

## MỤC LỤC

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM		
NỘI DUNG	TRANG	
	Đề	Đáp án
Năm học 2008 – 2009 (vòng 1)	3	38
Năm học 2008 – 2009 (vòng 2)	4	42
Năm học 2009 – 2010 (vòng 1)	5	46
Năm học 2009 – 2010 (vòng 2)	6	49
Năm học 2010 – 2011 (vòng 1)	7	52
Năm học 2010 – 2011 (vòng 2)	8	55
Năm học 2011 – 2012 (vòng 1)	9	58
Năm học 2011 – 2012 (vòng 2)	10	61
Năm học 2012 – 2013 (vòng 1)	11	64
Năm học 2012 – 2013 (vòng 2)	12	69
Năm học 2013 – 2014 (vòng 1)	13	72
Năm học 2013 – 2014 (vòng 2)	14	75
Năm học 2014 – 2015 (vòng 1)	15	78
Năm học 2014 – 2015 (vòng 2)	16	82
Năm học 2015 – 2016 (vòng 1)	17	86
Năm học 2015 – 2016 (vòng 2)	18	90
Năm học 2016 – 2017 (vòng 1)	19	93
Năm học 2016 – 2017 (vòng 2)	20	97
Năm học 2017 – 2018 (vòng 1)	21	101
Năm học 2017 – 2018 (vòng 2)	22	106
Năm học 2018 – 2019 (vòng 1)	23	111
Năm học 2018 – 2019 (vòng 2)	24	114
Năm học 2019 – 2020 (vòng 1)	25	118
Năm học 2019 – 2020 (vòng 2)	26	122
Năm học 2020 – 2021 (vòng 1)	27	126
Năm học 2020 – 2021 (vòng 2)	28	131
Năm học 2021 – 2022 (vòng 1)	29	134
Năm học 2021 – 2022 (vòng 2)	30	139
Năm học 2022 – 2023 (vòng 1)	31	142
Năm học 2022 – 2023 (vòng 2)	32	145
Năm học 2023 – 2024 (vòng 1)	33	149
Năm học 2023 – 2024 (vòng 2)	34	153
Năm học 2024 – 2025 (vòng 1)	35	158
Năm học 2024 – 2025 (vòng 2)	36	162

# A. PHẦN ĐỀ THI



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2008 – 2009

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{a+\sqrt{ab}} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$ .

Với  $a > 0$ ;  $b > 0$  và  $a \neq b$ .

- 1) Rút gọn  $P$ .
- 2) Tìm  $a, b$  sao cho  $b = (a+1)^2$  và  $P = -1$ .

**Câu II.** Cho phương trình  $x^2 + (m^2 + 1)x + m - 2 = 0$  với  $m$  là tham số.

- 1) Chứng minh rằng với mọi  $m$  phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.
- 2) Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình.

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2}$ .

**Câu III.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ .  $M$  là điểm bất kỳ trên  $AB$ . Gọi  $O, O_1, O_2$  là tâm các đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC, \triangle MAC, \triangle MBC$ .

- 1) Chứng minh: 4 điểm  $O_1, M, O_2, C$  cùng thuộc đường tròn  $(C)$ .
- 2) Chứng minh:  $O$  cũng thuộc  $(C)$ .
- 3) Tìm vị trí  $M$  để bán kính  $(C)$  nhỏ nhất.

**Câu IV.** Cho các số thực  $a, b, c, d$  thoả mãn đồng thời các điều kiện

- (i):  $ac - a - c = b^2 - 2b$ .
- (ii):  $bd - b - d = c^2 - 2c$ .
- (iii):  $b, c$  khác 1.

Chứng minh đẳng thức:  $ad + b + c = bc + a + d$ .

**Câu V.** Cho các số thực không âm  $x, y, z$  đôi một khác nhau và thoả mãn  $(z+x)(z+y) = 1$ . Chứng

minh bất đẳng thức sau  $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} \geq 4$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2008 – 2009

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho ba số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $b \neq c, \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}, a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2$ .

Chứng minh đẳng thức  $\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$ .

**Câu II.** 1) Với mỗi số dương  $a$  thỏa mãn  $a^3 = 6(a+1)$ .

Chứng minh phương trình sau vô nghiệm:  $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ .

2) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  và  $b$  sao cho  $2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a+1)(b+1)(ab+1)$ .

**Câu III.** Ba số nguyên  $a, b, c$  đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời ba điều kiện

(i):  $a$  là ước của  $b + c + bc$ .

(ii):  $b$  là ước của  $a + c + ac$ .

(iii):  $c$  là ước của  $a + b + ab$ .

1) Hãy chỉ ra bộ số  $(a; b; c)$  thỏa mãn các điều kiện trên.

2) Chứng minh rằng  $a, b, c$  không đồng thời là số nguyên tố.

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$ . Một đường tròn  $(O)$  đi qua các điểm  $A, B$  và cắt các cạnh  $CA, CB$  tại các điểm  $L, N$  tương ứng ( $L \neq A, C; N \neq B, C$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của cung  $LN$  của đường tròn  $(O)$  và  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Đường thẳng  $AM$  cắt các đường thẳng  $BL$  và  $BN$  tại các điểm  $D$  và  $F$  tương ứng, đường thẳng  $BM$  cắt các đường thẳng  $AN$  và  $AL$  tại các điểm  $E$  và  $G$  tương ứng. Gọi  $P$  là giao điểm của  $AN$  và  $BL$ .

1) Chứng minh  $DE \parallel GF$ .

2) Nếu tứ giác  $DEFG$  là hình bình hành, hãy chứng minh:

a)  $\triangle ALP \sim \triangle ANC$ .

b)  $DF \perp EG$ .

**Câu V.** Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6cm.

Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá  $\sqrt{3}$  cm.

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2009 – 2010

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $A = \sqrt{20a+92} + \sqrt{a^4+16a^2+64}$  và  $B = a^4 + 20a^3 + 102a^2 + 40a + 200$ .

- 1) Rút gọn A.
- 2) Tìm a để  $A+B=0$ .

**Câu II.** Hai công nhân cùng làm một công việc 18 giờ xong. Nếu người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ 2 làm 12 giờ thì được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

**Câu III.** Cho Parabol  $y = x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình  $y = mx + 1$ .

- 1) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A; B với mọi m.
- 2) Gọi  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1)$ .

**Câu IV.** Cho tam giác ABC với  $AB = 5$ ;  $AC = 3\sqrt{5}$ ;  $BC = 10$ . Phân giác BK của góc ABC cắt đường cao AH; trung tuyến AM của tam giác ABC tại O và T ( $K \in AC$ ;  $H, M \in BC$ ).

- 1) Tính AH.
- 2) Tính diện tích tam giác AOT.

**Câu V.** Các số thực x, y thoả mãn đẳng thức  $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$ .

Chứng minh  $x+y=0$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2009 – 2010

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Các số thực  $x, y$  thoả mãn  $xy \neq \sqrt{2}$  và  $xy \neq -\sqrt{2}$ .

Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x, y$ .

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}.$$

**Câu II.** 1) Cho phương trình  $x^2 + bx + c = 0$ , trong đó các tham số  $b$  và  $c$  thoả mãn đẳng thức  $b + c = 4$ . Tìm các giá trị của  $b$  và  $c$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 = x_2^2 + x_2$ .

2) Giả sử  $(x; y; z)$  là một nghiệm của hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{12} - \frac{z}{4} = 1 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của  $A = x + y + z$ .

**Câu III.** Ba số nguyên dương  $a, p, q$  thoả mãn các điều kiện:

(i):  $ap + 1$  chia hết cho  $q$ .

(ii):  $aq + 1$  chia hết cho  $p$ .

Chứng minh  $a > \frac{pq}{2(p+q)}$ .

**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và điểm  $C$  thuộc đường tròn ( $C$  không trùng với  $A, B$  và trung điểm cung  $AB$ ). Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $AB$ . Đường tròn  $(O_1)$  đường kính  $AH$  cắt  $CA$  tại  $E$ , đường tròn  $(O_2)$  đường kính  $BH$  cắt  $CB$  tại  $F$ .

1) Chứng minh tứ giác  $AEFB$  là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi  $(O_3)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEFB$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $O$ . Chứng minh ba điểm  $H, O_3, D$  thẳng hàng.

3) Gọi  $S$  là giao của các đường thẳng  $EF$  và  $AB$ ,  $K$  là giao điểm thứ hai của  $SC$  với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $KE$  vuông góc với  $KF$ .

**Câu V.** Một hình vuông có độ dài bằng 1 được chia thành 100 hình chữ nhật có chu vi bằng nhau (hai hình chữ nhật bất kỳ không có điểm chung). Kí hiệu  $P$  là chu vi của mỗi hình chữ nhật trong 100 hình chữ nhật này.

1) Hãy chỉ ra một cách để chia  $P = 2,02$ .

2) Hãy tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2010 – 2011

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $A = \left[ \frac{3}{2} - \left( x^4 - \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x^3 - x(4x - 1) - 4}{x^7 + 6x^6 - x - 6} \right] : \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36}$

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

**Câu II.** Cho hai đường thẳng  $(d_1): y = (2m^2 + 1)x + 2m - 1$ ;  $(d_2): y = m^2x + m - 2$ , với m là tham số.

- 1) Tìm tọa độ giao điểm I của  $(d_1)$  và  $(d_2)$  theo m.
- 2) Khi m thay đổi, chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

**Câu III.** Giả sử bộ ba số thực (x; y; z) thỏa mãn hệ: 
$$\begin{cases} x + 1 = y + z \\ xy + z^2 - 7z + 10 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

- 1) Chứng minh  $x^2 + y^2 = -z^2 + 12z - 19$ .
- 2) Tìm tất cả các bộ (x; y; z) thỏa mãn hệ (I) sao cho  $x^2 + y^2 = 17$ .

**Câu IV.** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trong hình vuông đó lấy điểm K sao cho tam giác ABK đều. Các đường thẳng BK và AD cắt nhau tại P.

- 1) Tính độ dài đoạn thẳng KC theo a.
- 2) Trên đoạn thẳng AD lấy điểm I sao cho  $DI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , các đường thẳng CI và BP cắt nhau tại H. Chứng minh tứ giác CHDP nội tiếp một đường tròn.
- 3) Gọi M và L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CP và KD. Chứng minh  $LM = \frac{a}{2}$ .

**Câu V.** Giải phương trình  $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2010 – 2011

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Giả sử  $a$  và  $b$  là hai số dương khác nhau và thỏa mãn  $a - b = \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2}$ .

Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 = 1$ .

2) Chứng minh rằng  $\sqrt{2009^2 + 2009^2 \times 2010^2 + 2010^2}$  là một số nguyên dương.

