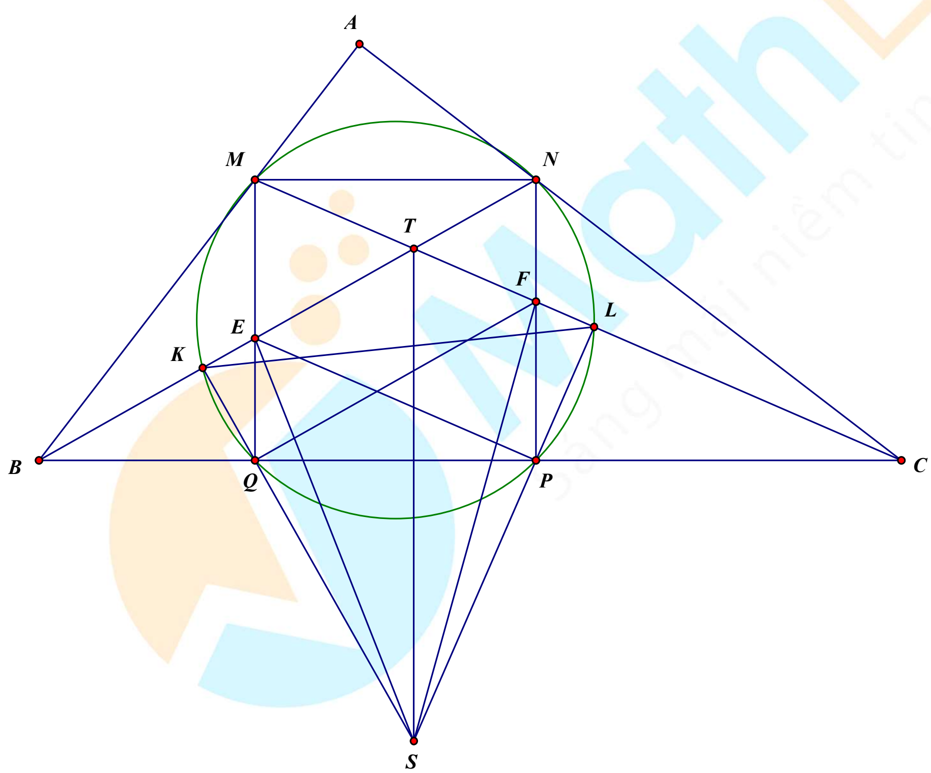
Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình vuông $MNPQ$ sao cho M,N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, còn P,Q thuộc cạnh BC.

1) Chứng minh rằng $BQ.CP=MN^2$.

2) Gọi giao điểm của BN và MQ là E. Chứng minh rằng $PE//CM$.

3) Đường tròn (O) ngoại tiếp hình vuông $MNPQ$ cắt NB, MC theo thứ tự tại K, L $(K \ne N, L \ne M)$, QK cắt PL tại S, CM cắt NP tại F. Chứng minh rằng: $\angle KSE=\angle LSF$

Lời giải



1) Ta dễ thấy hai tam giác vuông QMB và PNC đồng dạng. Nên $BQ.CP=QM.NP=MN^2$

2) Sử dụng câu 1) và định lý Thales, ta có: $\frac{EM}{EQ}=\frac{MN}{QB}=\frac{CP}{MN}=\frac{CP}{PQ}$

Suy ra $PE \parallel CM$.

3) Tương tự câu 2) thì $QF \parallel BN$ nên dễ suy ra $FN = EQ, FP = EM$

Do đó: $EK.EN = EM.FP = FL.FM$

Ta thu được: $\dfrac{EK}{FL} = \dfrac{FM}{EN} = \dfrac{FM}{PQ}.\dfrac{PQ}{EN} = \dfrac{CM}{CQ}.\dfrac{BP}{BN}$ (1)

Gọi BN cắt CM tại T . Dễ thấy tứ giác $SKTL$ nội tiếp đường tròn đường kính ST

Do đó $\angle KTS = \angle KLP = \angle KNP = \angle BNP$ nên hai tam giác vuông PBN và KST đồng dạng.

Tương tự hai tam giác vuông QCM và LST đồng dạng

Từ đó $\dfrac{CM}{CQ}.\dfrac{BP}{BN} = \dfrac{ST}{SL}.\dfrac{SK}{ST} = \dfrac{SK}{SL}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\dfrac{EK}{FL} = \dfrac{SK}{SL}$, hay hai tam giác vuông KES và LFS đồng dạng

Vậy $\angle KSE = \angle LSF$.

Câu IV (1 điểm). Với $-1 \le x \le 1$, $a_1, a_2, a_3 \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x) \le 4(a_1a_2a_3 + x)$$

Lời giải

Ta chứng minh :

Với $-1 \le x \le 1$, $a_1, a_2 \ge 1$ ta có $\left(\dfrac{a_1 + x}{2}\right)\left(\dfrac{a_2 + x}{2}\right) \le \dfrac{a_1a_2 + x}{2} \Rightarrow x^2 + (a_1 + a_2 - 2)x - a_1a_2 \le 0$

Vế trái $\le 1 + (a_1 + a_2 - 2)x - a_1a_2 = -(a_1 - 1)(a_2 - 1) \le 0$ (đúng)

(vì $|x| \le 1$)   (vì $a_1, a_2 \ge 1$)

Suy ra $\left(\dfrac{a_1 + x}{2}\right)\left(\dfrac{a_2 + x}{2}\right)\left(\dfrac{a_3 + x}{2}\right) \le \left(\dfrac{a_1a_2 + x}{2}\right)\left(\dfrac{a_3 + x}{2}\right) \le \left(\dfrac{a_1a_2a_3 + x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $(a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x) \le 4(a_1a_2a_3 + x)$ (đpcm)

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 05 tháng 01 năm 2020
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm)

1) Chứng minh rằng: $S=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-...-2018^2+2019^2=2039190$

2) Giải phương trình: $3+2\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x}=x+5+2\sqrt{x+1}$

Lời giải

1) Ta có công thức:
$(n+1)^2-n^2=2n+1=(n+1)+n$

Suy ra:
$S=1^2+\left(3^2-2^2\right)+\left(5^2-4^2\right)+...+\left(2019^2-2018^2\right)$

$S=1+2+3+4+5+...+2018+2019$

$S=\dfrac{2019.2020}{2}=2039190$

Vậy $S=2039190$.

2) Ta có: $3+2\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x}=x+5+2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x+1}=x+5+4\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}+1\right)^2=\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}+1=\sqrt{x+1}+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow x=0$

Vậy $x=0$.

Câu II (3 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số (m,n) nguyên dương thỏa mãn: $n!+505=m^2$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sqrt{9x^2+6x+2}+3\sqrt{x^2-2x+2}$

Lời giải

1) Ta có: $1!+505=506$; $2!+505=509$; $3!+505=511$ đều không là bình phương

$4!+505=529=23^2$; $5!+505=625=25^2$; $6!+505=1225=35^2$

$\Rightarrow$ Có 3 nghiệm là: $(4;23),(5;25),(6;35)$

$7!+505=5545$; $9!+505=363385$ đều không là bình phương vì không chia hết cho 25

$8!+505=40825=25.1633$ không là bình phương vì 1633 không là bình phương

Xét $n\geq 10 \Rightarrow 10!$ có hai số 0 tận cùng $\Rightarrow 10!+505$ có 2 số tận cùng là 05

$\Rightarrow n^2+505$ chia hết cho 5, không chia hết cho 25 $\Rightarrow$ Không là bình phương

Vậy các cặp số thỏa mãn là $(4;23),(5;25),(6;35)$.

2) Ta có: $y=\sqrt{9x^2+6x+2}+3\sqrt{x^2-2x+2}$

$$\Rightarrow y=\sqrt{(3x+1)^2+1^2}+\sqrt{(3-3x)^2+3^2}\ge\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $3x+1=1-x\Rightarrow x=0$

Vậy GTNN của hàm số đã cho là $4\sqrt{2}$ khi $x=0$.

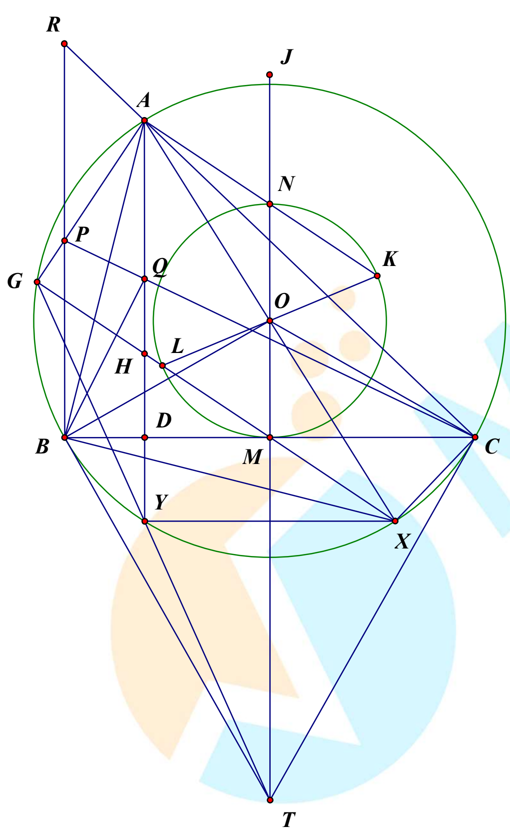
Câu III (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O). H là trực tâm tam giác ABC. M là trung điểm BC. N đối xứng M với qua O.

1) Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại P. CP cắt AH tại Q. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tam giác QBC.

2) Gọi giao điểm khác N của AN với đường tròn đường kính MN là K. L đối xứng với K qua O. Chứng minh rằng LH và AP cắt nhau tại G trên (O).

3) Gọi J là trực tâm tam giác OBC. Chứng minh rằng JH đi qua điểm đối xứng của G qua BC.

Lời giải



1) Gọi giao điểm của AH với BC là D, AX là đường kính của (O), AC cắt BP tại R

Dễ thấy các tam giác ABR và XBC có cạnh tương ứng vuông góc nên trung tuyến tương ứng vuông góc

Có XM là trung tuyến của tam giác XBC

Lại do tính đối xứng nên $XM//AN\perp AP$

Do vậy AP là trung tuyến của tam giác

Khi đó P là trung điểm BR

$\Rightarrow Q$ là trung điểm AD

Vậy $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta QBC}$.

2) Gọi giao điểm của XM với (O) là G khác X

$\Rightarrow AG\perp XM//AN\perp AP$

$\Rightarrow A,P,G$ thẳng hàng (1)

Do tính chất đối xứng nên $XL//AK//XM$

$\Rightarrow L$ nằm trên $XM\Rightarrow L,H,G$ thẳng hàng (2)

Từ (1), (2) ta suy ra LH và AP cắt nhau tại G thuộc (O).

3) Gọi T đối xứng với J qua BC

Do J là trực tâm tam giác OBC

Nên TB,TC tiếp xúc $(O)\Rightarrow\widehat{TGB}=\widehat{XGC}$

Gọi Y là giao điểm của GT với (O)

$\Rightarrow XY//BC\Rightarrow D$ là trung điểm của YH

$\Rightarrow GT$ đi qua điểm đối xứng của H qua BC

Lấy đối xứng qua BC thì JH phải đi qua điểm đối xứng của G qua BC.

Câu IV (1 điểm) Có thể chia tập hợp $M=\{1,2,3,4,...,20\}$ thành các tập hợp con không giao nhau đôi một sao cho mỗi tập hợp con tồn tại một số bằng tổng các số còn lại của nó hay không?

Lời giải

Có thể chia thành 6 tập con như sau:
$\{20;14;6\},\{19;12;7\},\{18;10;8\},\{17;13;4\},\{16;11;5\},\{15;9;1;2;3\}$

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 27 tháng 03 năm 2021
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải phương trình $8x^9+x^3=3x^2+4x+2$
2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\7y^3+6xy(x+2y)=25\end{cases}$

Lời giải

1) Ta có: $8x^9+x^3=3x^2+4x+2\Leftrightarrow(2x^3)^9+2x^3=(x+1)^3+x+1$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x+1\Leftrightarrow 2x^3-x-1=0\Leftrightarrow(x-1)(2x^2+2x+1)=0\Rightarrow x=1$$

Vậy $x=1$.

2) Ta có: $x^3+8y^3+6xy(x+2y)=x^3+y^3+1+3(x+y)(y+1)(x+1)$

$$\Leftrightarrow(x+2y)^3=(x+y+1)^3\Leftrightarrow y=1\Rightarrow(x+1)^2=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy $x=1;y=1$ và $x=-3;y=1$.

