MỤC LỤC

A. PHẦN ĐỀ THI

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2022 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}+\frac{4+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}}=\frac{\sqrt{2+x}}{x}.$$

Câu 2. (1,5 điểm) Một người có kế hoạch đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian dự định. Nếu tăng vận tốc thêm 4 km/h thì người đó đến B sớm 12 phút, nếu giảm vận tốc đi 4 km/h thì người đó đến B muộn 15 phút. Tính độ dài quãng đường AB.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các số thực m khác 1 sao cho đồ thị hàm số $y=(m-1)x+m+6$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên.

2) Cho đa thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ có hai nghiệm là 2 và 3.

Chứng minh rằng $b^2-a^2=4ac$.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và có số đo góc A bằng $60°$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Tia AI cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai D (D khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BDCO$ là hình thoi.

b) Các điểm B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) $IB+IC\le 2R$.

Câu 5. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left|10^x-4y^2+28y-26\right|$ với x,y là các số nguyên dương thay đổi.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{x+1}{x-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a) Chứng minh rằng $B=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A+\frac{1}{B}\le 4$.

Câu 2. (2 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=5-3m\\ mx-y=2\end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{5}{x}+4=\frac{3}{y}$.

Câu 3. (2 điểm) Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 3 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 150% lượng gạo đã nhập vào kho trong ngày trước đó. Từ ngày thứ tư kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\frac{1}{10}$ lượng gạo trong kho ở ngày trước đó. Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau:

a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 380 tấn gạo.

b) Số gạo đã xuất trong ngày thứ năm là 342 tấn.

Câu 4. (3 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM; E là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O).

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A). Tính số đo góc AKH.

c) Chứng minh KE là tia phân giác của góc MKH.

Câu 5. (1 điểm) Xét các số thực a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn $1\le a,b,c\le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}{a+b+c}$.

HẾT

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho $a=\sqrt[3]{2}+2$ và đa thức $P(x)=(x-3)(x-1)^3$. Tính giá trị của $P(a)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2=x^2+xy-2y^2 \\ x^2y=x^2+4y^2 \end{cases}$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho số nguyên dương m thoả mãn 3^m+5^m+14 chia hết cho 15. Chứng minh rằng 3^m+5^m+14 chia hết cho 16.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số dương a,b. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+b+\frac{|a-b|}{b^2}+\frac{|b^2-b|}{a}\ge 2$$

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC, với $AB<AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F tương ứng là tiếp điểm của BC,CA,AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI,BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

a) $\widehat{KIF}=\widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) $LK\cdot BC=AI\cdot EF$.

c) Các đường thẳng DK,HJ,AL đồng quy.

Câu 5. (1 điểm) Lần lượt ghi các số 1000, 1001, 1002,.., 1010 lên 11 tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả 11 tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp, một chiếc màu xanh và một chiếc màu đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Hỏi, trong mỗi hộp có bao nhiêu tấm thẻ?

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Chứng minh rằng $A=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Tìm tất cả các số thực x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm) Một hội trường có 374 ghế, được xếp thành nhiều dãy, số ghế ở mỗi dãy bằng nhau và không vượt quá 30 . Hãy tìm số dãy ghế của hội trường biết rằng: nếu kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=(m-1)x+2m+3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 .

2) Chứng minh rằng, với hai số thực a, b bất kì, ít nhất một trong hai phương trình (ẩn là x) sau đây có nghiệm: $x^2-2ax-(a^2-4b^2+1)=0$ và $x^2-4bx-(b^2-2ab-a)=0$.

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm nằm trên (O)(M khác A, B). Trong nửa mặt phẳng chứa M, có bờ là đường thẳng AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D.

1) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

2) Vẽ đường tròn (I) qua M, tiếp xúc với Ax tại C. Tia OC cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai J. Chứng minh rằng J là trung điểm của OC.

3) Gọi E là trung điểm của OA. Chứng minh rằng đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại một điểm thuộc đường tròn (I).

Câu 5. (1 điểm)

1) Hãy chỉ ra một số thực x khác $0, \pm 1$ để $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên.

2) Cho x là một số thực khác $0, \pm 1$ thỏa mãn $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-y}=4\\ \sqrt{3y+1}+\sqrt{5-x}=4\end{cases}$.

2) Cho a,b,c,d là các số thực khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$\frac{a^2-1}{5a}=\frac{b^2-1}{5b}=\frac{c^2-1}{3c}=\frac{d^2-1}{3d}=n$$

với n là một số nguyên. Chứng minh: $P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 2. (3 điểm)

1) Chứng minh rằng $1+2^2+3^3+\ldots+2039^{2039}$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

2) Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}$.

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với các cạnh AC,AB. Gọi (K) là đường tròn đi qua B, tiếp xúc với đường thẳng AI tại I. Đường tròn này cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai P (khác B). Gọi (L) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AI tại I, đường tròn này cắt đường thẳng AC tại điểm thứ hai Q (khác C). Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

b. Đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn (I).

c. Các đường thẳng KF và LE cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 4. (1 điểm) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Lần lượt điền 2023^2 số nguyên dương đầu tiên: $1,2,3,4\ldots,2023^2$ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô được điền đúng một số, ở mỗi dòng tính từ trái sang phải hoặc ở mỗi cột tính từ trên xuống dưới, các số được điền theo thứ tự tăng dần. Thực hiện việc thay đổi số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn 2 ô chung nhau cạnh hoặc chung nhau đúng một đỉnh.

1/ Nếu hai ô đó chung cạnh thì tăng số ở một ô thêm 2 đơn vị và giảm số trong ô còn lại 2 đơn vị.

2/ Nếu hai ô đó chung nhau đúng một đỉnh thì cùng tăng hoặc cùng giảm số trong hai ô đó 2 đơn vị.

Hỏi sau một số lần chơi ta có thể thu được bảng gồm toàn các số 2023 được không? Vì sao?

--- HẾT ---

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{b-\sqrt{ab}}{a-b}-1$ với $a>0,b>0$ và $a\neq b$.

a) Chứng minh $M=\frac{a+b}{a-b}$.

b) Tính $\frac{a}{b}$ biết $M>0$ và $M\cdot\left(a^2-b^2\right)=\frac{9}{2}ab$.

Câu 2. (2 điểm) a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d:y=2x+3$ và $d':y=mx+m^2-1\left(m\neq 0\right)$. Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

b) Giá cước dịch vụ của một hãng taxi vào tháng 4/2023 như sau:

Giá cước mở cửa 1 km đầu tiên	**Giá cước những km tiếp theo**	**Giá cước từ km thứ 21 trở đi**
20 000 đồng	14 000 đồng	12 000 đồng

Gọi x $(x>0)$ là số km mà hành khách di chuyển. Khi đó, số tiền mà hành khách phải trả được tính bởi công thức:

$$T=20\,000 \text{ nếu } 0<x\le 1$$
$$T=20\,000+14\,000\left(x-1\right) \text{ nếu } 1<x\le 20$$
$$T=286\,000+12\,000\left(x-20\right) \text{ nếu } x>20$$

Cô Hằng di chuyển bằng xe của hãng taxi trên và đã trả số tiền là 322 000 đồng. Hỏi cô Hằng đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu km?

Câu 3. (2 điểm) Cho phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-1=0$, (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(1-x_1\right)\left(x_2-m\right)^2=9$.

Câu 4. (3 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ sao cho tam giác ABD nhọn và không là tam giác cân. Gọi O là giao điểm của AC với BD và E,F,G tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AC,AB,BC.

a) Chứng minh $ED^2=EF.EG$.

b) Chứng minh bốn điểm O,E,G,F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của các đường thẳng FG và AC. Chứng minh $DH\perp DB$.

Câu 5. (1 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương a và b thỏa mãn: Nếu c và d là các số thực sao cho các phương trình $x^2+ax+1=c$ và $x^2+bx+1=d$ có nghiệm thì phương trình $x^2+\left(a+b\right)x+1=cd$ cũng có nghiệm.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm)

Cho ba phương trình:

$$x^2-ax+1=0\left(1\right),\quad x^2-bx+1=0\left(2\right),\quad x^2-cx+1=0\ (3),$$

trong đó a,b,c là các số thực.

Biết rằng, phương trình (1) có nghiệm $x=x_1$, phương trình (2) có nghiệm $x=x_2$ và phương trình (3) có nghiệm $x=x_1x_2$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2-abc$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\left(\sqrt{y+4}+\sqrt{y+11}\right)=35 \\ y\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)=35 \end{cases}$

2) Chứng minh rằng, với mọi số thực x,y,z ta có:

$$\left(z+x-y\right)x^5+\left(x+y-z\right)y^5+\left(y+z-x\right)z^5\ge 0.$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng, tồn tại vô số bộ ba số nguyên dương $\left(x;y;z\right)$ thoả mãn phương trình sau:

$$x^{31}+y^5=z^{2023}.$$

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến d của $\left(O\right)$ tại B. Gọi H là trung điểm của OB. Các điểm M,N thay đổi trên d, không trùng với B sao cho H là trực tâm của tam giác AMN. Gọi E,F lần lượt là giao điểm thứ hai của AM,AN với đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh rằng

a) Tứ giác MNFE nội tiếp.

b) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1 điểm) Có 2023 viên bi đựng trong 14 cái hộp. Mỗi lần cho phép lấy hai viên bi ở hai hộp nào đó và bỏ vào một trong 12 hộp còn lại. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ hết bi vào một hộp.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x>0;y>0;x\neq y$

a) Rút gon M.

b) Tính M biết $x^2-5xy+4y^2=0$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cửa hàng An Bình niêm yết giá một bông hồng là 25000 đồng. Nếu khách hàng mua nhiều hơn 10 bông thì từ bông thứ 11 trở đi, mỗi bông được giảm 10% trên giá niêm yết. Nếu mua nhiều hơn 20 bông thì từ bông thứ 21 trở đi, mỗi bông được giảm thêm 20% trên giá đã giảm.
a) Nếu khách hàng mua 30 bông hồng tại cửa hàng An Bình thì phải trả bao nhiêu tiền?
b) Bạn Dũng đã mua một số bông hồng tại cửa hàng An Bình với số tiền 925000 đồng. Hỏi bạn Dũng đã mua bao nhiêu bông hồng?

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=5\\ mx+y=m+5\end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất ở trên thỏa mãn điều kiện $x\geq y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=x+y$.

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường kính AK của (O). Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành và $S_{ABC}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, T là điểm đối xứng với O qua M. Chứng minh T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và $AH^2+BC^2=4R^2$.

c) Biết $AH^2+BH^2+CH^2=7$ và $AH\cdot BH\cdot CH=3$. Tính R.

Câu 5. (1 điểm) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn

$$x^2+xy+y^2=3;\ \ y^2+yz+z^2=1;\ \ z^2+zx+x^2=4.$$

Tinh $S=x+y+z$.

--- HẾT ---

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,5 điểm)

a) Giả sử a,b là các số thực thoả mãn: với x,y là hai số thực bất kì ta luôn có

$$\left|(ax+by)(ay+bx)\right|\le x^2+y^2.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2\le 2$.

b) Giải phương trình $x+4=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{(5-x)(2-x)}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a\ne c$ và $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=2.$

Tính giá trị biểu thức $S=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}$

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB<AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho $AM\parallel BC$. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB,AC tại các điểm thứ hai F,E (F,E khác A). Các đường thẳng OM,BC cắt nhau tại điểm D.

(a) Chứng minh rằng các điểm D,E,F thẳng hàng.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh rằng $AHDL$ là hình bình hành.

Câu 5. (3 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p,q,r sao cho $pq-6, qr+1, rp+10$ là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A=\left[\frac{6x}{\sqrt{x}-1}+\frac{7\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}+\frac{4}{x\sqrt{x}-x}\right]:\frac{3x-1}{x-\sqrt{x}} \text{ với } x>0, x\neq 1, x\neq \frac{1}{3}$$

1. Rút gọn A.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Câu 2. (1,5 điểm) Một ô tô xuất phát lúc 6 giờ từ Hà Nội đến một bến xe ở Hà Tĩnh. Ban đầu xe di chuyển với vận tốc $45\ km/h$. Nhận thấy nếu cứ đi với tốc độ đó thì xe sẽ đến muộn hơn so với quy định 1 giờ nên sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, lái xe tăng tốc và đi với vận tốc $60\ km/h$ trên suốt quãng đường còn lại. Do đó xe đến nơi sớm hơn quy định 30 phút. Tính quãng đường xe phải đi và thời điểm xe đến bến xe ở Hà Tĩnh.

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;-1)$ và cắt đường thẳng $(d'): y=2x+7$ tại điểm có tung độ bằng 5. Tính diện tích của tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ.

2. Cho phương trình $x^2-2(m+2)x+m^2-3=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\left(x_1^2-2mx_1+m^2+1\right)\left(x_2+1\right)=2\left(x_1+x_2\right)^2$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong với nhau tại $A(R<R')$. Đường kính AB của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai C. Qua C kẻ tiếp tuyến CF với $(O), F$ là tiếp điểm.

1. Khi $R=\frac{2}{3}R'$ hãy tính diện tích của tam giác FAB theo R

2. Gọi G là hình chiếu vuông góc của F trên AB. Trên nửa mặt phẳng không chứa F có bờ là đường thẳng AB kẻ đường thẳng qua C, cắt (O) tại D, E (E nằm giữa C, D). Chứng minh rằng $OGED$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường tròn (O') tại H thuộc nửa mặt phẳng chứa D có bờ là đường thẳng AB. Kéo dài OF cắt AH tại I. Chứng minh rằng CI vuông góc với đường nối tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và tam giác DIE.

Câu 5. (1,0 điểm) Có hay không một đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x)=ax^2+bx+c$ nhận $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm? Em hãy giải thích câu trả lời của mình.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng có thể viết được thành tổng của 2 số chính phương.

$$K=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+z=3\\ x^3+y^3+z^3=x^4+y^4+z^4\end{cases}$.

Câu 2. (3 điểm)

1. Cho a,b,c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất 2 trong 3 phương trình sau có nghiệm:

$$(x-a)(x-b)=x-c$$
$$(x-b)(x-c)=x-a$$
$$(x-c)(x-a)=x-b$$

2. Cho $p>3$ là một số nguyên tố. Giả sử a,b,c,d là các số nguyên thỏa mãn $a+b\equiv c+d$ (mod p) và $a^3+b^3\equiv c^3+d^3$ (mod p). Chứng minh $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}$ (mod p).

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), có AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). E là một điểm di động trên cạnh AB (E khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AC tại điểm thứ hai F (khác A), cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai K (khác D).
Chứng minh rằng
a) $BE.KC=CF.KB$.
b) $BE+CF$ không đổi khi E thay đổi trên cạnh AB (khác A) của tam giác ABC.

Câu 4. (1 điểm) Thầy giáo ghi lên bảng các số $1!,2!,3!,\ldots,23!$. Thầy giáo cho phép bạn Dương xóa đi một hoặc nhiều các số đang có trên bảng. Hỏi bạn Dương phải xóa đi it nhất bao nhiêu số sao cho tích các số còn lại trên bảng là một số chính phương? Tại sao?
(Ở đây, $n!$ là tích của n số nguyên dương đầu tiên).

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với điều kiện $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

1.1) Chứng minh rằng $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$.

1.2) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn $A<-1$.

Câu 2. (2 điểm)

2.1) Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $0,45\%/$ tháng. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Người đó phải gửi số tiền ban đầu ít nhất bao nhiêu triệu đồng để số tiền lãi của tháng thứ hai không ít hơn 500000 đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của triệu đồng).

2.2) Tìm tất cả các số thực m để hai đồ thị hàm số $y=2x^2$ và $y=mx+2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $(y_1+2)(y_2+2)+25x_1x_2=0$.

Câu 3. (2 điểm)

3.1) Giải phương trình $2x^3+12x^2+30x+25=0$.

3.2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2+2x=3y \\ x^2y^2+4+2xy=3y^2 \end{cases}$

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho $AB<AC$, tam giác ABC nhọn và không là tam giác cân. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $(O;R)$ cắt nhau tại K. Đường thẳng qua điểm K song song với AB cắt cạnh AC tại I. Đoạn thẳng KI cắt đường tròn $(O;R)$ tại D. Chứng minh rằng

4.1) Tứ giác $KOIC$ nội tiếp một đường tròn.

4.2) $\widehat{ABC}=\widehat{KOI}$.

4.3) Giá trị của biểu thức $IA.IC+IO^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

Câu 5. (1 điểm) Cho các số nguyên dương x,y thay đổi thỏa mãn $3x+4y=2025$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,5 điểm)

1) Cho A là số chính phương có chữ số tận cùng là 1. Tìm số dư khi chia A cho 40.

2) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>2$, giữa n và $n!$ có ít nhất một số nguyên tố.

Câu 2. (2,5 điểm) Xét phương trình bậc hai: $x^2+2ax+b=0$, trong đó a,b là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_1=2023+\sqrt{2024}$.

1) Chứng minh phương trình còn có nghiệm $x_2=2023-\sqrt{2024}$

2) Chứng minh $S=x_1^{2024}+x_2^{2024}$ là một số nguyên chẵn

Câu 3. (1 điểm) Cho $0\le x,y\le 1$ và $\dfrac{x}{\sqrt{y+3}}+\dfrac{y}{\sqrt{x+3}}=1$. Tính $T=(x-1)^{2024}+(y-1)^{2024}$.

Câu 4. (3 điểm) Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là điểm bất kì trên đoạn BC $(M\ne H)$. Đường tròn đường kính AM cắt (O) tại E, AE cắt BC tại S.

a) Chứng minh $SH.SM=SB.SC$.

b) Tia AM cắt (O) tại điểm thứ hai là D, SD cắt (O) tại K. Chứng minh tứ giác $MHKD$ nội tiếp

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHKD$ chạy trên một đường thẳng cố định

Câu 5. (1 điểm) Có 45 học sinh đứng thành một vòng tròn. Giả sử mỗi em có một số kẹo sao cho số kẹo của các em không đồng thời bằng nhau. Thực hiện trò chơi sau: Sau mỗi hiệu lệnh của người điều khiển, mỗi em đều lấy một nửa số kẹo của mình có đưa cho bạn bên cạnh tính theo chiều kim đồng hồ (Nếu em nào có số kẹo là một số lẻ thì được nhận thêm 1 chiếc kẹo từ người điều khiển trước khi chia). Chứng minh rằng, tồn tại một thời điểm mà số kẹo của các em đều bằng nhau.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2025 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}:\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{2-x}{x-\sqrt{x}}\right)$ với $x>0, x\neq 1$.

a) Chứng minh $P=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P=\dfrac{9}{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm) Công ty viễn thông A có hai gói cước gọi điện thoại hàng tháng được tính như sau:
+) Gói cước 1: 1800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên và 1500 đồng/phút cho thời gian còn lại.
+) Gói cước 2: 2000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo và 1200 đồng/phút cho thời gian còn lại.
Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác Minh chọn gói cước 2 vì so với gói cước 1 thì bác Minh sẽ tiết kiệm được 66000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác Minh gọi điện thoại bao nhiêu phút?

Câu 3. (2,0 điểm) Spring Cup là giải bóng đá thường niên dành cho học sinh nam của trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội do câu lạc bộ thể thao CSF - CSP Sporting Federation (Liên minh Thể thao Chuyên Sư Phạm) tổ chức.
Ở mùa giải Spring Cup 2024, một bảng đấu gồm có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.
a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?
b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là $10, 9, 6, 4, 0$. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Câu 4. (3,0 điểm) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O)(B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của BC với $OA; I$ là giao điểm của đoạn thẳng OA với (O).
a) Chứng minh BI là tia phân giác của góc ABH.
b) Kẻ đường kính BD của (O). Tiếp tuyến với (O) tại D cắt đường thẳng BC tại điểm E. Chứng minh AD vuông góc với OE.
c) Trong trường hợp góc BDC bằng 60°, hãy tính theo R diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác ABC và nằm nằm phía ngoài (O).

Câu 5. (1,0 điểm) Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không vượt quá $\dfrac{1}{2}$ và tổng của ba số bất kỳ trong bốn số đó là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI TRƯỜNG THPT CHUYÊN Đề thi gồm **01** trang	THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2025 – LẦN 1 Môn: **TOÁN CHUYÊN** Thời gian làm bài: **120 phút** *(Không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{9-2x^2}+\sqrt[3]{x^2+4}=3$.

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $4x^2+y^2=32z^2$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}\ge 0$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Tồn tại hay không một tập hợp A khác rỗng, là tập con của tập các số tự nhiên và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau?

- Với hai số tự nhiên phân biệt bất kỳ mà có tổng là số chẵn thì ít nhất một trong hai số đó thuộc tập hợp A.
- Với hai số tự nhiên phân biệt bất kỳ mà có tổng là số lẻ thì ít nhất một trong hai số đó không thuộc tập hợp A.

Câu 3. (1,0 điểm)
Một rô-bốt di chuyển trên một bảng gồm 7 ô được đánh số từ 1 đến 7 như hình vẽ sau:

Ban đầu, rô-bốt đứng ở ô số 4. Mỗi bước, nó có thể nhảy sang trái hoặc sang phải, mỗi hướng có xác suất bằng nhau, và mỗi lần nhảy chỉ di chuyển đúng một ô. Tại ô số 1 và ô số 7 có đặt kẹo, và khi rô-bốt đến một trong hai ô này, nó lấy kẹo và dừng lại. Tính xác suất để rô-bốt lấy kẹo sau đúng 3 bước.

Câu 4. (3,0 điểm) a) Cho a,b là hai số nguyên trái dấu. Biết rằng phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm nguyên và phương trình $x^2+bx+a=0$ có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $a+b=-1$.

b) Tìm số nguyên z và các số hữu tỷ x,y thỏa mãn điều kiện $\frac{3}{\sqrt{2x}}-1=1-\sqrt{\frac{3}{y}}=\frac{z}{x+y}$.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi AH,AD lần lượt là đường cao và đường phân giác trong góc $A\left(H,D\in BC\right)$. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Đường trung trực của đoạn thẳng AD cắt (O) tại E,F. Chứng minh rằng

a) Trực tâm của tam giác DEF thuộc (O).

b) Bốn điểm H,E,F,M cùng thuộc một đường tròn.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

B. PHẦN ĐÁP ÁN

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2022 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}+\frac{4+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}}=\frac{\sqrt{2+x}}{x}.$$

Lời giải

+) $\dfrac{4-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}=\dfrac{4-\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(2+x-\sqrt{(2+x)(2-x)}+2-x\right)}$

$=\dfrac{4-\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$

+) $\dfrac{4+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}}=\dfrac{4+\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(2+x+\sqrt{(2+x)(2-x)}+2-x\right)}$

$=\dfrac{4+\sqrt{4-x^2}}{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(4+\sqrt{4-x^2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

Biểu thức vế trái bằng: $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2\sqrt{2+x}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2+x}}{2+x-(2-x)}=\dfrac{2\sqrt{2+x}}{2x}=\dfrac{\sqrt{2+x}}{x}$

Câu 2. (1,5 điểm) Một người có kế hoạch đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian dự định. Nếu tăng vận tốc thêm 4 km/h thì người đó đến B sớm 12 phút, nếu giảm vận tốc đi 4 km/h thì người đó đến B muộn 15 phút. Tính độ dài quãng đường AB.