**Câu II.** Giả sử bốn số thực  $a, b, c, d$  đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

(i): Phương trình  $x^2 - 2cx - 5d = 0$  có hai nghiệm  $a$  và  $b$ .

(ii): Phương trình có hai nghiệm  $c$  và  $d$ .

Chứng minh rằng

1)  $a - c = c - b = d - a$ .

2)  $a + b + c + d = 30$ .

**Câu III.** Giả sử  $m$  và  $n$  là những số nguyên dương với  $n > 1$ . Đặt  $S = m^2n^2 - 4m + 4n$ .

Chứng minh rằng:

1) Nếu  $m > n$  thì  $(mn^2 - 2)^2 < n^2S < m^2n^4$ .

2) Nếu  $S$  là số chính phương thì  $m = n$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  với  $AB > AC$ ,  $AB > BC$ . Trên cạnh  $AB$  lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BC = BM$  và  $AC = AN$ .

1) Chứng minh điểm  $N$  nằm trong đoạn thẳng  $BM$ .

2) Qua  $M$  và  $N$  kẻ  $MP$  song song với  $BC$  và  $AQ$  song song với  $CA$  ( $P \in CA, Q \in CB$ ).

Chứng minh rằng  $CP = CQ$ .

3) Cho  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ ,  $\widehat{CAB} = 30^\circ$  và  $AB = a$ . Hãy tính diện tích của tam giác  $MCN$  theo  $a$ .

**Câu V.** Trên một bảng đen ta viết ba số  $\sqrt{2}$ ;  $2$ ;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ta bắt đầu thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi

lần chơi ta xóa hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là  $a$  là  $b$ , rồi viết vào hai vị trí vừa xóa

hai số mới là  $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$  và  $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ , đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng

luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể

có đồng thời ba số  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $1 + \sqrt{2}$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2011 – 2012

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$  với  $x > 0, y > 0, x \neq 2y,$

$$y \neq 2 - 2x^2.$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Cho  $y = 1$ , hãy tìm  $x$  sao cho  $A = \frac{2}{5}$ .

**Câu II.** Một nhóm công dân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức để ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công dân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

**Câu III.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - m^2 + 3$ ,  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ . Với giá trị nào của  $m$  thì  $x_1, x_2$  là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

**Câu IV.** Cho đường tròn (O) đường kính  $AB = 10$ . Dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB tại điểm E sao cho  $AE = 1$ . Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K, AK và CE cắt nhau tại M.

1) Chứng minh  $\triangle AEC \sim \triangle OBK$ . Tính BK.

2) Tính diện tích tam giác CKM.

**Câu V.** Cho hình thoi ABCD có  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ . Các điểm M và N chạy trên các cạnh BC và CD tương ứng sao cho  $\widehat{MAN} = 30^\circ$ . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN thuộc một đường thẳng cố định.

**Câu VI.** Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{6}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79+\sqrt{80}}} > 4$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2011 – 2012

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho  $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

1) Chứng minh rằng  $4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$ .

2) Tính giá trị của biểu thức  $S = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$ .

**Câu II.** 1) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

2) Cho hai số hữu tỉ  $a, b$  thỏa mãn đẳng thức  $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$ .

Chứng minh rằng  $1 - ab$  là bình phương của một số hữu tỉ.

**Câu III.** Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  có dạng  $p = a^2 + b^2 + c^2$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $a^4 + b^4 + c^4$  chia hết cho  $p$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $BE$  và  $CF$  là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $S$ , các đường thẳng  $BC$  và  $OS$  cắt nhau tại  $M$ .

1) Chứng minh rằng  $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$ .

2) Chứng minh rằng  $\triangle AEM \sim \triangle ABS$ .

3) Gọi  $N$  là giao điểm của  $AM$  và  $EF$ ,  $P$  là giao điểm của  $AS$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $NP \perp BC$ .

**Câu V.** Trong hộp có chứa 2011 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu), trong đó có 655 viên bi màu đỏ, 655 viên bi màu xanh, 656 viên bi màu tím và 45 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 178 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra, luôn có ít nhất 45 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 177 viên bi bất kì thì kết luận của bài toán còn đúng không?

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2012 – 2013

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \left( \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)$  với  $a > b > 0$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $P$ .
- 2) Biết  $a - b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Câu II.** Trên quãng đường  $AB$  dài 210km, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành đi từ  $A$  về  $B$  và một ô tô khởi hành đi từ  $B$  về  $A$ . Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến  $B$  và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến  $A$ . Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

**Câu III.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng

$$(d): y = mx - m - 2.$$

a) Chứng minh rằng khi  $m$  thay đổi  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2$

b) Tìm  $m$  để  $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  đường tròn  $(\omega)$  có tâm  $O$  tiếp xúc với các đoạn thẳng  $AB, AC$  tương ứng tại  $K, L$ . Tiếp tuyến  $(d)$  của đường tròn  $(\omega)$  tại  $E$  thuộc cung nhỏ  $KL$  cắt đường thẳng  $AL, AK$  tương ứng tại  $M, N$ . Đường thẳng  $KL$  cắt  $OM$  tại  $P$  và cắt  $ON$  tại  $Q$ .

- 1) Chứng minh  $\widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ .
- 2) Chứng minh rằng đường thẳng  $MQ, NP$  và  $OE$  cùng đi qua một điểm.
- 3) Chứng minh  $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$ .

**Câu V.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = (x - y)\sqrt{xy}$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + y$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2012 – 2013

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 + 2x} + 2\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x^2 + 4x - 4 = 0$ .

**Câu II.** 1) Cho các số  $a, b, c$  đôi một phân biệt thỏa mãn:  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2012$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $M = c^2(a+b)$ .

2) Cho 5 số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số dương trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

**Câu III.** Cho  $n$  số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  với  $n \geq 3$ . Ký hiệu  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  là số lớn nhất trong các số  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Chứng minh rằng  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|}{2n}$ .

**Câu IV.** Trong một lớp học có 36 bàn học cá nhân, được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ 1 đến 9). Sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau một học kì cô giáo chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Đối với mỗi học sinh của lớp, giả sử trước khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng thứ  $m$ , cột thứ  $n$  và sau khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng  $a_m$ , cột thứ  $a_n$ , ta gán cho bạn đó số nguyên  $(a_m + a_n) - (m + n)$ . Chứng minh tổng của 35 số nguyên gán với 35 bạn học sinh không vượt quá 11.

**Câu V.** Cho hình vuông  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  thuộc cung nhỏ  $CD$  của  $(O)$ ,  $M$  khác  $C$  và  $D$ .  $MA$  cắt  $DB, DC$  theo thứ tự tại  $X, Z$ ;  $MB$  cắt  $CA, CD$  theo thứ tự tại  $Y, T$ ;  $CX$  cắt  $DY$  tại  $K$ .

a) Chứng minh rằng:  $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$ ,  $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$  và  $\widehat{CKD} = 135^\circ$ .

b) Chứng minh rằng:  $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = 1$ .

c) Gọi  $I$  là giao điểm của  $MK$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:  $XT, YZ, OI$  cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KZT$ .

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2013 – 2014

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Cho biểu thức:  $Q = \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$  với  $a, b > 0, a \neq b$ .

Chứng minh giá trị của  $Q$  không phụ thuộc vào  $a, b$ .

2) Các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$ .

Chứng minh đẳng thức:  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$ .

**Câu II.** Cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = -mx + \frac{1}{2m^2}$  (tham số  $m \neq 0$ ).

1) Chứng minh rằng với  $m \neq 0$ ,  $(d)$  cắt  $(P)$  tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  là 2 giao điểm đó, tìm giá trị nhỏ nhất của  $M = y_1^2 + y_2^2$ .

**Câu III.** Giả sử  $a, b, c$  là các số thực,  $a \neq b$  sao cho 2 phương trình  $x^2 + ax + 1 = 0, x^2 + bx + c = 0$  có nghiệm chung và 2 phương trình  $x^2 + x + a = 0, x^2 + cx + b = 0$  có nghiệm chung. Tính  $a + b + c$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $AA_1 = BB_1 = CC_1$  cắt nhau ở  $H$ ,  $AC_1$  cắt  $AC$  tại  $D$  và  $X$  là giao điểm thứ 2 của  $BD$  và  $(O)$ .

1. Chứng minh  $DX \cdot DB = DC_1 \cdot DA_1$ .

2. Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ . Chứng minh  $DH \perp BM$ .

**Câu V.** Các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2011} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} \\ \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2012} + \sqrt{y+2013} \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $x = y = z$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2013 – 2014

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức sau:

(i):  $(a + b)(b + c)(c + a) = abc.$

(ii):  $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3.$

Chứng minh rằng  $abc = 0.$

2) Các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $ab > 2013a + 2014b.$

Chứng minh bất đẳng thức  $a + b > \left(\sqrt{2013} + \sqrt{2014}\right)^2.$

**Câu II.** Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ  $(x; y)$  thỏa mãn hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y \\ 6x^2 - 19xy + 15y^2 = 1 \end{cases}$$

**Câu III.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , ký hiệu  $S_n$  là tổng của  $n$  số nguyên tố đầu tiên ( $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3, S_3 = 2 + 3 + 5, \dots$ ). Chứng minh rằng trong dãy số  $S_1, S_2, S_3, \dots$  không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương.

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $BD$  là đường phân giác của góc  $ABC$ . Đường thẳng  $BD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $E$ . Đường tròn  $(O_1)$  đường kính  $DE$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $F$ .

1) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với  $BF$  qua đường thẳng  $BD$  đi qua trung điểm cạnh  $AC$ .

2) Biết tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và bán kính của đường tròn  $(O)$  bằng  $R$ . Hãy tính bán kính của đường tròn  $(O_1)$  bằng  $R$ .

**Câu V.** Độ dài ba cạnh của tam giác  $ABC$  là ba số nguyên tố. Chứng minh rằng diện tích của tam giác  $ABC$  không thể là số nguyên.

**Câu VI.** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  là các số nguyên dương lớn hơn bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} = 407$ . Tồn tại hay không số nguyên dương  $n$  sao cho tổng các số dư của các phép chia  $n$  cho 22 số  $a_1, a_2, \dots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$  bằng 2012.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2014 – 2015

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho các số thực dương  $a, b; a \neq b$ .

Chứng minh rằng 
$$\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

**Câu II.** Quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được  $\frac{3}{4}$  quãng đường, xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường còn lại cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

**Câu III.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng

(d):  $y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}$  ( $m$  là tham số).

- 1) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của  $m$  đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- 2) Gọi  $x_1; x_2$  là hoành độ các giao điểm (d) và (P), đặt  $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$ .