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y nguyên không âm thỏa mãn: $(x+y)(x^3+1)=x^4+3$
2) Với $0<a\le b\le 2$, $b+2a\ge 2ab$, tìm giá trị lớn nhất của: $M=a^4+b^4$

Lời giải

1) $x+y=\dfrac{x^4+3}{x^3+1}=\dfrac{x(x^3+1)+3-x}{x^3+1}=x+\dfrac{3-x}{x^3+1}\Rightarrow\ x^3+1|3-x$

Suy ra: $x^3+1|27-x^3=28-(x^3+1)\Rightarrow\ x^3+1|28$ (chú ý $x^3+1\ge1$)

$$\Rightarrow x^3+1\in\{1,2,4,7,14,28\}$$

Khi đó:

- $x^3+1=1\ \Rightarrow(x=0,y=3)$
- $x^3+1=2\ \Rightarrow(x=1,y=1)$
- $x^3+1=4$ (loại)

- $x^3+1=7$ (loại)
- $x^3+1=14$ (loại)
- $x^3+1=28 \Rightarrow (x=3, y=3)$

2) Ta có $17=1^4+2^4=a^4\left(\frac{1^4}{a^4}+\frac{2^4}{b^4}\right)+\left(b^4-a^4\right).\frac{2^4}{b^4}$

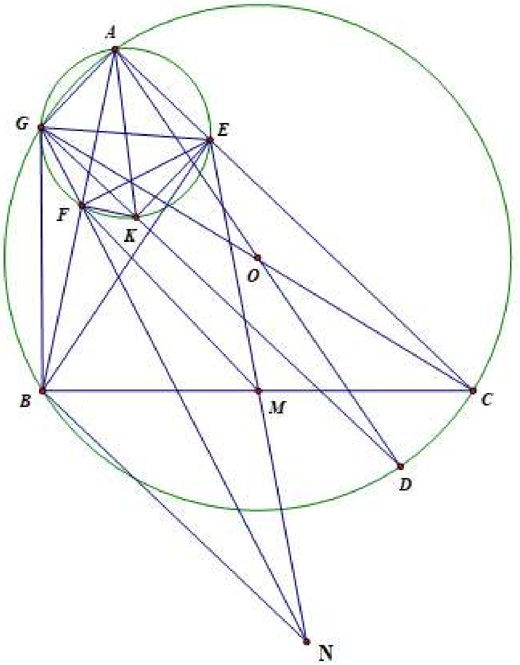
$$\Rightarrow 17 \ge 2a^4.\underbrace{\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}{2}\right)^4}_{\ge 1}+\left(b^4-a^4\right).\frac{2^4}{b^4} \ge 2a^4+b^4-a^4=a^4+b^4$$

$$\Rightarrow M_{\max}=17 \quad (a=1, b=2)$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A thì G nằm trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C của (O).

1) Chứng minh rằng hai tam giác GEC và GFB đồng dạng.
2) Gọi AD là đường kính của (O). GD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF tại K khác G.
   Chứng minh rằng $\frac{EF}{BC}=\frac{AK}{AD}$.
3) Giả sử trung trực của EF đi qua trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\frac{GE}{GF}=\frac{KE}{KF}$.

Lời giải



1) Từ các góc nội tiếp bằng nhau $\angle GEC = \angle GFA$ và $\angle GCA = \angle GBA$

Ta suy ra $\Delta GEC \sim \Delta GFB$ (g.g).

2) $\Delta GEC \sim \Delta GFB$ suy ra $\Delta GFE \sim \Delta GBC$ (c.g.c)

Ta dễ thấy $\angle AGK = \angle AGD = 90^\circ$ nên AK là đường kính của đường tròn (GEF)

Tỷ lệ đồng dạng bằng tỷ lệ bán kính (hay đường kính) của đường tròn ngoại tiếp tương ứng nên $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AK}{AD}$.

3) Gọi M là trung điểm BC thì $ME = MF$. Lấy N đối xứng E qua $M \Rightarrow FN \perp FE$.

$\Rightarrow \angle BFN = \angle KFE$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Do tính đối xứng nên $BN \parallel CE \perp KE \Rightarrow \angle BNF = \angle KEF$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta KEF \sim \Delta BNF$ (g.g). Từ 1) ta có:

$$\frac{KE}{KF} = \frac{BN}{BF} = \frac{EC}{FB} = \frac{GE}{GF}$$

Câu IV (1 điểm). Chúng ta thêm dấu "+" hoặc "−" vào dãy các số $1, 2, 3, \ldots, 2005$ sao cho tổng đại số của dãy nhận được là không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của các tổng đại số nhận được.

Lời giải

Ta có $1 + 2 + 3 + \ldots .2005 = 2005.1003$ là số lẻ.

Mỗi lần đổi dấu tổng thay đổi một lượng chẵn (bằng 2)

$\Rightarrow$ Tổng đại số không thay đổi tính chất chẵn lẻ $\Rightarrow$ Mọi tổng đại số là số lẻ.

Tổng đại số $1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \ldots + (2002 - 2003 - 2004 + 2005) = 1$ là số lẻ nhỏ nhất

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 28 tháng 03 năm 2021
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^8\left(1+x^2\right)+y^8\left(1+y^2\right)=4 \end{cases}$

2) Chứng minh rằng $7.5^n+12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi n nguyên dương.

Lời giải

1) Ta có BĐT: $x^8+y^8\geq 2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^4=2$; $x^{10}+y^{10}\geq 2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^5=2$

$\Rightarrow x^8\left(1+x^2\right)+y^8\left(1+y^2\right)\geq 4$. Đẳng thức xảy ra khi $x^2=y^2=1$.

2) Ta có $7.5^{2n}=7(19+6)^n\equiv 7.6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.5^{2n}+12.6^n\equiv 7.6^n+12.6^n=19.6^n \pmod{19}$ $(dpcm)$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y,z nguyên dương thỏa mãn

$$x+y+1=xyz.$$

2) Với $x,y,z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Lời giải

1) Vì vai trò của x,y như nhau trong phương trình, ta có thể giả sử $1\leq x\leq y$

+ Nếu $x=y\Rightarrow 2y+1=y^2z\Rightarrow y^2\mid 2y+1\Rightarrow y^2\mid 4y^2-1\Rightarrow y^2\mid 1\Rightarrow y=1;\ z=3$

Đáp số: $x=y=1;\ z=3$

+ Nếu $x<y\Rightarrow 2y+1>x+y+1>xyz\Rightarrow 2y\geq xyz\Rightarrow xz\leq 2\Rightarrow xz\in\{1;2\}$

Xét trường hợp

TH1: $xz=1\Rightarrow x=z=1\Rightarrow y+2=z$ (loại)

TH2: $xz=2$

+ $\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow y+2=2y \Rightarrow y=2 \Rightarrow (x;y;z)=(1;2;2)$

+ $\begin{cases} x=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y+3=2y \Rightarrow y=3 \Rightarrow (x;y;z)=(2;3;1)$

2) Từ điều kiện $xy+yz+zx=1$, ta có công thức $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\dfrac{1-y^2}{1+y^2}=\dfrac{2z(1+xy)}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$

$\Rightarrow 2=\dfrac{2x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{2y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{2z(1+xy)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$

$\Rightarrow (z+y)(1+x^2)=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z(1+xy)$

$\Rightarrow y+z=y^2(z+x)+z(1+xy)$

$\Rightarrow y=y^2(z+x)+xyz$

$\Rightarrow 1=xy+yz+zx$ (đúng)

Vì $\dfrac{1+xy}{\sqrt{(a+x^2)(1+y^2)}}\le 1 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\le\dfrac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$

Suy ra $P\le\dfrac{2(1+z)}{\sqrt{1+z^2}}$ $\Rightarrow$ ta cần CMR $\dfrac{2(1+z)}{\sqrt{1+z^2}}\le 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (1+z)^2\le 2(1+z^2)\Rightarrow 1+z^2\ge 2z$ (đúng)

$\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{2}$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Các đường thẳng IB, IC theo thứ tự cắt tại EF tại M, N.

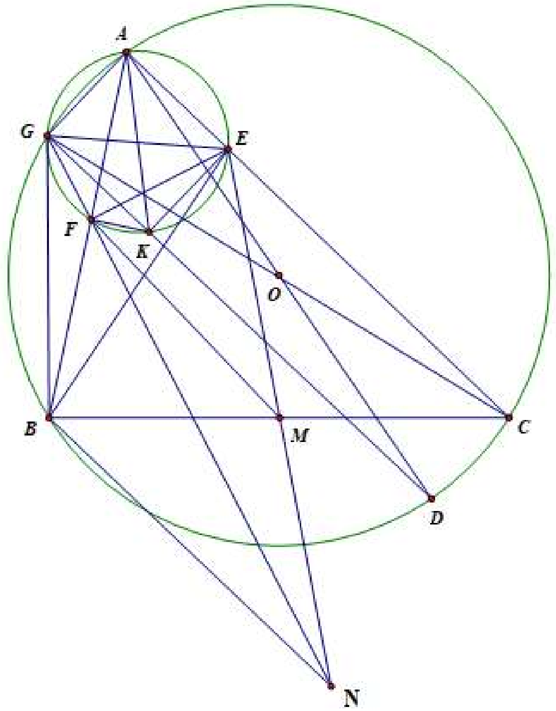
1) Chứng minh rằng tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2) Giao điểm của hai đường thẳng DM, DN với (I) là Q, P khác D. Chứng minh rằng $PQ \parallel BC$
3) Gọi giao điểm của CP và BQ là J. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên EF. Chứng minh rằng DJ và AK cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

1) Từ các góc nội tiếp bằng nhau $\angle GEC=\angle GFA$ và $\angle GCA=\angle GBA$
Ta suy ra $\Delta GEC\sim\Delta GFB$ (g.g).
2) $\Delta GEC\sim\Delta GFB$ suy ra $\Delta GFE\sim\Delta GBC$ (c.g.c)

Ta dễ thấy $\angle AGK=\angle AGD=90^\circ$ nên AK là đường kính của đường tròn (GEF)

Tỷ lệ đồng dạng bằng tỷ lệ bán kính (hay đường kính) của đường tròn ngoại tiếp tương ứng nên $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AK}{AD}$.



3) Gọi M là trung điểm BC thì $ME=MF$. Lấy N đối xứng E qua M $\Rightarrow FN\perp FE$.

$\Rightarrow \angle BFN=\angle KFE$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Do tính đối xứng nên $BN \parallel CE\perp KE \Rightarrow \angle BNF=\angle KEF$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta KEF\sim\Delta BNF$ (g.g). Từ 1) ta có: $\dfrac{KE}{KF}=\dfrac{BN}{BF}=\dfrac{EC}{FB}=\dfrac{GE}{GF}$

Câu IV (1 điểm). Cho dãy số thực $x_1,x_2,...,x_n$ thuộc đoạn $[-1,1]$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

Lời giải

Ta có $1+2+3+....2005=2005.1003$ là số lẻ.

Mỗi lần đổi dấu tổng thay đổi một lượng chẵn (bằng 2)

$\Rightarrow$ Tổng đại số không thay đổi tính chất chẵn lẻ $\Rightarrow$ Mọi tổng đại số là số lẻ.

Tổng đại số $1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+...+(2002-2003-2004+2005)=1$ là số lẻ nhỏ nhất.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 18 tháng 02 năm 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^3+y^3+12(x+y)=26 \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$x+5+\sqrt[3]{3x+5}=8x^3.$$

Lời giải

1) $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^3+y^3+12(x+y)=26 \end{cases}$ $(*)$

$(*) \Leftrightarrow x^3+y^3+1+3(x+y)(x+1)(y+1)=27$ (vì $(x+1)(y+1)=4$)

$\Leftrightarrow (x+y+1)^3=27 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

2) $x+5+\sqrt[3]{3x+5}=8x^3 \Leftrightarrow 3x+5+\sqrt[3]{3x+5}=(2x)^3+2x$

Nếu $\sqrt[3]{3x+5}>2x \quad \Rightarrow$ Vế trái $>$ Vế phải (loại)

Nếu $\sqrt[3]{3x+5}<2x \quad \Rightarrow$ Vế trái $<$ Vế phải (loại)

Suy ra $\sqrt[3]{3x+5}=2x \Leftrightarrow 8x^3-3x-5=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(8x^2+8x+5\right)=0$

Vậy $x=1$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x,y nguyên thỏa mãn

$$(x+y)\left(x^2+x+2\right)=x+3$$

2) Với $a,b,c>0$, thỏa mãn $2+a+b+c=abc$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

1) $(x+y)\left(x^2+x+2\right)=x+3$

$\Rightarrow x+y=\dfrac{x+3}{x^2+x+2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow x^2+x+2 \mid x+3$

$\Rightarrow x^2+x+2 \mid x^2-9=\left(x^2+x+2\right)-\left(x+3\right)-8 \Rightarrow x^2+x+2 \mid 8$

Vì $x^2+x+2>1 \quad \Rightarrow x^2+x+2\in\{2,4,8\}$

- $x^2+x+2=2 \Rightarrow x=0$ (loại), $x=-1, y=2$
- $x^2+x+2=4 \Rightarrow x=1, y=0$, $x=-2$ (loại)
- $x^2+x+2=8 \Rightarrow x=2$ (loại), $x=-3, y=3$

2) Điều kiện $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=1$

Ta có $(a+b+c)^2<\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}a\sqrt{1+a}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b}}b\sqrt{1+b}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c}}c\sqrt{1+c}\right)^2$

$\le\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\right)\left(a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2\right)$

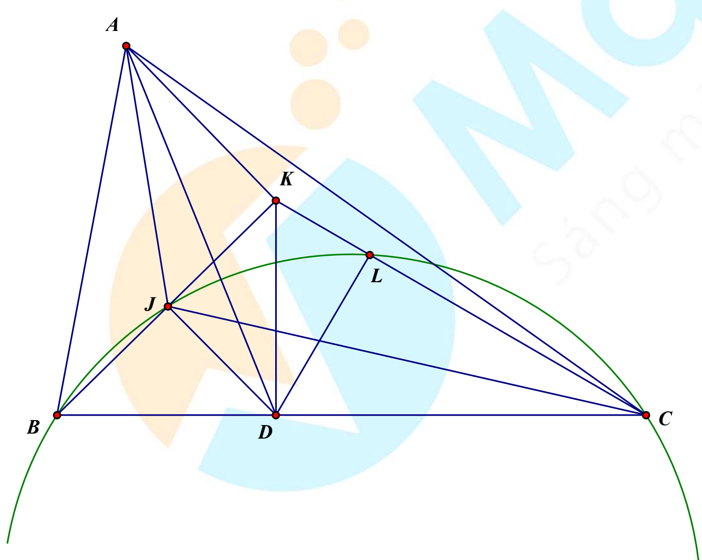
$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)\le a^3+b^3+c^3 \Rightarrow M\ge 2$

Vậy $M_{\min}=2$.