Lời giải

Đổi 12 phút $=0,2$ giờ ; 15 phút $=0,25$ giờ.

Gọi vận tốc dự định là $x(\text{km/h})$, thời gian dự định là y (giờ) $(x>4, y>0,25)$.

Khi đó, độ dài quãng đường AB là : x.y (km).

Nếu vận tốc tăng thêm 4 km/h thì đến sớm 0,2 giờ nên $AB=(x+4)(y-0,2)\ (\text{km})$.

Nếu giảm vận tốc đi 4 km/h thì đến muộn 0,25 giờ nên $AB=(x-4)(y+0,25)\ (\text{km})$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+4)(y-0,2)=xy\\(x-4)(y+0,25)=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-0,2x+4y=0,8\\0,25x-4y=1\end{cases}$

Giải hệ ta được $x=36$, $y=2$.

So sánh với điều kiện ta thấy hai giá trị $x=36$, $y=2$ thỏa mãn.

Vậy, độ dài quãng đường AB là $36.2 = 72$ km.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các số thực m khác 1 sao cho đồ thị hàm số $y = (m-1)x + m + 6$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên.

2) Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ có hai nghiệm là 2 và 3.

Chứng minh rằng $b^2 - a^2 = 4ac$.

Lời giải

1) Với $x = 0$, ta có $y = m + 6$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; m+6)$.

Theo giả thiết thì $m + 6$ là số nguyên nên m là số nguyên.

Với $y = 0$, ta có $(m-1)x + m + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{m+6}{m-1} = -1 - \dfrac{7}{m-1}$.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $\left(-1 - \dfrac{7}{m-1}; 0\right)$.

Với m nguyên thì $-1 - \dfrac{7}{m-1}$ là số nguyên khi và chỉ khi $m - 1$ là ước số của 7.

Ta có $m - 1$ thuộc tập hợp $\{-7; -1; 1; 7\}$.

Tất cả các giá trị m thỏa mãn là $-6; 0; 2; 8$.

2) Vì 2 và 3 là nghiệm của $f(x)$ nên: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + c = -4a \\ 3b + c = -9a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -5a \\ c = 6a \end{cases}$

Do đó: $b^2 - a^2 - 4ac = 25a^2 - a^2 - 4a.6a = 0$.

Vậy $b^2 - a^2 = 4ac$.

Chú ý: Có thể sử dụng định lý Vi-et:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow b = -5a,$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 = 2.3 = 6 \Rightarrow c = 6a.$$

- Có thể sử dụng định lí Vi-et $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$. Suy ra $1 = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 4\dfrac{c}{a}$ từ đó có đpcm.
- Có thể viết $f(x) = a(x-2)(x-3) = ax^2 - 5ax + 6a$, từ đó tính b, c theo a.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và có số đo góc A bằng 60°. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Tia AI cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai D (D khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BDCO$ là hình thoi.

b) Các điểm B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) $IB + IC \leq 2R$.

Lời giải

a) Xét (O), ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Do AD là phân giác của góc BAC nên D là điểm chính giữa cung BC.

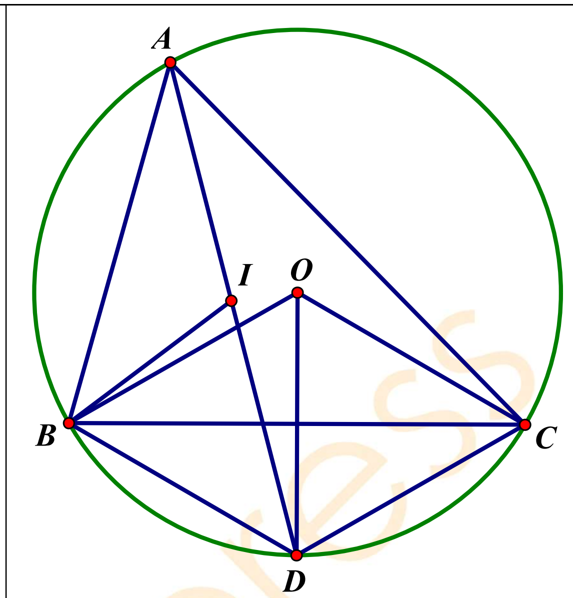
Suy ra: $\widehat{BOD} = \widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^\circ$

Các tam giác OBD và OCD là tam giác cân đỉnh O và có một góc bằng 60° nên là tam giác đều. Suy ra $BO = BD = CO = CD = OD$. Vậy $BOCD$ là hình thoi.

b) $\widehat{BIC} = 180^\circ - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Do I và O cùng phía với đường thẳng BC và $\widehat{BIC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$ nên các điểm B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn



c) Gọi K là giao điểm thứ hai của tia BI và (O). Ta có:

$\widehat{KIC} = \widehat{KCI}\left(= \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)$

Do đó tam giác KIC cân tại K.

Mặt khác: $\widehat{IKC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Suy ra tam giác IKC đều. Do đó: $IK = IC$ và $IB + IC = BK$.

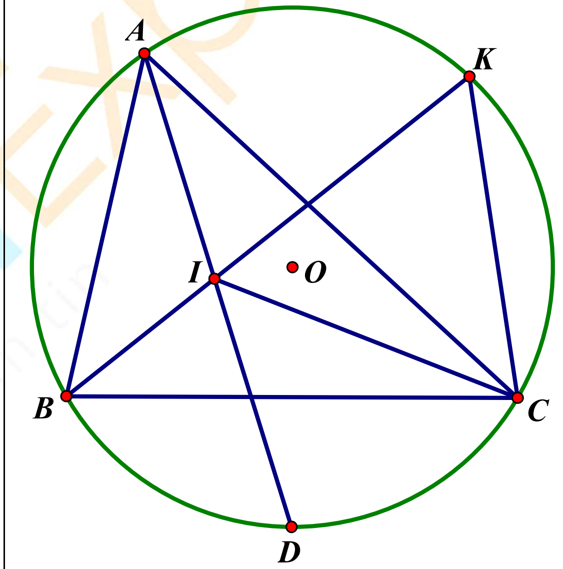
Xét (O): $BK \le 2R$. Suy ra $IB + IC \le 2R$.

Chú ý:

+) Có thể giải cách khác bằng cách chứng minh lại kết quả: Nếu điểm I thay đổi trên cung BC cố định thì biểu thức IB + IC đạt giá trị lớn nhất khi I là điểm chính giữa cung đó.

+) Có thể giải cách khác bằng cách lấy E là điểm đối xứng với O qua BC, chứng minh tam giác BCE đều nội tiếp đường tròn bán kính R và $IB + IC = IE \le 2R$.

Nếu học sinh sử dụng định lý Ptoleme hoặc kết quả của Bài toán Pompei và làm đúng thì được 0,5 điểm câu 4c.



Câu 5. (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left|10^x - 4y^2 + 28y - 26\right|$ với x, y là các số nguyên dương thay đổi.

Lời giải

Ta có: $A = \left|10^x - 4y^2 + 28y - 26\right| = \left|10^x + 23 - (2y-7)^2\right|$

Do $10^x + 23$ có chữ số tận cùng bằng 3 và $(2y-7)^2$ là bình phương của một số nguyên nên không thế có tân cùng bằng 3, suy ra A khác 0.

Do A là số tự nhiên chẵn và khác 0 nên $A \geq 2$.

Với $x = 2, y = 9$ thì $A = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Chú ý: Có thể chứng minh A khác 0 bằng phương pháp phản chứng. Nếu A bằng 0 thì 10^x chia 4 dư 2, suy ra $x = 1$. Tuy nhiên, khi $x = 1$ thì y lại không nhận giá trị nguyên.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+1}{x-1}$ với $x\ge 0;x\ne 1$

a) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A+\dfrac{1}{B}\le 4$.

Lời giải

a) $B=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

b) $A+\dfrac{1}{B}\le 4\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+1\le 4\Leftrightarrow \dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}\le 0\Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1}\le 0$

Trường hợp 1. $\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1}=0\Leftrightarrow x=4$

Trường hợp 2. $\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1}<0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-2\ne 0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 4\\ 0\le x<1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x<1$.

Vậy $0\le x<1$ hoặc $x=4$

Câu 2. (2 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=5-3m\\ mx-y=2\end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{5}{x}+4=\dfrac{3}{y}$.

Lời giải

$\begin{cases}x-my=5-3m & \left(1\right)\\ mx-y=2 & \left(2\right)\end{cases}$

Từ $\left(1\right)\Rightarrow x=my+5-3m$, thay vào $\left(2\right)$ ta được $m\left(my+5-3m\right)-y=2$

$\Leftrightarrow y\left(m^2-1\right)=3m^2-5m+2\Leftrightarrow y\left(m-1\right)\left(m+1\right)=\left(m-1\right)\left(3m-2\right)$ (3)

Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow (m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Với điều kiện $m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{5}{m+1}; \dfrac{3m-2}{m+1}\right)$

Với điều kiện $m \neq \pm 1, m \neq \dfrac{2}{3}$ thì $\dfrac{5}{x} + 4 = \dfrac{3}{y} \Leftrightarrow m+1+4 = \dfrac{3(m+1)}{3m-2}$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 10m - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-13}{3} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện, ta tìm được $m = \dfrac{-13}{3}$

Câu 3. (2 điểm) Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 3 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 150% lượng gạo đã nhập vào kho trong ngày trước đó. Từ ngày thứ tư kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\dfrac{1}{10}$ lượng gạo trong kho ở ngày trước đó. Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau:

a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 380 tấn gạo.

b) Số gạo đã xuất trong ngày thứ năm là 342 tấn.

Lời giải

b) Gọi x (tấn) là lượng gạo nhập vào kho trong ngày thứ nhất. Khi đó lượng gạo nhập vào kho trong các ngày thứ hai, thứ ba lần lượt là $150\%x = \dfrac{3}{2}x$; $150\%\left(\dfrac{3}{2}x\right) = \dfrac{9}{4}x$

Tổng lượng gạo nhập vào kho sau ngày thứ ba là $x + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}x = \dfrac{19}{4}x$.

Theo giả thiết ta có phương trình $\dfrac{19}{4}x = 380 \Leftrightarrow x = 80$

Vậy, ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 80 tấn gạo

b) Lượng gạo đã xuất trong các ngày thứ tư và thứ năm lần lượt là

$$\frac{1}{10}\left(\frac{19}{4}x\right); \frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}\left(\frac{19}{4}x\right)\right] = \frac{171}{400}x$$

Theo giả thiết ta có $\dfrac{171}{400}x = 342 \Leftrightarrow x = 800$

Vậy, ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 800 tấn gạo

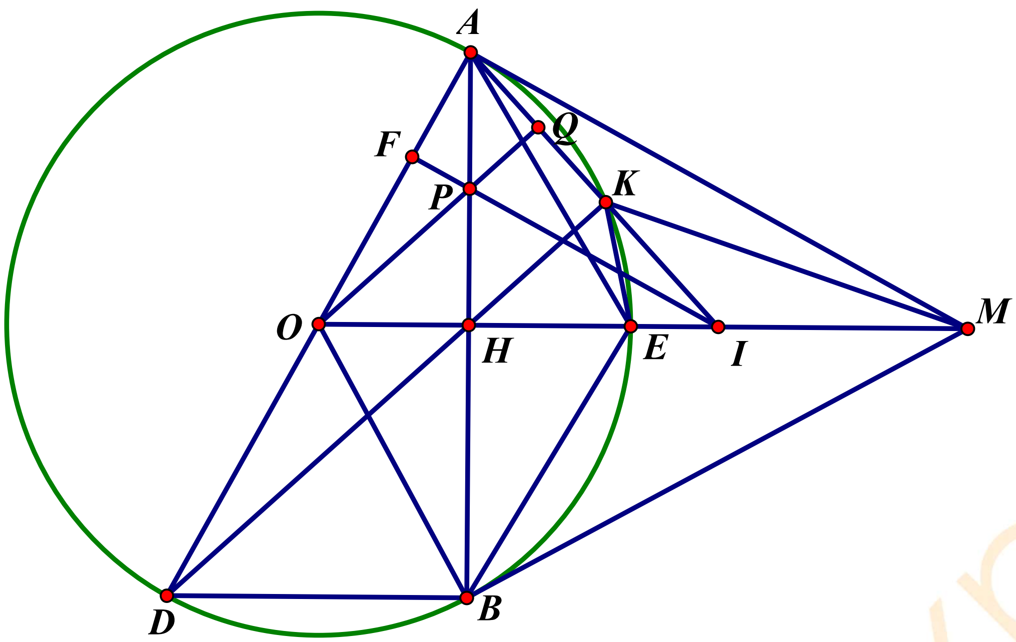
Câu 4. (3 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) $(A, B$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM; E là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O).

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A). Tính số đo góc AKH.

c) Chứng minh KE là tia phân giác của góc MKH.

Lời giải



Cách 1

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì MH là phân giác của góc AMB và MO là đường trung trực của AB, suy ra $EA = EB$ hay tam giác EAB cân tại E, từ đó dẫn đến $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

Ta có $\widehat{EBA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{MAE}$, suy ra AE là phân giác của góc MAB Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi P là trung điểm của AH. Tam giác MAH có IP là đường trung bình suy ra $IP//MA$.

Từ đó dẫn đến $IP \perp AO$

Tam giác AOI có P là trực tâm nên $OP \perp AI$

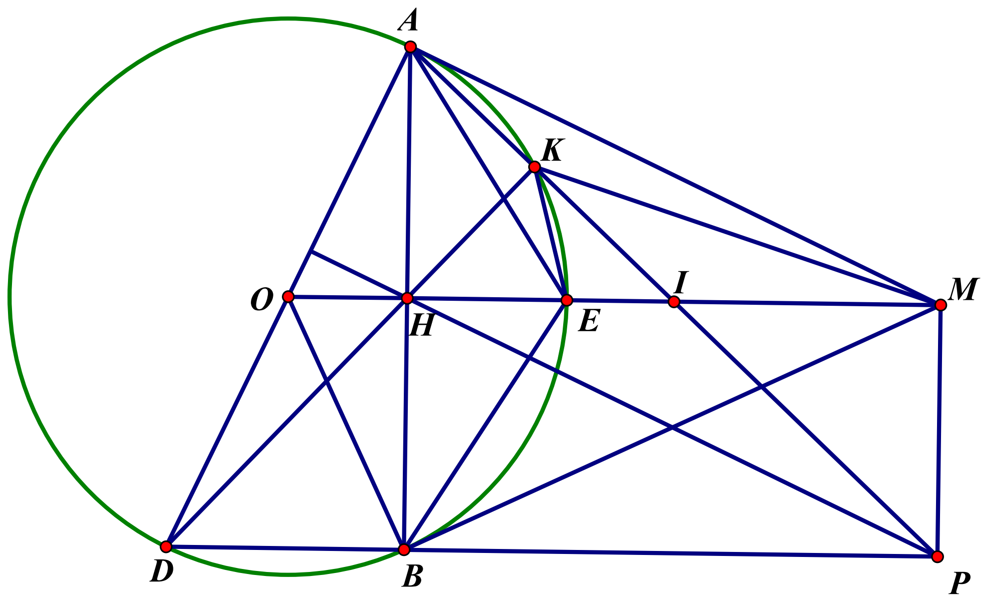
Gọi Q là giao điểm của OP và AI. Ta có Q là trung điểm của AK và PQ là đường trung bình của tam giác AHK, suy ra $PQ//HK$ và kết hợp với $PQ \perp AI \Rightarrow HK \perp AI$. Vậy $\widehat{AKH} = 90^\circ$

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của KH và (O).

Ta chứng minh được $HM.HO = HA.HB$ và $HA.HB = HK.HD$.

Từ đó suy ra $HM.HO = HK.HD \Rightarrow \Delta HKM \backsim \Delta HOD\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{DOH}$

Lại có $\widehat{EKD} = \dfrac{1}{2}\widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{EKD} = \dfrac{1}{2}\widehat{MKH}$ hay KE là tia phân giác của góc MKH.



Cách 2:

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì MH là phân giác của góc AMB và MO là đường trung trực của AB, suy ra $EA = EB$ hay tam giác EAB cân tại E, từ đó dẫn đến $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

Ta có $\widehat{EBA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{MAE}$, suy ra AE là phân giác của góc MAB Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Gọi P đối xứng với A qua I. Tứ giác $AMPH$ là hình bình hành, từ đó suy ra $MP // AH; MP = AH \Rightarrow MP // HB; MP = HB$. Vậy tứ giác $MPBH$ là hình bình hành.

Kết hợp với $\widehat{MHB} = 90^\circ$ ta được $MPBH$ là hình chữ nhật.

Gọi D là giao điểm thứ hai của PB và (O) (D khác B).

Vì góc ABD vuông nên AD là đường kính của (O).

Vậy DK vuông góc với KA hay DK vuông góc với AP (1)

Tam giác ADP có $AB \perp PD; PH \perp AD$ (vì $PH // AM$). Do đó H là trực tâm của tam giác ADP.

Vậy $DH \perp AP$ (2)

Từ (1), (2) suy ra ba điểm D, H, K thẳng hàng. Vậy góc AKH bằng 90°.

c) Ta chứng minh được $HM.HO = HA.HB$ và $HA.HB = HK.HD$.

Từ đó suy ra $HM.HO = HK.HD \Rightarrow \Delta HKM \backsim \Delta HOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{DOH}$

Lại có $\widehat{EKD} = \frac{1}{2}\widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{EKD} = \frac{1}{2}\widehat{MKH}$ hay KE là tia phân giác của góc MKH.

Câu 5. (1 điểm) Xét các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $1 \le a, b, c \le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}}{a + b + c}$.

Lời giải

Giả sử b nằm giữa a và c. Ta có

$$\left(b-c\right)\left(b^2-a^2\right)\le 0 \Rightarrow b^3+a^2c\le b^2c+ba^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c}+\frac{a^2}{b}\le b+\frac{a^2}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\le \frac{a^2}{c}+b+\frac{c^2}{a}=\frac{\left(a+c\right)\left(a^2-ac+c^2\right)}{ac}+b$$

Vì $1\le a,c\le 2$ nên $a\le 2c;c\le 2a$ suy ra $\left(a-2c\right)\left(2a-c\right)\le 0$, dẫn đến $\frac{a^2+c^2-ac}{ac}\le\frac{3}{2}$

Do đó $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\le\frac{3}{2}\left(a+c\right)+b=\frac{11}{8}\left(a+b+c\right)+\frac{1}{8}\left(a+c-3b\right)$

Vì b nằm giữa a,c và $1\le a,b,c\le 2$ nên $a+c\le 2+b\le 2b+b\Rightarrow a+c-3b\le 0$

Từ đó suy ra $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\le\frac{11}{8}\left(a+b+c\right)$

$M=\dfrac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}{a+b+c}\le\frac{11}{8}$. Với $a=b=1;\ c=2$ thì $M=\frac{11}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M bằng $\frac{11}{8}$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho $a=\sqrt[3]{2}+2$ và đa thức $P(x)=(x-3)(x-1)^3$. Tính giá trị của $P(a)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2=x^2+xy-2y^2 \\ x^2y=x^2+4y^2 \end{cases}$

Lời giải

a) Đặt $\alpha=\sqrt[3]{2}$ thì $a=2+\alpha$. Ta có $P(a)=(\alpha-1)(\alpha+1)^3$.

Để ý rằng $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1=3(\alpha^2+\alpha+1)$.

Suy ra $(\alpha-1)(\alpha+1)^3=3\cdot(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=3(\alpha^3-1)=3$

Vậy $P(a)=3$.

b) Giả sử $(x;y)$ là một nghiệm của hệ. Ta thấy $y=0$ thì $x=0$. Xét $y\neq 0$. Khi đó $x\neq 0$.

Từ hệ đã cho, ta có $xy^2(x^2+4y^2)=x^2y(x^2+xy-2y^2)$

$x^3y^2+4xy^4=x^4y+x^3y^2-2x^2y^3$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ thì phương trình trở thành $t^3+4t=t^4+t^3-2t^2$

$$\Leftrightarrow t^3-2t-4=0$$
$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+2)=0$$
$$\Leftrightarrow t=2.$$

Từ đó $x=2y$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $y=2$. Do đó $x=4$.

Vậy ta thu được $(x;y)=(0;0)$ và $(2;4)$. Thử lại ta thấy 2 cặp này đều thoả mãn hệ phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(0;0)$ và $(4;2)$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho số nguyên dương m thoả mãn 3^m+5^m+14 chia hết cho 15. Chứng minh rằng 3^m+5^m+14 chia hết cho 16.

Lời giải

Do 3^m+5^m+14 chia hết cho 15 nên 5^m-1 chia hết cho 3 và 3^m-1 chia hết cho 5.

Nếu m là số lẻ thì từ $5\equiv -1\pmod 3$, ta có $5^m\equiv(-1)^m\equiv -1\pmod 3$ mâu thuẫn.

Vậy m là số chẵn. Nếu $m=4k+2$, với $k\in\mathbb{N}$ thì $3^m-1=3^{4k}.3^2\equiv -1.81^k\equiv -1\pmod 5$ mâu thuẫn.

Vậy $m=4k$.

Ta có 3^m-1 chia hết cho $3^4-1=80$ và 5^m-1 chia hết cho 5^4-1, nên $3^m-1, 5^m-1$ cùng chia hết cho 16.

Vậy $3^m+5^m+14=\left(3^m-1\right)+\left(5^m-1\right)+16$ chia hết cho 16.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số dương a,b. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+b+\frac{|a-b|}{b^2}+\frac{|b^2-b|}{a}\ge 2$$

Lời giải

Ta xét các khả năng:

- Với $a\ge b\ge 1$ thì $\frac{a}{b}+b\ge 2$, do đó bất đẳng thức đúng. $(0{,}25$ điểm)
- Với $a\ge b$ và $b<1$ thì

$$\begin{aligned}VT&=\frac{a}{b}+b+\frac{a-b}{b^2}+\frac{b-b^2}{a}\\&\ge\frac{a}{b}+b+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a}\\&\ge\frac{a}{b}+b+\frac{b}{a}-b\\&=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\end{aligned}$$

- Với $a\le b\le 1$ thì

$$\begin{aligned}VT&=\frac{a}{b}+b+\frac{b-a}{b^2}+\frac{b-b^2}{a}\\&=b+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{b(1-b)}{a}\\&=b+\frac{1}{b}+(b-1)\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a}\right)\\&=2+\frac{(b-1)^2}{b}+(b-1)\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a}\right)\\&=2+\frac{b-1}{b}\left(b-1+\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}\right)\\&=2+\frac{b-1}{b}\cdot(a-b)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 2\end{aligned}$$

- Với $a\le b$ và $1\le b$ thì

$$\begin{aligned}VT &= \frac{a}{b}+b+\frac{b-a}{b^2}+\frac{b^2-b}{a}\\ &= \frac{a}{b}+b+\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}+\frac{b^2}{a}-\frac{b}{a}\\ &\ge \frac{a}{b}+b+\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}\\ &= \frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{b}\right)+b+\frac{1}{b}\\ &\ge b+\frac{1}{b}\ge 2\end{aligned}$$

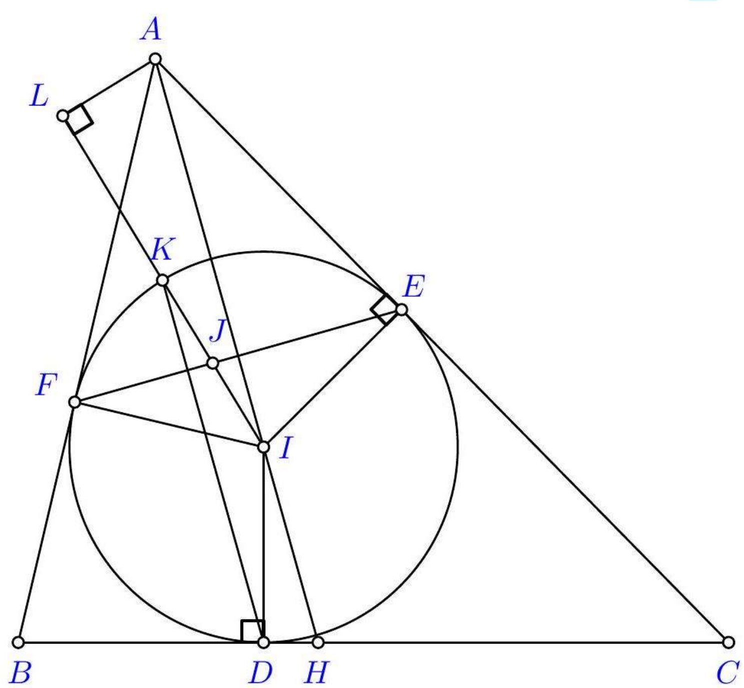
Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC, với $AB<AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F tương ứng là tiếp điểm của BC,CA,AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI,BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

a) $\widehat{KIF}=\widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) $LK\cdot BC=AI\cdot EF$.

c) Các đường thẳng DK,HJ,AL đồng quy.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{KIF}=2.\widehat{KDF}=2.\left(90^\circ-\widehat{DFE}\right)=2.\left(90^\circ-\widehat{EDC}\right)=\widehat{ACB}.$

Do $AL\perp IK$, nên L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Do đó $\widehat{LAF}=\widehat{LIF}=\widehat{ACB}$

Vậy, AL là tiếp tuyến của đường tròn (ABC).