Chứng minh rằng:  $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3$ .

**Câu IV.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính  $AC = 2R$ . Gọi K, M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE ( $K \neq B; K \neq E$ ). Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

- 1) Chứng minh tứ giác AKPD nội tiếp đường tròn.
- 2) Chứng minh  $KP \perp PM$ .
- 3) Biết  $\widehat{ABD} = 60^\circ$  và  $AK = x$ . Tính BD theo R và x.

**Câu V.** Giải phương trình: 
$$\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4.$$

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2014 – 2015

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Giả sử  $a, b, c, x, y, z$  là các số thực khác 0 thỏa mãn  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$  và  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

Chứng minh rằng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Câu II.** Tìm tất cả các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$ .

**Câu III.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên  $n \geq 6$  thì số  $a_n = 1 + \frac{2.6.10 \dots (4n-2)}{(n+5)(n+6) \dots (2n)}$  là một số

chính phương.

**Câu IV.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương  $abc = 1$ .

Chứng minh rằng  $\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$ .

**Câu V.** Cho hình vuông  $ABCD$  với tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$  các điểm  $N, P$  thuộc  $BC, CD$  sao cho  $MN \parallel AP$ . Chứng minh rằng

- 1) Tam giác  $BNO$  đồng dạng với tam giác  $DOP$  và  $\widehat{NOP} = 45^\circ$ .
- 2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $NOP$  thuộc  $OC$ .
- 3) Ba đường thẳng  $BD, AN, PM$  đồng quy.

**Câu VI.** Có bao nhiêu tập hợp con  $A$  của tập hợp  $\{1; 2; 3; 4; \dots; 2014\}$  thỏa mãn điều kiện  $A$  có ít nhất 2 phần tử và nếu  $x \in A, y \in A, x > y$ , thì  $\frac{y^2}{x-y} \in A$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2015 – 2016

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$ .

1) Chứng minh  $P = \frac{1}{ab}$ .

2) Giả sử  $a, b$  thay đổi sao cho  $4a + b + \sqrt{ab} = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Câu II.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$  với  $m$  là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi  $m = 2$ .

2) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ . Giả sử  $(x_0; y_0)$  là một nghiệm của hệ.

Chứng minh đẳng thức  $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$ .

**Câu III.** Cho  $a, b$  là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình  $a(a-x)^2 + b(x-b)^2 = 0$  có nghiệm duy nhất. Chứng minh  $|a| = |b|$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$  nhọn và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Các đường phân giác trong  $BB_1, CC_1$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $I$ .

1) Chứng minh tứ giác  $AB_1IC_1$  nội tiếp.

2) Gọi  $K$  là giao điểm thứ hai (khác  $B$ ) của đường thẳng  $BC$  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BC_1I$ . Chứng minh tứ giác  $CKIB_1$  nội tiếp.

3) Chứng minh  $AK \perp B_1C_1$ .

**Câu V.** Tìm các số thực không âm  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2015 – 2016

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Cho  $a \geq 0, a \neq 1$ .

Rút gọn biểu thức  $S = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} : \left[ \frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right]$ .

2) Cho  $x, y$  thỏa mãn  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  và  $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ .

**Câu II.** Một xe tải có chiều rộng 2,4m và chiều cao 2,5m muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là  $2\sqrt{5}$  m (bỏ qua độ dày của cổng)

1) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi parabol  $(P): y = ax^2$  với  $a < 0$  là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh  $a = -1$ .

2) Hỏi xe tải có thể qua cổng được không? Tại sao?

**Câu III.** Cho 2 số nguyên  $a, b$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$ . Chứng minh  $a$  và  $b$  là hai số chính phương liên tiếp.

**Câu IV.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ).  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .  $O$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$  đồng quy tại  $H$ . Các tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $B, C$  cắt nhau tại  $S$ . Gọi  $X, Y$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $EF$  với các đường thẳng  $BS, AO$ . Chứng minh rằng:

1)  $MX \perp BF$ .

2) Hai tam giác  $SMX$  và  $DHF$  đồng dạng.

3)  $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$ .

**Câu V.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác  $ABC$  là một số nguyên.

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2016 – 2017

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right)$  với  $0 < a < 1$ .

Chứng minh rằng  $P = -1$ .

**Câu II.** Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2mx - 1$  với  $m$  là tham số.

- 1) Tìm tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  khi  $m = 1$ .
- 2) Chứng minh với mỗi giá trị của  $m$  thì  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Gọi  $y_1, y_2$  là tung độ của  $A, B$ . Tìm  $m$  sao cho  $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$ .

**Câu III.** Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120km. Vận tốc trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường AB sau bằng  $\frac{1}{2}$  vận tốc trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

**Câu IV.** Cho ba điểm  $A, M, B$  phân biệt, thẳng hàng và  $M$  nằm giữa  $A, B$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $AB$ , dựng hai tam giác đều  $AMC$  và  $BMD$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ .

- 1) Chứng minh rằng  $AMPC$  và  $BMPD$  là các tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh rằng  $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = AB$ .
- 3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác  $AMPC$  và  $BMPD$  cắt  $PA, PB$  tương ứng tại  $E, F$ . Chứng minh rằng tứ giác  $CDFE$  là hình thang.

**Câu V.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực không âm và thỏa mãn  $a + b + c = 1$ .

Chứng minh:  $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2016 – 2017

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: **150 phút**  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm **01** trang

**Câu I.** Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của  $n$ .

$$P = \left[ \sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2} \right] \sqrt{4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}}.$$

**Câu II.** 1) Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $x^8 - y^8 = 95(x^2 + y^2)$ .

2) Tìm các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $\frac{x^2 - 4}{x} + \frac{y^2 - 4}{y} + 8 = 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})$ .

**Câu III.** Cho  $S$  là tập các số nguyên dương  $n$  có dạng  $n = x^2 + 3y^2$ , trong đó  $x, y$  là các số nguyên. Chứng minh rằng:

1) Nếu  $a, b \in S$  thì  $ab \in S$ .

2) Nếu  $N \in S$  và  $N$  là số chẵn thì  $N$  chia hết cho 4 và  $\frac{N}{4} \in S$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $AB < AC$ . Kẻ đường cao  $AH$  và đường tròn  $(O)$  đường kính  $AH$  cắt các cạnh  $AB, AC$  tương ứng tại  $D$  và  $E$ . Đường thẳng  $DE$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $S$ .

1) Chứng minh rằng tứ giác  $BDEC$  nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh rằng  $SB \cdot SC = SH^2$ .

3) Đường thẳng  $SO$  cắt  $AB, AC$  tương ứng tại  $M, N$ . Đường thẳng  $DE$  cắt  $HM$  và  $HN$  tương ứng tại  $P, Q$ . Chứng minh rằng  $BP, CQ, AH$  đồng quy.

**Câu V.** Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác cân.

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2017 – 2018

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right)$  với  $a, b > 0, a \neq b$

và  $a+b \neq a^2$ .

- 1) Chứng minh rằng  $P = a - b$ .
- 2) Tìm các số  $a$  và  $b$  biết  $P = 1$  và  $a^3 - b^3 = 7$ .

**Câu II.** Giả sử  $x, y$  là hai số thực phân biệt thỏa mãn  $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$ .

Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$ .

**Câu III.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = -2ax - 4a$  (với  $a$  là tham số).

- 1) Tìm tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  khi  $a = -\frac{1}{2}$ .
- 2) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để đường thẳng  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| = 3$ .

**Câu IV.** Anh nam đi xe đạp từ A đến C. Trên quãng đường AB ban đầu (B nằm giữa A và C). Anh Nam đi với vận tốc không đổi  $a$ (km/h) và thời gian đi từ A đến B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm  $t$  (tính bằng giờ) kể từ B là  $v = -8t + a$  (km/h). Quãng đường đi được từ B đến thời điểm  $t$  đó là  $S = -4t^2 + at$ . Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16km.

**Câu V.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $R$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại các điểm  $B, C$  cắt nhau tại điểm  $P$ . Gọi  $D, E$  tương ứng là chân đường các đường vuông góc kẻ từ  $P$  xuống các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ .

- 1) Chứng minh rằng  $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$ .
- 2) Giả sử  $B, C$  cố định và  $A$  chạy trên  $(O)$  sao cho tam giác  $ABC$  luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng  $DE$  luôn đi qua một điểm cố định.
- 3) Khi tam giác  $ABC$  đều. Hãy tính diện tích tam giác  $ADE$  theo  $R$ .

**Câu VI.** Các số thực không âm  $x_1; x_2; \dots; x_9$  thỏa mãn hệ điều kiện  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + \dots + 9x_9 = 18 \end{cases}$

Chứng minh rằng  $1.19x_1 + 2.18x_2 + 3.17x_3 + \dots + 9.11x_9 \geq 270$ .

HẾT

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI**
**KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2017 – 2018**
**Môn: TOÁN (VÒNG 2)**
**Thời gian làm bài: 150 phút**  
*(Không kể thời gian giao đề)*
**ĐỀ CHÍNH THỨC**

 Đề thi gồm **01** trang

**Câu I.** Cho các số dương  $a, b, c, d$ . Chứng minh rằng trong 4 số  $a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ;  $b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ;  $c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}$ ;  $d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

**Câu II.** Giải phương trình  $\sqrt{(x^2 + 2x)^2 + 4(x+1)^2} - \sqrt{x^2 + (x+1)^2 + (x^2 + x)^2} = 2017$ .

**Câu III.** 1) Tìm tất cả các số nguyên dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $a^2 = b^3$ ;  $c^3 = d^4$ ;  $a = d + 98$ .

2) Tìm tất cả các số thực  $x$  sao cho trong 4 số  $x - \sqrt{2}$ ;  $x^2 + 2\sqrt{2}$ ;  $x - \frac{1}{x}$ ;  $x + \frac{1}{x}$  có đúng một số không phải là số nguyên.

**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $R$  và một điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  tới đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy điểm  $C$  ( $C$  khác  $A, C$  khác  $B$ ). Gọi  $I, K$  là trung điểm  $MA, MC$ . Đường thẳng  $KA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $D$ .

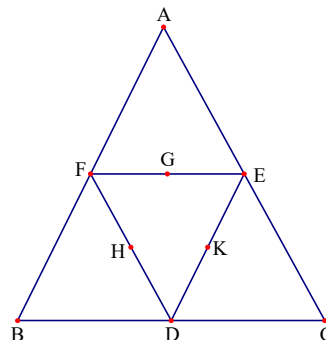
1) Chứng minh  $KO^2 - KM^2 = R^2$ .