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. Phân giác $\angle BAC$ cắt BC tại D. Trên trung trực AD lấy điểm K sao cho $KD\perp BC$.

1) Chứng minh rằng $\angle KAB=90^\circ-\angle ACB$
2) Gọi J là hình chiếu vuông góc của D lên KB. Chứng minh rằng tứ giác $AJDC$ nội tiếp
3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC cắt KC tại L khác C. Chứng minh rằng $DL\perp KC$.

Lời giải



1) (1 điểm) Ta có biến đổi góc:

$\angle KAB=\angle DAB+\angle KAD=\angle DAC+\angle KDA=\angle DAC=A\angle DC-90^\circ$

$=180^\circ-\angle ACB-90^\circ=90^\circ-\angle ACB$

2) (1 điểm) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông thì $KA^2 = KD^2 = KJ.KB$.

Kết hợp câu 1) ta suy ra $\angle KJA = \angle KAB = 90^\circ - \angle ACB$

Từ đó $\angle AJD + \angle ACB = \left(90^\circ - \angle ACB\right) + 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ$

Ta suy ra tứ giác $AJDC$ nội tiếp.

3) (1 điểm) Gọi L' là hình chiếu vuông góc của D lên KC.
Chứng minh tương tự câu 2) thì tứ giác $AL'DB$ nội tiếp
Từ đó ta thu được $\angle BJC = 90^\circ + \angle DJC = 90^\circ + \angle DAB = 90^\circ + \angle DL'B = \angle BLC$
Ta suy ra tứ giác $BCL'J$ nội tiếp
$\Rightarrow L'$ là giao điểm (khác C) của LC và đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC
Hay $L' \equiv L$. Từ đó $DL \perp KC$.

Câu IV (1 điểm). Hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài các cạnh $AB = DC = 4cm, AD = CB = 5cm$. Cho 9 điểm phân biệt đôi một bên trong hình chữ nhật. Chứng minh rằng có tồn tại một tam giác có 3 đỉnh thuộc tập M gồm 4 đỉnh A, B, C, D và 9 điểm trong phân biệt, có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $1cm^2$.

Lời giải

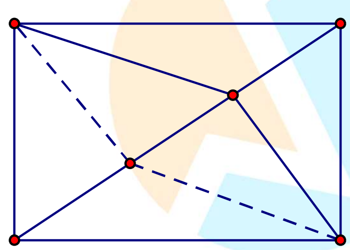
Lấy 1 điểm cùng với 4 đỉnh A, B, C, D tạo được 4 tam giác

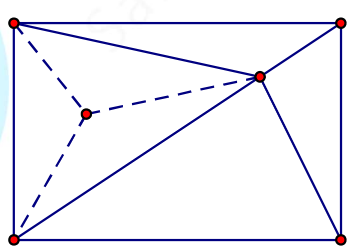
Mỗi lần lấy thêm 1 đỉnh thì số tam giác tăng 2 (trong 2 trường hợp)

Suy ra số tam giác bằng $4 + 8.2 = 20$.Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $5.4 = 20cm^2$

$\Rightarrow$ Diện tích trung bình bằng $\dfrac{20cm^2}{20} = 1cm^2$

$\Rightarrow$ có tồn tại 1 tam giác diện tích nhỏ hơn diện tích trung bình bằng (đpcm).





-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 19 tháng 02 năm 2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+2y)(2y+1)(x+1)+2xy=20\\(3+xy)(2xy+2y+x)=20\end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}=2+|x-1|.$$

Lời giải

1) $$\begin{cases}(x+2y)(2y+1)(x+1)+2xy=20\\(3+xy)(2xy+2y+x)=20\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2y+1)(2xy+2y+x)=20\\(3+xy)(2xy+2y+x)=20\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+2y=2+xy \quad \Leftrightarrow (x-2)(y-1)=0$$

2) Ta có $\sqrt{2x-1}\le\frac{2x-1+1}{2}=x$ (đẳng thức khi $x=1$), suy ra:

Vế trái $\le x+\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{x^2}+\sqrt{2-x^2}\le 2\sqrt{\frac{x^2+2-x^2}{2}}=2$

Vế phải ≥ 2. Suy ra Vế trái $\le$ Vế phải, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn

$$3x^2+8x+29=y(2x+y).$$

2) Với $x,y,z\ge 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+y}+\sqrt[3]{1+z}-\sqrt[3]{1+x+y+z}$$

Lời giải

1) $3x^2+8x+29=y(2x+y).$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x+29=(x+y)^2\Rightarrow 4x^2+8x+29=a^2\ (a\in Z^+)$$

$$\Leftrightarrow (2x+a)(2x-a)+(2x+a)+(2x-a)+4-4+29=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+a+2)(2x-a+2)=-25\Rightarrow 2x+a+2|25$$

Vì $2x+a+2>9 \Rightarrow \begin{cases} 2x+a+2=25 \\ 2x-a+2=-1 \end{cases} \Rightarrow 4x+4=24 \Rightarrow x=5$

$\Rightarrow (y+5)^2 = 13^2 \Rightarrow y=8$.

Vậy $x=5, y=8$.

2) Ta chứng minh kết quả $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+y} \ge 1+\sqrt[3]{1+x+y}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+y}-1\right)^3 \ge 1+x+y \Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+y}\right)\left(\sqrt[3]{1+y}-1\right)\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right) \ge 0$

Suy ra $M \ge 1+\sqrt[3]{1+x+y}+\sqrt[3]{1+z}-\sqrt[3]{1+x+y+z}$

$\ge 1+1+\sqrt[3]{1+x+y+z}-\sqrt[3]{1+x+y+z} = 2 = M_{\min} \quad (y=z=0)$

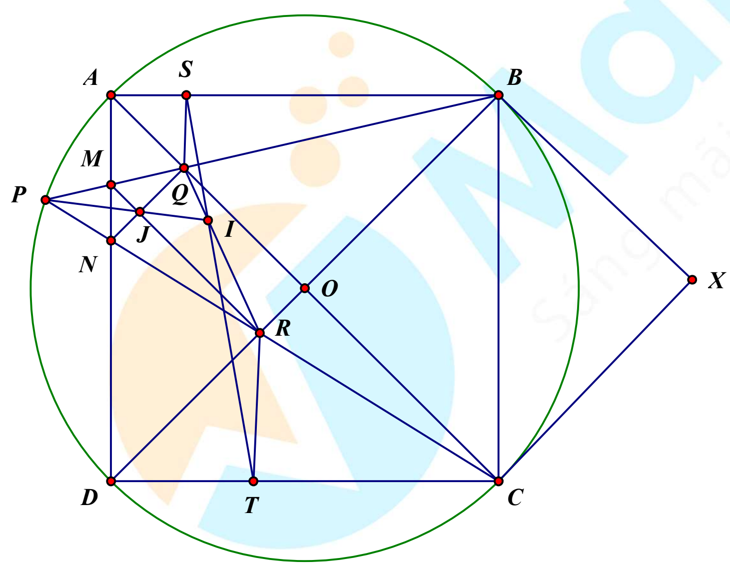
Câu III (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm P di chuyển trên cung nhỏ AD. Gọi giao điểm của PB và PC với AD lần lượt là M và N; giao điểm của PB và AC là Q; giao điểm của PC và BD là R.

1) Chứng minh rằng $MR \perp NQ$.

2) Chứng minh rằng hai tam giác AMQ và DRN đồng dạng.

3) Gọi S là hình chiếu vuông góc của Q lên AB; gọi T là hình chiếu vuông góc của R lên CD; I là giao điểm của QR và ST. Chứng minh rằng đường thẳng PI luôn đi qua điểm cố định khi P thay đổi.

Lời giải



1) (1,5 điểm) Ta có $\angle MPR = 45^\circ = \angle MDR$ (Do cùng chắn một phần tư đường tròn)

$\Rightarrow$ Tứ giác $PMDR$ nội tiếp $\Rightarrow \angle RMD = \angle RPD = 45^\circ = \angle CAD$ hay $MR \parallel AC$

Chứng minh tương tự $QN \parallel BD$. Mà $AC \perp BD$, ta suy ra $MR \perp NQ$.

2) (1 điểm) Ta dễ thấy $\angle QAM = 45^\circ = \angle RDN$

Mặt khác sử dụng góc có đỉnh ở trong đường tròn, ta có

$\angle AMQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{PD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{PD} = \angle NRD$.

Từ đó hai tam giác AMQ và DRN đồng dạng (g.g).

3) (0,5 điểm) Từ câu 2), $\Delta AMQ \backsim \Delta DRN$ và $\Delta NRD \backsim \Delta MNP$ (do tứ giác $PMDR$ nội tiếp từ câu 1)

ta có biến đổi tỷ số $\frac{AQ}{RD} = \frac{AQ}{ND}.\frac{ND}{RD} = \frac{QM}{RN}.\frac{PN}{PM}$ (1)

Dễ thấy các tam giác ASQ và DTR vuông cân $\Rightarrow \frac{AQ}{RD} = \frac{\sqrt{2}SQ}{\sqrt{2}RT} = \frac{SQ}{RT} = \frac{IQ}{IR}$ (2)

Từ $(1),(2)$, ta suy ra $\frac{IQ}{IR}.\frac{RN}{NP}.\frac{MP}{MQ} = 1 \Rightarrow PI, QN, MR$ đồng quy tại J

Cũng theo câu 1) dễ thấy tam giác JMN vuông cân tại J

Dựng tam giác XBC vuông cân tại X ra ngoài hình vuông

$\Rightarrow \Delta PBC \cup X \sim \Delta PMN \cup J$ (do hai tam giác PBC và PMN đồng dạng)

Khi đó P, J, X thẳng hàng. Vậy PI đi qua X cố định.

Câu IV (1 điểm). Xét 20 số $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20} \le 70$ nguyên dương.

Chứng minh rằng trong các số hiệu $a_i - a_k$ $(1 \le k < j \le 20)$ có ít nhất 4 số bằng nhau.

Lời giải

Xét 19 số nguyên dương $a_{20} - a_{19}$, $a_{19} - a_{18}$, $a_{18} - a_{17}$, ..., $a_2 - a_1$.

Giả sử phản chứng không có 4 số nào bằng nhau

Ta kí hiệu và xếp thứ tự 19 số đó là $1 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_{19}$

Từ giả thiết phản chứng $\Rightarrow$ trong dãy số trên không có 4 số liên tiếp bằng nhau

Suy ra: $1 \le b_1 \le b_2 \le b_3 \Rightarrow 2 \le b_4 \le b_5 \le b_6$, $3 \le b_7 \le b_8 \le b_9$, $4 \le b_{10} \le b_{11} \le b_{12}$

$5 \le b_{13} \le b_{14} \le b_{15}$, $6 \le b_{16} \le b_{17} \le b_{18}$, $7 \le b_{19}$

Suy ra $(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{19}) \ge 3(1+2+3+4+5+6) + 7 = 70$ (1)

Mặt khác $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{19} = a_{20} - a_1 \le 69$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow$ Mâu thuẫn $\Rightarrow$ đpcm

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 2)
Ngày 18 tháng 03 năm 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải phương trình $7x+6\sqrt{x+2}+2=2\sqrt{7x^2+16x+4}+3\sqrt{7x+2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(2x-y)=1 \\ 8x^3-y^3=x^2y^2+6 \end{cases}$.

Lời giải

1) Điều kiện $x\ge -\frac{2}{7}$. Đặt $a=\sqrt{7x+2}$, $b=\sqrt{x+2}$ $(a;\, b\ge 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $a^2+6b=2ab+3a \Leftrightarrow (a-3)(a-2b)=0$.

Trường hợp 1: $a=3 \Rightarrow \sqrt{7x+2}=3 \Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $a=2b \Rightarrow \sqrt{7x+2}=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$.

2) Ta có $8x^3-y^3-6xy(2x-y)=(xy)^2$ hay $(2x-y)^3=\left(\frac{1}{2x-y}\right)^2 \Rightarrow 2x-y=1$.

Thế vào hệ, ta có $\begin{cases} xy=1 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\left\{(1;1);\left(-\frac{1}{2};-2\right)\right\}$.

Câu II (3 điểm).

1) Tìm các cặp số nguyên dương x, y thoả mãn

$$x^2y^2+4=4x^2+y^2+3x+3y.$$

2) Với các số thực dương a và b, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+3b}{\sqrt{2a^2+2ab+5b^2}}+\frac{3a+b}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}.$$

Lời giải

1) Ta có $(xy+2)^2=(2x+y)^2+3x+3y$.