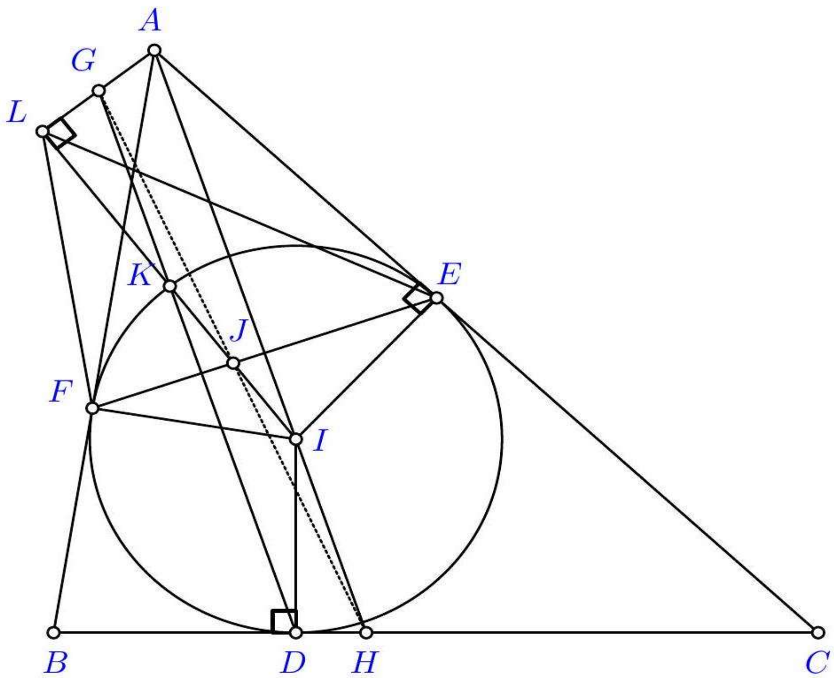
b) Ta có L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Do đó, $\widehat{LEF} = \widehat{LIF} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ELF} = \widehat{EAF}$. Vậy $\Delta LEF \backsim \Delta ACB$.

Vì $IE = IF$, nên LI là phân giác của $\widehat{ELF}$. Mặt khác, $\widehat{LEF} = \widehat{KIF} = 2\widehat{KEF}$, ta suy ra EK là phân giác của $\widehat{LEF}$. Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác LEF.

Từ đó, $\Delta LKF \backsim \Delta AIB$ (g.g). Vậy, $\dfrac{LK}{AI} = \dfrac{LF}{AB} = \dfrac{EF}{BC}$

Suy ra, $LK.BC = AI.EF$.

c) Gọi G là giao điểm của DK và AL.



Ta có $IJ \cdot LK = IJ \cdot LI - IJ \cdot IK = IK^2 - IJ \cdot IK = IK \cdot KJ$.

Suy ra $\dfrac{LK}{KJ} = \dfrac{IK}{IJ}$. Mặt khác, $\dfrac{GK}{LK} = \dfrac{AI}{LI}$. Suy ra $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{IK}{IJ} \cdot \dfrac{AI}{LI}$.

Vì $IJ \cdot LI = IE^2 = IK^2$, nên $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{AI}{IK} (1)$.

Dễ thấy $\Delta JEI \backsim \Delta HAB$. Suy ra $\dfrac{AI}{IH} = \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{IE}{IJ} = \dfrac{IK}{IJ}$.

Kết hợp với (1), ta có: $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{IH}{IJ}$.

Vậy G, J, H thẳng hàng.

Câu 5. (1 điểm) Lần lượt ghi các số 1000, 1001, 1002,.., 1010 lên 11 tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả 11 tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp, một chiếc màu xanh và một chiếc màu đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Hỏi, trong mỗi hộp có bao nhiêu tấm thẻ?

Lời giải

Gọi tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh là a và tổng các số được ghi trong hộp đỏ là b.

Ta có $x,y \in \mathbb{N}^*$. Theo giả thiết x chia hết cho y nên $x = ky$, với k là một số nguyên dương nào đó.
Vì $1000 + 1001 + 1002 + \cdots + 1010 = 11 \times 1000 + (0 + 1 + \cdots + 10) = 11055$ nên $x + y = 11055$.
Vậy ta có phương trình $y(k+1) = 11055$.
Do mỗi tấm thẻ đều ghi một số không nhỏ hơn 1000 nên $y \geq 1000$.
Suy ra $k + 1 \leq 11,055$.
Vậy $k + 1 \leq 11$.
Mặt khác $11055 = 3 \times 5 \times 11 \times 67$ và $k+1$ là một ước lớn hơn 1 của 11055.
Suy ra $k + 1 \in \{3;5;11\}$. Vậy $k \in \{2;4;10\}$.
Với $k = 2$: thì $y = 3685$. Vì tổng 3 số ở 3 tấm thẻ lớn nhất là $1010 + 1009 + 1008 < 3685$. Vậy khả năng này không xảy ra.
Với $k = 4$ thì $y = 2211$: Vì mỗi tấm thẻ ít nhất là 1000 nên tổng của 4 tấm thẻ lớn hơn 4000. Vậy khả năng này không thể xảy ra.
Với $k = 10$ thì $y = 1005$: Như vậy hộp đỏ có chiếc thẻ 1005 và hộp xanh chứa các thẻ còn lại. Trường hợp này xảy ra, vì khi đó tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ là
$10000 + 50 = 10050 = 10 \times 1005$.
Do đó hộp xanh có 10 tấm thẻ và hộp đỏ có 1 tấm thẻ.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

1) Chứng minh rằng $A=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Tìm tất cả các số thực x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) $A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}$

$$A=\frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$A=\frac{4}{\sqrt{x}-2}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$A=\frac{4\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{3x-3\sqrt{x}-6}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{3\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$$

2) Dễ chứng minh: $0<A\le 3$

Vì A là số nguyên nên $A\in\{1;2;3\}$

Với $A=1\Rightarrow x=1$

Với $+)A=2\Rightarrow x=\frac{1}{16}$

Với $+)A=3\Rightarrow x=0$

Kết hợp điều kiện ta có các giá trị x thỏa mãn là $0,\frac{1}{16},1$.

(Ghi chú: Nếu học sinh lập luận $2\sqrt{x}+1$ là ước của 3 và tìm ra $x\in\{0;1\}$ thì không cho điểm nào từ đó đến hết câu.)

Câu 2. (2 điểm) Một hội trường có 374 ghế, được xếp thành nhiều dãy, số ghế ở mỗi dãy bằng nhau và không vượt quá 30 . Hãy tìm số dãy ghế của hội trường biết rằng: nếu kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432.

Lời giải

Gọi x là số dãy ghế và y là số ghế mỗi dãy trong hội trường lúc bình thường. $\left(x,y\in N^*;y\le 30\right)$

Vì bình thường hội trường có 374 ghế và số ghế mỗi dãy bằng nhau nên ta có phương trình:

$xy=374$ (1)

Vì khi kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432 nên ta có phương trình: $\left(x+1\right)\left(y+2\right)=432$ (2)

Từ (2) ta có: $xy+y+2x+2=432$ (3)

Lấy (3) - (1) theo vế ta thu được: $y+2x=56$ (4)

Từ (4) ta có: $y=56-2x$, thế vào (1) ta thu được: $x\left(56-2x\right)=374$

$$\Leftrightarrow 2x^2-56x+374=0\Leftrightarrow x^2-28x+187=0\Leftrightarrow\left(x-17\right)\left(x-11\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=17\\x=11\end{array}\right.$$

Với $x=17\Rightarrow y=22$

Với $x=11\Rightarrow y=34$

Kết hợp điều kiện $y\le 30$ ta có $x=17,y=22$.

Vậy bình thường hội trường có 17 dãy ghế

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\left(m-1\right)x+2m+3$ cắt hai trục tọa độ Ox,Oy tương ứng tại hai điểm A,B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 .

2) Chứng minh rằng, với hai số thực a,b bất kì, ít nhất một trong hai phương trình (ẩn là x) sau đây có nghiệm: $x^2-2ax-\left(a^2-4b^2+1\right)=0$ và $x^2-4bx-\left(b^2-2ab-a\right)=0$.

Lời giải

3.1) Vì hàm số $y=\left(m-1\right)x+2m+3$ là hàm bậc nhất nên $m\ne 1$. Khi đó đổ thị của hàm số cắt hai trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại hai điểm $A\left(\dfrac{-2m-3}{m-1};0\right),B\left(0;2m+3\right)$.

Khi đó $OA=\left|\dfrac{-2m-3}{m-1}\right|,OB=\left|2m+3\right|\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=\dfrac{(2m+3)^2}{2\left|m-1\right|}$

Từ giả thiết, ta có: $\dfrac{(2m+3)^2}{2\left|m-1\right|}=4\Leftrightarrow(2m+3)^2=8\left|m-1\right|\ \left(*\right)$

TH1: $m\ge 1$. Phương trình $\left(*\right)$ trở thành:

$4m^2+12m+9=8m-8\Leftrightarrow 4m^2+4m+17=0$

$\Delta'=-64<0$ nên phương trình vô nghiệm.

TH2: $m<1$. Phương trình (*) trở thành:

$$4m^2+12m+9=-8m+8 \Leftrightarrow 4m^2+20m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m=\dfrac{-2\sqrt{6}-5}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m=\dfrac{-2\sqrt{6}-5}{2} \end{array}\right.$

Ghi chú: nếu trong bài làm học sinh không chỉ ra $m\neq 1$ thì trừ 0,25 điểm.

3.2) Ta thấy $x^2-2ax-\left(a^2-4b^2+1\right)=0$ có: $\Delta'_1=a^2+\left(a^2-4b^2+1\right)=2a^2-4b^2+1$

và $x^2-4bx-\left(b^2-2ab-a\right)=0$ có $\Delta'_2=4b^2+\left(b^2-2ab-a\right)=5b^2-2ab-a$

Xét $\Delta'_1+\Delta'_2=2a^2+b^2-2ab-a+1$

$$\Delta'_1+\Delta'_2=2a^2+b^2-2ab-a+1=\left(a-b\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Ta thấy $\Delta'_1+\Delta'_2>0$ nên có ít nhất một trong hai số Δ'_1 ; Δ'_2 là số dương. Từ đó suy ra it nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

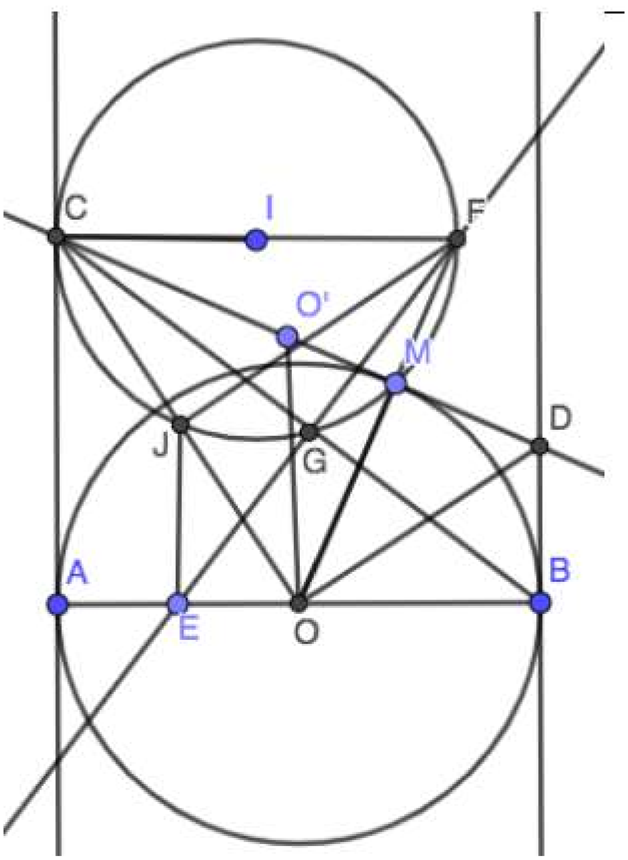
Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn $\left(O\right)$ có đường kính AB và M là một điểm nằm trên $\left(O\right)$(M khác A,B). Trong nửa mặt phẳng chứa M, có bờ là đường thẳng AB vẽ các tia Ax,By vuông góc với AB. Tiếp tuyến tại M của $\left(O\right)$ cắt các tia Ax,By lần lượt tại C,D.

1) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

2) Vẽ đường tròn $\left(I\right)$ qua M, tiếp xúc với Ax tại C. Tia OC cắt đường tròn $\left(I\right)$ tại điểm thứ hai J. Chứng minh rằng J là trung điểm của OC.

3) Gọi E là trung điểm của OA. Chứng minh rằng đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại một điểm thuộc đường tròn $\left(I\right)$.

Lời giải



4.1) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OC là phân giác của góc AOM, OD là phân giác của góc BOM

$\Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ \Rightarrow \Delta COD$ vuông tại $O \Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính CD. (1)

Gọi O' là trung điểm của CD thì O' là tâm của đường tròn đường kính CD. (2)

Mặt khác OO' là đường trung bình của hình thang $ABDC$ nên $OO' // AC // BD$.

$\Rightarrow OO' \perp AB (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD $(dpcm)$.

4.2) OM cắt đường tròn (I) tại F khác M.

Vì CM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{CMO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CMF} = 90^\circ$

$\Rightarrow C, I, F$ thẳng hàng hay CF là đường kính của đường tròn (I).

Vì đường tròn (I) tiếp xúc với Ax tại C nên $IC \perp AC$ hay $CF // AB$

$\Rightarrow \widehat{FCO} = \widehat{COA} (4)$

Mặt khác, OC là phân giác của góc AOM (theo phần 4.1) nên $\widehat{COA} = \widehat{COF}$ (5)

Từ (4), (5) $\Rightarrow \widehat{FCO} = \widehat{COF}$ hay tam giác FCO cân tại F. (6)

Mặt khác, J thuộc đường tròn đường kính CF nên $\widehat{CJF} = 90^\circ$. $\Rightarrow FJ \perp CO (7)$

Từ (6), (7) suy ra tam giác FCO cân tại F có FJ là đường cao đồng thời là trung tuyến. Do đó, J là trung điểm của OC (đpcm).

4.3) Ta sẽ chứng minh FE vuông góc với BC. Thật vậy, gọi G là giao điểm của FE và BC.

Ta thấy EJ là đường trung bình của tam giác OCA nên $EJ // CA, EJ = \dfrac{CA}{2} \Rightarrow EJ \perp AB$

Ta thấy: ΔFJO đồng dạng với ΔJEO (g.g) do $\widehat{FJO} = \widehat{JEO} = 90^\circ, \widehat{FOJ} = \widehat{JOE}$

$\Rightarrow \dfrac{FJ}{JE} = \dfrac{JO}{EO} = \dfrac{CO}{AO} = \dfrac{CO}{BO}$ (do J, E lần lượt là trung điểm của CO, AO). (8)

Mặt khác, theo tính chất góc ngoài tam giác: $\widehat{COB} = \widehat{EJO} + 90^\circ = \widehat{FJE}$ (9)

Từ $(8),(9)$ suy ra ΔFJE đồng dạng với ΔCOB (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{JEF} = \widehat{OBC} \Rightarrow \widehat{OBC} + \widehat{OEG} = \widehat{JEF} + \widehat{OEG} = \widehat{JEO} = 90^\circ \Rightarrow EF \perp BC$

Từ đó, ta thấy đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại điểm F thuộc đường tròn (I).

Câu 5. (1 điểm)

1) Hãy chỉ ra một số thực x khác $0, \pm 1$ để $x + \dfrac{1}{x}$ là số nguyên.

2) Cho x là một số thực khác $0, \pm 1$ thỏa mãn $x + \dfrac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

Lời giải

1) Để chỉ ra có số thực x để $x + \dfrac{1}{x}$ là số nguyên ta xét phương trình $x + \dfrac{1}{x} = 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

2) Trước hết ta chứng minh x là số vô tỉ. Thật vật, giả sử x là số hữu tỉ thì x có dạng $\dfrac{m}{n}$ với

$m \in Z, n \in N^*, (m,n) = 1$. Khi đó, $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{m^2 + n^2}{mn}$.

Vì $x + \dfrac{1}{x}$ là số nguyên nên $(m^2 + n^2) \vdots m.n$. Do đó, $m^2 \vdots n, n^2 \vdots m$.

Mà $(m,n) = 1$ nên $m \vdots n, n \vdots m$. Lại do $(m,n) = 1$ nên $m = \pm 1$.

Tương tự $n = \pm 1$. Do đó $x = \pm 1$ (trái giả thiết $|x| \neq 1$).

Vậy x là số vô tỉ. (1)

Ta thấy: $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=2x$. Nếu $x-\frac{1}{x}$ là số hữu tỉ thì $\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2}=x$ là số hữu tỉ (trái với (1)). Do đó $x-\frac{1}{x}$ là số vô tỉ. (2)

Mặt khác, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$. Vì $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên nên $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ là số nguyên. Do đó $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2022}$ cũng là số nguyên

Do $|x|\neq 1$ nên $x-\frac{1}{x}\neq 0$.

Ta thấy: $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2022}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Nếu $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số hữu tỉ thì $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}:\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2022}=x-\frac{1}{x}$ là số hữu tỉ (trái với (2)).

Vậy $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-y}=4\\ \sqrt{3y+1}+\sqrt{5-x}=4\end{cases}$.

2) Cho a,b,c,d là các số thực khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$\frac{a^2-1}{5a}=\frac{b^2-1}{5b}=\frac{c^2-1}{3c}=\frac{d^2-1}{3d}=n$$

với n là một số nguyên. Chứng minh: $P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

1) Điều kiện: $\frac{-1}{3}\le x,y\le 5$

Từ hệ suy ra $\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}=\sqrt{3y+1}-\sqrt{5-y}$

Nếu $x>y$ thì $VT>VP$

Nếu $x<y$ thì $VT<VP$

Do đó $x=y$

Thay $x=y$ vào pt (1) ta được

$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}=4\Leftrightarrow 6+2x+2\sqrt{(3x+1)(5-x)}=16\Leftrightarrow\sqrt{(3x+1)(5-x)}=5-x$

$\Leftrightarrow(3x+1)(5-x)=(5-x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=1\end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(5;5)$ và $(1;1)$.

2) Từ giả thiết suy ra a,b là hai nghiệm của phương trình $x^2-5nx-1=0$ và c,d là hai nghiệm của phương trình $x^2-3nx-1=0$. Theo định lý Viet ta có $\begin{cases}a+b=5n\\ab=-1\\c+d=3n\\cd=-1\end{cases}$.

Ta có $P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=\left(ab-(a+b)c+c^2\right)\left(ab+(a+b)d+d^2\right)$

$=\left(c^2-5cn-1\right)\left(d^2+5dn-1\right)$

Vì $c^2-3nc-1=0$ và $d^2-3nd-1=0$ nên $P=(-2nc)(8nd)=-16n^2cd=16n^2$.

Do đó P là bình phương của một số nguyên.

Câu 2. (3 điểm)

1) Chứng minh rằng $1+2^2+3^3+\ldots+2039^{2039}$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

2) Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}$.

Lời giải

1) Ta chứng minh $A=1+2^2+3^3+\ldots+2039^{2039}$ không thể là số chính phương. Thật vậy, xét số dư của các số hạng trong A theo mod 3 ta có dãy số dư lần lượt là $1,1,0,1,-1,0,1,1,0,1,-1,0,\ldots$

Ta có $2039:6=339$ dư 5. Do đó tổng A chia 3 dư 2. Vậy A không là số chính phương.

Ta chứng minh A không thể là lũy thừa của số tự nhiên với số mũ lớn hơn 2.

Ta xét số dư của A theo mod 8.

Ta có $n^n \equiv n \pmod 8, \forall n$ lẻ và $n^n \equiv 0 \pmod 8$ với mọi n chẵn >2

Suy ra $A \equiv 2^2+1+3+\ldots+2039 \equiv 4+1020^2 \equiv 4 \pmod 8$

Vì A chẵn nên nếu $A=m^k, k\ge 3$ thì m chẵn và do đó $A\equiv 0 \pmod 8$ (mâu thuẫn).

Vậy ta có đpcm.

2) Cách 1

$$P=\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}=\frac{\left(1+x^2\right)^2}{(z+2)\left(1+x^2\right)}+\frac{\left(1+y^2\right)^2}{(x+2)\left(1+y^2\right)}+\frac{\left(1+z^2\right)^2}{(y+2)\left(1+z^2\right)}$$

$$\ge \frac{\left(3+x^2+y^2+z^2\right)^2}{(z+2)\left(1+x^2\right)+(x+1)\left(1+y^2\right)+(y+2)\left(1+z^2\right)}$$

$$=\frac{36}{x+y+z+6+x^2z+y^2x+z^2y+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Vì $(x+y+z)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=9$ nên $x+y+z\le 3$ và

$$\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)^2\le\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\le\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=9$$

Nên $P\ge\frac{36}{3+6+3+6}=2$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy min $P=2$.

Cách 2: $\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{\left(1+x^2\right)(z+2)}{9}\ge\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)$

$$\Rightarrow\frac{1+x^2}{z+2}\ge\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)-\frac{\left(1+x^2\right)(z+2)}{9}=\frac{4}{9}\left(1+x^2\right)-\frac{z\left(1+x^2\right)}{9}$$

Tương tự, ta suy ra

$$VT \geq \frac{4}{9}\cdot 6-\frac{1}{9}\left(z\left(1+x^2\right)+x\left(1+y^2\right)+y\left(1+z^2\right)\right)$$
$$\geq \frac{8}{3}-\frac{1}{9}\left(\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{2}+\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}{2}+\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+y^2\right)}{2}\right)$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{18}\left(3+2\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\right)$$
$$\geq \frac{8}{3}-\frac{1}{18}\left(3+6+\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\right)=2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy min $P=2$.