2) Chứng minh tứ giác  $BCDM$  là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi  $E$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $MD$  với đường tròn  $(O)$  và  $N$  là trung điểm  $KE$ , đường thẳng  $KE$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $F$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $I, A, N, F$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Câu V.**

Xét hình bên: Ta viết các số  $1, 2, 3, 4, \dots, 9$  vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ bên sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng ba số trên một cạnh của tam giác bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm ( $A; B; C; D; E; F; G; H; K$ ) của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?


**HẾT**

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1} + (x-1)\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$  với  $x > 1$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $P$ .
- 2) Tìm  $x$  để  $P = x - 1$ .

**Câu II.** Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2015, nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của thị trường tiêu thụ nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2016 và 2017 đều giảm. Cụ thể: số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016 giảm  $x\%$  so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015, số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 cũng giảm  $x\%$  so với số lượng sản xuất được năm 2016. Biết rằng số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015. Tìm  $x$ .

**Câu III.** Cho phương trình  $x^3 - x - 1 = 0$ . Giả sử  $x_0$  là một nghiệm của phương trình đã cho.

- 1) Chứng minh  $x_0 > 0$ .

- 2) Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{x_0^2 - 1}{x_0^3} \sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2}$ .

**Câu IV.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $BC = a$ ,  $AB = b$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$ ,  $CD$ . Qua điểm  $M$  dựng đường thẳng cắt đường chéo  $AC$  của hình chữ nhật  $ABCD$  tại điểm  $P$  và cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $Q$  sao cho  $B$  nằm giữa  $C$  và  $Q$ .

- 1) Khi  $MP \perp AC$ , hãy:
  - a) Tính  $PQ$  theo  $a$  và  $b$ .
  - b) Chứng minh  $a \cdot BP = b \cdot PN$ .
- 2) Chứng minh  $\widehat{MNP} = \widehat{MNQ}$  (không nhất thiết  $MP$  và  $AC$  vuông góc với nhau).

**Câu V.** Các số nguyên  $x, x_1, x_2, \dots, x_9$  thỏa mãn:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_9) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_9) = x.$$

Tính  $P = x \cdot x_2 \cdot x_2 \dots x_9$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho các số thực  $x, y$  không âm thỏa mãn điều kiện  $(x+1)(y+1) = 2$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + 2 + xy$ .

**Câu II.** Cho các số thực không âm  $x, y, z$  thay đổi thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = x + y + z$ .

**Câu III.** 1) Cho  $a, b$  là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức  $M = \frac{(a+b)^2}{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}$ .

Chứng minh rằng  $M$  không thể nhận giá trị nguyên.

2) Cho  $a, b$  là hai số nguyên dương, đặt  $A = (a+b)^2 - 2a^2, B = (a+b)^2 - 2b^2$ .

Chứng minh rằng  $A$  và  $B$  không đồng thời là số chính phương.

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn,  $AB < AC$  và nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BOC$  cắt các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự tại  $D$  và  $E$ . Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BOC$  lấy điểm  $P$  sao cho  $AP$  vuông góc với  $PC$ . Đường thẳng qua  $B$  song song với  $OP$  cắt  $PC$  tại  $Q$ . Chứng minh rằng

1)  $PB = PQ$ .

2)  $O$  là trực tâm của tam giác  $ADE$ .

3)  $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$ .

**Câu V.** Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen thuộc nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi  $S$  là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

1) Xây dựng ví dụ để  $S = 870$ .

2) Chứng minh rằng  $S \leq 870$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Cho  $a$  là số thực khác 1 và  $-1$ . Rút gọn biểu thức  $P = \frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + 3} \div \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1}$ .

b) Cho các số thực  $x, y, a$  thoả mãn  $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a$ .

Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ .

**Câu II.** Trên quãng đường dài 20km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tốc của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quãng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

**Câu III.** Cho các đa thức  $P(x) = x^2 + ax + b$ ,  $Q(x) = x^2 + cx + d$  với  $a, b, c, d$  là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của  $a, b$  để 1 và  $a$  là nghiệm của phương trình  $P(x) = 0$ .

b) Giả sử phương trình  $P(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và phương trình  $Q(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_3, x_4$  sao cho  $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$ .

Chứng minh rằng  $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$ .

**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$ , bán kính  $R$ , ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn. Gọi  $AA_1, BB_1, CC_1$  là các đường cao của tam giác  $ABC$  ( $A_1$  thuộc  $BC, B_1$  thuộc  $CA, C_1$  thuộc  $AB$ ). Đường thẳng  $A_1C_1$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $A'$  và  $C'$  ( $A_1$  nằm giữa  $A'$  và  $C_1$ ). Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A'$  và  $C'$  cắt nhau tại  $B'$ .

a) Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $HC_1 \cdot A_1C = A_1C_1 \cdot HB_1$ .

b) Chứng minh rằng ba điểm  $B, B', O$  thẳng hàng.

c) Khi tam giác  $ABC$  là tam giác đều, hãy tính  $A'C'$  theo  $R$ .

**Câu V.** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46.$$

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: **150 phút**  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm **01** trang

**Câu I.** Cho hai số thực phân biệt  $a$  và  $b$  thỏa mãn điều kiện  $a^3 + b^3 = a^2b^2(ab - 3)$ .

Tính giá trị của biểu thức  $T = a + b - ab$ .

**Câu II.** Cho các đa thức  $P(x) = m_1x^2 + n_1x + k_1$ ,  $Q(x) = m_2x^2 + n_2x + k_2$ ,  $R(x) = m_3x^2 + n_3x + k_3$  với  $m_i, n_i, k_i$  là các số thực và  $m_i > 0, i = 1, 2, 3$ . Giả sử phương trình  $P(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $a_1, a_2$ ; phương trình  $Q(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $b_1, b_2$ ; phương trình  $R(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $c_1, c_2$  thỏa mãn

$$P(c_1) + Q(c_1) = P(c_2) + Q(c_2),$$

$$P(b_1) + R(b_1) = P(b_2) + R(b_2),$$

$$Q(a_1) + R(a_1) = Q(a_2) + R(a_2).$$

Chứng minh rằng  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$ .

**Câu III.** a) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2y^2 - 4x^2y + y^3 + 4x^2 - 3y^2 + 1 = 0$ .

b) Cho ba số nguyên dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 14. Chứng minh rằng  $abc$  cũng chia hết cho 14.

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $AB > AC$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là chân đường cao của tam giác  $ABC$  hạ từ  $A, B$ . Gọi  $F$  là chân đường vuông góc hạ từ  $B$  lên đường thẳng  $AO$ .

a) Chứng minh rằng  $B, D, E, F$  là bốn đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng  $EF$  đi qua trung điểm của  $BC$ .

c) Gọi  $P$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $AO$  và đường tròn  $(O)$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $EF$  và  $CP$ . Tính số đo góc  $BMN$ .

**Câu V.** Cho tập hợp  $X$  thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con  $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$  của  $X$  sao cho mỗi tập con  $A_i, A_2, \dots, A_{2019}$  có đúng ba phần tử và hai tập  $A_i, A_j$  đều có đúng một phần tử chung với mọi  $1 \leq i < j \leq 2019$ . Chứng minh rằng

a) Tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$  sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

b) Số phần tử của  $X$  phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0, x \neq 4$  và  $x \neq 9$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm tất cả các số thực  $m$  sao cho bất đẳng thức  $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$  đúng với mọi  $x > 9$ .

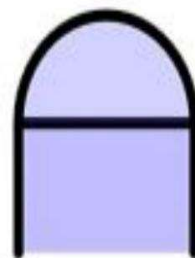
**Câu II.** a) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng  $(d_1): y = 5x + 9$  và

$(d_2): y = (m^2 - 4)x + 3m$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  song song với nhau.

b) Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình trên có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$ .

c) Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng vận tốc của mỗi ô tô là không đổi trên cả quãng đường AB.

**Câu III.** Bác An muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài các khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình vẽ bên dưới, bỏ qua độ rộng của khuôn gỗ) là 8 m. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất.



**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Qua A, kẻ tiếp tuyến AB đến đường tròn  $(O)$  (B là tiếp điểm). Kẻ đường kính BC của đường tròn  $(O)$ . Trên đoạn CO, lấy điểm I khác C và D. Đường thẳng IA cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn DE.

a) Chứng minh rằng  $AB \cdot BE = BD \cdot AE$ .

b) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm K. Chứng minh rằng  $HK \parallel CD$ .

**Câu V.** Tìm tất cả các số thực  $x, y, z$  với  $0 < x, y, z \leq 1$  thỏa mãn

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn các điều kiện sau: 
$$\begin{cases} 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{6} \\ x.y.z > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .

**Câu II.** Xét phương trình bậc 2:  $ax^2 + bx + c = 0(1)$ , trong đó  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Biết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn: phương trình (1) có nghiệm; số  $\overline{a2020b}$  chia hết cho 12; số  $c^3 + 3$  chia hết cho  $c + 3$ . Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng  $a + b + c$ .

**Câu III.** Tìm số nguyên  $a$  bé nhất sao cho:  $x^4 + 2x^2 - 4x + a \geq 0$  với mọi số thực  $x$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $AB > BC$ . Một đường tròn đi qua hai đỉnh  $A, C$  của tam giác  $ABC$  lần lượt cắt các cạnh  $AB, BC$  tại hai điểm  $K, N$  ( $K, N$  khác các đỉnh của tam giác  $ABC$ ). Giả sử đường tròn  $(O)$  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BKN$  cắt nhau tại giao điểm thứ hai là  $M$  ( $M$  khác  $B$ ). Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng  $BM, KN, AC$  đồng quy tại điểm  $P$

b) Tứ giác  $MNCP$  nội tiếp

c)  $BM^2 - PM^2 = BK.BA - PC.PA$

**Câu V.** Cho hai số  $A, B$  cùng có 2020 chữ số. Biết rằng: số  $A$  có đúng 1945 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 15 chữ số ngoài cùng về bên phải; số  $B$  có đúng 1954 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 24 chữ số ngoài cùng về bên phải. Chứng minh rằng ƯCLN  $(A, B)$  là một số có không quá 1954 chữ số.

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2021 – 2022

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

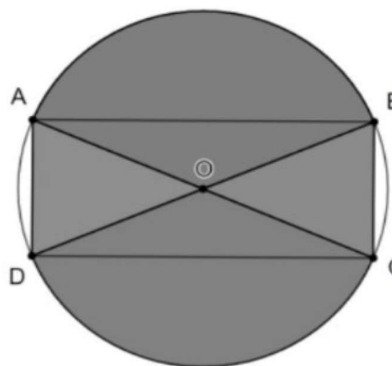
**Câu I.** Cho  $P = \left( \frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} \right) : \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$  với  $(a \geq 0; b \geq 0; a \neq b)$ .