Mà $x,\ y\in\mathbb{N}^*$ nên $(2x+y)^2<(2x+y)^2+3x+3y<(2x+y)^2+4(2x+y)+4.$

Từ đó, ta có $(2x+y)^2<(2x+y)^2+3x+3y<(2x+y+2)^2 \Rightarrow xy+2=2x+y+1$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)=1 \Rightarrow (x;y)=(2;3)$ (thoả mãn).

2) Ta có $a^2+b^2\ge 2ab$ nên $P\le \dfrac{a+3b}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}+\dfrac{3a+b}{\sqrt{4a^2+4ab+b^2}}=\dfrac{a+3b}{a+2b}+\dfrac{3a+b}{2a+b}$

$=2-\dfrac{a+b}{a+2b}+2-\dfrac{a+b}{2a+b}=4-(a+b)\left(\dfrac{1}{a+2b}+\dfrac{1}{2a+b}\right)\le 4-(a+b)\cdot\dfrac{4}{3a+3b}=\dfrac{8}{3}.$

Vậy $P_{\max}=\dfrac{8}{3}$ khi $a=b.$

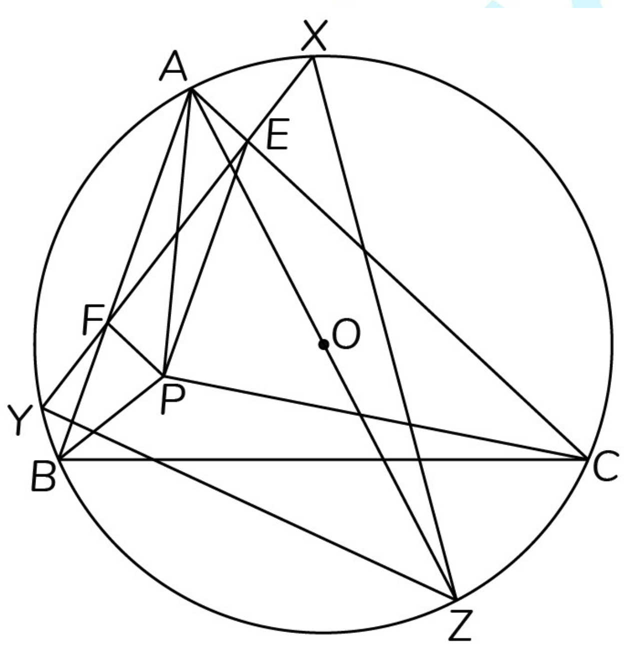
Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PBA=\angle PCA.$ Trên các cạnh $CA,\ AB$ lần lượt lấy các điểm $E,\ F$ sao cho $AEPF$ là một hình bình hành.

1) Chứng minh rằng hai tam giác PFB và PEC đồng dạng.

2) Gọi giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) là $X,\ Y$. Chứng minh rằng $EX.EY=FX.FY.$

3) Gọi AZ là đường kính của (O). Chứng minh rằng P là trực tâm tam giác $XYZ.$

Lời giải



1) Từ giả thiết $\angle PBA=\angle PCA$ và từ $AEPF$ là hình bình hành, ta suy ra $\angle PFB=\angle BAC=\angle PEC.$ Từ đó hai tam giác PFB và PEC đồng dạng.

2) Từ hai tam giác PFB và PEC đồng dạng, ta suy ra $PE.BF = CE.PF$ hay $FA.FB = EC.EA$ (do $PE = FA,\ PF = EA$).

Từ đó theo tính chất dây cung cắt nhau, suy ra $FX.FY = EX.EY$.

3) Gọi R là bán kính của (O) thì $FX.FY = R^2 - OF^2$ và $EX.EY = R^2 - OE^2$.

Kết hợp câu 2, ta suy ra $OE = OF$. Mặt khác $OX = OY$. Vậy EF và XY có cùng trung điểm. Lại từ ZA là đường kính của (O) ngoại tiếp tam giác XYZ, P lại đối xứng với A qua trung điểm XY (cũng là trung điểm EF) nên P là trực tâm tam giác XYZ.

Câu IV (1 điểm). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}} \ge \frac{5}{2}.$$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ab+bc}$

$\ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} = 1+\frac{x}{2}$ trong đó $x=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge 1.$

Mà $\frac{a+b+c}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}} \ge \sqrt{\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{x}\right)} \ge \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2x}.$

Do đó $P \ge \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \ge \frac{5}{2}$. Ta có điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 2)
Ngày 19 tháng 03 năm 2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I.

1) Giải phương trình $3x^2+3x=(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+2$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=14x-y-11\\3x^2-y^2=14x+y-13\end{cases}$

Lời giải

1) Điều kiện $x\ge 0$ hoặc $x\le -3$. Ta có $x^2+3x-(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+2x^2-2=0$

Hay $\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+(2x-2)(x+1)=0$

Hay $\left(\sqrt{x^2+3x}-(2x-2)\right)\left(\sqrt{x^2+3x}-(x+1)\right)=0$

$TH1:\sqrt{x^2+3x}=2x-2\Leftrightarrow x^2+3x=4x^2-8x+4$ với $x\ge 1\Rightarrow 3x^2-11x+4=0\Rightarrow x=\frac{1}{6}\sqrt{73}+\frac{11}{6}$

$TH2:\sqrt{x^2+3x}=x+1\Leftrightarrow x^2+3x=x^2+2x+1$ với $x\ge 0\Rightarrow x=1$

2) Ta có $\begin{cases}x^3+y^3=14x-y-11\\9x^2-3y^2=42x+3y-39\end{cases}$

Trừ 2 phương trình theo vế ta có $x^3+y^3-9x^2+3y^2=-28x-4y+28$ hay
$x^3-9x^2+28x-30+y^3+3y^2+4y+2=0$ hay $(y+1)^3+(y+1)=(3-x)^3+(3-x)$.

Từ đó suy ra $y+1=3-x$ hay $x+y=2$

Thế $y=2-x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có $3x^2-(2-x)^2=14x+2-x-13$ hay $2x^2-9x+7=0$

từ đó ta được các nghiệm $(1;1),\left(\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Câu II.

1) Tìm các số nguyên tố p,q sao cho $4p+q$ và $9p+q$ là các bình phương của số tự nhiên.

2) Với các số thực dương a,b có tổng bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{\frac{1-a}{1+7a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+7b}}$$

Lời giải

1) giả sử $\begin{cases}4p+q=x^2\\9p+q=y^2\end{cases}(x,y\in N)$

Khi đó $(y-x)(y+x)=5p$. Do thấy $p,q\ge 2$ nên $x>3,y>4$ nên ta có 2 TH:

$TH1:\begin{cases}y-x=1\\y+x=5p\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{5p-1}{2}$. Khi đó $4q=4\left(x^2-4p\right)=(25p-1)(p-1)$. Dễ thấy p,q lẻ là hai số chẵn mà $25p-1<p-1$ ta suy ra $25p-1=2p,p-1=2$ ta thu được $p=3,q=37$

$TH2:\begin{cases}y-x=5\\y+x=p\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{p-5}{2}$. Khi đó $4q=4\left(x^2-4p\right)=(p-1)(p-25)$. Giải tương tự như trên ta có $p-1=2q;p-25=2\Rightarrow p=27,1=13$ loại vì p không nguyên tố.

2) Ta có $P=\sqrt{\dfrac{a}{a+8b}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+8a}}$

$$\Rightarrow P^2=\frac{a}{a+8b}+\frac{b}{b+8a}+2\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+8b)(b+8a)}}=\frac{a}{a+8b}+\frac{b}{b+8a}+2\frac{\sqrt{ab(a+8b)(b+8a)}}{(a+8b)(b+8a)}$$

Mà $\sqrt{(a+8b)(b+8a)}\ge\sqrt{ab}+8\sqrt{ba}=9\sqrt{ab}$

Suy ra $P^2\ge\dfrac{a}{a+8b}+\dfrac{b}{b+8a}+\dfrac{18ab}{(a+8b)(b+8a)}=\dfrac{8a^2+20ab+8b^2}{8a^2+65ab+8b^2}\ge\dfrac{4}{9}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$. Vậy $P_{\min}=1$

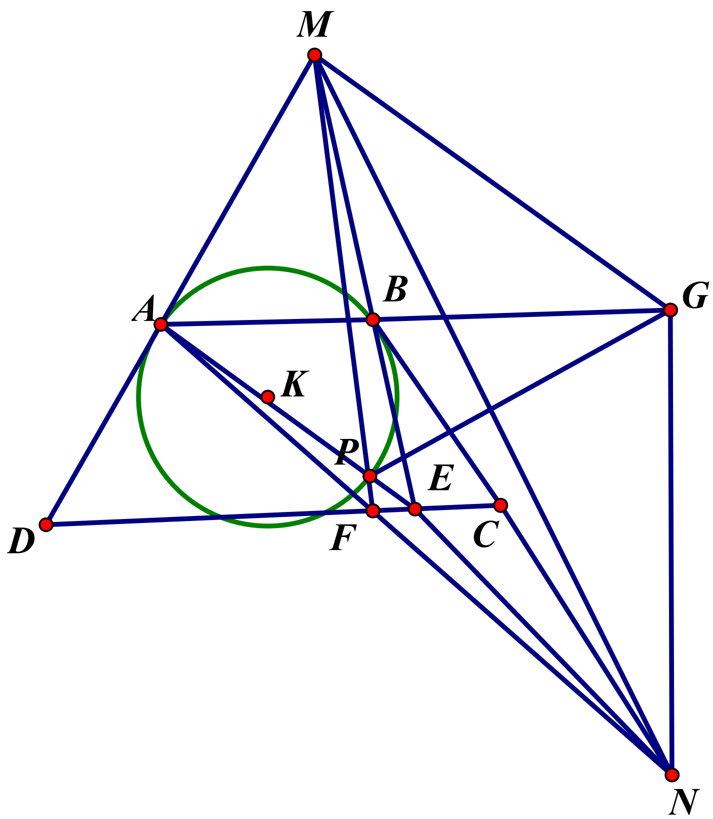
Câu III. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB//CD$ và $DA=AB=BC$. (K) là đường tròn đi qua A và B đồng thời tiếp xúc AD và BC. P là một điểm thuộc (K) và nằm trong hình thang. Giả sử PA,PB lần lượt cắt cạnh CD tại E,F. Giả sử BE,AF theo thứ tự cắt AD,BC tại M,N.

1) Chứng minh rằng ba tam giác PAB,CBF và DEA đồng dạng.

2) Chứng minh rằng $NF.ME=NA.MB$

3) Chứng minh rằng $PM=PN$

Lời giải



1) Ta có các góc tạo bởi tiếp tuyến và góc so le trong bằng nhau $\widehat{PAB}=\widehat{FBC},\widehat{PBA}=\widehat{BFC}$ suy ra $\Delta PAB \backsim \Delta CBF$, tương tự $\Delta PAB \backsim \Delta DEA$

2) Từ $AD = AB = BC$, các tam giác đồng dạng câu 1) và định lí Thales ta có biến đổi tỷ số $\frac{NF}{NA}=\frac{FC}{AB}=\frac{FC}{BC}=\frac{PB}{PA}$ và $\frac{MB}{ME}=\frac{AB}{DE}=\frac{AD}{DE}=\frac{PB}{PA}$

Từ đó $\frac{NF}{NA}=\frac{MB}{ME}$ hay $NF.ME = NA.MB$

3) Gọi phân giác ngoài tại đỉnh P của tam giác PAB cắt AB tại G , áp dụng câu 2) và tính chất đường phân giác, ta có $\frac{GB}{GA}=\frac{PB}{PA}=\frac{NF}{NA}=\frac{MB}{ME}$

Theo định lý Thales đảo, ta suy ra $FB // NG$ và $AE // MG$. Tiếp tục áp dụng định lý Thales ta lại có $\frac{GM}{GN}=\frac{GM}{AE}.\frac{AE}{BF}.\frac{BF}{GN}=\frac{GB}{AB}.\frac{PA}{PB}.\frac{AB}{GA}=\frac{PA}{PB}.\frac{GB}{GA}=1$

Đẳng thức cuối do tính chất đường phân giác. Vậy suy ra GM = GN.

Vì PG là phân giác ngoài nên các góc lo se trong bằng nhau $\widehat{PGM}=\widehat{EPG}=\widehat{BPG}=\widehat{PGN}$

Từ đó $\Delta GPM = \Delta GPN (c.g.c)$ suy ra $PM = PN$

Câu IV. Cho n là số nguyên dương. Xét $2n+1$ số nguyên dương phân biệt có tổng nhỏ hơn $(n+1)(3x+1)$. Chứng minh rằng trong $2n+1$ số nguyên dương được xét trên, tồn tại hai số có tổng là $2n+1$.

Lời giải

Giả sử các số nguyên dương đó là $a_1 < a_2 < ...a_{2n+1}$. Do các số nguyên dương phân biệt nên $a_1 \geq 2, a_2 \geq 2...$Nếu $a_{n+1} \geq 2n+1$ khi đó $a_{n+2} \geq 2n+2, ..., a_{2n+1} \geq 3x+1$

Suy ra $a_1 + ... + a_n \geq 1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $a_{n+1} + ... + a_{2n+1} \geq (2n+1) + ... + (3n+1) = \frac{(5n+2)(n+1)}{2}$

Khi đó tổng các số là $S = (a_1 + ... + a_n) + (a_{n+1} + ... + a_{2n+1}) \geq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(5n+2)(n+1)}{2} = (n+1)(3n+1)$ mâu thuẫn với gải thiết.