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với các cạnh AC,AB. Gọi (K) là đường tròn đi qua B, tiếp xúc với đường thẳng AI tại I. Đường tròn này cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai P (khác B). Gọi (L) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AI tại I, đường tròn này cắt đường thẳng AC tại điểm thứ hai Q (khác C).

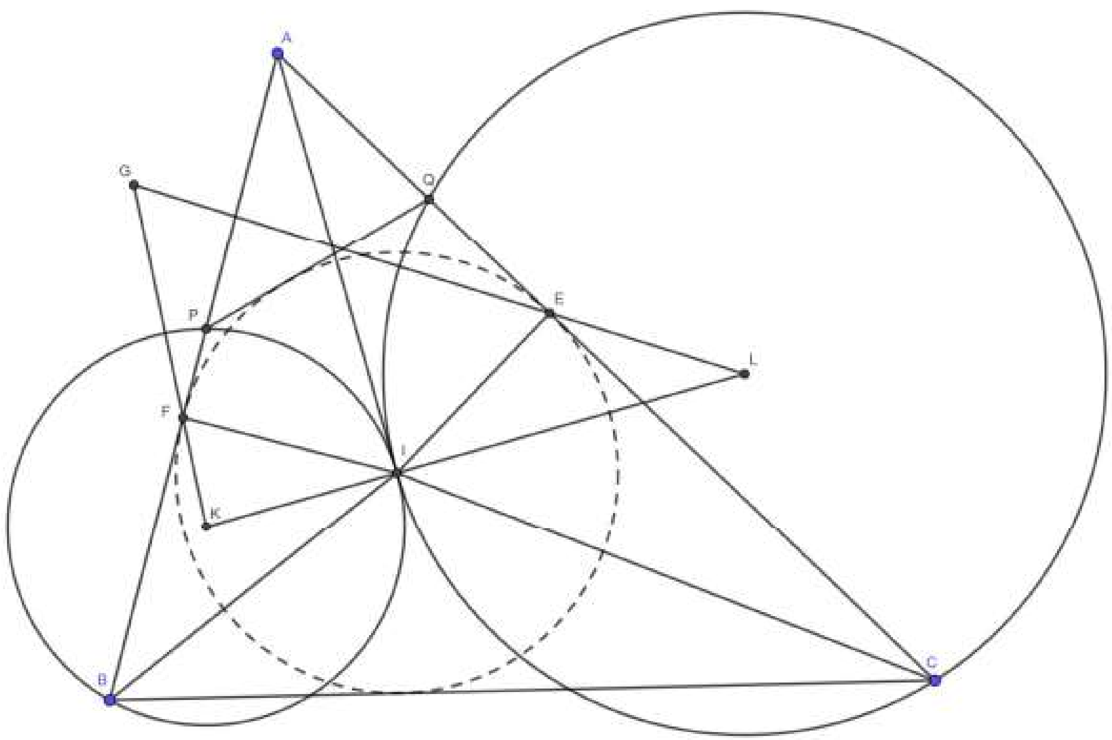
Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

b. Đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn (I).

c. Các đường thẳng KF và LE cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



a) Vì đường tròn (K) tiếp xúc với AI nên $AI^2 = AB \cdot AP$. Tương tự $AI^2 = AC \cdot AQ$.

Do đó $AC \cdot AQ = AB \cdot AP$. Vậy tứ giác BPQC nội tiếp. (Chú ý cần chứng minh lại các tính chất phương tích)

b) Ta có $\widehat{BPI} = 180^\circ - \widehat{AIB} = 180^\circ - \left(90^\circ + \dfrac{\widehat{ACB}}{2}\right) = 90^\circ - \dfrac{\widehat{ACB}}{2} = \dfrac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} = \dfrac{\widehat{BPQ}}{2}$

Suy ra PI là phân giác ngoài $\widehat{BPQ}$. Mà AI là phân giác $\widehat{PAQ}$. Do đó I là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác APQ. Vậy PQ tiếp xúc với đường tròn (I).

c) Gọi G là giao điểm của EL và FK.

Ta có $\widehat{BKP} = 2\widehat{BIP} = 2\left(\widehat{AIB} - \widehat{AIP}\right) = 2\left(90^\circ + \dfrac{\widehat{ACB}}{2} - \dfrac{\widehat{ABC}}{2}\right) = 180^\circ + \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$

Chứng minh tương tự $\widehat{QLC} = 180^\circ + \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{BKP} = \widehat{QLC}$. Mà 2 tam giác BKP, QLC đều là các tam giác cân. Do đó $\Delta BKP \backsim \Delta QLC$.

Lại có, theo chứng minh phần b), $\widehat{FIP} = 90^\circ - \widehat{FPI} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$. Suy ra $\Delta FIP \backsim \Delta ECI$. Do đó $FP.EC = IE.IF$.

Chứng minh tương tự $EQ.FB = IE.IF$. Vậy $\dfrac{FB}{FP} = \dfrac{EC}{EQ}$.

Suy ra $\Delta KFB \backsim \Delta LEC$

Lại có $EF \,//\, KL$ (cùng vuông góc với AI)

Do đó ta có $\dfrac{FG}{FB} = \dfrac{FG}{FK} \cdot \dfrac{FK}{FB} = \dfrac{EG}{EL} \cdot \dfrac{EL}{EC} = \dfrac{EG}{EC}$..

Mặt khác $\widehat{BFG} = 180^\circ - \widehat{BFK} = 180^\circ - \widehat{LEC} = \widehat{GEC}$, suy ra $\Delta GFB \backsim \Delta GEC$.

Do đó $\widehat{GBF} = \widehat{GCE}$. Vậy G thuộc đường tròn (ABC).

Câu 4. (1 điểm) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023. Lần lượt điền 2023^2 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, 3, 4 \ldots, 2023^2$ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô được điền đúng một số, ở mỗi dòng tính từ trái sang phải hoặc ở mỗi cột tính từ trên xuống dưới, các số được điền theo thứ tự tăng dần. Thực hiện việc thay đổi số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn 2 ô chung nhau cạnh hoặc chung nhau đúng một đỉnh.

-/ Nếu hai ô đó chung cạnh thì tăng số ở một ô thêm 2 đơn vị và giảm số trong ô còn lại 2 đơn vị.

-/ Nếu hai ô đó chung nhau đúng một đỉnh thì cùng tăng hoặc cùng giảm số trong hai ô đó 2 đơn vị.

Hỏi sau một số lần chơi ta có thể thu được bảng gồm toàn các số 2023 được không? Vì sao?

Lời giải

Sau mỗi lần thay đổi, các số luôn giữ nguyên tính chẵn lẻ. Do đó không thể có toàn bộ các số là 2023.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\dfrac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{a-b}-1$ với $a>0, b>0$ và $a\neq b$.

a) Chứng minh $M=\dfrac{a+b}{a-b}$.

b) Tính $\dfrac{a}{b}$ biết $M>0$ và $M\cdot\left(a^2-b^2\right)=\dfrac{9}{2}ab$.

Lời giải

a) $M=\dfrac{\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}-\dfrac{a-b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$

$M=\dfrac{2a+\sqrt{ab}-b+b-\sqrt{ab}-a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{a+b}{a-b}$

b) $M\cdot\left(a^2-b^2\right)=\dfrac{9}{2}ab\cdot \Leftrightarrow (a+b)^2=\dfrac{9}{2}ab \Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-5\cdot\dfrac{a}{b}+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Do $M>0$ và $a,b>0$ nên $a-b>0$. Suy ra $\dfrac{a}{b}>1$.

Vậy $\dfrac{a}{b}=2$.

Câu 2. (2 điểm) a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: y=2x+3$ và $d': y=mx+m^2-1\left(m\neq 0\right)$. Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

b) Giá cước dịch vụ của một hãng taxi vào tháng 4/2023 như sau:

Giá cước mở cửa 1 km đầu tiên	**Giá cước những km tiếp theo**	**Giá cước từ km thứ 21 trở đi**
20 000 đồng	14 000 đồng	12 000 đồng

Gọi x $(x>0)$ là số km mà hành khách di chuyển. Khi đó, số tiền mà hành khách phải trả được tính bởi công thức:

$$T=20\,000 \text{ nếu } 0<x\le 1$$

$$T=20\,000+14\,000\left(x-1\right) \text{ nếu } 1<x\le 20$$

$$T=286\,000+12\,000\left(x-20\right) \text{ nếu } x>20$$

Cô Hằng di chuyển bằng xe của hãng taxi trên và đã trả số tiền là 322 000 đồng. Hỏi cô Hằng đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu km?

Lời giải

a) Đường thẳng d cắt đường thẳng d' khi và chi khi $m \neq 2$

Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm $A\left(0;3\right)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $A\left(0;3\right) \Leftrightarrow m^2-1=3 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0; m \neq 2$ ta suy ra giá trị cần tìm của m là $m=-2$

b) Nếu hành khách di chuyển quãng đường 20 km thì phải trả số tiền là

$20000+14000.\left(20-1\right)=286000$

Do $322000>286000$ nên cô Hằng di chuyển quãng đường nhiều hơn 20 km hay $x>20$.

Do đó, tổng số tiền cô Hằng phải trả (tính theo x) là:

$286000+12000\left(x-20\right)$ (đồng)

Theo giả thiết, ta có phương trình $286000+12000\left(x-20\right)=322000$

$\Leftrightarrow x=23$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy cô Hằng đã di chuyển quãng đường là 23 km.

Câu 3. (2 điểm) Cho phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-1=0$, ($m$ là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left(1-x_1\right)\left(x_2-m\right)^2=9$.

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 1.\left(m^2-1\right)<0 \Leftrightarrow -1<m<1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta>0 \Leftrightarrow (2m-1)^2-4\left(m^2-1\right)>0 \Leftrightarrow 5-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{5}{4}$

Theo định lí Vi - ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m-1 \\ x_1\cdot x_2=m^2-1 \end{cases}$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-1=0$ nên

$x_2^2-\left(2m-1\right)x_2+m^2-1=0 \Rightarrow x_2^2-2mx_2+x_2+m^2-1=0$

$\Rightarrow x_2^2-2mx_2+m^2=1-x_2 \Rightarrow \left(x_2-m\right)^2=1-x_2$

Thay vào giả thiết ta được $\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)=9 \Leftrightarrow 1-\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2-9=0$

$$\Leftrightarrow -\left(2m-1\right)+m^2-1-8=0 \Leftrightarrow m^2-2m-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=4 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện phương trình có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m=-2$

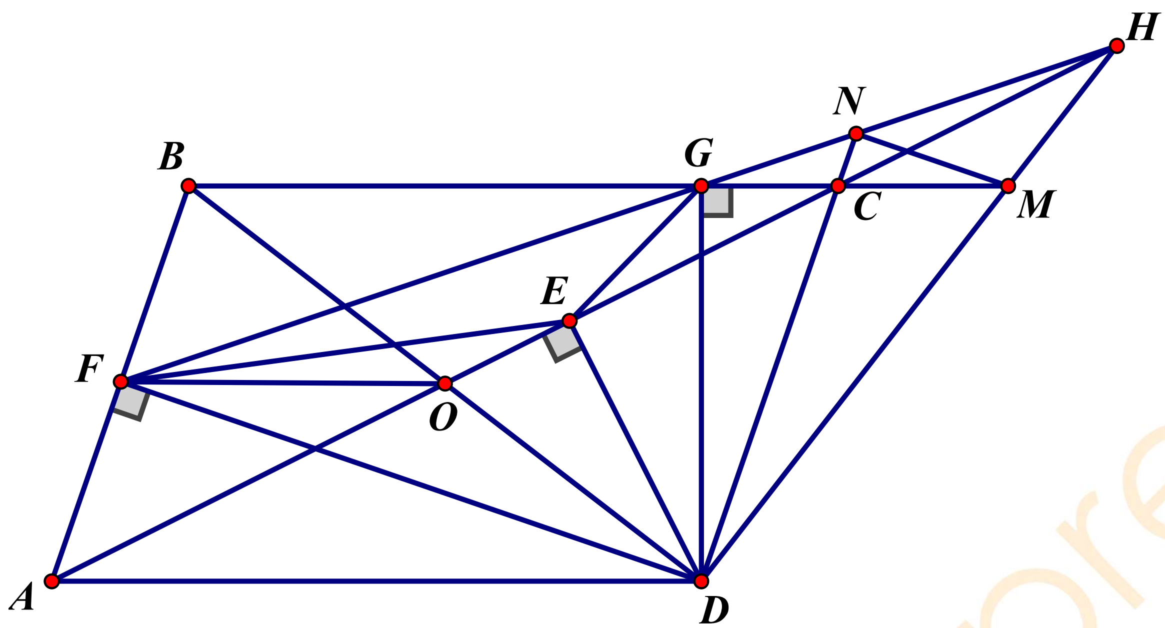
Câu 4. (3 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ sao cho tam giác ABD nhọn và không là tam giác cân. Gọi O là giao điểm của AC với BD và E, F, G tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AC, AB, BC.

a) Chứng minh $ED^2=EF.EG$.

b) Chứng minh bốn điểm O, E, G, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của các đường thẳng FG và AC. Chứng minh $DH \perp DB$.

Lời giải



a) Vì tứ giác $ADEF$ nội tiếp nên $\widehat{EFD} = \widehat{EAD}$

Vì tứ giác $CDEG$ nội tiếp nên $\widehat{EDG} = \widehat{ECG}$

Mà $\widehat{EAD} = \widehat{ECG}$ (so le trong) nên $\widehat{EFD} = \widehat{EDG}$

Tương tự $\widehat{EGD} = \widehat{EDF}$

Do đó $\triangle EFD \sim \triangle EDG \Rightarrow \dfrac{EF}{ED} = \dfrac{ED}{EG} \Rightarrow EF.EG = ED^2$

b) **Cách 1.** Vì tứ giác $DEGC$ nội tiếp nên $\widehat{CEG} = \widehat{CDG}$

Vì tứ giác $DFBG$ nội tiếp nên $\widehat{BFG} = \widehat{BDG}$

Tam giác BFD vuông tại F có FO là trung tuyến nên $FO = OD$. Suy ra $\widehat{OFD} = \widehat{ODF}$

Do đó $\widehat{OFG} = 90^\circ - \widehat{OFD} - \widehat{BFG} = 90^\circ - \widehat{ODF} - \widehat{BDG} = \widehat{CDG} = \widehat{CEG}$

Vậy tứ giác $OEGF$ nội tiếp.

Cách 2

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BGDF$ nên $\widehat{FOG} = 2\widehat{FDG}$

Khi đó $\widehat{GEF} = 180^\circ - \widehat{GEC} - \widehat{FEA} = 180^\circ - \widehat{GDC} - \widehat{FDA} = \left(90^\circ - \widehat{GDC}\right) + \left(90^\circ - \widehat{FDA}\right)$

$= \widehat{GCD} + \widehat{FAD} = 2\widehat{BAD} = 2\widehat{FDG} = \widehat{FOG}$

Vậy tứ giác $OEGF$ nội tiếp.

c) **Cách 1.**

Gọi M là giao điểm của BC và $DH; N$ là giao điểm của DC và FG.

Theo định lí Ta - let ta có $\dfrac{HM}{HD} = \dfrac{HC}{HA} = \dfrac{HN}{HF} \Rightarrow MN // DF$

Vì DF vuông góc với DN nên DN vuông góc với MN.

Từ đó dẫn đến tứ giác $DGNM$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MDN} = \widehat{MGN}$

Ta có $\widehat{MGN} = \widehat{BGF}$ (đối đỉnh)

Vì tứ giác $DFBG$ nội tiếp nên $\widehat{BGF} = \widehat{BDF}$

Do đó $\widehat{MDN} = \widehat{BDF} \Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{BDN} + \widehat{NDM} = \widehat{BDN} + \widehat{BDF} = \widehat{NDF} = 90^\circ$ (đpcm)

Cách 2. Với chú ý tam giác OGF cân tại $O\left(OG = OF = \dfrac{1}{2}BD\right)$ và tứ giác $OEGF$ nội tiếp ta có

$\widehat{OEF} = \widehat{OGF} = \widehat{OFG}$ dẫn đến $\Delta OEF \backsim \Delta OFH \Rightarrow \dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OF}{OH} \Rightarrow OE.OH = OF^2$

Vì $OF = OD$ nên $OE.OH = OD^2 \Rightarrow \dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OD}{OH} \Rightarrow \Delta OED \backsim \Delta ODH(c.g.c)$. Từ đó suy ra được ngay

$\widehat{ODH} = \widehat{OED} = 90^\circ$

Câu 5. (1 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương a và b thỏa mãn: Nếu c và d là các số thực sao cho các phương trình $x^2 + ax + 1 = c$ và $x^2 + bx + 1 = d$ có nghiệm thì phương trình $x^2 + (a+b)x + 1 = cd$ cũng có nghiệm.

Lời giải

Bài toán phát biểu lại như sau: Tìm tất cả các số nguyên dương a và b có tính chất: nếu c, d thỏa mãn $a^2 + 4c - 4 \ge 0; b^2 + 4d - 4 \ge 0$ thì ta luôn có $(a+b)^2 - 4 + 4cd \ge 0$

Nếu $a \ge 3$, ta có thể chọn như sau

Cách 1 . Chọn $c = \dfrac{-a^2}{8}, d = 4b^2$ (thỏa mãn điều kiện $a^2 + 4c - 4 \ge 0; b^2 + 4d - 4 \ge 0$)

mà $(a+b)^2 - 4 + 4cd = a^2 + 2ab + b^2 - 4 - 2a^2b^2$

$= -(ab-1)^2 - (a^2-1)(b^2-1) - 2 < 0$ vì a, b là các số nguyên dương

Do đó $a \ge 3$ không thỏa mãn.

Cách 2. Chọn $c = \dfrac{4-a^2}{4}, d = 2 + 2ab + b^2$ (thỏa mãn điều kiện $a^2 + 4c - 4 \ge 0; b^2 + 4d - 4 \ge 0$)

mà $(a+b)^2 - 4 + 4cd = a^2 + 2ab + b^2 - 4 + (4 - a^2)d = td + 2ab + b^2 - t$

$= t(2 + 2ab + b^2) + 2ab + b^2 - t = t + 2ab(t+1) + b^2(t+1)$

Vì $t = 4 - a^2 \le -5; ab > 0; b^2 > 0$ nên $t + 2ab(t+1) + b^2(t+1) < 0$

$\Rightarrow (a+b)^2 - 4 + 4cd < 0$. Do đó $a \ge 3$ không thỏa mãn.

Chú ý: Khi $a \ge 3$ thì $c = \dfrac{4-a^2}{4} < 0$, ta có thể chọn $c = \dfrac{4-a^2}{4}$;

chọn d lớn hơn cả hai số $\dfrac{4-(a+b)^2}{4c}$ và $\dfrac{4-b^2}{4}$

$\left(d > \max\left\{\dfrac{4-(a+b)^2}{4c}; \dfrac{4-b^2}{4}\right\}\right)$

Vậy $a \in \{1;2\}$. Tương tự $b \in \{1;2\}$

Với $a,b \in \{1;2\}$ thì $(a+b)^2 \geq 4$ và $a^2 + 4c - 4 \geq 0 \Rightarrow c \geq \dfrac{4-a^2}{2} \geq 0; b^2 + 4d - 4 \geq 0 \Rightarrow d \geq \dfrac{4-b^2}{2} \geq 0$

Từ đó dẫn đến $(a+b)^2 - 4 + 4cd \geq 0$

Các giá trị nguyên dương cần tìm của a,b là $a,b \in \{1;2\}$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm)

Cho ba phương trình:

$$x^2 - ax + 1 = 0\left(1\right), \quad x^2 - bx + 1 = 0\left(2\right), \quad x^2 - cx + 1 = 0 \text{ (3)},$$

trong đó a,b,c là các số thực.

Biết rằng, phương trình (1) có nghiệm $x = x_1$, phương trình (2) có nghiệm $x = x_2$ và phương trình (3) có nghiệm $x = x_1x_2$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

Lời giải

Ta có: $x_1^2 - ax_1 + 1 = 0$, $\quad x_2^2 - bx_2 + 1 = 0$, $\quad \left(x_1x_2\right)^2 - c\left(x_1x_2\right) + 1 = 0$.

Suy ra $a = x_1 + \dfrac{1}{x_1}$, $\quad b = x_2 + \dfrac{1}{x_2}$, $\quad c = x_1x_2 + \dfrac{1}{x_1x_2}$

Ta có $ab = \left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) = c + \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$

$$\Rightarrow abc = c^2 + \left(x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = c^2 + x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} = c^2 + a^2 - 2 + b^2 - 2$$

Suy ra $T = 4$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\left(\sqrt{y+4} + \sqrt{y+11}\right) = 35 \\ y\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}\right) = 35 \end{cases}$

2) Chứng minh rằng, với mọi số thực x,y,z ta có:

$$\left(z + x - y\right)x^5 + \left(x + y - z\right)y^5 + \left(y + z - x\right)z^5 \ge 0.$$

Lời giải

1) Điều kiện: $x,y > 0$. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x = 5\left(\sqrt{y+11} - \sqrt{y+4}\right) \\ y = 5\left(\sqrt{x+11} - \sqrt{x+4}\right) \end{cases}$

Trừ theo từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$x - y = 5\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{y+4}\right) - 5\left(\sqrt{x+11} - \sqrt{y+11}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - y = 5\frac{x-y}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}} - 5\frac{x-y}{\sqrt{x+11} + \sqrt{y+11}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(1 - \frac{5}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+11} + \sqrt{y+11}}\right) = 0$$

Từ hệ đã cho suy ra x,y không đồng thời nhỏ hơn 5. Do đó

$$\frac{5}{\sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}}-\frac{5}{\sqrt{x+11}+\sqrt{y+11}}<\frac{5}{\sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}}<\frac{5}{3+2}=1$$

Từ (1) suy ra $x=y$.

Với $x=y$ ta có: $x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)=35$ (2).

Xét $f(x)=x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}\right)$, ta có $f(5)=35$. Nếu $x>5$ thì $f(x)>f(5)=35$.

Nếu $x<5$ thì $f(x)<f(5)=35$. Do đó, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=5$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=5$.

2) Chứng minh: $(z+x-y)x^5+(x+y-z)y^5+(y+z-x)z^5\geq 0$.

Đpcm tương đương với $x^6+y^6+z^6-x^5y-y^5z-z^5x+x^5z+y^5x+z^5y\geq 0$

$\Leftrightarrow \sum\left(x^6+y^6-2x^5y+2y^5x\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \sum\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2-xy\right)^2\geq 0$: đúng

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng, tồn tại vô số bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn phương trình sau:

$$x^{31}+y^5=z^{2023}.$$

Lời giải

Chứng minh rằng, tồn tại vố số bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn

$$x^{31}+y^5=z^{2023}$$

Xét $x=2^{5m},y=2^{31m}\left(m\in\mathbb{Z}^+\right)$. Khi đó: $x^{31}+y^5=2^{155m+1}$.

Ta cần chọn m sao cho $155m+1=2023n\left(n\in\mathbb{Z}^+\right)(1)$.