- a) Rút gọn  $P$ .  
b) Chứng minh rằng  $P \geq 0$ .

**Câu II.** a) Chứng minh rằng: Với mọi  $m$ , ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0 \quad (1); \quad x^2 - mx + 4m - 11 = 0 \quad (2)$$

- b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm  $O$ , bán kính bằng 1,6m. Giả sử hình chữ nhật  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính bằng 1,6m sao cho  $\widehat{BOC} = 45^\circ$  (Hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần tô đậm là 150 nghìn đồng/m<sup>2</sup> và phần còn lại là 200 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho  $\pi = 3,14$ .



**Câu III.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định sao cho  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Gọi  $(d)$  là đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ . Lấy điểm  $M$  tùy ý trên  $(d)$ . Đường thẳng đi qua  $B$  vuông góc với  $AM$  cắt các đường thẳng  $AM, (d)$  lần lượt tại các điểm  $I$  và  $N$ . Đường thẳng  $MB$  cắt  $AN$  tại  $K$ .

- a) Chứng minh rằng tứ giác  $MIKN$  nội tiếp.  
b) Chứng minh rằng  $CM \cdot CN = AC \cdot BC$ .  
c) Gọi  $O$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$ . Vẽ hình bình hành  $MBNE$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BE$ . Chứng minh rằng  $OH$  vuông góc với đường thẳng  $(d)$  và

$$OH = \frac{1}{2}AB.$$

**Câu IV.** a) Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 57 & (1) \\ |x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} = 1 & (2) \end{cases}$$

- b) Cho  $a$  và  $b$  là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  cũng là số hữu tỉ thì  $a = b = 0$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2021 – 2022

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

- a) Tìm một đa thức bậc hai  $Q(x)$  với hệ số nguyên sao cho  $\alpha$  là nghiệm của  $Q(x)$ .  
b) Cho đa thức  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ . Tính giá trị của  $P(\alpha)$ .

**Câu II.** Cho  $A, B$  là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Giả sử  $C$  là điểm cố định trên tia đối của tia  $BA$ . Một cát tuyến thay đổi qua  $C$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  và  $E$  ( $D$  nằm giữa  $C, E$ ). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $BCD$  và  $ACE$  cắt nhau tại giao điểm thứ hai  $M$ . Biết rằng bốn điểm  $O, B, M, E$  tạo thành tứ giác  $OBME$ . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác  $OBME$  nội tiếp.  
b)  $CD \cdot CE = CO^2 - R^2$ .  
c)  $M$  luôn chuyển động trên một đường tròn cố định.

**Câu III.** Tìm tất cả các số nguyên dương  $N$  sao cho  $N$  có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng  $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$  với  $x, y$  là hai số nguyên dương.

**Câu IV.** Cho  $a, b, c$  là 3 số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được ở dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai  $ax^2 - bx + c = 0$  (1) có hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho  $A = \left( \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{1}{x - 1}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tìm tất cả các số nguyên  $x$  sao cho  $\frac{1}{A}$  là số nguyên dương.

**Câu II.** a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng  $(d): y = ax + b$  biết đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(2, -1)$  và song song với đường thẳng  $y = -3x + 1$ .

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

**Câu III.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $D$  thuộc cung nhỏ  $AB$  ( $D$  khác  $A$  và  $B$ ). Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại các điểm  $B$  và  $C$  cắt đường thẳng  $AD$  theo thứ tự tại  $E$  và  $G$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $CE$  và  $BG$ .

a) Chứng minh rằng hai tam giác  $EBC$  và  $BCG$  đồng dạng.

b) Tính số đo góc  $BIC$ . Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác  $BIDE$  nội tiếp.

c) Gọi  $K$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DI$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $BK^2 = KI \cdot KD$ .

**Câu IV.** a) Tìm tất cả các số thực  $x$  thỏa mãn  $a = x + \sqrt{2}$  và  $b = x^3 + 5\sqrt{2}$  là hai số hữu tỉ.

b) Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_{2022}, b_1, b_2, \dots, b_{2022}$  thỏa mãn mỗi phương trình  $x^2 + a_i x + b_i = 0$  đều có hai nghiệm thực phân biệt  $x_0$  và  $x_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 2022$ .

Chứng minh rằng số thực  $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}}{2022}$  là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 + \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}}{2022} \right) x + \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}}{2022} \right) = 0.$$

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức  $P = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ .

b) Cho đa thức  $P(x) = ax^2 + bx + c$  với  $a \neq 0$ . Chứng minh rằng, nếu đa thức  $P(x)$  nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên  $x$  thì  $2a, a+b, c$  đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng nếu ba số  $2a, a+b, c$  là những số nguyên thì  $P(x)$  cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên  $x$ .

**Câu II.** Cho tam giác đều  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Cung nhỏ  $OB$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OBC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $E$ . Tia  $BE$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $F$ .

a) Chứng minh rằng tia  $EO$  là tia phân giác của góc  $CEF$ .

b) Chứng minh rằng tứ giác  $ABOF$  nội tiếp.

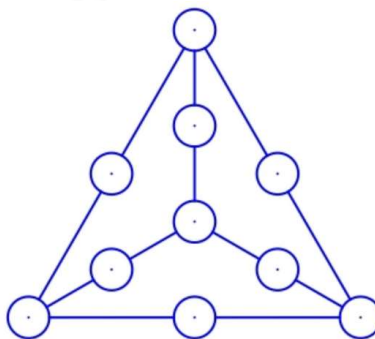
c) Gọi  $D$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $CE$  và đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, F, D$  thẳng hàng.

**Câu III.** Cho  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $ab = cd$ . Chứng minh rằng số

$N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$  là hợp số.

**Câu IV.**

Ta viết mười số  $0, 1, 2, \dots, 9$  vào mười ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng một lần. Sau đó, ta tính tổng của ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được sáu tổng. Có hay không một cách viết mười số như thế sao cho sáu tổng nhận được là bằng nhau?



**Câu V.** a) Trong mặt phẳng cho năm điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm đã cho.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x > 0$ .

b) Một khay nước có nhiệt độ  $125^\circ\text{F}$  khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ khay nước chỉ còn là  $64^\circ\text{F}$ ?

**Câu II.** a) Cho phương trình:  $x^2 - (2m - 1)x - (m^2 + 1) = 0$ . (1)

Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$ , phương trình (1) luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào  $m$ .

b) Cho Parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) đi qua  $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ . Tìm tọa độ điểm M trên Parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

**Câu III.** Cho hình bình hành ABCD có  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ ,  $BC = 2AB$ . Dựng đường tròn tâm O đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh:

- Tam giác ABD là tam giác vuông.
- Tứ giác OBEH là tứ giác nội tiếp.
- SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Câu IV.** Có hay không các số nguyên a, b sao cho  $(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$ ?

**Câu V.** Trên bảng ta viết đa thức:  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

Ta viết đa thức mới:  $P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$  rồi xoá đa thức  $P(x)$ .

Ta viết đa thức mới:  $P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2}$  rồi xoá đa thức  $P_1(x)$ .

Ta tiếp tục làm thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.

b) Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  là nghiệm của hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$$

**Câu II.** a) Cho  $a, b$  là các số thực không âm,  $c$  là số thực dương thỏa mãn đẳng thức:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$ .

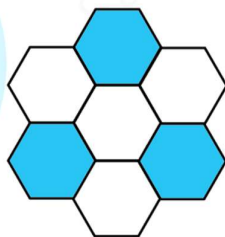
b) Tìm các số nguyên dương  $a$  và  $b$  sao cho  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}}$  là số hữu tỉ.

**Câu III.** Cho tam giác  $ABC$ . Đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  lần lượt tiếp xúc các cạnh  $BC, CA, AB$  tại các điểm  $D, E, G$ . Hai đường thẳng  $DE, DG$  lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc  $BAC$  tại  $M, N$ . Hai đường thẳng  $MG, NE$  cắt nhau tại điểm  $P$ . Chứng minh:

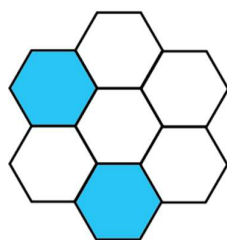
a)  $EG \parallel MN$ .

b) Điểm  $P$  nằm trên đường tròn  $(I)$ .

**Câu IV.** Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng 2 màu trắng, đen như Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách trên bao nhiêu lần đi nữa cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.



Hình 1



Hình 2

**Câu V.** Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương  $n > 10^{2023}$  sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn  $n$  là một số nguyên tố cùng nhau với  $n$ .

HẾT



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

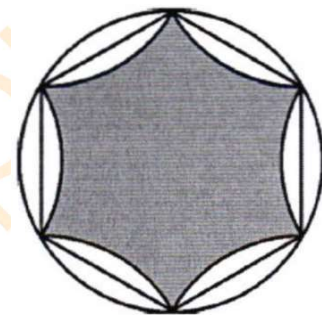
Đề thi gồm 01 trang

**Bài 1 (3,0 điểm)**

a) Cho  $A = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ . Tìm giá trị của  $A^3$ .

b) Cho  $b, c$  là hai số thực thỏa mãn  $24b + c = -523$ . Biết phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Tìm hai nghiệm đó.

**Bài 2 (1,5 điểm).** Bạn Hạnh làm một ngôi sao 6 cánh có dạng hình phẳng tô đậm như hình bên theo cách như sau: Trên tờ giấy, bạn vẽ đường tròn bán kính 2 cm, ngoại tiếp một lục giác đều. Sau đó, mỗi cung tròn nhỏ căng dây cung là một cạnh của lục giác đều được lấy đối xứng qua cạnh đó. Hình phẳng tô đậm giới hạn bởi 6 cung tròn vừa được vẽ tạo thành ngôi sao bạn định làm. Em hãy giúp bạn Hạnh tìm diện tích ngôi sao 6 cánh đó (lấy giá trị của  $\pi$  là 3,14 và giá trị của  $\sqrt{3}$  là 1,73).



**Bài 3 (3,0 điểm).** Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho  $DB = 2DC$ . Đường thẳng qua D song song với AC cắt cạnh AB tại E. Đường thẳng qua E song song với BC cắt cạnh AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AD tại M (M khác A).

a) Chứng minh tứ giác BDME và tứ giác CDMF là hai tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh  $MB = 2MA$ .

c) Chứng minh  $\widehat{BMD} = 2\widehat{CMD}$ .

**Bài 4 (1,5 điểm).** Tìm số thực  $x$  sao cho các số  $x + \sqrt{2024}$  và  $\frac{185}{x} - \sqrt{2024}$  đều là các số nguyên.