Do đó $a_{n+1} \leq 2n$, khi đó n + 1 số $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ thuộc n tập hợp $\{1;2n\}, \{2;2n-1\}, ...\{n;n+1\}$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 2 số thuộc cùng 1 tập, tức là chúng có tổng 2n + 1.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 3)
Ngày 15 tháng 04 năm 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+8y^3=9 \\ (x+2y)(6xy+1)=21 \end{cases}$.

2) Giải phương trình $3x+2\sqrt{4x+5}=1+4\sqrt{x+3}$.

Lời giải

1) Cộng 2 phương trình thu được $(x+2y)^3+(x+2y)=30$.

Đặt $t=x+2y$. Khi đó phương trình trở thành

$t^3+t-30=0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+10)=0 \Leftrightarrow t=3$ thu được $\begin{cases} x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \\ xy=1 \end{cases}$

$\Rightarrow y(3-2y)=1 \Leftrightarrow 2y^2-3y+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1; x=1 \\ y=\dfrac{1}{2}; x=2 \end{array}\right.$

2) Phương trình tương đương với $4x+6+2\sqrt{4x+5}=x+7+4\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2=\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5}=\sqrt{x+3}+1$

$\Leftrightarrow 4x+5=x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}=3x+1 \quad \left(x\ge -\dfrac{1}{3}\right)$

Bình phương 2 vế $\Rightarrow 4(x+3)=9x^2+6x+1 \Leftrightarrow 9x^2+2x-11=0 \Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn) hoặc $x=-\dfrac{11}{9}$ (loại)

Câu II (3 điểm).

1) Với a,b,c là những số nguyên thoả mãn $a^5+b^5=29c^5+30$. Chứng minh rằng $a+b+c$ chia hết cho 30.

2) Với $a,b,c\ge 1$, chứng minh rằng $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le \sqrt{a(bc+1)}$.

Lời giải

1) Ta có $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

$6\,|\,n(n-1)(n+1) \Rightarrow 6\,|\,n^5-n$. Ta chứng minh $5\,|\,n^5-n$

$n=5k\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

$n=5k+1\Rightarrow 5\,|\,n-1\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

$n=5k+4\Rightarrow 5\,|\,n-1\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

$n=5k+2\Rightarrow 5\,|\,n^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5\Rightarrow n^5-n$ chia hết cho 5

$n=5k+3\Rightarrow 5\,|\,n^2+1=(5k+3)^2+1=25k^2+30k+10\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

Tóm lại ta có $30\,|\,n^5-n$

Ta có $a^5+b^5+c^5=30c^5+30$ chia hết cho 30

Ta có $a^5+b^5+c^5=(a^5-a)+(b^5-b)+(c^5-c)+(a+b+c)$

Vì $30\,|\,a^5-a$; $30\,|\,b^5-b$; $30\,|\,c^5-c\Rightarrow 30\,|\,a+b+c$ (đpcm)

2) Ta có $\left(\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2\le(b-1+1)(1+c-1)=bc$

$\Rightarrow \sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\sqrt{bc}$ (1)

Ta cần phải CMR $\sqrt{bc}+\sqrt{a-1}\le\sqrt{a(bc+1)}$

Ta có $\left(\sqrt{bc}+\sqrt{a-1}\right)^2\le(1+a-1)(bc+1)$

$\Rightarrow \sqrt{bc}+\sqrt{a-1}\le\sqrt{a(bc+1)}$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow$ đpcm

1) Ta có $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

$6\,|\,n(n-1)(n+1)\Rightarrow 6\,|\,n^5-n$. Ta chứng minh $5\,|\,n^5-n$

$n=5k\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

$n=5k+1\Rightarrow 5\,|\,n-1\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

$n=5k+4\Rightarrow 5\,|\,n-1\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

$n=5k+2\Rightarrow 5\,|\,n^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5\Rightarrow n^5-n$ chia hết cho 5

$n=5k+3\Rightarrow 5\,|\,n^2+1=(5k+3)^2+1=25k^2+30k+10\Rightarrow 5\,|\,n^5-n$

Tóm lại ta có $30\,|\,n^5-n$

Ta có $a^5+b^5+c^5=30c^5+30$ chia hết cho 30

Ta có $a^5+b^5+c^5=\left(a^5-a\right)+\left(b^5-b\right)+\left(c^5-c\right)+\left(a+b+c\right)$

Vì $30\mid a^5-a$; $30\mid b^5-b$; $30\mid c^5-c \Rightarrow 30\mid a+b+c$ (đpcm)

2) Ta có $\left(\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2 \le (b-1+1)(1+c-1)=bc$

$\Rightarrow \sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\sqrt{bc}$ (1)

Ta cần phải CMR $\sqrt{bc}+\sqrt{a-1}\le\sqrt{a(bc+1)}$

Ta có $\left(\sqrt{bc}+\sqrt{a-1}\right)^2\le(1+a-1)(bc+1)$

$\Rightarrow \sqrt{bc}+\sqrt{a-1}\le\sqrt{a(bc+1)}$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow$ đpcm

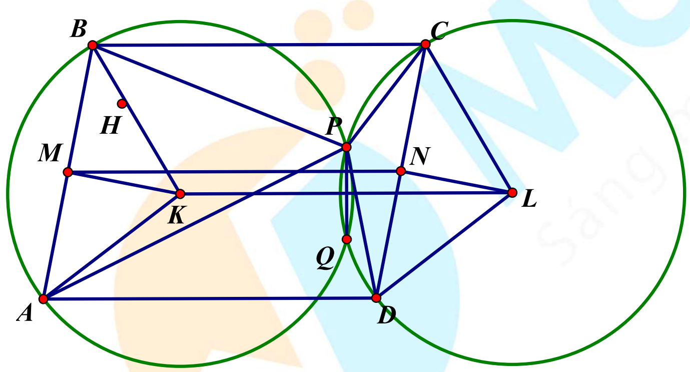
Câu III (3 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$. Giả sử P là điểm nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{APB}+\widehat{CPD}=180°$.

1) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APB và CPD có bán kính bằng nhau

2) Chứng minh ràng dây cung chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PCD vuông góc BC.

3) Chứng minh rằng hai tam giác PAB và PCD có cùng trực tâm.

Lời giải



1) (1 điểm)

Gọi (K) và (L) là đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và tam giác PCD.

Từ $\widehat{APB}+\widehat{CPD}=180°$. ta có thể giả sử $\widehat{APB}\le 90°$ thì $\widehat{CPD}\ge 90°$.

Khi đó $\widehat{AKB}=2\widehat{APB}=2\left(180°-\widehat{CPD}\right)=360°-2\widehat{CPD}-\widehat{CLD}$.

Kết hợp $AB=CD$, ta suy ra hai tam giác cân AKB và CLD bằng nhau (g.c.g)

2) (1 điểm)

Gọi M, N là trung điểm AB và CD

Từ hai tam giác cân AKB và CLD bằng nhau ở câu 1) suy ra KM song song và bằng LN

$\Rightarrow KL // MN //$BC. Dễ thấy dây cùng chung của (K) và (L) vuông góc KL nên dây cung chung đó vuông góc BC.

3) (1 điểm) Gọi H là trực tâm tam giác PAB thì $PH // KM$ và $PH = 2KM$.

Theo câu 2), KM song song và bằng LN nên $PH // LN$ và $PH = 2LN$

Ta suy ra H là trực tâm tam giác PCD (do $CPD \geq 90°$ thì P và H cùng phía CD).

Câu IV (1 điểm). Tìm p nguyên tố sao cho $p^2 - p + 1$ là lập phương của số nguyên dương.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $p^2 - p + 1 = b^3 \Rightarrow b^3 < p^2 < p^3 \Rightarrow b < p$

Nếu $p = 2 \Rightarrow p^2 - p + 1 = 3$ (loại)

$p = 3 \Rightarrow p^2 - p + 1 = 7$ (loại)

$\Rightarrow p$ là số nguyên tố > 5

$\Rightarrow b^3 > 21 \Rightarrow b > 2$

+ Ta có $p(p-1) = b^3 - 1 = (b-1)(b^2 + b + 1)$

Vì $b < p \Rightarrow p \nmid b - 1 \Rightarrow b^2 + b + 1$ chia hết cho $p \Rightarrow b^2 + b + 1 = kp$

$\Rightarrow p(p-1) = (b-1)kp \Rightarrow k(b-1) = p - 1$ (suy ra $k \geq 2$ vì $b < p$)

+ Ta có $b^2 + b + 1 = k(k(b-1)+1) = k^2b + k - k^2$

Vì $k - k^2 - 1 < 0 \Rightarrow b^2 + b < k^2b$

Hiển nhiên suy ra $b^2 + b - 1 = k^2b + k - k^2 - 2 = k^2(b-1) + k - 2$

Vì $k \geq 2 \Rightarrow b^2 + b - 1 \geq k^2(b-1)$

+ Vì $b > 2 \Rightarrow b + 1 < k^2 \leq \dfrac{b^2 + b - 1}{b - 1} = b + 2 + \dfrac{3}{b-1} < b + 3$

$\Rightarrow k^2 = b + 2 \Rightarrow b^2 + b + 1 = (b+2)(b-1) + k = b^2 + b - 2 + k \Rightarrow k = 3$

$\Rightarrow b + 2 = 9 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow p = \dfrac{7^2 + 7 - 1}{3} = 19$. Vậy $p = 19$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 3)
Ngày 16 tháng 04 năm 2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ y^3+10x+13y+2=26x^3 \end{cases}$

2) Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x-1}}$

Lời giải

1) Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=4 \\ x^3+y^3+1+12(x+y)+x+y+1=27x^3+3x\ (2) \end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow x^3+y^3+1+3(x+y)(x+1)(y+1)+(x+y+1)=(3x)^3+3x$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)^3+(x+y+1)=(3x)^3+3x$$

Nếu $x+y+1>3x$ suy ra vế trái > vế phải (loại)

$x+y+1<3x$ suy ra vế trái < vế phải (loại)

Suy ra $x+y+1=3x$, thu được: $\begin{cases} 2x-y=1\Rightarrow y=2x-1 \\ x+y+xy=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x=4\Leftrightarrow x^2+x=2\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & ;y=1 \\ x=-2 & ;y=-5 \end{array}\right.$$

2) Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2\sqrt{\dfrac{x+2-x}{2}}=2$

$$\sqrt{2x-1}\le\frac{2x-1+1}{2}=x\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\ge 1\Rightarrow\frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\ge 2$$

Để vế trái = vế phải thì: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-x}=2 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{2x-1}}=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=2-x \\ 2x-1=1 \end{cases}\Rightarrow x=1$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm $x,\ y$ nguyên dương thỏa mãn $9^x-7^x=2^y$

2) Với $a,\ b,\ c\ge 1$, chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\dfrac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\dfrac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\dfrac{a+b+c}{4}$

Lời giải

1) $9^x - 7^x = 2^y$ (1)

- Với $y = 1$ thì $9^x - 7^x = 2$

Nếu $x \ge 2$ ta có: $9^x - 7^x = (2+7)^x - 7^x > 2^x + 7^x - 7^x = 2^x \ge 2^2 > 2$ (mâu thuẫn)

Suy ra $x = 1$ (thỏa mãn).

- Với $y = 2$ thì $9^x - 7^x = 4$

Nếu $x \ge 2$ ta có: $9^x - 7^x = (2+7)^x - 7^x > 2^x + 7^x - 7^x = 2^x \ge 2^2$ (mâu thuẫn)

Suy ra $x = 1$ (không thỏa mãn).

- Với $y \ge 3$ thì: $2^y \equiv 0 \pmod 8$

Vì $9^x - 7^x \equiv 1 - (-1)^x \pmod 8$.

Mà $2^y \equiv 0 \pmod 8$ nên x chẵn.

Đặt $x = 2k\,(k \in \mathbb{N}^*)$. Phương trình (1) trở thành:

$9^{2k} - 7^{2k} = 2^y$

$\left(9^k - 7^k\right)\left(9^k + 7^k\right) = 2^y$

Đặt $\begin{cases} 9^k - 7^k = 2^a \\ 9^k + 7^k = 2^b \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}^*, b > a, a + b = y)$

Suy ra $2^b - 2^a = 2.7^k$

Nếu $a \ge 2$ thì $2^b - 2^a \,\vdots\, 2^2$. Mà $2.7^k \not\vdots\, 2^2$ nên $a = 1$.

Suy ra $9^k - 7^k = 2$.

Nếu $k \ge 2$ ta có: $9^k - 7^k = (2+7)^k - 7^k > 2^k + 7^k - 7^k = 2^k \ge 2^2 > 2$ (mâu thuẫn)

Suy ra $k = 1$. Do đó $x = 2, y = 5$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) \in \{(1,1); (2,5)\}$.

2)

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $b + c \ge 2\sqrt{bc}$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \le \dfrac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{ab-1}{bc}}$

Mà $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab-1}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}}\le\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ (1)

Tương tự, ta có $\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}\le\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ (2)

và $\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(c-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (3)

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3), ta được đpcm.
Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$.