Khi đó $z=2^n$.

Từ (1) suy ra $8n-1$ chia hết cho 155. Đặt $8n-1=155k\left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$ ta có:

$$3k+1:8\Leftrightarrow 9k+3:8\Leftrightarrow k+3:8.$$

Đặt $k+3=8u\left(u\in\mathbb{Z}^+\right)$, ta có $n=155u-58,m=2023u-757.$

Như vậy, tất cả các bộ $x=2^{5(2023u-757)},y=2^{31(2023k-757)},z=2^{155u-}$ $u\in\mathbb{Z}^+$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến d của (O) tại B. Gọi H là trung điểm của OB. Các điểm M,N thay đổi trên d, không trùng với B sao cho H là trực tâm của tam giác AMN. Gọi E,F lần lượt là giao điểm thứ hai của AM,AN với đường tròn (O). Chứng minh rằng

a) Tứ giác MNFE nội tiếp.

b) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định

Lời giải

a) Xét đường tròn (O) : Do AB là đường kính nên $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ABE} = \widehat{AMB}\left(= 90^\circ - \widehat{MBE}\right)$

Suy ra tứ giác MNFE nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn (AMN) với đường thẳng AB.

Chứng minh $BA \cdot BK = BM \cdot BN = R^2$

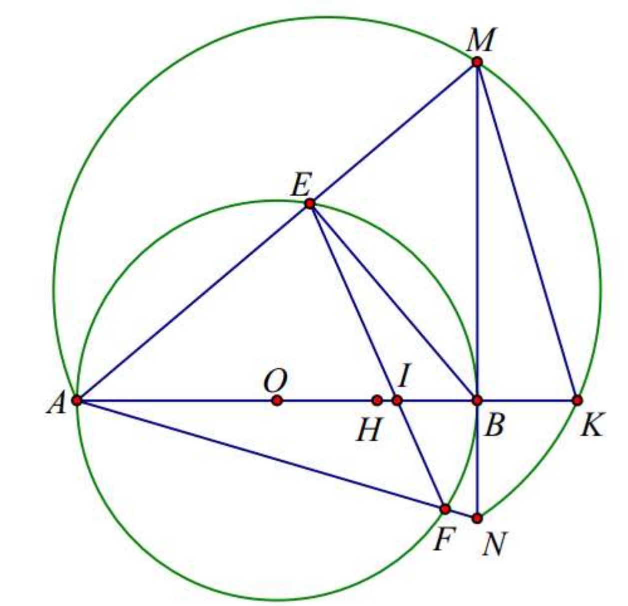
Suy ra K cố định

Gọi $I = EF \cap AB$. Do tứ giác MNFE nội tiếp nên $\widehat{AEI} = \widehat{ANM} = \widehat{AKM}$.

Suy ra tứ giác MEIK nội tiếp.

Chứng minh: $AI \cdot AK = AE \cdot AM = AB^2 = 4R^2$.

Suy ra I cố định.



Câu 5. (1 điểm) Có 2023 viên bi đựng trong 14 cái hộp. Mỗi lần cho phép lấy hai viên bi ở hai hộp nào đó và bỏ vào một trong 12 hộp còn lại. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ hết bi vào một hộp.

Lời giải

Ta chứng minh bài toán tổng quát với m viên bi và n cái hộp $(m,n \geq 4)$. Quy nạp theo m :

Với $m = 4$: Số bi thuộc một trong các dạng sau:

$$(1;1;1;1;0;\ldots;0),\ (1;2;1;0;0;\ldots;0),$$
$$(2;2;0;0;0;\ldots;0),\ (1;3;0;0;0;\ldots;0),\ (4;0;0;0;\ldots;0)$$

Thực hiện như sau: $(1;1;1;1) \to (3;1;0;0) \to (2;0;2;0) \to (1;0;1;2) \to (0;0;0;4)$.

Giả sử bài toán đúng với mọi $m \leq k$. Xét với $m = k+1$: Đưa về trường hợp $(1;k;0;0;\ldots;0)$

Sau đó thực hiện như sau:

$$(1;k;0;0;\ldots;0) \to (0;k-1;2;0;\ldots;0) \to (0;k-2;1;2;0;\ldots;0)$$
$$\to (2;k-3;0;2;0;\ldots;0) \to (1;k-1;0;1;0;\ldots;0)$$
$$\to (0;k+1;0;0;\ldots;0)$$

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $M=\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x>0$; $y>0$; $x\neq y$

a) Rút gọn M.

b) Tính M biết $x^2-5xy+4y^2=0$.

Lời giải

a) $M=\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{xy}-x-y}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\cdot 2\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) $x^2-5xy+4y^2=0\Leftrightarrow (x-y)(x-4y)=0\Leftrightarrow x=4y$ vì $x\neq y$

$\Rightarrow P=-\dfrac{\sqrt{4y}}{\sqrt{4y}+\sqrt{y}}=\dfrac{-2}{3}$

Câu 2. (1,5 điểm) Cửa hàng An Bình niêm yết giá một bông hồng là 25000 đồng. Nếu khách hàng mua nhiều hơn 10 bông thì từ bông thứ 11 trở đi, mỗi bông được giảm 10% trên giá niêm yết. Nếu mua nhiểu hơn 20 bông thì từ bông thứ 21 trờ đi, mỗi bông được giàm thêm 20% trên giá đã giảm.

a) Nếu khách hàng mua 30 bông hồng tại cửa hàng An Bình thì phải trả bao nhiêu tiền?

b) Bạn Dũng đã mua một số bông hồng tại cửa hàng An Bình với số tiền 925000 đồng. Hỏi bạn Dũng đã mua bao nhiêu bông hồng?

Lời giải

a) Giá tiền mua mỗi bông hồng từ bông 11 đến bông 20 là $25000.0,9=22500$ (đồng)

Giá tiền mua mỗi bông hồng từ bông 21 trở đi là $22500.0,8=18000$ (đồng)

Số tiền khách hàng phài trả khi mua 30 bông là

$25000.10+22500.10+18000.10=655000$ (đồng)

b) Gọi $x\left(x\in\mathbb{N}^*,x>20\right)$ là số bông hồng bạn Dũng mua.

Ta có phương trình $25000.10+22500.10+18000\cdot(x-20)=925000\Leftrightarrow x=45$ (bông)

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=5\\ mx+y=m+5\end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất ở trên thỏa mãn điều kiện $x\geq y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=x+y$.

Lời giải

a) Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất theo từng vế ta được $(m-2)x=m$ (1)

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$

Khi đó từ (1) suy ra $x=\dfrac{m}{m-2}$

$y=5-2x=5-\dfrac{2m}{m-2}=\dfrac{3m-10}{m-2}$

Vậy $m\neq 2$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{m}{m-2};\dfrac{3m-10}{m-2}\right)$.

b) **Cách 1.**

Theo giả thiết $2x+y=5$ và $x\geq y$ ta suy ra $x\geq \dfrac{5}{3}$

Khi đó $H=x+y=x+(5-2x)=5-x$

Vì $x\geq \dfrac{5}{3}$ nên $H\leq \dfrac{10}{3}$ và dấu bằng xảy ra khi $x=y=\dfrac{5}{3}$

Thay $x=y=\dfrac{5}{3}$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta tìm được $m=5$ (thỏa mãn). Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức H bằng $\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow m=5$

Cách 2.

$x\geq y\Leftrightarrow \dfrac{m}{m-2}\geq \dfrac{3m-10}{m-2}\Leftrightarrow \dfrac{2m-10}{m-2}\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{m-5}{m-2}\leq 0\Leftrightarrow 2<m\leq 5$

Khi đó $H=x+y=\dfrac{m}{m-2}+\dfrac{3m-10}{m-2}=\dfrac{4m-10}{m-2}=\dfrac{4(m-2)-2}{m-2}=4-\dfrac{2}{m-2}$

Vì $2<m\leq 5\Rightarrow 0<m-2\leq 3\Rightarrow \dfrac{1}{m-2}\geq \dfrac{1}{3}\Rightarrow \dfrac{-2}{m-2}\leq \dfrac{-2}{3}\Rightarrow 4-\dfrac{2}{m-2}\leq \dfrac{10}{3}$ hay $H\leq \dfrac{10}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của H bằng $\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow m=5$

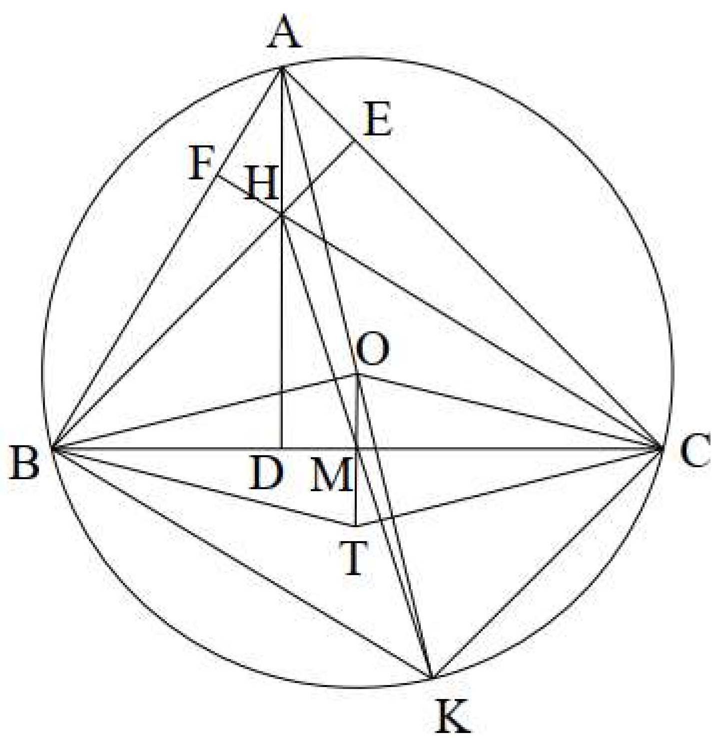
Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB<AC$), nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường kính AK của (O). Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành và $S_{ABC}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, T là điểm đối xứng với O qua M. Chứng minh T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và $AH^2+BC^2=4R^2$.

c) Biết $AH^2+BH^2+CH^2=7$ và $AH\cdot BH\cdot CH=3$. Tính R.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $AB\perp BK$. Kết hợp với $AB\perp CH$, suy ra $BK//CH$. Tương tự $BH//CK$. Từ đó dẫn đến tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.

Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{AKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) và $\widehat{ADB}=\widehat{ACK}=90^\circ$ suy ra

$\Delta BAD\backsim\Delta KAC(g.g)\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{BA}{KA}\Rightarrow AD=\dfrac{AB\cdot AC}{KA}$ hay $AD=\dfrac{AB\cdot AC}{2R}$. Vậy

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AB\cdot AC}{2R}\cdot BC=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$.

Vì M là trung điểm của dây cung BC nên $OM\perp BC$

Tứ giác $BOCT$ có hai đường chéo BC và OT vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên $BOCT$ là hình thoi, từ đó dẫn đến $TB=TC=OB=OC=R\,(1)$

Vì $BHCK$ là hình bình hành nên hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tam giác AHK có OM là đường trung bình nền ta có ngay $AH=2OM=OT$.

Tứ giác $AHTO$ có $AH=OT$ và $AH//OT$ nên $AHTO$ là hình bình hành và $TH=OA=R\,(2)$

c) Từ (1) và (2) suy ra $TB=TC=TH=R$. Vậy T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.

Ta có $AH^2+BC^2=4OM^2+4MC^2=4\left(OM^2+MC^2\right)=4OC^2=4R^2$

Chú ý $\widehat{CHD}=\widehat{ABC}=\widehat{AKC}$ và áp dụng định lí Pytago ta có

$$AC^2=AD^2+DC^2=\left(AH+HD\right)^2+DC^2=AH^2+HD^2+DC^2+2AH\cdot HD$$

$$AC^2=AH^2+CH^2+2AH\cdot CH\cdot\cos\widehat{CHD}=AH^2+CH^2+2AH\cdot CH\cdot\cos\widehat{AKC}$$

$$AC^2=AH^2+CH^2+2AH\cdot CH\cdot\frac{CK}{AK}=AH^2+CH^2+2AH\cdot CH\cdot\frac{BH}{2R}$$

$AC^2 = AH^2 + CH^2 + \dfrac{AH \cdot BH \cdot CH}{R}$

Tương tự ý b) ta có $BH^2 + AC^2 = 4R^2$ từ đó suy ra

$4R^2 - BH^2 = AH^2 + CH^2 + \dfrac{AH \cdot BH \cdot CH}{R} \Leftrightarrow 4R^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + \dfrac{AH \cdot BH \cdot CH}{R}$

Thay giả thiết, ta được phương trình

$4R^2 = 7 + \dfrac{3}{R} \Leftrightarrow 4R^3 - 7R - 3 = 0 \Leftrightarrow (2R-3)(2R^2+3R+1) \Leftrightarrow R = \dfrac{3}{2}$

Câu 5. (1 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x^2 + xy + y^2 = 3;\ \ y^2 + yz + z^2 = 1;\ \ z^2 + zx + x^2 = 4.$$

Tinh $S = x + y + z$.

Lời giải

$x^2 + xy + y^2 = 3\ (1);\ y^2 + yz + z^2 = 1\ (2);\ z^2 + zx + x^2 = 4\ \ (3)$

$2 = 3 - 1 = (x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2) = (x-z)(x+y+z)$ (5)

$1 = 4 - 3 = (z^2 + zx + x^2) - (x^2 + xy + y^2) = (z-y)(x+y+z)$ (6)

Từ (4) và (5) suy ra $x - z = 2(z-y) \Leftrightarrow x = 3z - 2y$

Thay $x = 3z - 2y$ vào $x^2 + xy + y^2 = 3$ ta được $y^2 - 3yz + 3z^2 = 1$.

Kết hợp với $y^2 + yz + z^2 = 1$ suy ra $y^2 - 3yz + 3z^2 = y^2 + yz + z^2 \Rightarrow z = 2y$ và từ (6) có $x = 4y$

Thay $x = 4y$ vào (1) dẫn đến $21y^2 = 3 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ và $S = x + y + z = 7y = \sqrt{7}$

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,5 điểm)

a) Giả sử a,b là các số thực thoả mãn: với x,y là hai số thực bất kì ta luôn có
$$\left|(ax+by)(ay+bx)\right|\le x^2+y^2.$$
Chứng minh rằng $a^2+b^2\le 2$.

b) Giải phương trình $x+4=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{(5-x)(2-x)}$.

Lời giải

a) (1 điểm) Với $x=y=1$ ta được $(a+b)^2\le 2$. Mặt khác, với $x=1,y=-1$ ta được $(a-b)^2\le 2$. Vậy $2\left(a^2+b^2\right)=(a+b)^2+(a-b)^2\le 4$. Suy ra $a^2+b^2\le 2$.

Nhận xét. Có thể chỉ ra điều kiện cần và đủ là $(a\pm b)^2\le 2$.

b) (1.5 điểm) Điều kiện: $x\le 2$.

Cách 1. Đặt $t=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}$, với $t\ge 0$. Ta có $\sqrt{(5-x)(2-x)}=\dfrac{t^2+2x-7}{2}$. Vậy, phương trình đã cho trở thành $x+4=t+\dfrac{t^2+2x-7}{2}\Leftrightarrow \dfrac{t^2}{2}+t-\dfrac{15}{2}=0\Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=-5$

Vì $t\ge 0$, nên $t=3$. Ta có: $\sqrt{(5-x)(2-x)}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ (5-x)(2-x)=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Cách 2. Đặt $a=\sqrt{5-x},b=\sqrt{2-x}$ phương trình trở thành $x=a+b+ab-4$.

Ta có $a^2+x=5$ và $b^2+x=2$. Do đó $\begin{cases}(a+b)(a+1)=9\\ (a+b)(b+1)=6\end{cases}$

Suy ra $2(a+1)=3(b+1)$ hay $2a=3b+1$. Từ đó $2x=(3b+1)+2b+(3b+1)b-8=3b^2+6b-7$.

Từ đó $b^2+x=2\Leftrightarrow 5b^2+6b-7=4\Leftrightarrow 5b^2+6b-11=0\Leftrightarrow (b-1)(5b+11)=0\Leftrightarrow b=1\left(\text{ do } b\ge 0\right)$.

Vậy $a=2$, do đó $x=1$. Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a\ne c$ và $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=2$.

Tính giá trị biểu thức $S=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\dfrac{b}{b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{c}-b\sqrt{a}}{(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}=\frac{c\sqrt{a}-b\sqrt{c}}{(b+c)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{ac}-b\right)}{a+b}=\frac{\sqrt{c}\left(\sqrt{ac}-b\right)}{b+c}.$$

Nếu $b \neq \sqrt{ac}$ thì $\dfrac{\sqrt{a}}{a+b}=\dfrac{\sqrt{c}}{b+c}$

$\Leftrightarrow b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=a\sqrt{c}+b\sqrt{c} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(b-\sqrt{ac}\right)=0$ (mâu thuẫn)

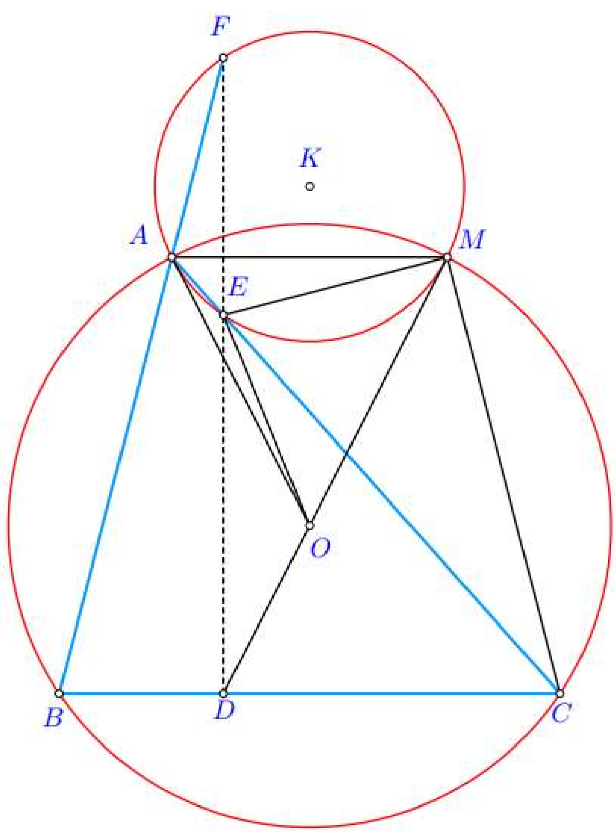
Vậy $b=\sqrt{ac}$. Từ đó $S=\dfrac{a}{a+\sqrt{ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{ac}+c}=1.$

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB < AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho $AM \parallel BC$. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai F, E (F, E khác A). Các đường thẳng OM, BC cắt nhau tại điểm D.

(a) Chứng minh rằng các điểm D, E, F thẳng hàng.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh rằng $AHDL$ là hình bình hành.

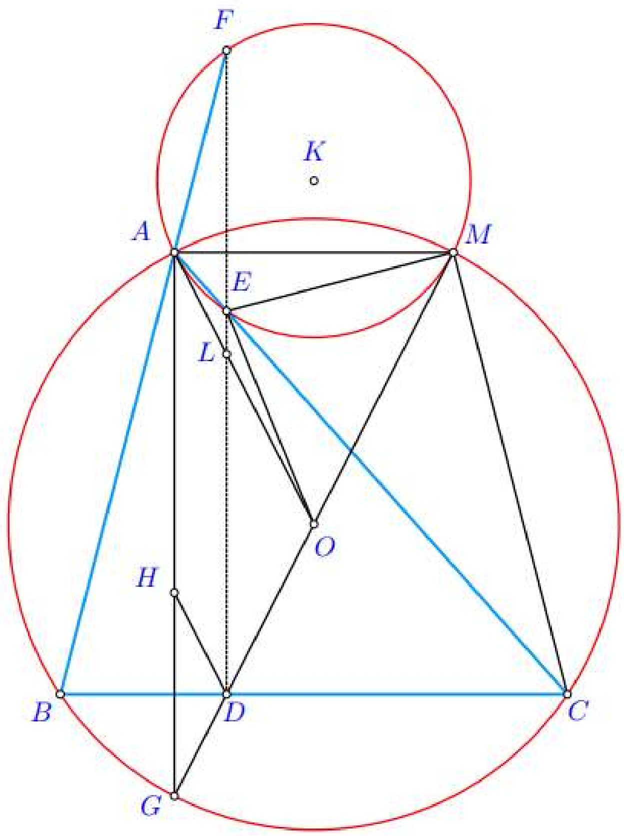
Lời giải



a) (1.5 điểm) Ta có O, K cách đều A, M. Vậy OK là đường trung trực của AM. Thành thử theo tính đối xứng, OM là tiếp tuyến tại M của (K).

Từ đó $\widehat{EMD} = \widehat{MAE} = \widehat{ECD}$.

Vậy tứ giác $DEMC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MED} + \widehat{MCB} = 180°$. Mặt khác, theo tính chất của tứ giác nội tiếp $\widehat{FEM} = \widehat{FAM} = \widehat{MCB}$. Vậy $\widehat{FEM} + \widehat{MED} = 180°$ hay các điểm D, E, F thẳng hàng.



b) (1.5 điểm) Kéo dài MD cắt (O) tại điểm thứ hai G. Do AG là đường kính nên $AM \perp AG$. Vì $AM // BC$ nên $AG \perp BC$. Vậy A, H, G thẳng hàng. Từ đó G, H đối xứng nhau qua BC.

Suy ra $\widehat{GHD} = \widehat{HGD} = \widehat{OAG}$.

Vậy, $HD // AL$. Mà $AH // LD$ (vì cùng vuông góc với BC). Suy ra $AHDL$ là hình bình hành.

Câu 4. (3 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r sao cho $pq - 6, qr + 1, rp + 10$ là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

Lời giải

a) (1.5 điểm) Giả sử $pq - 6 = x^2, qr + 1 = y^2$ và $rp + 10 = z^2$. Nếu p, q, r cùng là các số lẻ thì x, z lẻ nên $pq \equiv rp \equiv 3 \pmod 4$. Vậy $q \equiv r \pmod 4$. Ngoài ra, $qr \equiv -1 \pmod 4$, mâu thuẫn. Vậy trong các số p, q, r có ít nhất một số là số chẵn.

$+/$ p, q, r phải phân biệt đôi một: Nếu $p = q$, ta được $p^2 - x^2 = 6$. Khi đó p, x cùng tính chẵn lẻ nên $4 \mid p^2 - x^2$, mâu thuẫn. Vậy $p \neq q$. Tương tự $r \neq p$. Nếu $q = r$ ta được $q^2 + 1 = y^2$, mâu thuẫn.

+/ Nếu $q=2$, ta được $2r+1=y^2$. Vậy y lẻ nên $y^2\equiv 1\pmod 8$. Suy ra $8\mid 2r$, mâu thuẫn. Nếu $r=2$ thì tương tự. Do đó $p=2$. Ta có $\begin{cases} q-3=2x_1^2 \\ qr+1=y^2 \\ r+5=2z_1^2 \end{cases}$

Từ đó $qr=(y-1)(y+1)$. Nếu $q\mid y-1$, ta được $r=\dfrac{y-1}{q}\cdot(y+1)$.