**Bài 5 (1,0 điểm).** Cho 45 số  $a_1, a_2, \dots, a_{45}$ , mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị là 0; 2; 3. Biết rằng

$$(a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_{45} - 2)^2 = 65 \text{ và } (a_1 - 3)^3 + (a_2 - 3)^3 + \dots + (a_{45} - 3)^3 = -280.$$

Hỏi trong 45 số nói trên có bao nhiêu số bằng 0?

HẾT





SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

**Bài 1 (3,0 điểm).** a) Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn các điều kiện sau:  $|a| < 2024, |b| < 2024$  và  $\sqrt{a+2024} + \sqrt{2025-a} - \sqrt{2024-a} = \sqrt{b+2024} + \sqrt{2025-b} - \sqrt{2024-b}$ .

Tính giá trị của biểu thức  $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}$ .

b) Tồn tại hay không các số hữu tỉ dương  $a, b$  sao cho  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}}$  ?

**Bài 2 (2,0 điểm).** Giả sử ta có quy tắc  $*$  mà với mỗi cặp số nguyên dương  $(a; b)$ , ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu là  $a*b$ , sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

- $a*a = a$  với mọi số nguyên dương  $a$ ;
- $a*b = b*a$  với mọi số nguyên dương  $a$  và  $b$ ;
- $a*b = (a-b)*b$  với mọi số nguyên dương  $a$  và  $b$  mà  $a > b$ .

a) Tính giá trị của  $16*2024$ .

b) Hãy chỉ ra một quy tắc  $*$  thỏa mãn ba điều kiện trên.

**Bài 3 (3,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O; R)$  và dây cung  $BC$  cố định không đi qua tâm  $O$ . Điểm  $A$  di động trên  $(O; R)$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn và  $AB \neq AC$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại điểm  $H$ . Đường thẳng  $EF$  cắt  $(O; R)$  tại hai điểm  $P$  và  $Q$  (điểm  $F$  nằm giữa hai điểm  $P$  và  $E$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh:

a)  $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$ .

b) Bốn điểm  $P, Q, M, D$  cùng thuộc một đường tròn  $(\omega)$ .

c) Tâm  $I$  của đường tròn  $(\omega)$  chạy trên một đường tròn cố định.

**Bài 4 (1,0 điểm).** Với  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta đặt  $f(n)$  là tổng các chữ số của số  $3n^2 + n + 1$  (Ví dụ: với  $n = 3$  thì  $3n^2 + n + 1 = 31$  và  $f(3) = 4$ ). Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của  $f(n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

**Bài 5 (1,0 điểm).** Cho bảng vuông kích thước  $8 \times 8$  được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn ba điều kiện sau:

- Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;
- Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;
- Mọi hình vuông gồm 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng  $k$  domino màu đen.

HẾT

# B. PHẦN ĐÁP ÁN



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

## KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2008 – 2009

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút

(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{a+\sqrt{ab}} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$ .

Với  $a > 0$ ;  $b > 0$  và  $a \neq b$ .

1) Rút gọn P.

2) Tìm a, b sao cho  $b = (a+1)^2$  và  $P = -1$ .**Lời giải**

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{(a+b)\sqrt{ab} + b\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + a\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{(a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab} + ab + b\sqrt{a}) + a\sqrt{ab} - ab}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}(a+b)} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

$$P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

Nếu  $a > b > 0$  thì  $P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} = 0$

Nếu  $0 < a < b$  thì  $P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

2. Khi  $P = -1$  thì  $a < b$ 

$$P = \sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{a}-|a+1| = -1 \Leftrightarrow \sqrt{a}(1-\sqrt{a}) = 0$$

$$\forall i: \sqrt{a} > 0 \Rightarrow a = 1; b = 4$$

**Câu II.** Cho phương trình  $x^2 + (m^2 + 1)x + m - 2 = 0$  với  $m$  là tham số.1) Chứng minh rằng với mọi  $m$  phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

2) Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình.

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2}$ .

### Lời giải

1. Tính  $\Delta = (m^2 + 1)^2 - 4(m - 2) = m^4 + 2m^2 + 1 - 4m + 8 = (m^2 - 1)^2 + (2m - 1)^2 + 7 > 0$  với  $\forall m$   
 Vì  $\Delta > 0$  với  $\forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

2. Vì  $\Delta > 0$  với  $\forall m$  theo vi-ét ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m^2 + 1) \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Từ GT ta có

$$\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2} \Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) - x_1^2 x_2^2 = 55$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - (x_1 + x_2) - x_1^2 x_2^2 = 55$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 + 1)^2 - 4(m - 2) + (m^2 + 1) - (m - 2)^2 = 55$$

$$\Leftrightarrow 2m^4 + 4m^2 + 2 - 4m + 8 + m^2 + 1 - m^2 + 4m - 4 = 55$$

$$\Leftrightarrow 2m^4 + 4m^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 4)(m^2 + 6) = 0$$

Vì  $m^2 + 6 > 0$  với mọi  $m$  nên  $m^2 = 4$  suy ra  $m = 2$  (Loại).

Vậy  $m = -2$ .

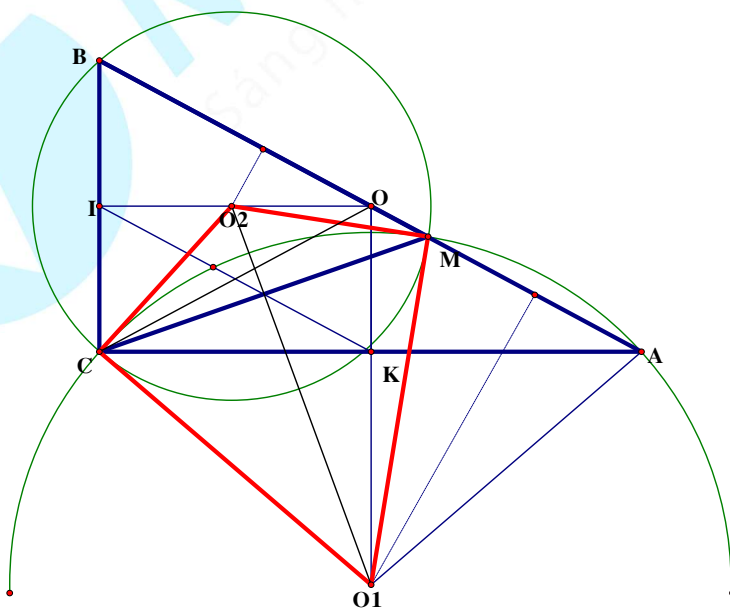
**Câu III.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ .  $M$  là điểm bất kỳ trên  $AB$ . Gọi  $O, O_1, O_2$  là tâm các đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC, \triangle MAC, \triangle MBC$ .

1) Chứng minh: 4 điểm  $O_1, M, O_2, C$  cùng thuộc đường tròn  $(C)$ .

2) Chứng minh:  $O$  cũng thuộc  $(C)$ .

3) Tìm vị trí  $M$  để bán kính  $(C)$  nhỏ nhất.

### Lời giải



1) Ta có theo tính chất quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì

$$\widehat{CO_2M} = \widehat{CBA} = \widehat{CO_1M} = 2\widehat{CAB} \text{ nên } \widehat{CO_2M} + \widehat{CO_1M} = 2\widehat{CBA} + 2\widehat{CAB} = 180^\circ.$$

Vậy 4 điểm C, O<sub>1</sub>, M, O<sub>2</sub> cùng thuộc đường tròn (C).

2) Ta có  $\widehat{COM}$  là góc ngoài của tam giác cân CBO nên  $\widehat{COM} = \widehat{CBO} + \widehat{OCB} = 2\widehat{CBO} = \widehat{CO_2M}$  nên O cũng thuộc đường tròn (C).

3) Ta có  $\widehat{O_2OO_1} = 90^\circ$  nên  $\widehat{O_2CO_1} = 90^\circ$  nên O<sub>1</sub>O<sub>2</sub> là đường kính của đường tròn (C) để bán kính đường tròn (C) nhỏ nhất thì O<sub>1</sub>O<sub>2</sub> nhỏ nhất gọi I, K là trung điểm BC, CA ta có tam giác O<sub>2</sub>CO<sub>1</sub>

$$\text{đồng dạng với tam giác } ICK \text{ (g.g) nên } \frac{O_2O_1}{IK} = \frac{O_2C}{IC} \geq 1 \Rightarrow O_1O_2 \geq IK = \frac{AB}{2}$$

$$\min(O_1O_2) = IK = \frac{AB}{2} \text{ khi } O_2 \equiv I; O_1 \equiv K; \text{ khi đó M trùng với chân đường cao kẻ từ C tới AB.}$$

**Câu IV.** Cho các số thực a, b, c, d thoả mãn đồng thời các điều kiện

$$(i): ac - a - c = b^2 - 2b.$$

$$(ii): bd - b - d = c^2 - 2c.$$

$$(iii): b, c \text{ khác } 1.$$

Chứng minh đẳng thức:  $ad + b + c = bc + a + d.$

**Lời giải**

$$ac - a - c = b^2 - 2b \Leftrightarrow ac - a - c + 1 = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow (a-1)(c-1) = (b-1)^2. \quad (1)$$

$$bd - b - d = c^2 - 2c \Leftrightarrow bd - b - d + 1 = c^2 - 2c + 1 \Leftrightarrow (c-1)^2 = (b-1)(d-1). \quad (2)$$

Vì b - 1, c - 1 khác 0 nên lấy (1) chia (2) ta được

$$\frac{a-1}{c-1} = \frac{b-1}{d-1} \Leftrightarrow (a-1)(d-1) = (c-1)(b-1)$$

$$\Leftrightarrow ad - a - d + 1 = bc - b - c + 1 \Leftrightarrow ad + b + c = bc + a + d; \text{ (dpcm)}$$

**Câu V.** Cho các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau và thoả mãn  $(z+x)(z+y) = 1$ . Chứng

$$\text{minh bất đẳng thức sau } \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} \geq 4.$$

**Lời giải**

$$\text{Từ GT ta có } \frac{1}{(z+x)^2} = (z+y)^2; \frac{1}{(z+y)^2} = (z+x)^2$$

$$VT = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} = \frac{1}{(x-y)^2} + (z+y)^2 + (z+x)^2$$

$$VT = \frac{1}{(x-y)^2} + [(z+y) - (z+x)] + 2(z+y)(z+x) = \frac{1}{(x-y)^2} + (x-y)^2 + 2$$

Áp dụng BĐT  $A + B \geq 2\sqrt{AB}$  ta có

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} = \frac{1}{(x-y)^2} + (x-y)^2 + 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} \cdot (x-y)^2} + 2 = 4$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} \geq 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x-y = \pm 1 \\ (z+y)(z+x) = 1 \end{cases}$$

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

## KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2008 – 2009

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho ba số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $b \neq c, \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}, a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2$ .