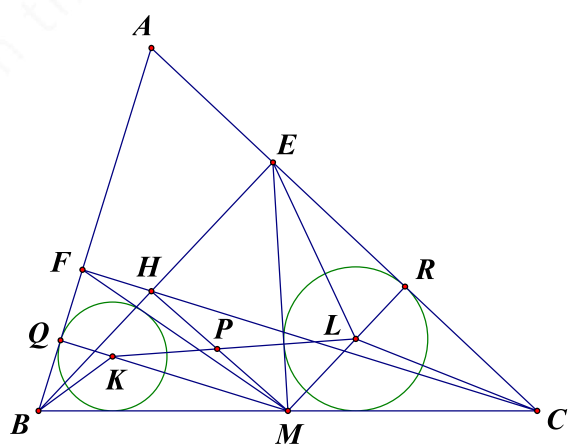
Câu II (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có đường cao BE, CF (E, F lần lượt thuộc cạnh CA, AB) và M là trung điểm của BC. Gọi (K) và (L) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác MFB và MCE.

1) Chứng minh rằng $\widehat{BKF}-\widehat{CLE}=\widehat{ACB}-\widehat{ABC}$

2) Gọi R_K và R_L lần lượt là bán kính của (K) và (L). Chứng minh rằng $\frac{R_K}{R_L}=\frac{MK}{ML}.\frac{BF}{CE}$

3) Chứng minh rằng MH và hai tiếp tuyến chung của (K) và (L) đồng quy.

Lời giải



1) (1,5 điểm)

Dễ thấy các tam giác MBF và MCE cân tại M.

Vậy $\widehat{BMF}=2.\widehat{BCF}=2.\left(90°-\widehat{ABC}\right)$.

Từ đó $\widehat{BKF}=90°+\frac{\widehat{BMF}}{2}=180°-\widehat{ABC}$.

Tương tự $\widehat{CLE}=180°-\widehat{ACB}$

Từ đó $\widehat{BKF}-\widehat{CLE}=\widehat{ACB}-\widehat{ABC}$.

2) (1 điểm) Dễ thấy (K) tiếp xúc BF tại trung điểm Q của BF, (L) tiếp xúc CE tại trung điểm R của CE. Theo tính chất phân giác, ta có $\frac{LR}{LM}=\frac{CR}{CM}=\frac{CE}{CB}$. Tương tự $\frac{KQ}{KM}=\frac{BF}{BC}$

Từ đó $\frac{R_K}{R_L}=\frac{KQ}{LR}=\frac{MK}{ML}.\frac{BF}{CE}$.

3) (0,5 điểm) Ký hiệu $d(X, Y, Z)$ là khoảng cách từ X tới đường thẳng đi qua Y và Z

Gọi P là giao hai tiếp tuyến chung trong của (K) và (L). Dễ thấy $\frac{PK}{PL}=\frac{MK}{ML}.\frac{BE}{CE}$

Từ đó $\frac{d(P,MK)}{d(P,ML)}=\frac{S_{MPK}/MK}{S_{MPL}/ML}=\frac{PK}{PL}\left(\frac{BE}{CE}.\frac{PL}{PK}\right)=\frac{BE}{CE}=\frac{FQ}{ER}=\frac{d(H,MK)}{d(H,ML)}$

Từ đẳng thức trên ta kết hợp đnh lý Thales đảo dễ suy ra M, P, H thẳng hàng

Câu IV (1 điểm). Giả sử tại mỗi điểm của một ngũ giác ta viết một số nguyên sao cho tổng các số là dương. Nếu 3 đỉnh liên tiếp viết các số $x,\ y,\ z$ và $y<0$ ta thay thế 3 số này bởi các số $x+y,\ -y,\ z+y$ tương ứng. Nhưng phép biến đổi như vậy được thực hiện nếu ít nhất một trong 5 số là âm. Hỏi quá trình như trên có kết thúc sau một số hữu hạn bước?

Lời giải

Xét $I(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\sum_1^5 a_i^2+\sum_1^5(a_i+a_{i+1})^2.$

(Chú ý: $a_6=a_1$ trong công thức).

Giả sử $a_2<0$, ta thực hiện phép biến đổi và tính

$$I(a_1+a_2,-a_2,a_3+a_2,a_4,a_5)=(a_1+a_2)^2+a_2^2+(a_3+a_2)^2+a_4^2+a_5^2+a_1^2+a_3^2$$
$$+(a_3+a_2+a_4)^2+(a_4+a_5)^2+(a_5+a_1+a_2)^2$$
$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+(a_1+a_2)^2+(a_2+a_3)^2+(a_3+a_4)^2+(a_4+a_5)^2+(a_5+a_1)^2$$
$$+2a_2(a_3+a_4)+2a_2(a_1+a_5)+2a_2^2$$
$$=I(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)+2\underbrace{a_2}_{<0}\left(\underbrace{a_3+a_4+a_1+a_5+a_2}_{>0}\right)\text{ (theo giả thiết).}$$

Suy ra sau mỗi phép biến đổi thì I giảm thực sự.

Do đó sau một số hữu hạn bước phép biến đổi phải kết thúc.

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 1)
Ngày 20 tháng 01 năm 2024
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (3,0 điểm).

1) Giải phương trình $2x+\sqrt{3x+1}=2+2\sqrt{2-x}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\ y^3+17=6x(x+2).\end{cases}$

Lời giải

1) Điều kiện: $-\frac{1}{3}\le x\le 2$

Phương trình tương đương với $4x+2\sqrt{3x+1}=4+4\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 3x+1+2\sqrt{3x+1}+1=2-x+4\sqrt{2-x}+4$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2=\left(\sqrt{2-x}+2\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}+1=\sqrt{2-x}+2$

$\Leftrightarrow 3x+1=3-x+2\sqrt{2-x}+1 \Leftrightarrow 4x-2=2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2-x}\quad \left(x\ge\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=2-x \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn) hoặc $x=-\frac{1}{4}$ (loại)

Vậy PT có nghiệm duy nhất là $x=1$.

2) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\ x^3+y^3+1+24=x^3+6x(x+2)+8\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\ x^3+y^3+1+3(x+y)(x+1)(y+1)=(x+2)^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\ (x+y+1)^3=(x+2)^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=4\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3.\end{array}\right.\\ y=1\end{cases}$

Vậy HPT có tập nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1);(-3;1)\}$

Câu II (3,0 điểm).

1) Tìm x,y nguyên thoả mãn $y=\frac{x^2+1}{x^3+1}$.

2. Với $a,b,c\in\mathbb{R}$, chứng minh rằng $a^4+\frac{b^4}{8}+\frac{c^4}{27}\ge 6\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^4$.

Lời giải

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}\Rightarrow x^3+1\left|x^2+1\Rightarrow x^3+1\right|x^3+1+(x-1)\Rightarrow x^3+1\left|x-1\right.$

$\Rightarrow x^3+1\left|(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1=x^3+1-2\Rightarrow x^3+1\right|2$

Suy ra $x^3+1\in\{\pm1;\pm2\}\Rightarrow (x;y)\in\{(0;1);(1;1)\}$

2) Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^4$ ta có

$$VT=a^4+\left(\frac{b}{2}\right)^4+\left(\frac{b}{2}\right)^4+\frac{c^4}{27}\ge 3\left(\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3}\right)^4+3\left(\frac{c}{3}\right)^4\ge 6\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^4$$

Câu III (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh CA và AB sao cho EF song song với BC. Các đường thẳng BE và CF theo thứ tự cắt các tiếp tuyến tại C và B của (O) lần lượt tại K và L.

1) Đường thẳng qua B và song song với AC theo thứ tự cắt KC và KA tại X và Y. Chứng minh rằng hai tam giác XBC và BCA đồng dạng.

2) Đường thẳng qua C song song với AB theo thứ tự cắt LB và LA lần lượt tại Z và T. Chứng minh rằng $\dfrac{XB}{ZC}=\dfrac{AF}{AE}$.

3) Đường thẳng qua E song song với AB lần lượt cắt AK và AL tại M và N. Đường thẳng qua F song song với AC lần lượt cắt AK và AL tại P và Q. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P và Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

1) Dễ thấy $\widehat{XBC}=\widehat{ACB}$ (do $BX // AC$) và $\widehat{XCB}=\widehat{BAC}$ (do CX là tiếp tuyến của (O)).

Vậy $\Delta XBC\backsim\Delta BCA$ (g.g)

2) Tương tự câu 1) ta có $\Delta ZCB\backsim\Delta CBA$. Từ các tam giác đồng dạng đó ta có $BC^2=XB.CA$ và $BC^2=ZC.AB$. Từ đây ta có $\dfrac{XB}{ZC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AF}{AE}$.

3) Từ câu 2) ta suy ra $BX.EA=ZC.FA$

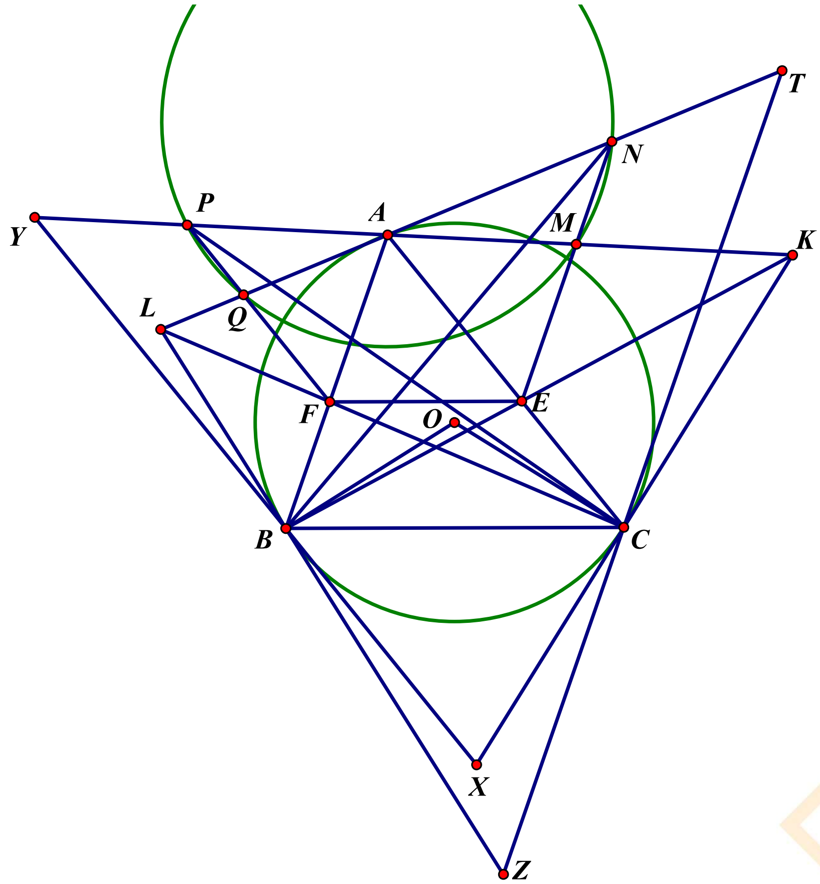
Theo định lý Thales ta có $\dfrac{EA}{EC}=\dfrac{BY}{BX}$ và $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{CT}{CZ}$ do đó $BY.EC=BX.EA=ZC.AF=FB.CT$

Từ đây ta thu được $\dfrac{BY}{CT}=\dfrac{FB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$

Kết hợp với $\widehat{YBA}=\widehat{TCA}$ ta suy ra $\Delta BYA\backsim\Delta CTA$ $(c.g.c)$

Từ đó ta có $\widehat{ANE}=\widehat{T}=\widehat{Y}=\widehat{APF}$

Suy ra tứ giác $MNPQ$ nội tiếp.



Câu IV (1,0 điểm). Với $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng $(a+1)(b+1)(c+1)\geq 27$.

Lời giải

Đặt $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

Điều kiện $a+b+c+2=abc \Leftrightarrow x+y+z-1=(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z-1$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=xyz$

Suy ra $xyz\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Leftrightarrow xyz\geq 27 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1)\geq 27$ (đpcm)

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 1)
Ngày 21 tháng 01 năm 2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (3,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+2y)(y^2+1)+(y+2x)=3(y^2+2)\\(y+2x)(x^2+1)=x+2y+3x^2\end{cases}$

2) Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-2x}=1+\sqrt[4]{2-x}$.

Lời giải

1) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}(x+2y-3)(y^2+1)=3-(y+2x)\\(y+2x-3)(x^2+1)=(x+2y)-3\end{cases}$

Giả sử $x+2y\ge 3\Rightarrow(x+2y-3)(x^2+1)\ge 0\Rightarrow y+2x\le 3\Rightarrow(y+2x-3)(x^2+1)\le 0\Rightarrow x+2y\le 3$

Vậy ta thu được $\begin{cases}x+2y=3\\y+2x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

2) Ta có $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2\Rightarrow\dfrac{a^4+b^4+c^4}{3}\ge\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^2\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^4$

Suy ra $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}{3}\right)^4\le\dfrac{a+b+c}{3}\Rightarrow\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}{3}\le\sqrt[4]{\dfrac{a+b+c}{3}}$ (1)

Áp dụng (1) ta có

$\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{b}}{3}\le\sqrt[4]{\dfrac{a+2b}{3}}$; $\dfrac{\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{c}}{3}\le\sqrt[4]{\dfrac{b+2c}{3}}$; $\dfrac{\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}}{3}\le\sqrt[4]{\dfrac{c+2a}{3}}$

Cộng 3 bất đẳng thức $\Rightarrow\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}\le\sqrt[4]{\dfrac{a+2b}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{b+2c}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{c+2a}{3}}$

Suy ra $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-2x}\le\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+1\Leftrightarrow\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-2x}\le\sqrt[4]{2-x}+1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=3-2x\Leftrightarrow x=1$

Câu II (3,0 điểm).