Vậy $q=y-1$ và $r=y+1$. Suy ra $r-q=2$. Tương tự, $q\mid y+1$ thì $r=\dfrac{y+1}{q}.(y-1)$

do đó $y-1=1$ hoặc $q=y+1$. Khả năng thứ nhất, ta được $qr+1=4$, loại. Vậy $y+1=q$ và $r=y-1$. Từ đó $q-r=2$. Tóm lại $|q-r|=2$. Ta được

$+/\, r=q+2$ thì $q+7=2z_1^2$ và $q-3=2x_1^2$. Ta được $2z_1^2-2x_1^2=10$ hay $z_1^2-x_1^2=5$. Từ đó $z_1=3, x_1=2$ hay $q=11$ và $r=13$.

$+/\, q=r+2$ thì $r-1=2x_1^2$ và $r+5=2z_1^2$. Ta được $z_1^2-x_1^2=3$. Từ đó $z_1=2, x_1=1$. Vậy $r=3$ và $q=5$. Tóm lại (p,q,r) là $(2,5,3)$ hoặc $(2,11,13)$.

(b) (1.5 điểm) Ta bắt đầu bằng một nhận xét đơn giản: trong một đa giác lồi bất kì, đường trung trực của mỗi cạnh đi qua không quá một đỉnh của đa giác đó.

Phản chứng, giả sử rằng 3 đường chéo bất kì, luôn có hai đường chéo có độ dài bằng nhau. Vậy tồn tại a,b dương sao cho mỗi đường chéo có độ dài hoặc bằng a hoặc bằng b.

Xét một cạnh AB của bát giác lồi đã cho. Với mỗi đỉnh C mà không kề với A,B thì AC,BC là các đường chéo. Do đó $AC=BC=a$ hoặc $AC=BC=b$ hoặc $AC=a, BC=b$ hoặc $AC=b, BC=a$. Lưu ý rằng, nếu $CA=CB$ thì C nằm trên trung trực của AB, do đó số các điểm C thoả mãn $AC=BC=a$ hoặc $AC=BC=b$ tối đa là 1 điểm (do bát giác là lồi). Hơn nữa chỉ có tối đa 1 điểm C thoả mãn $AC=a, BC=b$, vì nếu có 2 điểm C_1,C_2 thì A,B nằm trên trung trực của C_1C_2, mâu thuẫn. Tương tự, cũng có tối đa 1 điểm C sao cho $AC=b, BC=a$. Vậy có tối đa 3 điểm C không kề với A,B. Thành thử đa giác có tối đa $2+3+2=7$ đỉnh, mâu thuẫn.

------------------------------ HẾT ------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2022 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức: $A=\left[\dfrac{6x}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{7\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}+\dfrac{4}{x\sqrt{x}-x}\right]:\dfrac{3x-1}{x-\sqrt{x}}$ với $x>0,x\neq 1,x\neq \dfrac{1}{3}$

1. Rút gọn A.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

1. $A=\left[\dfrac{6x}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{7\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}+\dfrac{4}{x\sqrt{x}-x}\right]:\dfrac{3x-1}{x-\sqrt{x}}=\left[\dfrac{6x^2}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}+\dfrac{7\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}+\dfrac{4}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]\cdot\dfrac{x-\sqrt{x}}{3x-1}$

$$A=\frac{6x^2+7\left(x-1\right)+4}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{3x-1}=\frac{6x^2+7x-3}{\sqrt{x}\left(3x-1\right)}=\frac{\left(2x+3\right)\left(3x-1\right)}{\sqrt{x}\left(3x-1\right)}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}$$

2. Ta thấy $A=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Áp dụng bđt Cosi cho 2 số không âm, ta có $A=2\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\cdot\sqrt{2\sqrt{x}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{6}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (TMĐK)

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $2\sqrt{6}$ khi $x=\dfrac{3}{2}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Một ô tô xuất phát lúc 6 giờ từ Hà Nội đến một bến xe ở Hà Tĩnh. Ban đầu xe di chuyển với vận tốc $45\ km/h$. Nhận thấy nếu cứ đi với tốc độ đó thì xe sẽ đến muộn hơn so với quy định 1 giờ nên sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, lái xe tăng tốc và đi với vận tốc $60\ km/h$ trên suốt quãng đường còn lại. Do đó xe đến nơi sớm hơn quy định 30 phút. Tính quãng đường xe phải đi và thời điểm xe đến bến xe ở Hà Tĩnh.

Lời giải

Gọi x là quãng đường ô tô phải đi. $(km, x>0)$

Nếu cứ đi với vận tốc $45\ km/h$ trên cả quãng đường thì xe sẽ đến muộn hơn so với quy định 1 giờ nên thời gian ô tô cần để đến đúng giờ quy định là: $\dfrac{x}{45}-1\left(h\right)$ (1)

Đổi 30 phút $=\dfrac{1}{2}\left(h\right)$

Vì sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát xe đi với vận tốc $60\ km/h$ trên suốt quãng đường còn lại và đến nơi sớm hơn quy định 30 phút nên thời gian ô tô cần để đên đúng giờ quy định là: $2+\dfrac{x-90}{60}+\dfrac{1}{2}\left(h\right)\left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta có phương trình: $\frac{x}{45}-1=2+\frac{x-90}{60}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=360$

Vậy quãng đường ô tô phải đi là 360 km.

Thời gian thực tế xe đi là $\frac{360}{45}-1-\frac{1}{2}=6,5(h)$ nên thời điểm xe đến bến xe ở Hà Tĩnh là 12 giờ 30 phút.

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;-1)$ và cắt đường thẳng $(d'): y=2x+7$ tại điểm có tung độ bằng 5. Tính diện tích của tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ.

2. Cho phương trình $x^2-2(m+2)x+m^2-3=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn:

$$\left(x_1^2-2mx_1+m^2+1\right)\left(x_2+1\right)=2\left(x_1+x_2\right)^2$$

Lời giải

1. Vì đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;-1)$ nên $a+b=-1$. (1)

Vì đường thẳng $(d): y=ax+b$ cắt đường thẳng $(d'): y=2x+7$ tại điểm có tung độ bằng 5 nên $(d): y=ax+b$ đi qua $N(-1;5)$. Do đó $-a+b=5$. (2)

Từ (1) (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=-1 \\ -a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow (d): y=-3x+2$

(d) cắt Ox tại $A\left(\frac{2}{3};0\right)$ và cắt Oy tại $B(0;2)$

Do đó diện tích của tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ là

$$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}(dvdt)$$

2. Ta thấy phương trình $x^2-2(m+2)x+m^2-3=0$ có: $\Delta'=(m+2)^2-m^2+3=4m+7$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 4m+7>0 \Leftrightarrow m>\frac{-7}{4}$

Theo hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+2) \\ x_1\cdot x_2=m^2-3 \end{cases}$

Vì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_1^2-2(m+2)x_1+m^2-3=0$

$\Rightarrow x_1^2-2mx_1-4x_1+m^2-3=0$

$\Rightarrow x_1^2-2mx_1+m^2+1=4x_1+4$

$\Rightarrow \left(x_1^2-2mx_1+m^2+1\right)\left(x_2+1\right)=4\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)$

Do đó $\left(x_1^2-2mx_1+m^2+1\right)\left(x_2+1\right)=2\left(x_1+x_2\right)^2 \Leftrightarrow 4\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=2\left(x_1+x_2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x_1\cdot x_2+4\left(x_1+x_2\right)+4=2\left(x_1+x_2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4\left(m^2-3\right)+4.2\left(m+2\right)+4=2.4.\left(m+2\right)^2$

$\Leftrightarrow m^2+6m+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+\sqrt{3}\,(tm) \\ m=-3-\sqrt{3}\,(l) \end{array}\right.$. Vậy $m=-3+\sqrt{3}$

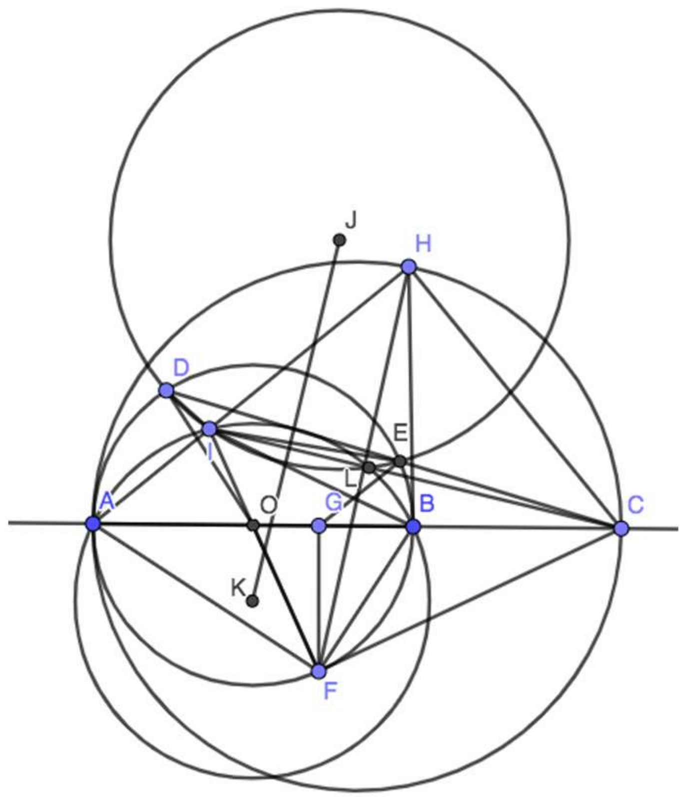
Câu 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong với nhau tại $A(R<R')$. Đường kính AB của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai C. Qua C kẻ tiếp tuyến CF với (O), F là tiếp điểm.

1. Khi $R=\frac{2}{3}R'$ hãy tính diện tích của tam giác FAB theo R

2. Gọi G là hình chiếu vuông góc của F trên AB. Trên nửa mặt phẳng không chứa F có bờ là đường thẳng AB kẻ đường thẳng qua C, cắt (O) tại D,E (E nằm giữa C,D). Chứng minh rằng $OGED$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường tròn (O') tại H thuộc nửa mặt phẳng chứa D có bờ là đường thẳng AB. Kéo dài OF cắt AH tại I. Chứng minh rằng CI vuông góc với đường nối tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và tam giác DIE.

Lời giải



Khi $R=\frac{2}{3}R'$ thì $OA=OB=R$.

Theo tính chất của góc giữa tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{CFB}=\widehat{CAF}$

$\Rightarrow \Delta CFB$ đồng dạng với $\Delta CAF\,(g.g)$

$\Rightarrow \frac{CB}{CF}=\frac{CF}{CA}=\frac{BF}{AF}$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow CF^2=CB.CA=R.3R=3R^2 \Rightarrow CF=\sqrt{3}R$

Thế vào (1): $\frac{R}{\sqrt{3}R}=\frac{\sqrt{3}R}{3R}=\frac{BF}{AF} \Rightarrow \frac{BF}{AF}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Mặt khác, F thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AFB}=90^\circ$ hay tam giác ΔABF vuông tại F. Do đó $AF^2+BF^2=AB^2=4R^2$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $FB=R, FA=\sqrt{3}R$. Do đó diện tích của tam giác FAB là $\frac{1}{2}.FA\cdot FB=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}$.

2. Tương tự chứng minh ở trên, $\Delta CFE \backsim \Delta CDF$ (g.g)

$\Rightarrow CF^2=CE.CD$ (4)

Vì CF là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{CFO}=90^\circ$.

Tam giác CFO vuông tại F có đường cao FG nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $CF^2=CG.CO$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $CG\cdot CO=CF^2=CE\cdot CD\Rightarrow \frac{CG}{CE}=\frac{CD}{CO}$

Do đó ΔCGE đồng dạng với ΔCDO (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CGF}=\widehat{CDO}$

Suy ra $OGED$ là tứ giác nội tiếp. (đpcm)

3. HF cắt IC tại L.

Theo chứng minh trên $\widehat{CFI}=90^\circ$.

Vì H thuộc đường tròn đường kính AC nên $\widehat{CHA}=90^\circ$ hay tam giác CHI vuông tại H.

Tam giác CHA vuông tại H có đường cao HB nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $CH^2=CB.CA(6)$

Từ (1), (6) suy ra $CH^2=CB\cdot CA=CF^2\Rightarrow CH=CF$

Do đó $\Delta CHI=\Delta CFI(ch-cgv)\Rightarrow IH=IF$

$\Rightarrow CI$ là trung trực HF hay IC vuông góc với HF tại L.

$\Rightarrow CL.CI=CF^2=CE.CD=CA.CB$

$\Rightarrow \frac{CL}{CE}=\frac{CD}{CI},\frac{CL}{CB}=\frac{CA}{CI}$

Do đó ΔCLE đồng dạng với ΔCDI (c.g.c) và ΔCLB đồng dạng với $\Delta CAI(c.g.c)$

Suy ra $DILE, AILB$ là các tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và tam giác DIE cắt nhau tại điểm thứ hai L.

Gọi K, J lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và tam giác DIE

thì theo tính chất đường nối tâm, ta có KJ vuông góc với IL.

$\Rightarrow KJ$ vuông góc với IC (đpcm).

Câu 5. (1,0 điểm) Có hay không một đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x)=ax^2+bx+c$ nhận $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm? Em hãy giải thích câu trả lời của mình.

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ nhận $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm.

Khi đó: $a(\sqrt[3]{5})^2+b\sqrt[3]{5}+c=0$.

$\Rightarrow \left[a(\sqrt[3]{5})^2+b\sqrt[3]{5}+c\right]\cdot\left(a\sqrt[3]{5}-b\right)=0$

$\Rightarrow 5a^2+ab(\sqrt[3]{5})^2+ac\sqrt[3]{5}-ab(\sqrt[3]{5})^2-b^2\cdot\sqrt[3]{5}-bc=0$

$\Rightarrow 5a^2-bc=\left(b^2-ac\right)\cdot\sqrt[3]{5}$

Nếu $b^2-ac\neq 0$ thì $\sqrt[3]{5}=\frac{5a^2-bc}{b^2-ac}$, mâu thuẫn do $\sqrt[3]{5}$ là số vô tỉ và $\frac{5a^2-bc}{b^2-ac}$ là số hữu tỉ.

Do đó $b^2-ac=0$.

Khi đó $\begin{cases}b^2-ac=0\\5a^2-bc=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^3-abc=0\\5a^3-abc=0\end{cases}\Rightarrow 5a^3=b^3\Rightarrow \sqrt[3]{5}=\frac{b}{a}$ (do $a\neq 0$), mâu thuẫn do $\sqrt[3]{5}$ là số vô tỉ

và $\frac{b}{a}$ là số hữu tỉ.

Vậy không tồn tại đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ nhận $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm.

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 2
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (3 điểm)

1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng có thể viết được thành tổng của 2 số chính phương.

$$K=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+z=3\\x^3+y^3+z^3=x^4+y^4+z^4\end{cases}$.

Lời giải

1. Ta có:

$$k^4+4=\left(k^2+2\right)^2-4k^2=\left(k^2-2k+2\right)\left(k^2+2k+2\right)=\left[(k-1)^2+1\right]\left[(k+1)^2+1\right]$$

Nhân cả tử số và mẫu số của K với 2^{4n} ta có:

$$K=\frac{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\ldots\left((4n)^4+4\right)}{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\ldots\left((4n-2)^4+4\right)}$$

$$K=\frac{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\ldots\left[(4n-1)^2+1\right]\left[(4n+1)^2+1\right]}{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\ldots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]}$$

$$K=\frac{(4n+1)^2+1}{2}=8n^2+4n+1=4n^2+(2n+1)^2$$

2. Từ hệ ta có

$$\left(x^4-x^3-x+1\right)+\left(y^4-y^3-y+1\right)+\left(z^4-z^3-z+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)+(y-1)^2\left(y^2+y+1\right)+(z-1)^2\left(z^2+z+1\right)=0$$

Nhận xét $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=y=z=1$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(1;1;1)$.

Câu 2. (3 điểm)

1. Cho a,b,c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất 2 trong 3 phương trình sau có nghiệm:

$$(x-a)(x-b)=x-c$$
$$(x-b)(x-c)=x-a$$
$$(x-c)(x-a)=x-b$$

2. Cho $p>3$ là một số nguyên tố. Giả sử a,b,c,d là các số nguyên thỏa mãn $a+b\equiv c+d$ (mod p) và $a^3+b^3\equiv c^3+d^3$ (mod p). Chứng minh $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}$ (mod p).

Lời giải

1. (1) $\Leftrightarrow (x-a)(x-b)=x-c \Leftrightarrow x^2-(a+b+1)x+ab+c=0$

Ta có $\Delta_1=(a+b+1)^2-4(ab+c)=(a+b)^2+2(a+b)+1-4(ab+c)=(a-b)^2+2(a+b-2c)+1$

Tương tự $\Delta_2=(b-c)^2+2(b+c-2a)+1$ và $\Delta_3=(c-a)^2+2(c+a-2b)+1$

Nhận xét

$\Delta_1+\Delta_2=(a-b)^2+2(a+b-2c)+1+(b-c)^2+2(b+c-2a)+1$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+2(b-a)+2(b-c)+2$

$=(b-a+1)^2+(b-c+1)^2\ge 0$

Tương tự ta chứng minh được $\Delta_2+\Delta_3\ge 0$ và $\Delta_3+\Delta_1\ge 0$

Do đó ít nhất 2 trong 3 phương trình phải có nghiệm.

2. **TH1:** Nếu $a+b\,\vdots\,p$ thì $c+d\,\vdots\,p$. Khi đó $a^{2025}+b^{2025}\,\vdots\,a+b\,\vdots\,p$ và $c^{2025}+d^{2025}\,\vdots\,c+d\,\vdots\,p$.

Do đó $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}$ (mod p)

TH2: Nếu $a+b\,\not\vdots\,p$

Ta có $a+b\equiv (c+d)$ (mod p). Do đó

$a^3+b^3-c^3-d^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(c+d)(c^2+d^2-cd)$

$\equiv (a+b)(a^2+b^2-ab-c^2-d^2+cd)\ (\text{mod } p)$

$\equiv (a+b)\left((a+b)^2-(c+d)^2-3(ab-cd)\right)\ (\text{mod } p)$

Vì $a+b\,\not\vdots\,p$, $(a+b)^2-(c+d)^2\,\vdots\,p$ và $3\,\not\vdots\,p$ nên $ab\equiv cd\ (\text{mod } p)$.

Kết hợp điều kiện $a+b\equiv c+d\ (\text{mod } p)$ suy ra $(a-b)^2\equiv (c-d)^2\ (\text{mod } p)$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} a-b\equiv c-d\ (\text{mod } p) \\ a-b\equiv d-c\ (\text{mod } p)\end{array}\right.$. Mà $a+b\equiv c+d\ (\text{mod } p)$ và p lẻ,

suy ra $\left[\begin{array}{l} a\equiv c\,(\text{mod } p) \\ a\equiv d\,(\text{mod } p)\end{array}\right.$

Nếu $a\equiv c\,(\text{mod } p)$ thì $b\equiv d\ (\text{mod } p)$ và do đó $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}\ (\text{mod } p)$

Nếu $a\equiv d\ (\text{mod } p)$ thì $a\equiv c\ (\text{mod } p)$ và do đó $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}\ (\text{mod } p)$.

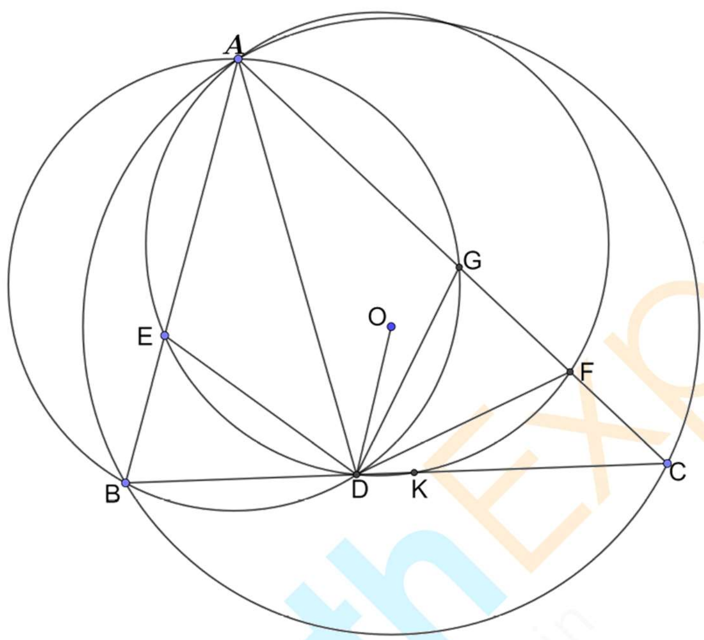
***) Cách 2:** Từ $ab\equiv cd\ (\text{mod } p)$ kết hợp với điều kiện $a+b\equiv c+d\ (\text{mod } p)$ và $a^3+b^3\equiv c^3+d^3\ (\text{mod } p)$, quy nạp ta suy ra $a^{2n+1}+b^{2n+1}\equiv c^{2n+1}+d^{2n+1}\ (\text{mod } p)$.

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), có AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). E là một điểm di động trên cạnh AB(E khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AC tại điểm thứ hai F (khác A), cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai K (khác D).
Chứng minh rằng

a) $BE.KC = CF.KB$.

b) $BE + CF$ không đổi khi E thay đổi trên cạnh AB (khác A) của tam giác ABC.

Lời giải



a) Ta có $BK \cdot BD = BE \cdot BA$ và $CK \cdot CD = CF \cdot CA$, suy ra $\dfrac{BK \cdot BD}{CK \cdot CD} = \dfrac{BE \cdot BA}{CF \cdot CA}$

Mặt khác theo tính chất đường phân giác $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$, do đó $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{BE}{CF}$ hay $BK.CF = CK.BE$.

b)

Cách 1: Từ $BK \cdot CF = CK \cdot BE$ suy ra $\dfrac{BK}{BE} = \dfrac{CK}{CF} = \dfrac{BK + CK}{BE + CF} = \dfrac{BC}{BE + CF}$

Do đó $BE + CF = BC \cdot \dfrac{BE}{BK} = BC \cdot \dfrac{BD}{BA}$ không đổi do tam giác ABC cố định.

Cách 2: Gọi G là giao điểm thứ hai của đường tròn (ABD) với AC. Dễ thấy G cố định.

Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $DG = DB$ và $DE = DF$.

Ta có $\widehat{GDF} = \widehat{EDB}$ (vì $\widehat{EDF} = \widehat{BDG} = 180^\circ - \widehat{BAC}$).

Do đó $\Delta GDF = \Delta BDE$ (c.g.c). Từ đây suy ra $BE = GF$.

Ta có $BE + FC = GF + FC = GC$ không đổi.

Câu 4. (1 điểm) Thầy giáo ghi lên bảng các số $1!, 2!, 3!, \ldots, 23\,!$. Thầy giáo cho phép bạn Dương xóa đi một hoặc nhiều các số đang có trên bảng. Hỏi bạn Dương phải xóa đi it nhất bao nhiêu số sao cho tích các số còn lại trên bảng là một số chính phương? Tại sao?

(Ở đây, n ! là tích của n số nguyên dương đầu tiên).

Lời giải

Vì 23 là số nguyên tố nên tích các số trên bảng chia hết cho 23 nhưng không chia hết cho 23^2, do đó tích của 23 số đó không thể là số chính phương và số luôn cần xóa là số 23! .