Chứng minh đẳng thức  $\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$ .

**Lời giải**

$$a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \Leftrightarrow a + b = a + b + c + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow c = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab}$$

Ta có  $\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{a + a - 2\sqrt{ac} + c}{b + b - 2\sqrt{bc} + c} (*)$

Thay  $c = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab}$  vào (\*)

$$\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{a + a - 2\sqrt{ac} + c}{b + b - 2\sqrt{bc} + c} = \frac{2a + 2b - 2b + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac}}{2a + 2b - 2a + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc}}$$

$$\text{Ta có } = \frac{(a + b) - b + \sqrt{bc} - \sqrt{ab}}{(a + b) - a + \sqrt{ac} - \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 - \sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{c} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}; (dpcm)$$

**Câu II.** 1) Với mỗi số dương  $a$  thỏa mãn  $a^3 = 6(a + 1)$ .

Chứng minh phương trình sau vô nghiệm:  $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ .

2) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  và  $b$  sao cho  $2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a + 1)(b + 1)(ab + 1)$ .

**Lời giải**

1) Để phương trình vô nghiệm thì  $\Delta < 0$ .

Ta có  $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 6) = 24 - 3a^2$ .

Từ giả thiết ta có  $a^2 = \frac{6(a+1)}{a}$  thay vào  $\Delta = 24 - 3a^2 = \frac{24a - 18a - 18}{a} = 6 - \frac{18}{a} (*)$

Ta chứng minh  $0 < a < 3$  từ giả thiết

$$a^3 - 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a^2 - 9a + 3a - 9 = -3$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)(a^2 + 3a + 3) = -3$$

Ta có  $a^2 + 3a + 3 > 0$  với mọi  $a$  nên  $a - 3 < 0$  suy ra  $a < 3$  nên  $\frac{18}{a} > \frac{18}{6} = 3$ .

Kết hợp với (\*) ta có  $\Delta = 6 - \frac{18}{a} < 0$ .



Suy ra phương trình  $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$  vô nghiệm

2) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpky cho 2 dãy mỗi dãy 2

Với  $(a;1)$  và  $(1;1)$  ta có  $2(a^2 + 1) \geq (a+1)^2$ . Dấu "=" xảy ra khi  $a = 1$ .

Với  $(b;1)$  và  $(1;1)$  ta có  $2(b^2 + 1) \geq (b+1)^2$ . Dấu "=" xảy ra khi  $b = 1$ .

Với  $(a;1)$  và  $(b;1)$  ta có  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (ab+1)^2$ . Dấu "=" xảy ra khi  $a = b = 1$ .

Suy ra  $4(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a+1)^2(b+1)^2(ab+1)^2 \Leftrightarrow 2(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a+1)(b+1)(ab+1)$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b = 1$ .

**Câu III.** Ba số nguyên  $a, b, c$  đôi một khác nhau và thoả mãn đồng thời ba điều kiện

(i):  $a$  là ước của  $b + c + bc$ .

(ii):  $b$  là ước của  $a + c + ac$ .

(iii):  $c$  là ước của  $a + b + ab$ .

1) Hãy chỉ ra bộ số  $(a; b; c)$  thoả mãn các điều kiện trên.

2) Chứng minh rằng  $a, b, c$  không đồng thời là số nguyên tố.

**Lời giải**

1) Bộ số  $(a; b; c) = (1; 3; 7)$ .

2) Giả sử  $a, b, c$  là số nguyên tố.

Từ giả thiết, ta có  $(b + c + bc) + a(1 + b + c) = (a + b + c + ab + bc + ac) : a$ ;

$$(a + c + ac) + b(1 + a + c) = (a + b + c + ab + bc + ac) : b;$$

$$(a + b + ab) + c(1 + a + b) = (a + b + c + ab + bc + ac) : c$$

Suy ra  $(a + b + c + ab + ac + bc)$  chia hết cho  $a, b, c$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (a+1)(b+1) + (a+1)(c+1) + (c+1)(b+1) &= ab + a + b + 1 + ac + a + c + 1 + bc + c + b + 1 \\ &= (2a + 2b + 2c + ab + bc + ac) + 3 \equiv 3 \pmod{(a, b, c)}. \end{aligned}$$

Mà  $(b+1)(c+1) = b + c + bc + 1 \equiv 1 \pmod{a}$  nên

$$(a+1)(b+1) + (a+1)(c+1) = (a+1)(b+c+2) \equiv 2 \pmod{a}$$

$$\Rightarrow b+c \equiv a \pmod{a}.$$

Mà theo giả thiết  $(b + c + bc) \equiv 0 \pmod{a}$ ,  $bc \equiv 0 \pmod{a}$  hay  $bc : a$ .

Mà  $a, b, c$  nguyên tố, suy ra vô lý.

Suy ra  $a, b, c$  không đồng thời là số nguyên tố.

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$ . Một đường tròn  $(O)$  đi qua các điểm  $A, B$  và cắt các cạnh  $CA, CB$  tại các điểm  $L, N$  tương ứng ( $L \neq A, C; N \neq B, C$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của cung  $LN$  của đường tròn  $(O)$  và  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Đường thẳng  $AM$  cắt các đường thẳng  $BL$  và  $BN$  tại các điểm  $D$  và  $F$  tương ứng, đường thẳng  $BM$  cắt các đường thẳng  $AN$  và  $AL$  tại các điểm  $E$  và  $G$  tương ứng. Gọi  $P$  là giao điểm của  $AN$  và  $BL$ .

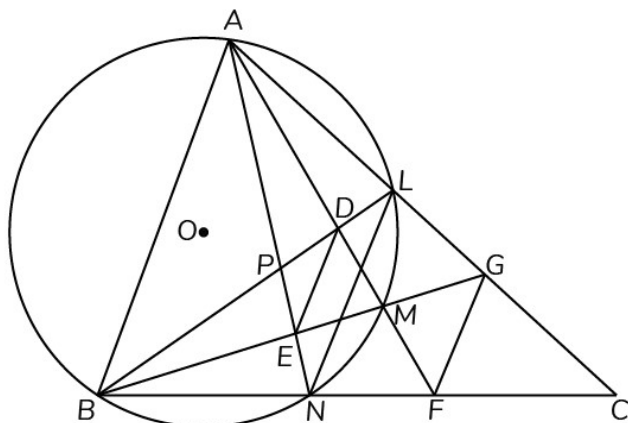
1) Chứng minh  $DE \parallel GF$ .

2) Nếu tứ giác  $DEFG$  là hình bình hành, hãy chứng minh:

a)  $\triangle ALP \sim \triangle ANC$ .

b)  $DF \perp EG$ .

Lời giải



1) Xét tứ giác ADEB có  $\widehat{DAE} = \widehat{DBE}$  nên tứ giác ADEB nội tiếp.

Suy ra  $\widehat{EDM} = \widehat{ABG}$  (cùng bù với  $\widehat{ADE}$ ). (1)

Xét tứ giác AGFB có  $\widehat{GAF} = \widehat{GBF}$  nên tứ giác AGFB nội tiếp.

Suy ra  $\widehat{AFG} = \widehat{ABG}$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $\widehat{EDM} = \widehat{AFG}$ .

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên  $DE \parallel GF$ .

2) Vì tứ giác DEFG là hình bình hành nên  $ME = MG$ .

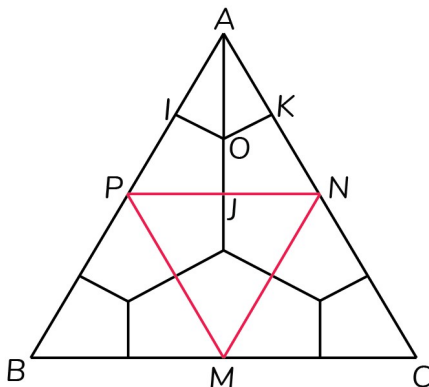
Xét  $\triangle AEG$  có AM vừa là phân giác vừa là trung tuyến nên  $AM \perp EG$  hay  $DF \perp EG$ .

Vì  $DF \perp EG \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$  suy ra AB là đường kính của đường tròn (O)

Khi đó  $\widehat{ALP} = \widehat{ANC} = 90^\circ$  nên  $\triangle ALP$  đồng dạng với  $\triangle ANC$  (g.g) (đpcm).

**Câu V.** Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá  $\sqrt{3}$  cm.

Lời giải



Gọi  $M, N, P$  là trung điểm 3 cạnh  $BC, AC, AB$  nối  $M, N, P$  chia tam giác  $ABC$  thành 3 tam giác đều bằng nhau có cạnh là  $1,5\text{cm}$ .

Gọi  $O$  là tâm của 1  $\Delta$  đó giả sử tam giác  $APN$ .

Nối  $O$  với trung điểm ba cạnh  $\Delta APN$  ta được 3 tứ giác bằng nhau gọi một trong 3 tứ giác đó là  $AIOK$  thì  $\Delta ABC$  được chia thành 12 tứ giác bằng tứ giác  $AIOK$  (như hình vẽ).

Xét tứ giác  $AIOK$  có  $AI = AK = IK = 1,5\text{cm}$ ;  $IO = OK = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$ ;  $AO = \sqrt{3}\text{cm}$ .

Vì có 13 điểm 12 tứ giác nên theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại ít nhất 2 điểm thuộc 1 tứ giác khoảng cách giữa 2 điểm này không vượt quá  $AO = \sqrt{3}$  (cm) (đpcm).

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2009 – 2010

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $A = \sqrt{20a+92} + \sqrt{a^4+16a^2+64}$  và  $B = a^4 + 20a^3 + 102a^2 + 40a + 200$ .

- 1) Rút gọn A.
- 2) Tìm a để  $A+B=0$ .

**Lời giải**

$$1) \text{ Ta có } A = \sqrt{20a+92} + \sqrt{a^4+16a^2+64} = \sqrt{20a+92} + \sqrt{(a^2+8)^2}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{a^2+20a+100} = \sqrt{(a+10)^2} = |a+10|.$$

$$2) B = (a^4 + 20a^3 + 102a^2) + 2(a^2 + 20a + 100) = a^2(a+10)^2 + 2(a+10)^2 = (a+10)^2(a^2+2).$$

$$A = |a+10| \geq 0; B = (a+10)^2(a^2+2) \geq 0 \Rightarrow A+B \geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a = -10$ .