1) Với p,q,r,s là những số nguyên tố thoả mãn $5<p<q<r<s<p+10$.

Chứng minh rằng tổng của 4 số nguyên tố chia hết cho 60.

2. Với $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Lời giải

1) 4 số nguyên tố trong khoảng $5<p$, $s<p+10$ chỉ có thể là 4 số trong 5 số $p, p+2, p+4, p+6, p+8$. Vậy chúng ta phải bỏ đi một số

Không thể bỏ $p, p+2, p+6, p+8$ bởi vì khi bỏ số này thì trong 4 số còn lại có 3 số lẻ liên tiếp mà một trong 3 số này phải có 1 số chia hết cho 3 nên không là số nguyên tố.

Vậy phải bỏ $3|p+4$.

Trong 5 số lẻ liên tiếp phải có 1 số chia hết cho 5 $\Rightarrow$ Số này phải là $p+4 \Rightarrow 5|p+4 \Rightarrow 15|p+4$

Suy ra ta có $p+q+s+r=p+p+2+p+6+p+8=4(p+4)$

$\Rightarrow 60|p+q+s+r$ (đpcm)

2) Ta chứng minh $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{a^2+b^2}-a+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}-b+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}-c\ge\dfrac{a+b+c}{2}-(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2}\le\dfrac{a+b+c}{2}$

Ta có $a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{ab^2}{2ab}=\dfrac{b}{2}$

$\Rightarrow M\le\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}+\dfrac{a}{2}$ (đpcm) $\Rightarrow M_{\min}=\dfrac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Câu III (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn đường cao BE, CF cắt nhau tại H (E,F lần lượt nằm trên các cạnh CA, AB). Gọi M là trung điểm BC. Gọi K là hình chiếu của H trên AM.

1) Chứng minh rằng bốn điểm B,C,K,H cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi (J) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBF và MCE. Chứng minh rằng (J) và (L) cùng đi qua K.

3) Gọi P là điểm đối xứng của A qua BC. Chứng minh rằng phân giác các góc $\widehat{BPC}$ và $\widehat{JML}$ đồng quy với JL.

Lời giải

1) (1,5 điểm) Lấy D đối xứng với A qua M

Dễ thấy $ABDC$ là hình bình hành do đó $CD // AB \perp CH$

Suy ra C nằm trên đường tròn đường kính HD.

Tương tự B cũng nằm trên đường tròn đường kính HD.

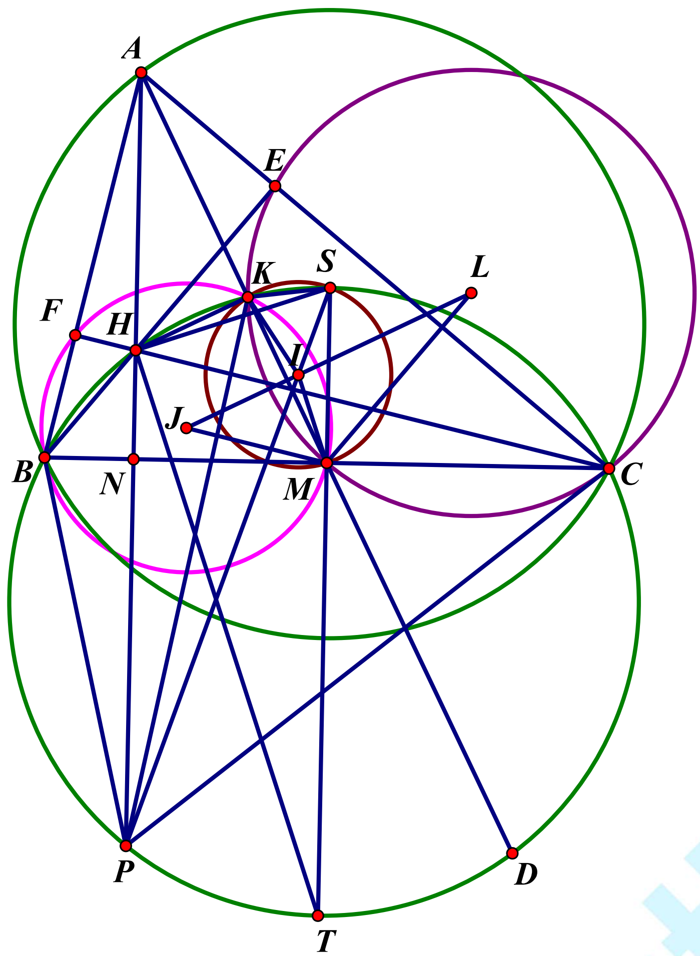
Vậy các điểm B,C,K đều nằm trên đường tròn đường kính HD.

2) (1 điểm) Gọi giao điểm của AH và BC là N

Từ $\widehat{HKM}=90^\circ$ dễ thấy $HKMN$ nội tiếp. Đồng thời $HECN$ cũng nội tiếp

Suy ra $AK.AM=AH.AN=AE.AC$

Từ đó $KMCE$ nội tiếp. Tương tự $KMBF$ cũng nội tiếp



3) (0,5 điểm) Gọi S là trung điểm cung BC chứa H của (BHC). Gọi I là giao điểm của phân giác $\widehat{JML}$ với JL.

Ta sẽ chứng minh P,I,S thẳng hàng, khi đó PI là phân giác $\widehat{BPC}$

Thật vậy, từ các tam giác MBF và MCE cân tại M dễ thấy $MJ \perp BF \perp HC$ và $ML \perp CE \perp HB$.

Ta suy ra phân giác $\widehat{JML}$ và phân giác ngoài $\widehat{BHC}$ vuông góc, hay $MI \perp HS$

Kết hợp $HK \perp MK$ ta suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{KHS} = \widehat{KHT} - 90^\circ = \left(180^\circ - \widehat{KST}\right) - 90^\circ = 90^\circ - \widehat{KSM}$

Với ST là đường kính của (BHC). Vì ΔIKM cân tại I nên $\widehat{KIM} = 180^\circ - 2\widehat{IMK} = 2\widehat{KSM}$

Từ đây kết hợp với $IK = IM$, ta suy ra I là tâm ngoại tiếp của tam giác MKS. Từ đó với các chú ý $MI // HT$ (do cùng vuông góc với HS) và $HP // ST$, ta có biến đổi góc như sau;

$\widehat{IST} = \widehat{ISM} = \widehat{IMS} = \widehat{HTS} = \widehat{PHT} = \widehat{PST}$.

Từ đó suy ra S,I,P thẳng hàng. Ta hoàn thành lời giải.

Câu IV (1,0 điểm). Với x,y,z là những số nguyên dương thoả mãn $x+y+z=100$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x!y!z!$.

(Trong đó $x!=x(x-1)(x-2)...2\times 1$)

Lời giải

Giả sử $x_0+y_0+z_0=100$, $x_0-y_0\geq 2$

Ta đi chứng minh $x_0!y_0!z_0!$ không là nhỏ nhất.

Ta đặt $x_1=x_0-1$; $y_1=y_0+1$; $z_1=z_0$

Ta có $x_1+y_1+z_1=100$ và ta chứng minh $x_0!y_0!z_0!>x_1!y_1!z_1!$

$\Leftrightarrow x_0!y_0!>(x_0-1)!(y_0+1)!\Leftrightarrow x_0>y_0+1\Leftrightarrow x_0-y_0>1\Rightarrow x-y\geq 2$ (đúng)

-------------------------HẾT-------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 1– Đợt 2)
Ngày 9 tháng 03 năm 2024
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (1,5 điểm + 1,5 điểm)

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+4\right)=6.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 5x+4y+y^2-xy=9. \end{cases}$

Lời giải:

1) Điều kiện $x\ge 0$

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x^2+3x}+4\right)=6$

Hay $\sqrt{x^2+3x}+4=2\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}$ hay $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$.

Giải các trường hợp ta có: $x\in\{1;4\}$.

2) Trừ hai phương trình theo vế ta có: $x^2+2xy-4y-5x+6=0$

Hay $x^2-(5-2y)x+\ 2(3-2y)=0$ hay $(x-2)(x+2y-3)=0$.

TH1: $x=2$, thay vào hệ ta có: $y^2+2y+1=0\Rightarrow y=-1$.

TH2: $x=3-2y$, thay vào hệ ta có: $(3-2y)^2+(3-2y)y+y^2=3$

$\Rightarrow 3y^2-9y+6=0\ \Rightarrow [x=-1.0, y=2.0],[x=1.0, y=1.0]$

Vậy hệ có ba nghiệm $[x=2.0,\ y=-1.0)$; $[x=-1.0,\ y=2.0]$; $[x=1.0,\ y=1.0]$.

Bài II. (1,5 điểm + 1,5 điểm)

1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$7x^2-30xy+7y^2=4(x+y)+932024.$$

2) Với các số thực dương a và b thoả mãn $a+b=2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}.$$

Lời giải:

1) Ta có $11(x-y)^2=4(x+y)^2+4(x+y)+932024$

Hay $11(x-y)^2=(2x+2y+1)^2+$ 932023 (*)

Xét mod11 ta có $(2x+2y+1)^2\equiv 0;1;4;9;5;3$ và $932023\equiv 4 \pmod{11}$

Khi đó $VT(*)\equiv 0 \pmod{11}$ và $VP(*)\equiv 4;5;8;2;9;7 \pmod{11}$

Nên phương trình (*) không thể xảy ra với bất kỳ giá tri nguyên nào của x, y

Tức là không tồn tại các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn phương trình đã cho.

2) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có $4=(a+b)^2\le\left(a^2+b\right)(1+b)$

Suy ra $\dfrac{4}{a^2+b}\le 1+b$. Tương tự $\dfrac{4}{b^2+a}\le 1+a$. Suy ra $P\le\dfrac{1}{4}(1+b+1+a)=1$

Dấu " =" xảy ra khi $a=b=1$. Vậy $P_{\max}=1$.

Bài III. (1,0 điểm + 1,0 điểm + 1,0 điểm)

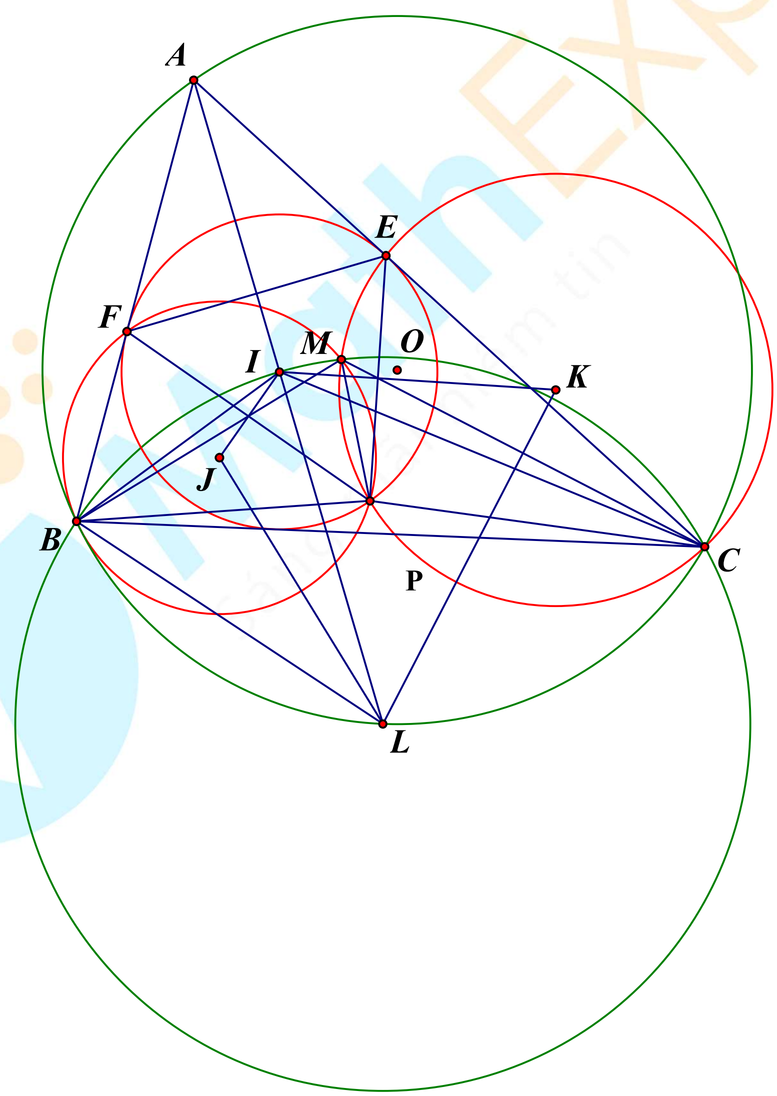
Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F. P là điểm bất kì nằm trên (I) và không nằm trong tam giác AEF. $(J),(K)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác BPF, CPE. (J) giao (K) tại M khác P.

1) Chứng minh rằng $\widehat{EPF}=90^\circ-\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

2) Chứng minh rằng B, C, I, M cùng thuộc một dường tròn.