Xét tích 22 số còn lại

$$1!.2!....22! = \left(1!.3!.5!....21!\right)\cdot\left(2!.4!....22!\right) = \left(1!.3!.5!....21!\right)\cdot\left(1!\cdot 2\cdot 3!\cdot 4.....21!.22\right)$$

$$= (1!.3!.5!....21!)^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6.....22 = (1!.3!.5!....21!)^2.2^{11}.11!$$

Ta có thể xóa tiếp 2 số là 2! và 11! khi đó tích các số còn lại là $(1!\cdot 3!.5!..21!)^2.2^{10}$ là số chính phương.

Ta chỉ ra không thể xóa ít hơn 3 số.

Xét $P = (1!.3!.5!....21!)^2.2^{11}.11\,!$

Dễ thấy số mũ của 11 trong phân tích của P ra thừa số nguyên tố là số lẻ, do đó P không là số chính phương. Do đó ta cần xóa thêm ít nhất 1 số nữa

Giả sử có thể xóa 2 số, tức là ngoài số 23! ta chỉ xóa thêm 1 số nữa. Số thứ hai cần xóa là một số chia hết cho 11 nhưng không chia hết cho 11^2, số đó có dạng k ! với $11 \le k < 22$

Ta có số mũ của 13 trong khai triển $1!.2!..22\,!$ ra tích các thừa số nguyên tố bằng 10 , do đó $k < 13$ vì nếu trái lại, sau khi xóa $k!$ thì số mũ của 13 trong tích còn lại sẽ là số lẻ, tích còn lại không thể là số chính phương.

Nếu $k = 11$ thì tích còn lại là $(1!.3!.5!...21!)^2.2^{11}$ không là số chính phương

Nếu $k = 12$ thì tích còn lại là $\dfrac{(1!\cdot 3!.5!....21!)^2.2^{11}}{12} = \dfrac{(1!.3!.5!....21!)^2\cdot 2^9}{3} = (5!....21!)^2.2^{10}.6$ không là số chính phương.

Vậy nếu xóa 2 số thì tích còn lại không chính phương. Vậy ta cần xóa ít nhất 3 số.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **90 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với điều kiện $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

1.1) Chứng minh rằng $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$.

1.2) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn $A<-1$.

Lời giải

1.1) $A=\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

$$A=\frac{2\sqrt{x}-9-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$A=\frac{2\sqrt{x}-9-\left(x-9\right)+\left(2x-3\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}.$$

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

1.2) $A<-1 \Leftrightarrow A+1<0,\ A+1=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+1=\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$.

Vì $\sqrt{x}-3<2\sqrt{x}-2$ nên $\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-3<0\\ 2\sqrt{x}-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}<3\\ \sqrt{x}>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<9\\ x>1\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập hợp các giá trị x thỏa mãn là $\left\{2;3;5;6;7;8\right\}$.

Câu 2. (2 điểm)

2.1) Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $0,45\%/$ tháng. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Người đó phải gửi số tiền ban đầu ít nhất bao nhiêu triệu đồng để số tiền lãi của tháng thứ hai không ít hơn 500000 đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của triệu đồng).

2.2) Tìm tất cả các số thực m để hai đồ thị hàm số $y=2x^2$ và $y=mx+2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2\right)$ thỏa mãn $\left(y_1+2\right)\left(y_2+2\right)+25x_1x_2=0$.

Lời giải

1.1) Giả sử x là số tiền gửi ban đầu $(x>0$, đơn vị là đồng).

Số tiền lãi của tháng đầu tiên là $\frac{0,45}{100}x=0,0045x$ (đồng).

Tổng số tiền người gửi có được sau tháng đầu tiên là $x+0,0045x=1,0045x$ (đồng).

Số tiền lãi của tháng thứ hai là $\frac{0,45}{100}\cdot 1,0045x=0,00452025x$ (đồng).

Ta có $0,00452025x \geq 500\,000 \Rightarrow x \geq \frac{500\,000}{0,00452025}$.

Vì $\frac{500\,000}{0,00452025} \approx 110\,613\,351$ nên đáp số cần tìm là 111 triệu đồng.

1.2) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol.

$2x^2=mx+2 \Leftrightarrow 2x^2-mx-2=0$

$\Delta=m^2+16>0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, suy ra hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm $A\left(x_1;y_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2\right)$ phân biệt.

Theo định lí Vi-ét $x_1+x_2=\frac{m}{2}$, $x_1x_2=-1$.

$y_1=2x_1^2=mx_1+2$, $y_2=2x_2^2=mx_2+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1y_2=4\left(x_1x_2\right)^2=4 \\ y_1+y_2=m\left(x_1+x_2\right)+4=\frac{m^2}{2}+4 \end{cases}.$$

$\Rightarrow \left(y_1+2\right)\left(y_2+2\right)+25x_1x_2=y_1y_2+2\left(y_1+y_2\right)+4+25x_1x_2=m^2-9$

Để $\left(y_1+2\right)\left(y_2+2\right)+25x_1x_2=0 \Leftrightarrow m^2-9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3$

Câu 3. (2 điểm)

3.1) Giải phương trình $2x^3+12x^2+30x+25=0$.

3.2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2+2x=3y \\ x^2y^2+4+2xy=3y^2 \end{cases}$

Lời giải

3.1) $2x^3+12x^2+30x+25=0$

$\Leftrightarrow 10x^3+60x^2+150x+125=0$

$\Leftrightarrow 8x^3+60x^2+150x+125=-2x^3$

$\Leftrightarrow (2x+5)^3=-2x^3$

$\Leftrightarrow 2x+5=\sqrt[3]{-2}x$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{\sqrt[3]{-2}-2}$.

3.2) Nhận xét: $y=0$ không thỏa mãn. Xét $y\neq 0$, ta có $\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}+x\cdot\dfrac{2}{y}=3 \\ x^2+\left(\dfrac{2}{y}\right)^2+x\cdot\dfrac{2}{y}=3. \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+\left(\frac{2}{y}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{y}+\left(x+\frac{2}{y}\right)=6\Rightarrow\left(x+\frac{2}{y}\right)^2+\left(x+\frac{2}{y}\right)-6=0$$

$\Rightarrow x+\dfrac{2}{y}=2$ hoặc $x+\dfrac{2}{y}=-3.$

Xét $x+\dfrac{2}{y}=2$, ta có $x\cdot\dfrac{2}{y}=1$. Suy ra $x,\dfrac{2}{y}$ là hai nghiệm của phương trình

$X^2-2X+1=0, X_1=X_2=1\Rightarrow x=\dfrac{2}{y}=1\Rightarrow(x;y)=(1;2)$

Xét $x+\dfrac{2}{y}=-3$, ta có $x\cdot\dfrac{2}{y}=5$. Suy ra $x,\dfrac{2}{y}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2+3X+5=0,\Delta<0$, vô nghiệm. Kết luận $(x;y)=(1;2)$.

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho $AB<AC$, tam giác ABC nhọn và không là tam giác cân. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $(O;R)$ cắt nhau tại K. Đường thẳng qua điểm K song song với AB cắt cạnh AC tại I. Đoạn thẳng KI cắt đường tròn $(O;R)$ tại D. Chứng minh rằng

4.1) Tứ giác $KOIC$ nội tiếp một đường tròn.

4.2) $\widehat{ABC}=\widehat{KOI}$.

4.3) Giá trị của biểu thức $IA.IC+IO^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

Lời giải

4.1) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{KOC}=\widehat{KOB}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$

Mặt khác $\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ (liên hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp)

$\widehat{BAC}=\widehat{KIC}$ (hai góc đồng vị).

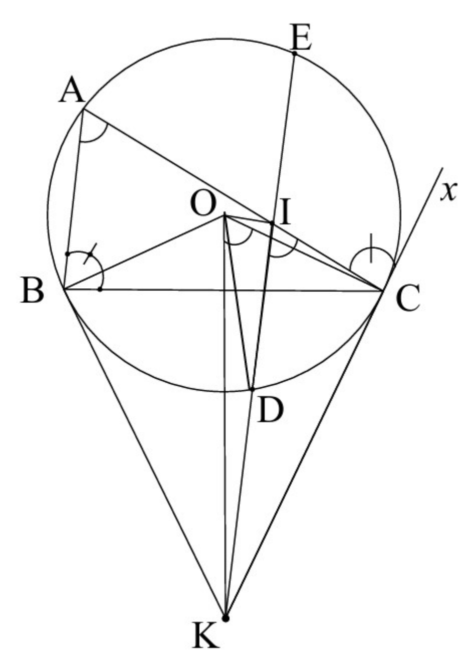
Suy ra $\widehat{KOC}=\widehat{KIC}$. Vậy tứ giác $KOIC$ nội tiếp.

4.2) Vẽ tia Cx là tia đối của tia CK, ta có $\widehat{ACx}=\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$.

Do tứ giác KOIC nội tiếp nên $\widehat{KOI}=\widehat{ICx}=180^\circ-\widehat{ICK}$.

Mặt khác $\widehat{ACx}=\widehat{ICx}$.

Suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{KOI}$.



4.3) Gọi giao điểm thứ hai của tia DI và đường tròn là E.

Ta có $\widehat{KIO}=\widehat{KCO}=90^\circ$, suy ra $DE\perp OI$, vì vậy $\mathrm{ID}=\mathrm{IE}$

$\Delta IAE \backsim \Delta IDC$ $(g.g)$.Suy ra $\dfrac{IA}{ID}=\dfrac{IE}{IC}\Rightarrow IA\cdot IC=ID\cdot IE=ID^2$.

Ta có $\widehat{KIO}=\widehat{KCO}=90^\circ\Rightarrow ID^2+IO^2=OD^2=R^2$.

$\Rightarrow IA.IC+IO^2=R^2$.

Câu 5. (1 điểm) Cho các số nguyên dương x,y thay đổi thỏa mãn $3x+4y=2025$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy$.

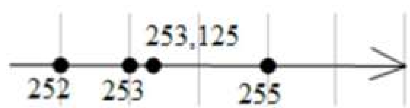
Lời giải

$3x+4y=2025\Rightarrow x=\dfrac{2025-4y}{3}\Rightarrow P=\dfrac{2025-4y}{3}\cdot y=\dfrac{-1}{3}\left(4y^2-2025y\right)$.

$P=\dfrac{-4}{3}\left(y-\dfrac{2025}{8}\right)^2+\dfrac{2025^2}{48}=\dfrac{-4}{3}\left|y-253{,}125\right|^2+\dfrac{2025^2}{48}$.

$x=675-y-\dfrac{y}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\,\vdots\,3$

Trên trục số biểu diễn tập hợp các số thực, $253{,}125$ nằm giữa hai bội số liên tiếp của 3 là 252 và 255.



Nếu $y=252$ thì $P=\dfrac{-4}{3}\left|252-253{,}125\right|^2+\dfrac{2025^2}{48}=\dfrac{-4}{3}\cdot1{,}125^2+\dfrac{2025^2}{48}=85428$.

Nếu $y=255$ thì $P=\dfrac{-4}{3}\left|255-253{,}125\right|^2+\dfrac{2025}{48}<\dfrac{-4}{3}\cdot1{,}125^2+\dfrac{2025}{48}=85428$.

Nếu $y<252$ thì $P<\dfrac{-4}{3}\left|252-253{,}125\right|^2+\dfrac{2025}{48}=85428$.

Nếu $y>255$ thì $P<\dfrac{-4}{3}\left|255-253{,}125\right|^2+\dfrac{2025}{48}<\dfrac{-4}{3}\cdot1{,}125^2+\dfrac{2025}{48}=85428$.

P đạt giá trị lớn nhất bằng 85 428 khi $y=252, x=339$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2024 – LẦN 3
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,5 điểm)

1) Cho A là số chính phương có chữ số tận cùng là 1. Tìm số dư khi chia A cho 40.

2) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>2$, giữa n và $n!$ có ít nhất một số nguyên tố.

Lời giải

1) Do A tận cùng bởi 1 nên A lẻ. Do đó

$A=(2a+1)^2=4a(a+1)+1\left(a\in\mathbb{N}\right)$.

Do $a,a+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $a(a+1)\vdots 2$. Suy ra $A\equiv 1\left(\text{mod}8\right)$

Do A tận cùng là 1 nên $A\equiv 1\left(\text{mod}5\right)$. Suy ra $A-1$ chia hết cho $8\times 5=40$.

Vậy A chia cho 40 dư 1.

2) Xét số $A=n!-1$. Dễ thấy $n<A<n!$. Nếu A là số nguyên tố thì ta có đpcm

Nếu A là hợp số thì A có ước nguyên tố p. Dễ thấy $p<n!$. Do $(p;n!)=1$ nên $p>n$.

Vậy giữa n và $n!$ có số nguyên tố p.

Câu 2. (2,5 điểm) Xét phương trình bậc hai: $x^2+2ax+b=0$, trong đó a,b là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_1=2023+\sqrt{2024}$.

1) Chứng minh phương trình còn có nghiệm $x_2=2023-\sqrt{2024}$

2) Chứng minh $S=x_1^{2024}+x_2^{2024}$ là một số nguyên chẵn

Lời giải

1) $\left(2023+\sqrt{2024}\right)^2+2a\cdot\left(2023+\sqrt{2024}\right)+b=0$

$\Leftrightarrow 2\left(a+2023\right)\cdot\sqrt{2024}=-\left(2023^2+4046a+2024+b\right)$

Nếu $a\neq -2023$ thì $\sqrt{2024}=-\dfrac{2023^2+4046a+2024+b}{2\left(a+2023\right)}\in\mathbb{Q}$, vô lí.

Suy ra $a=-2023,\ b=2023^2-2024$

Áp dụng định lý Viet ta có

$x_1+x_2=-2a=4046\Rightarrow x_2=4046-x_1=2023-\sqrt{2024}$

2) Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n\left(n\geq 0\right)$. Ta có

$$\begin{cases}x_1^2+2ax_1+b=0\\x_2^2+2ax_2+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{n+2}+2ax_1^{n+1}+bx_1^n=0\\x_2^{n+2}+2ax_2^{n+1}+bx_2^n=0\end{cases}$$

Suy ra: $S_{n+2}+=0,\forall n\geq 0$.

Ta có: $S_0 = 2, S_1 = x_1 + x_2 = -2a$. Suy ra $S_2 = -(2a.S_1 + b.S_0) \in \mathbb{Z}$. Lập luận tương tự ta có $S_3, S_4, \ldots, S_{2024} \in \mathbb{Z}$. Vậy $S = S_{2024}$ là một số nguyên.

Do b là số lẻ nên $S_{n+2} = -(2a \cdot S_{n+1} + b \cdot S_n) \equiv S_n \pmod 2, \forall n \geq 0$.

Suy ra $S = S_{2024} \equiv S_0 \equiv 0 \pmod 2$.

Vậy S là một số chẵn.

Câu 3. (1 điểm) Cho $0 \leq x, y \leq 1$ và $\dfrac{x}{\sqrt{y+3}} + \dfrac{y}{\sqrt{x+3}} = 1$. Tính $T = (x-1)^{2024} + (y-1)^{2024}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x+3} = a, \sqrt{y+3} = b \left(\sqrt{3} \leq a, b \leq 2\right)$. Ta có $\dfrac{a^2-3}{b} + \dfrac{b^2-3}{a} = 1 \Leftrightarrow a^3 - 3a + b^3 - 3b = ab$ (1)

Ta có $(a-2)(b-2) \geq 0 \Rightarrow ab \geq 2(a+b) - 4$.

Do đó $2(a+b) - 4 \leq a^3 - 3a + b^3 - 3b$

$\Leftrightarrow (a-2)(a^2 + a - 1) + (b-2)(b^2 + b - 1) \geq 0$

Suy ra $a = b = 2$.

Với $a = b = 2$ ta có $x = y = 1$. Do đó $T = 0$.

NX: Có thể sử dụng phương pháp làm trội mẫu.

Ta có $x + 3 = x + 2 + 1 \geq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$.

Tương tự, $y + 3 \geq (x+y)^2$. Do đó $\dfrac{x}{\sqrt{y+3}} + \dfrac{y}{\sqrt{x+3}} \leq \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x+y} = 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$. Từ đó có $T = 0$.

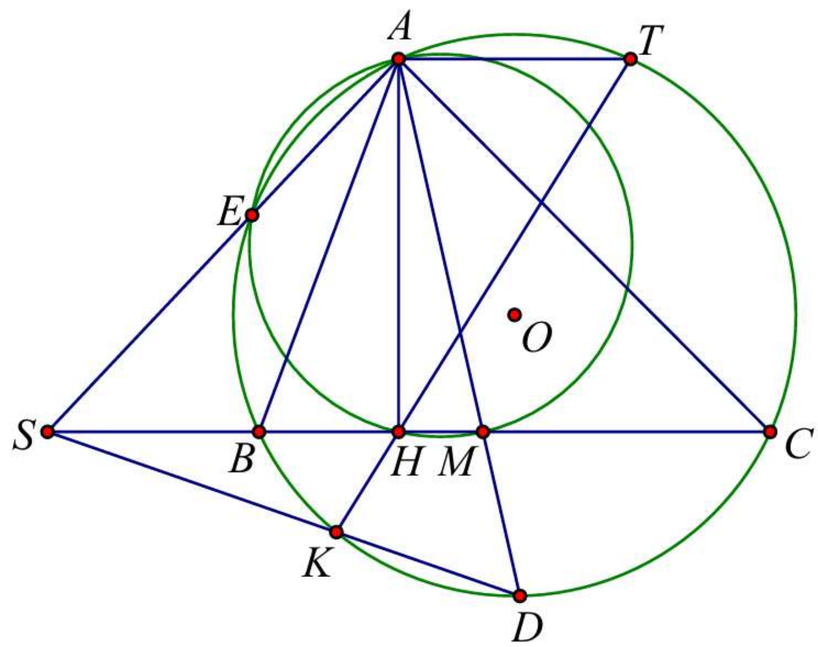
Câu 4. (3 điểm) Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là điểm bất kì trên đoạn BC $(M \neq H)$. Đường tròn đường kính AM cắt (O) tại E, AE cắt BC tại S.

a) Chứng minh $SH.SM = SB.SC$.

b) Tia AM cắt (O) tại điểm thứ hai là D, SD cắt (O) tại K. Chứng minh tứ giác $MHKD$ nội tiếp

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHKD$ chạy trên một đường thẳng cố định

Lời giải



a) Xét đường tròn đường kính AM, ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{EMH}$.

Suy ra $\Delta SAH \backsim \Delta SME\,(g.g)$. Do đó $\dfrac{SA}{SM} = \dfrac{SH}{SE} \Rightarrow SH.SM = SA.SE$

Xét đường tròn (O), ta có: $\widehat{EAB} = \widehat{ECB}$.

Suy ra $\Delta SAB \backsim \Delta SCE\,(g.g)$. Do đó $\dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SB}{SE} \Rightarrow SA.SE = SB.SC$

Vậy, $SH.SM = SB.SC$

b) Chứng minh tương tự câu a ta có: $SB.SC = SK.SD$. Suy ra, $SH \cdot SM = SK.SD$.

Suy ra $\Delta SHK \backsim \Delta SDM$. Do đó $\widehat{SHK} = \widehat{SDM}$. Vậy tứ giác $MHKD$ nội tiếp.

c) Từ câu b ta có: $\widehat{SHK} = \widehat{SDM}$. Gọi T là giao điểm thứ hai của HK với đường tròn (O), ta có $\widehat{ADK} = \widehat{ATK}$. Do đó, $\widehat{ATH} = \widehat{BHK} = \widehat{THC}$. Suy ra $AT \,//\, BC$.

Suy ra T cố định và do đó K cố định. Vậy, tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHKD$ chạy trên đường trung trực của HK cố định.

Câu 5. (1 điểm) Có 45 học sinh đứng thành một vòng tròn. Giả sử mỗi em có một số kẹo sao cho số kẹo của các em không đồng thời bằng nhau. Thực hiện trò chơi sau: Sau mỗi hiệu lệnh của người điều khiển, mỗi em đều lấy một nửa số kẹo của mình có đưa cho bạn bên cạnh tính theo chiều kim đồng hồ (Nếu em nào có số kẹo là một số lẻ thì được nhận thêm 1 chiếc kẹo từ người điều khiển trước khi chia). Chứng minh rằng, tồn tại một thời điểm mà số kẹo của các em đều bằng nhau.

Lời giải

Giả sử sau lần chia thứ n, số kẹo của các em lần lượt là $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_{45}(n)$.

Xét tích $T(n) = a_1(n) \cdot a_2(n) \ldots a_{45}(n)$. Dễ thấy $T(n) \le (M+1)^{45}, \forall n$, trong đó M là số kẹo lớn nhất mà một học sinh có được ban đầu.

Mặt khác $T(n+1) \geq \frac{a_1(n)+a_2(n)}{2} \cdot \frac{a_2(n)+a_3(n)}{2} \dots \frac{a_{45}(n)+a_1(n)}{2} \geq T(n), \forall n$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1(n), a_2(n), \dots, a_{45}(n)$ đều chẵn và $a_1(n) = a_2(n) = \dots = a_{45}(n)$.

Nếu không có thời điểm nào mà số kẹo của các em học sinh bằng nhau thì $T(n)$ tăng tới vô hạn, trái với giả thiết $T(n)$ bị chặn trên bởi $(M+1)^{45}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm **01** trang

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2025 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUNG**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}:\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{2-x}{x-\sqrt{x}}\right)$ với $x>0, x\neq 1$.

a) Chứng minh $P=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

a) $P=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{(\sqrt{x}-1)^2}:\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2-x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)$

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{(\sqrt{x}-1)^2}:\frac{x-1+\sqrt{x}+2-x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{(\sqrt{x}-1)^2}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

b) Với điều kiện $x>0, x\neq 1$ thì $P=\dfrac{9}{2}$ dẫn đến $2x-9\sqrt{x}+9=0$

$$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(2\sqrt{x}-3\right)=0$$

Suy ra $\sqrt{x}=3$ hoặc $\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}$

Do đó $x=9$ hoặc $x=\dfrac{9}{4}$

Đối chiếu với điều kiện, ta có các giá trị cần tìm của x là $x=9$ và $x=\dfrac{9}{4}$.

Câu 2. (2,0 điểm) Công ty viễn thông A có hai gói cước gọi điện thoại hàng tháng được tính như sau:
+) Gói cước 1: 1800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên và 1500 đồng/phút cho thời gian còn lại.
+) Gói cước 2: 2000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo và 1200 đồng/phút cho thời gian còn lại.
Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác Minh chọn gói cước 2 vì so với gói cước 1 thì

bác Minh sẽ tiết kiệm được 66000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác Minh gọi điện thoại bao nhiêu phút?

Lời giải

Gọi t (phút) là thời gian trung bình mà bác Minh gọi điện thoại mỗi tháng và $H(t)$ (đồng) là số tiền chênh lệch giữa gói cước 1 và gói cước 2 khi bác Minh gọi t (phút).

Nếu $0<t\le 30$ thì $H(t)=1800t-2000t=-200t$ (loại)

Nếu $30<t\le 60$ thì $H(t)=1800t-\left[2000.30+(t-30)\cdot 1800\right]=-6000$ (loại)

Nếu $t>60$ thì

$H(t)=1800\cdot 60+(t-60)\cdot 1500-\left[2000\cdot 30+1800.30+(t-60)\cdot 1200\right]$

$H(t)=300t-24000$

Theo giả thiết $H(t)=66000$

Từ đó ta tìm được $t=300$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy trung bình mỗi tháng bác Minh gọi điện thoại 300 phút.