3) Gọi L là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O). Chứng minh rằng L, I, J, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



1) Ta có $\widehat{EPF}=\widehat{AEF}=\widehat{AFE}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

2) Ta có $\widehat{BMC}=\widehat{BMP}+\widehat{CMP}=\widehat{BFP}+\widehat{CEP}=\widehat{FAE}+\widehat{FPE}\ =\widehat{BAC}+90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\widehat{BIC}$.

Nên B, C, I, M cùng thuộc một đường tròn.

3) Ta có $\widehat{BIL}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)=\widehat{LBC}+\widehat{IBC}=\widehat{LBI}$ nên $LI=LB$

Tương tự $LI=LC$, suy ra L là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBIC

(J) giao $(L;LB)$ tại B và M nên $JL\perp BM$. Tương tự $LK\perp CM$.

Suy ra $\widehat{JLK}=180^\circ-\widehat{BMC}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\widehat{EPF}$

Lại có $IJ\perp PF, IK\perp PE$ nên $\widehat{JIK}=180^\circ-\widehat{EPF}$

Suy ra $\widehat{JIK}+\widehat{JLK}=180^\circ$. Vậy L, I, J, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài IV.

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}\geq 3\sqrt{2}.$$

Lời giải:

Ta có $\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)=x^2y^2+\left(x^3+y^3\right)z+xyz^2\geq x^2y^2+\left(x+y\right)xyz+xyz^2=xy\left(z+y\right)\left(z+x\right)$

Suy ra $\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}\geq\sqrt{\left(z+x\right)\left(z+y\right)}\geq z+\sqrt{xy}$

Tương tự cho 2 bất đẳng thức còn lại

Khi đó kết hợp với bất đẳng thức $(a+b+c)^2\geq\ 3ab+3bc+3ca$ ta thu được:

$$\begin{aligned}Q^2&\geq 3x+3y+3z+3\sqrt{xy}+3\sqrt{yz}+3\sqrt{zx}\\&\geq 2x+2y+2z+4\sqrt{xy}+4\sqrt{yz}+4\sqrt{zx}\\&=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=18\end{aligned}$$

Suy ra $Q\geq 3\sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9
Môn: Toán (Vòng 2– Đợt 2)
Ngày 10 tháng 03 năm 2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I.

1) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{3x+1}=x^3+3x^2+5x+3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x\left(y^2-1\right)=4\left(x^2+y^2\right)\\5y\left(x^2+1\right)=3\left(x^2+y^2\right)\end{cases}$

Lời giải:

1) Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$. Ta có $(3x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{3x+1}=(x+1)^3+2(x+1)$.

Đặt $a=\sqrt{3x+1},b=x+1$ ta có $a^3+2a=b^3+2b$ suy ra $a=b$, hay $\sqrt{3x+1}=x+1\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x\left(y^2-1\right)=4\left(x^2+y^2\right)\\5y\left(x^2+1\right)=3\left(x^2+y^2\right).\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}(5x-4)\left(y^2-1\right)=4\left(x^2+1\right)\\(5y-3)\left(x^2+1\right)=3\left(y^2-1\right)\end{cases}$. Ta thu được $(5x-4)(5y-3)=12$. Suy ra $5y-3\ne 0$ và $x=\frac{4y}{5y-3}$.

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có $20y\left(y^2-1\right)(5y-3)=4\left(16y^2+y^2(5y-3)^2\right)$ hay $20y\left(3y^2-10y+3\right)=0$.

Từ đó suy ra hệ có 3 nghiệm: $(x,y)\in\left\{(0;0),\left(-1;\frac{1}{3}\right),(1;3)\right\}$.

Bài II.

1) Tìm các số tự nhiên n sao cho 3^n+n^2+3 là bình phương của một số tự nhiên.

2) Với các số thực dương a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$, tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}.$$

Lời giải:

1) Đặt $A=3^n+n^2+3$. Nếu n lẻ thì $A\equiv 3+1+3\equiv 3\pmod 4$ nên A không là số chính phương.

Nếu $n=2k,k\in\mathbb{N}$ ta có $A=3^{2k}+4k^2+3>\left(3^k\right)^2$ nên $A\ge\left(3^k+1\right)^2$ suy ra $3^{2k}+4k^2+3\ge 3^{2k}+2.3^k+1$ hay $2k^2+1\ge 3^k$ (1).

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $3^k>2k^2+1$ (2) đúng với $k\ge 3$. Thật vậy với $k=3$ ta có $3^3>2.3^2+1$ đúng. Giả sử (2) đúng với $k=m\ge 3$, tức là $3^m>2m^2+1$. Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $k=m+1$, thật vậy $3^{m+1}=3.3^m>3\left(2m^2+1\right)=2(m+1)^2+1+4m\left(m-1\right)>2(m+1)^2+1$ do $m\geq 3$. Do đó ta có $\left(2\right)$ đúng với mọi $k\geq 3$.

Khi đó từ (1) suy ra $k\leq 2$ hay $k\in\left\{0;1;2\right\}$. Thử lần lượt các giá trị của k ta thu được $n\in\left\{0;2;4\right\}$, cả 3 giá trị này đều thoả mãn.

2) Ta có $\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=\frac{1}{\left(b+c\right)\left(b+a\right)}+\frac{1}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}=\frac{2a+b+c}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=\frac{a+\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=$ $\frac{a+abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}+1$. Mà $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}\geq\sqrt{1+a^2}\left(1+bc\right)$. Suy ra $P\leq\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+1=\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}+1\leq\sqrt{2}+1$. Dấu bằng xảy ra khi $a=1,b=c=\sqrt{2}-1$.

Bài III.

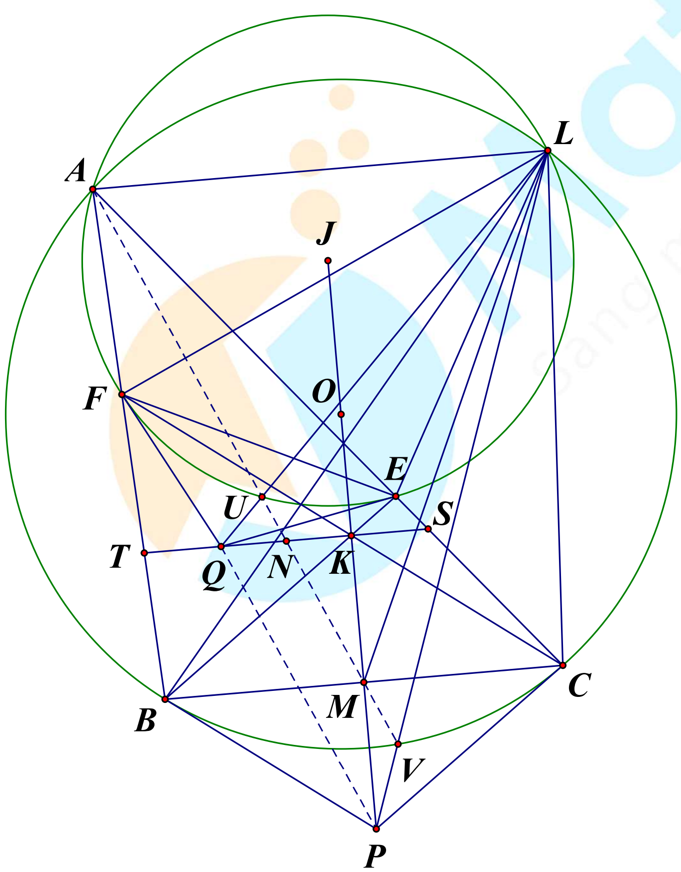
Cho tam giác ABC có BC là cạnh nhỏ nhất. Trên cạnh AC,AB lấy các điểm E,F sao cho $\widehat{EBC}=\widehat{FCB}=\widehat{BAC}$. Tiếp tuyến tại E và F của đường tròn $\left(J\right)$ ngoại tiếp tam giác AEF giao nhau tại Q. BE giao CF tại K.

a) Chứng minh rằng E,F,Q,K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $JB=JC$.

c) QK giao AB,AC lần lượt tại T,S. Chứng minh rằng $QT=KS$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{EKF}=\widehat{BKC}=180^\circ-\widehat{EBC}-\widehat{FCB}=180^\circ-2\widehat{BAC}=\widehat{EQF}$.
Suy ra E,F,Q,K cùng thuộc một đường tròn.
b) Từ câu a) ta có K nằm trền đường tròn đường kính QJ.
Do $JF=JE$ nên KJ là phân giác của $\widehat{FKE}$, hay là phân giác của $\widehat{BKC}$.
Suy ra $KJ\perp BC$. Vậy $JB=JC$.
c) Gọi L là điểm đối xứng với A qua trung trực BC. Do $JB=JC$ nên L nằm trên $(J;JA)$.
Gọi P là giao hai tiếp tuyến tại B,C của (O) ngoại tiếp tam giác $ABC.M$ là trung điểm của BC.
LQ cắt (J) tại U khác L,LP cắt (O) tại V khác L.
Ta có $PV\cdot PL=PB^2=PM\cdot PO$. Suy ra $OMVL$ nội tiếp.
Mà $OL=OV,MO\perp MC$ nên MC là phân giác của $\widehat{VML}$.
Suy ra A,M,V thẳng hàng.
Ta lại có $\widehat{LFE}=\widehat{LAE}=\widehat{LBC}$, tương tự suy ra $\Delta LFE\backsim\Delta LBC$.
Q,P là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E,F của (LEF) và tại B,C của (LBC) nên Q tương ứng với P,U tương ứng với V trong hai tam giác đồng dạng trên.
Suy ra $\dfrac{UL}{UQ}=\dfrac{VL}{VP}$. Ta thu được $UV\,//\,PQ$.
Mà $\widehat{UAE}=\widehat{ULE}=\widehat{VLC}=\widehat{VAC}$ nên A,U,V thẳng hàng. Vậy $AM\,//\,PQ$.
Suy ra AM đi qua trung điểm của QK. Lại theo bổ đề hình thang, AM đi qua trung điểm của TS.
Vậy $TQ=KS$.

Bài IV.

Cho n là số nguyên dương. Ban đầu, trên một bảng trắng có viết đúng $(n+1)^2$ số nguyên dương phân biệt là các ước của 10^n. Mỗi bước ta chọn 2 số a,b phân biệt bất kỳ trên bảng, sau đó xoá số này và viết thêm 2 số (bằng nhau) có giá trị là ước chung lớn nhất của a và b. Tiếp tục thực hiện như vậy cho đến khi tất cả các số trên bảng bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của các bước thực hiện có thể có.

Lời giải:

Sau mỗi bước, các số không tăng. Mà số nhỏ nhất trên bảng là 1 nên sau bước cuối cùng, các số bằng nhau và đều bằng 1. Ta sẽ chứng minh số bước tối thiểu là n^2+n.
Mỗi ước của 10^n đều có dạng $2^i5^j, 0\le i,j\le n$. Chú ý là số ước nguyên tố của số 2^i5^j chỉ có thể là 0 nếu $i=j=0$; là 1 nếu $i=0,j>0$ hoặc $i>0,j=0$ và bằng 2 nếu $i,j>0$.
Nhận xét: sau mỗi bước tổng số các ước nguyên tố của các số viết trên bảng giảm đi không quá 2.
Thật vậy, với $i,j,k>0$ ta có

- Nếu $(a;b)=(1;2^i)$ hoặc $(a;b)=(1;5^i)$, ta có cặp mới $(1;1)$, tổng số các ước nguyên tố giảm đi 1 ;
- Nếu $(a;b)=(2^i;5^j)$, ta có cặp mới $(1;1)$, tổng số các ước nguyên tố giảm đi 2 ;

- Nếu $(a;b)=(2^i5^j;1)$, ta có cặp mới $(1;1)$, tổng số các ước nguyên tố giảm đi 2 ;
- Nếu $(a;b)=(2^i5^j;2^k)$ hoặc $(a;b)=(2^i5^j;5^k)$, ta có cặp mới $(2^{\min(i;k)};1)$ hoặc $(2^{\min(j;k)};1)$, tổng số các ước nguyên tố giảm đi 1;
- Nếu $(a;b)=(2^i5^j;2^k5^h)$, ta có cặp mới $(2^{\min(i;k)};5^{\min(j;h)})$, tổng số các ước nguyên tố không thay đổi.

Ký hiệu (x,y,z,t) là trạng thái trên bảng mà trong đó có x số $1, y$ số dạng $2^i, z$ số dạng 5^j và t số dạng 2^i5^j với $i,j>0$. Trạng thái ban đầu là $(1;n;n;n^2)$, trạng thái cuối cùng là $(n^2+2n+1;0;0;0)$.
Theo các bước phân tích như trên, ta thấy để chuyển trạng thái (y,z,t) về $(0,0,0)$ ta cần ít nhất $\max(y,z)+t$ bước. Do đó ta cần ít nhất n^2+n bước để chuyển các số trên bảng về toàn số 1.
Bây giờ ta chỉ ra một cách thực hiện n^2+n bước để thu được bảng toàn số 1 :

- thực hiện n bước cho các cặp số $(2^i,5^i)$ với $1\le i\le n$., khi đó trên bảng có $2n+1$ số 1 và n^2 số dạng 2^i5^j với $1\le i,j\le n$.
- thực hiện n^2 bước cho các cặp số $(2^i5^j,1)$ với $1\le i,j\le n$. Khi đó trên bảng chỉ còn các số 1. Vậy giá trị nhỏ nhất là n^2+n.

---------------------------- HẾT ----------------------------