Câu 3. (2,0 điểm) Spring Cup là giải bóng đá thường niên dành cho học sinh nam của trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội do câu lạc bộ thể thao CSF - CSP Sporting Federation (Liên minh Thể thao Chuyên Sư Phạm) tổ chức.

Ở mùa giải Spring Cup 2024, một bảng đấu gồm có 5 đội A,B,C,D,E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?

b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A,B,C,D,E lần lượt có điểm số là $10,9,6,4,0$. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Lời giải

a) Tất cả có $4+3+2+1=10$ trận.

b) Gọi x là số trận có thắng, thua và y là số trận hòa (x,y là các số tự nhiên; $x,y\le 10$).

Theo câu a), ta có $x+y=10$. (1)

Vì mỗi trận thắng - thua có tổng số điểm là 3 và mỗi trận hòa có tổng số điểm là 2 nên

$3x+2y=10+9+6+4+0=29$.

Giải hệ phương trình (1) và (2), ta được $(x,y)=(9,1)$.

Suy ra chỉ có một trận hòa.

Vì chỉ có một trận hòa (hai đội này mỗi đội được 1 điểm), mỗi trận thắng - thua (mỗi đội được 3 điểm hoặc 0 điểm) nên chỉ có hai đội hòa có số điểm chia 3 dư 1.

Vậy đó là trận hòa giữa hai đội A và D.

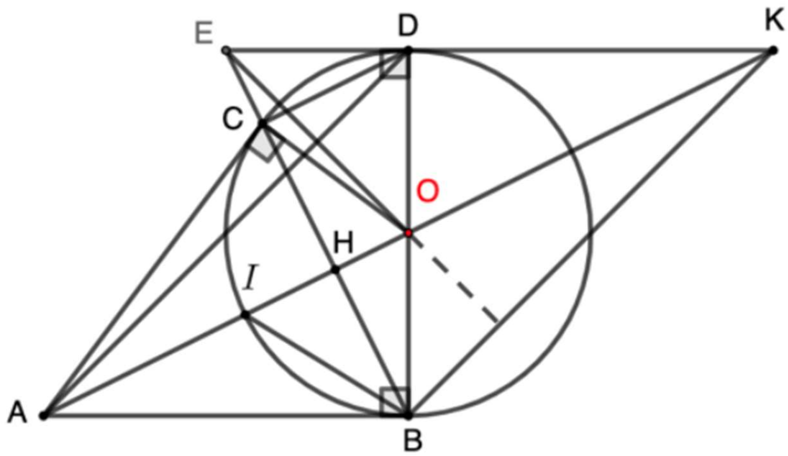
Câu 4. (3,0 điểm) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB,AC tới $(O)(B,C$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của BC với $OA;I$ là giao điểm của đoạn thẳng OA với (O).

a) Chứng minh BI là tia phân giác của góc ABH.

b) Kẻ đường kính BD của (O). Tiếp tuyến với (O) tại D cắt đường thẳng BC tại điểm E. Chứng minh AD vuông góc với OE.

c) Trong trường hợp góc BDC bằng 60°, hãy tính theo R diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác ABC và nằm nằm phía ngoài (O).

Lời giải



a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì OA là đường trung trực của BC, suy ra OA vuông góc với BC tại điểm H.

Tam giác OBI cân tại O nên $\widehat{OIB}=\widehat{OBI}$.

Vì $\widehat{OBI}+\widehat{IBA}=90^\circ$ và $\widehat{IBH}+\widehat{OIB}=90^\circ$ nên $\widehat{IBA}=\widehat{IBH}$ hay BI là tia phân giác của góc ABH.

b) **Cách 1.** Vì $\widehat{ABO}=\widehat{BDE}=90^\circ$ và $\widehat{BAO}=\widehat{DBE}$ nên $\Delta ABO\backsim\Delta BDE$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BO}{DE}$. Vì $BO=DO$ nên $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{DO}{DE}$

Kết hợp với $\widehat{ABD}=\widehat{ODE}=90^\circ$ ta suy ra $\Delta ABD\backsim\Delta ODE$ (c.g.c).

Từ đó ta có $\widehat{ADB}=\widehat{OED}$ và $\widehat{ADB}+\widehat{EOD}=\widehat{OED}+\widehat{EOD}=90^\circ$.

Vậy EO vuông góc với AD.

Cách 2. Gọi K là giao điểm của AO và ED. Tam giác OBA bằng tam giác ODK nên $OA=OK$.

Tứ giác $ABKD$ có hai đường chéo AK và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường

Nên $ABKD$ là hình bình hành. Từ đó dẫn đến AD song song với BK.

Tam giác EBK nhận điểm O là trực tâm nên EO vuông góc với BK.

Vì AD song song với BK ta suy ra EO vuông góc với AD.

Cách 3. Vì $\Delta OHB\backsim\Delta OBA(g.g)$ nên $\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{OB}{OA}$ hay $OH.OA=OB^2$

Kết hợp với $OD=OB$, ta có $OH.OA=OD^2$ hay $\dfrac{OH}{OD}=\dfrac{OD}{OA}$.

Điều này dẫn đến $\Delta OHD\backsim\Delta ODA(c.g.c)$ và $\widehat{ODH}=\widehat{OAD}(*)$

Vì tứ giác $OHED$ nội tiếp đường tròn đường kính OE nên $\widehat{ODH}=\widehat{OEH}$ (**)

Từ $(^*)$ và $(^{**})$ ta có $\widehat{OAD}=\widehat{OEH}$ Gọi M là giao điểm của AD và OE. Ta có $\Delta OAM \backsim \Delta OEH$ ($g.g$) và dẫn đến $\widehat{OMA}=\widehat{OHE}=90^\circ$. Vậy EO vuông góc với AD.

c) Tam giác BCD vuông tại C và góc BDC bằng 60° nên $BC=R\sqrt{3}$. Tam giác ABC cân tại A, góc ABC bằng 60° nên tam giác ABC đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$.

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot BA=\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}.$$

$$S_{OAC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot CA=\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}.$$

$$S_{OBAC}=S_{OAB}+S_{OAC}=\sqrt{3}R^2.$$

Do $sd\,\overparen{BIC}=120^\circ$

Nên diện tích hình quạt tròn BOC giới hạn bởi hai bán kính OB,OC và cung BIC là $\frac{\pi R^2.120}{360}=\frac{\pi R^2}{3}$

Vậy diện tích cần tìm là $\sqrt{3}R^2-\frac{\pi R^2}{3}=R^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 5. (1,0 điểm) Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{2}$ và tổng của ba số bất kỳ trong bốn số đó là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

Lời giải

Cách 1. Gọi a,b,c,d là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện đã nêu trong đề bài.

Đặt $x=a+b+c, y=a+b+d, z=a+c+d, t=b+c+d$, và $s=a+b+c+d$.

Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có: $|a|\le\frac{1}{2},|b|\le\frac{1}{2},|c|\le\frac{1}{2},|d|\le\frac{1}{2}$ và x,y,z,t là các số nguyên.

Khi đó $x+y+z+t=3(a+b+c+d)=3a+3(b+c+d)=3a+3t$ là số nguyên nên $3a$ là số nguyên.

Tương tự $3b,3c,3d$ là số nguyên.

Đặt $A=3a,B=3b,C=3c,D=3d$. Khi đó A,B,C,D là các số nguyên và $|A|\le\frac{3}{2},|B|\le\frac{3}{2},|C|\le\frac{3}{2},|D|\le\frac{3}{2}$

Từ đó suy ra $A,B,C,D\in\{-1;0;1\}$.

Vì $A+B+C=3x, A+B+D=3y, A+C+D=3z, B+C+D=3t$

là các số chia hết cho 3 nên A,B,C,D có cùng số dư khi chia cho 3.

Dẫn đến $A=B=C=D=-1; A=B=C=D=0; A=B=C=D=1$.

Từ đó suy ra $a=b=c=d=\frac{-1}{3}; a=b=c=d=0; a=b=c=d=\frac{1}{3}$. Vậy $s\in\left\{-\frac{4}{3};0;\frac{4}{3}\right\}$

Cách 2. Gọi a,b,c,d là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện đã nêu trong đề bài.

Đặt $x=a+b+c, y=a+b+d, z=a+c+d,\ t=b+c+d,$ và $s=a+b+c+d$.

Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có:

$$|a| \le \frac{1}{2}, |b| \le \frac{1}{2}, |c| \le \frac{1}{2}, |d| \le \frac{1}{2} \#(1)$$

và x, y, z, t là các số nguyên.

Xét cặp số x, y. Do (2) nên $x - y$ là một số nguyên; hơn nữa

$$|x - y| = |c - d| \le |c| + |d| \le 1(\text{ do}(1))$$

Vì thế, $|x - y| \in \{0;1\}$

Nếu $|x - y| = 1$ thì theo (3), phải có: $|c - d| = |c| + |d| = 1$.

Điều vừa nêu trên tương đương với: $cd \le 0$ và $|c| = |d| = \frac{1}{2}(\text{do}(1))$

Suy ra, $c + d = 0$. Do đó $z = a$ và $t = b$. Vì thế, $a, b \in \mathbb{Z}$ (do (2)). Từ đây và (1), suy ra $a = b = 0$.

Vì vậy, $x = c$. Do đó, $c \in \mathbb{Z}$.

Từ đây và (1), suy ra $c = 0$, mâu thuẫn với (5).

Mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy $|x - y| \ne 1$. Do đó, từ (4) ta được $x = y$.

Xét các cặp số x, z và x, t, bằng cách hoàn toàn tương tự, ta sẽ được $x = z$ và $x = t$.

Vì vậy, $x = y = z = t$. Suy ra $3s = x + y + z + t = 4x$; Do đó, $s = \frac{4}{3}x$.

Tiếp theo, ta có: $|x| \le |a| + |b| + |c| \le \frac{3}{2}$ (do (1)); Mà $|x| \in \mathbb{Z}$ (theo (2)), nên $|x| \in \{0;1\}$.

Từ (6) và (7), suy ra $s \in \left\{-\frac{4}{3}; 0; \frac{4}{3}\right\}$.

Ngược lại, dễ thấy:

$a = b = c = d = -\frac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $-\frac{4}{3}$

$a = b = c = d = 0$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng 0

$a = b = c = d = \frac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $\frac{4}{3}$

Vậy, tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số thỏa mãn các điều kiện của đề bài là $-\frac{4}{3}; 0; \frac{4}{3}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2025 – LẦN 1
Môn: **TOÁN CHUYÊN**
Thời gian làm bài: **120 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm **01** trang

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{9-2x^2}+\sqrt[3]{x^2+4}=3$.

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $4x^2+y^2=32z^2$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}\geq 0$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định $-\frac{3\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $\sqrt{9-2x^2}=a,\sqrt[3]{x^2+4}=b(a\geq 0,b>0)$. Từ phương trình đã cho ta có $\begin{cases}a+b=3 & (1)\\ a^2+2b^3=17 & (2)\end{cases}$

(1) trở thành $a=3-b$. Thay vào (2) ta được $2b^3+b^2-6b-8=0$.

Phương trình này tương đương với $(b-2)\left(2b^2+5b+4\right)=0$. Do đó $b=2$.

Ta có $\sqrt[3]{x^2+4}=2$. Suy ra $x=2$ hoặc $x=-2$.
Thử lại thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho tập nghiệm $S=\{-2,2\}$.

b)

Theo đề bài, $4\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=32$. Đặt $\frac{x}{z}=t(t>0)$.

Khi đó $\frac{y}{z}=\sqrt{32-4t^2}=2\sqrt{8-t^2}$.

Ta có: $z\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{z}{x}+2\frac{z}{y}=\frac{1}{t}+\frac{2}{2\sqrt{8-t^2}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{8-t^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{8-t^2}}\geq\frac{(1+1)^2}{t+\sqrt{8-t^2}}=\frac{4}{t+\sqrt{8-t^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $\left(t+\sqrt{8-t^2}\right)^2\leq\left(1^2+1^2\right)\left(t^2+8-t^2\right)=16$

Suy ra $t+\sqrt{8-t^2}\leq 4$. Kết hợp với (1), ta được $\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{8-t^2}}\geq 1$.

Do đó $z\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)\geq 1$. Vậy $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}\geq 0$.

Dấu " = " xảy ra khi $t=\sqrt{8-t^2} \Leftrightarrow t=2$. Khi đó $\frac{x}{z}=2, \frac{y}{z}=4$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Tồn tại hay không một tập hợp A khác rỗng, là tập con của tập các số tự nhiên và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau?

- Với hai số tự nhiên phân biệt bất kỳ mà có tổng là số chẵn thì ít nhất một trong hai số đó thuộc tập hợp A.
- Với hai số tự nhiên phân biệt bất kỳ mà có tổng là số lẻ thì ít nhất một trong hai số đó không thuộc tập hợp A.

Lời giải

Giả sử tồn tại tập hợp A thỏa mãn điều kiện đề bài.

Với $x=1, y=3$, ta có $x+y=4$ là số chẵn. Suy ra $1 \in A$ hoặc $3 \in A$. Xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $1 \in A$.

Với $x=1, y=2$, ta có $x+y=3$ là số lẻ. Suy ra $1 \notin A$ hoặc $2 \notin A$. Vì $1 \in A$ nên $2 \notin A$. Tương tự, $4 \notin A$.

Với $x=2, y=4$, ta có $x+y=6$ là số chẵn. Suy ra $2 \in A$ hoặc $4 \in A$ (Mâu thuẫn).

Trường hợp 2: $3 \in A$. Chứng minh tương tự.

Vậy điều giả sử là sai. Do đó không tồn tại tập hợp A thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 3. (1,0 điểm)

Một rô-bốt di chuyển trên một bảng gồm 7 ô được đánh số từ 1 đến 7 như hình vẽ sau:

Ban đầu, rô-bốt đứng ở ô số 4. Mỗi bước, nó có thể nhảy sang trái hoặc sang phải, mỗi hướng có xác suất bằng nhau, và mỗi lần nhảy chỉ di chuyển đúng một ô. Tại ô số 1 và ô số 7 có đặt kẹo, và khi rô-bốt đến một trong hai ô này, nó lấy kẹo và dừng lại. Tính xác suất để rô-bốt lấy kẹo sau đúng 3 bước.

Lời giải

Ở mỗi ô, rô-bốt có hai sự lựa chọn để di chuyển với xác suất như nhau.

Do đó số cách di chuyển sau ba bước là $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Số phần tử của không gian mẫu là 8.

Có hai khả năng thuận lợi cho biến cố: "rô-bốt lấy kẹo sau đúng 3 bước" là

$4 \to 3 \to 2 \to 1$ và $4 \to 5 \to 6 \to 7$.

Xác suất cần tìm là $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Cho a,b là hai số nguyên trái dấu. Biết rằng phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm nguyên và phương trình $x^2+bx+a=0$ có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $a+b=-1$.

b) Tìm số nguyên z và các số hữu tỷ x,y thỏa mãn điều kiện $\frac{3}{\sqrt{2x}}-1=1-\sqrt{\frac{3}{y}}=\frac{z}{x+y}$.

Lời giải

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $a>0>b$.

Ký hiệu $x^2+ax+b=0$

(1) và $x^2+bx+a=0$

Nếu $a>-b$ thì $(a+2)^2>a^2+4a>\Delta_1=a^2-4b>a^2$.

Do đó $\Delta_1=(a+1)^2$. Suy ra $a^2-4b=(a+1)^2 \Leftrightarrow -4b=2a+1$ (vô lý).

Vậy $a\le -b$.

Nếu $a=-b$ thì $\Delta_1=a^2+4a=k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$. Suy ra $(a+2-k)(a+2+k)=4$.

Do đó $a=0$ hoặc $a=-4$ (loại).
Nếu $a=-b-1$ thì (1) có các nghiệm là $1,b$ và (2) có c nghiệm là $1,a$ (thỏa mãn).

Nếu $a\le -b-2$ thì $-a\ge b+2$. Khi đó $\Delta_2=b^2-4a\ge b^2+4(b+2)>(b+2)^2$.

Vì $a>0$ nên $\Delta_2=b^2-4a<b^2$. Suy ra $b^2>\Delta_2>(b+2)^2$. Do đó $\Delta_2=(b+1)^2$.

Ta có $\Delta_2=b^2-4a=(b+1)^2 \Leftrightarrow -4a=2b+1$ (vô lý).

Vậy $a+b=-1$.

b) Ta có $\sqrt{2x}=\frac{3(x+y)}{x+y+z}$ và $\sqrt{3y}=\frac{3(x+y)}{x+y-z}$. Suy ra $\sqrt{2x},\sqrt{3y}\in\mathbb{Q}$.

Đặt $\sqrt{2x}=\frac{m}{n},\sqrt{3y}=\frac{p}{q}$ với $m,n,p,q\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1,(p,q)=1$.

Khi đó $\frac{m\left(3q^2m^2+2p^2n^2+6zn^2q^2\right)}{n\left(3q^2m^2+2p^2n^2\right)}=3$. Do đó $m\left(3q^2m^2+2p^2n^2+6zn^2q^2\right)\vdots n$.

Mặt khác $(m,n)=1$, ta suy ra $3q^2m^2+2p^2n^2+6zn^2q^2 \vdots n$.

Do đó $3q^2m^2\vdots n\to n\left(3q^2m^2+2p^2n^2\right)\vdots n^2$. Suy ra $m\left(3q^2m^2+2p^2n^2+6zn^2q^2\right)\vdots n^2$.

Vậy $3q^2m^2+2p^2n^2+6zn^2q^2 \vdots n^2$ và $3q^2 \vdots n^2$. Suy ra $q \vdots n$.

Tương tự, $n \vdots q$. Do đó $n=q$.

Khi đó $\dfrac{m\left(3m^2+2p^2+6zn^2\right)}{n\left(3m^2+2p^2\right)}=3$.

Ta có: $3m^2+2p^2+6zn^2 \vdots n \to 3m^2+2p^2 \vdots n \to n\left(3m^2+2p^2\right) \vdots n^2$.

Do đó $3m^2+2p^2+6zn^2 \vdots n^2$. Vậy $3m^2+2p^2 \vdots n^2$.

Ta thấy n là lẻ vì nếu n chẵn thì $3m^2$ là số chẵn, kéo theo m là số chẵn, mâu thuẫn với $(m,n)=1$.

Đặt $3m^2+2p^2=k\cdot n^2, 6z=t$ với $k\ge 1$. Khi đó $\dfrac{m(k+t)}{nk}=\dfrac{p(k-t)}{nk}=3$.

y ra $k+t \vdots n$ và $k-t \vdots n$. Do đó $2k, 2t \vdots n$. Vì n lẻ nên $k,t \vdots n$.

Đặt $k=k_1\cdot n, t=t_1\cdot n\left(k_1,t_1\in\mathbb{N}^*\right)$. Tương tự, $k_1,t_1 \vdots n$.

Suy ra $k,t \vdots n^s$ với mọi $s\in\mathbb{N}$. Vì $k\ne 0$ nên $n=1$. Khi đó $mk+mt=pk-pt=3k$.

Với $t=0$ thì $z=0$. Suy ra $\sqrt{2x}=\sqrt{3y}=3$. Do đó $x=\dfrac{9}{2}, y=3$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Với $t>0$ thì $mk<3k \to m<3$. Vậy $m=1$ hoặc $m=2$.

Nếu $m=1$ thì $t=2k$, kéo theo $-pk=3k$ (vô lý).

Nếu $m=2$ thì $t=\dfrac{k}{2}$, kéo theo $p=6$. Khi đó $x=2, y=12, z=7$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Với $t<0$ thì $pk<3k \to p<3$. Vậy $p=1$ hoặc $p=2$.

Nếu $p=1$. thì $t=-2k$. Khi đó $-mk=3k$. (vô lý)

Nếu $p=2$. thì $t=\dfrac{-k}{2}, m=6$. Khi đó $x=18, y=\dfrac{4}{3}, z=\dfrac{-29}{3}$ (loại vì $z\in\mathbb{Z}$).

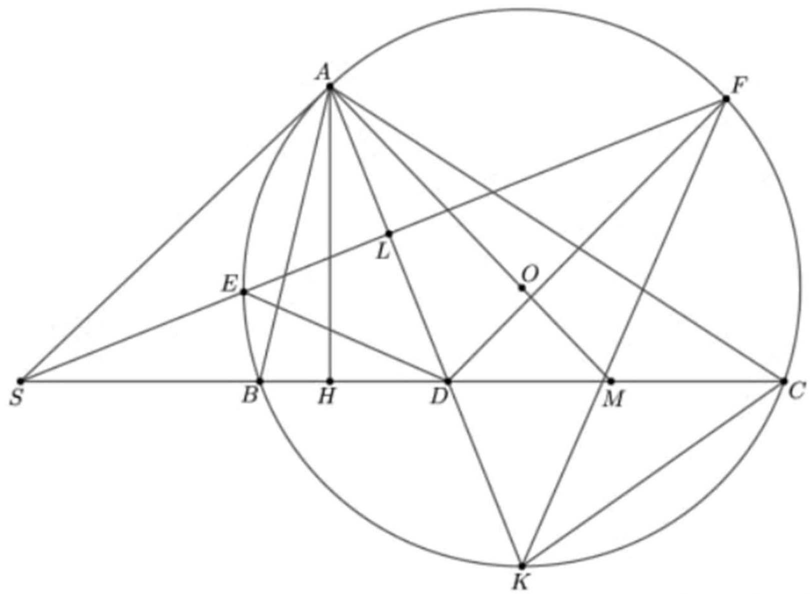
Vậy bộ (x,y,z) thỏa mãn là $\left(\dfrac{9}{2},3,0\right);(2,12,7)$.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi AH, AD lần lượt là đường cao và đường phân giác trong góc $A(H,D\in BC)$. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Đường trung trực của đoạn thẳng AD cắt (O) tại E,F. Chứng minh rằng

a) Trực tâm của tam giác DEF thuộc (O).

b) Bốn điểm H,E,F,M cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



a) Gọi L là giao điểm của AD và EF, K là giao điểm thứ hai (khác A) của AD và (O).

Vì EF là trung trực của đoạn thẳng AD nên $LD \perp EF$ và $LA = LD$.

Ta có: $LE \cdot LF = LA \cdot LK = LD \cdot LK$. Suy ra $\dfrac{LE}{LD} = \dfrac{LK}{LF}$.

Do đó $\Delta ELD \backsim \Delta KLF$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{LED} + \widehat{LFK} = \widehat{LKF} + \widehat{LFK} = 90^\circ$.

Vậy $DE \perp KF$. Suy ra K là trực tâm của $\triangle DEF$.

b) Gọi S là giao điểm của EF và BC.

Ta có: $\widehat{SAD} = \widehat{SDA} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = \widehat{BCK} + \widehat{ACB} = \widehat{ACK}$.

Suy ra SA là tiếp tuyến của (O). Do đó $SE \cdot SF = SA^2 .(1)$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAM với đường cao AH, ta có:

$$SA^2 = SH \cdot SM$$

Từ (1) và (2) ta có: $SH \cdot SM = SE \cdot SF$. Suy ra bốn điểm H, M, E, F cùng thuộc một đường tròn.

-------------------------------- HẾT --------------------------------