**Câu II.** Hai công nhân cùng làm một công việc 18 giờ xong. Nếu người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ 2 làm 12 giờ thì được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

**Lời giải**

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong cả công việc là x (giờ). Điều kiện  $x > 18$ .

Gọi thời gian người thứ hai làm một mình xong cả công việc là y (giờ). Điều kiện  $y > 18$ .

1 giờ người thứ nhất làm được  $\frac{1}{x}$  (công việc); 1 giờ người thứ hai làm được  $\frac{1}{y}$  (công việc).

1 giờ cả hai người làm được  $\frac{1}{18}$  (công việc) ta có  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}$ . (1)

Người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ 2 làm 12 giờ thì được 50% công việc nên  $\frac{6}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{2}$ . (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{6}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{36} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 36 \end{cases}.$$

Vậy mỗi đội làm riêng 36 giờ xong công việc.

**Câu III.** Cho Parabol  $y = x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình  $y = mx + 1$ .

- 1) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A; B với mọi m.
- 2) Gọi  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1)$ .

**Lời giải**

1) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có  $\Delta = m^2 + 4 > 0$  với mọi  $m$  nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$

$\Rightarrow$  (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A; B với mọi  $m$ .

2) Theo định lý Vi-ét, ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}.$$

Ta có  $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1) = (mx_1 + 1 - 1)(mx_2 + 1 - 1) = m^2 x_1 x_2 = -m^2 \leq 0$ .

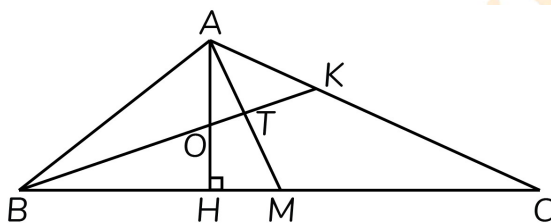
Vậy GTLN của M bằng 0 khi  $m = 0$ .

**Câu IV.** Cho tam giác ABC với  $AB = 5$ ;  $AC = 3\sqrt{5}$ ;  $BC = 10$ . Phân giác BK của góc ABC cắt đường cao AH; trung tuyến AM của tam giác ABC tại O và T ( $K \in AC$ ;  $H, M \in BC$ ).

1) Tính AH.

2) Tính diện tích tam giác AOT.

**Lời giải**



1) Đặt  $CH = x$  thì  $BH = 10 - x$ .

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABH; ACH ta có 
$$\begin{cases} AH^2 = AB^2 - BH^2 = 25 - x^2 \\ AH^2 = AC^2 - H^2C = 45 - (10 - x)^2 \end{cases}.$$

Ta có  $25 - x^2 = 45 - (10 - x)^2 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 45 - 100 + 20x - x^2$

$\Leftrightarrow 20x = 80 \Leftrightarrow x = 4$  nên  $AH = 3$ .

2) Áp dụng tính chất phân giác  $\frac{AO}{OH} = \frac{AB}{BH} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AO}{AH} = \frac{5}{9}$ ;  $S_{AOB} = \frac{5}{9} S_{AHB} = \frac{10}{3}$ ;  $S_{ABT} = \frac{1}{2} S_{ABM} = \frac{15}{4}$ ;

$S_{AOT} = S_{ABT} - S_{AOB} = \frac{15}{4} - \frac{10}{3} = \frac{5}{12}$  (đvdt).

**Câu V.** Các số thực  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức  $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$ .

Chứng minh  $x + y = 0$ .

**Lời giải**

Ta có  $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2})(x - \sqrt{1+x^2}) = (x - \sqrt{1+x^2})$

$\Leftrightarrow -(y + \sqrt{1+y^2}) = (x - \sqrt{1+x^2}). \quad (1)$

Tương tự  $-(x + \sqrt{1+x^2}) = (y - \sqrt{1+y^2}). \quad (2)$

Cộng (1) và (2), ta có  $-y - \sqrt{1+y^2} - x - \sqrt{1+x^2} = x - \sqrt{1+x^2} + y - \sqrt{1+y^2}$

$$\Leftrightarrow -y - x = x + y \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Vậy  $x + y = 0$ .

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2009 – 2010

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Các số thực  $x, y$  thoả mãn  $xy \neq \sqrt{2}$  và  $xy \neq -\sqrt{2}$ .Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x, y$ .

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}.$$

**Lời giải**

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

$$P = \left[ \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{(xy + \sqrt[3]{2})(xy - \sqrt[3]{2})} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2(xy + \sqrt[3]{2})} \right] \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

$$P = \frac{4\sqrt[3]{2}xy + x^2y^2 - 2\sqrt[3]{2}xy + \sqrt[3]{4}}{2(xy + \sqrt[3]{2})(xy - \sqrt[3]{2})} \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} = \frac{(xy + \sqrt[3]{2})^2}{(xy + \sqrt[3]{2})(xy - \sqrt[3]{2})} \cdot \frac{xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} = 0.$$

**Câu II.** 1) Cho phương trình  $x^2 + bx + c = 0$ , trong đó các tham số  $b$  và  $c$  thoả mãn đẳng thức  $b + c = 4$ . Tìm các giá trị của  $b$  và  $c$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 = x_2^2 + x_2$ .2) Giả sử  $(x; y; z)$  là một nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{12} - \frac{z}{4} = 1 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases}.$$
Hãy tính giá trị của  $A = x + y + z$ .**Lời giải**

1) Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4c > 0 \\ x_1 + x_2 = -b \\ b + c = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 = x_2^2 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 = x_2^2 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c > 0 \\ x_1 = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 1} \\ x_1 \cdot x_2 = c \\ \frac{x_2 + 4}{x_2 - 1} = x_2^2 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c > 0 \\ b + c = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = c \\ \frac{x_2 + 4}{x_2 - 1} = x_2^2 + x_2 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c > 0 \\ b + c = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = c \\ x_2^3 - 2x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c > 0 \\ b + c = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = c \\ (x_2 - 2)(x_2^2 - 2x_2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c > 0 \\ b = -8 \\ c = 12 \\ x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} .$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{12} - \frac{z}{4} = 1 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = 12 \\ 3x + 6y + 10z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow 7(x + y + z) = 42 \Leftrightarrow A = 6.$$

**Câu III.** Ba số nguyên dương  $a, p, q$  thỏa mãn các điều kiện:

- (i):  $ap + 1$  chia hết cho  $q$ .  
(ii):  $aq + 1$  chia hết cho  $p$ .

Chứng minh  $a > \frac{pq}{2(p+q)}$ .

**Lời giải**

Xét  $pq = 1$  ta có điều phải chứng minh.

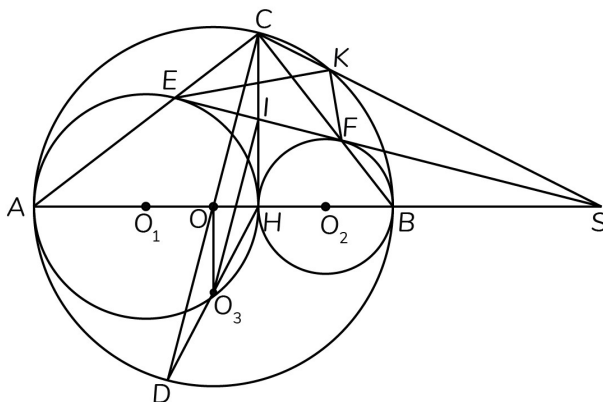
Xét  $pq > 1$ . Khi đó  $(ap + 1)(aq + 1) : pq \Leftrightarrow a^2pq + ap + aq + 1 : pq \Leftrightarrow a(p + q) + 1 : pq \Leftrightarrow a \geq \frac{pq - 1}{p + q}$ .

Xét hiệu  $\frac{pq - 1}{p + q} - \frac{pq}{2(p + q)} = \frac{pq - 1}{2(p + q)} > 0$  (vì  $pq > 1$ ) nên  $a > \frac{pq}{2(p + q)}$ .

**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và điểm  $C$  thuộc đường tròn ( $C$  không trùng với  $A, B$  và trung điểm cung  $AB$ ). Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $AB$ . Đường tròn  $(O_1)$  đường kính  $AH$  cắt  $CA$  tại  $E$ , đường tròn  $(O_2)$  đường kính  $BH$  cắt  $CB$  tại  $F$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $AEFB$  là tứ giác nội tiếp.
- 2) Gọi  $(O_3)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEFB$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $O$ . Chứng minh ba điểm  $H, O_3, D$  thẳng hàng.
- 3) Gọi  $S$  là giao của các đường thẳng  $EF$  và  $AB$ ,  $K$  là giao điểm thứ hai của  $SC$  với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $KE$  vuông góc với  $KF$ .

**Lời giải**



1) Ta có tứ giác  $CEHF$  là hình chữ nhật.

Ta có  $\widehat{CFE} = \widehat{EAB}$  (cùng bằng  $\widehat{CHE}$ ) nên tứ giác  $AEFB$  nội tiếp.

2) Kẻ trung trực  $EF$  cắt  $HD$  tại  $O_3$  chứng minh  $O_3$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEFB$ . Chứng minh được  $CD \perp EF$  trong tam giác  $CHD$  có  $IO_3$  là đường trung bình nên  $O_3O \perp AB$ . Mà  $OA = OB$  nên  $O_3O$  là trung trực của  $AB$  nên  $O_3$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEFB$  hay  $H, O_3, D$  thẳng hàng.

3)  $\widehat{BFS} = \widehat{BKS}$  (cùng bù  $\widehat{EFB}$ ) nên tứ giác  $BFKS$  nội tiếp suy ra  $\widehat{FKS} = \widehat{FBA}$ .

Mà  $\widehat{FBA} = \widehat{CEF}$  nên  $\widehat{FKS} = \widehat{CEF} \Rightarrow$  Tứ giác  $CEFK$  nội tiếp suy ra  $\widehat{EKF} = \widehat{ECF} = 90^\circ$  hay  $FK$  vuông góc với  $EK$ .

**Câu V.** Một hình vuông có độ dài bằng 1 được chia thành 100 hình chữ nhật có chu vi bằng nhau (hai hình chữ nhật bất kỳ không có điểm chung). Kí hiệu  $P$  là chu vi của mỗi hình chữ nhật trong 100 hình chữ nhật này.

1) Hãy chỉ ra một cách để chia  $P = 2,02$ .

2) Hãy tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

**Lời giải**

1) Cách chia 1 cạnh thành 100 phần bằng nhau qua các điểm chia kẻ các đường thẳng song song cạnh kia ta được 100 hình vuông có chu vi bằng nhau khi đó  $P = 2,02$ .

2) Chia 1 cạnh thành  $x$  phần bằng nhau cạnh còn lại là  $y$  phần bằng nhau ( $x, y \in \mathbb{N}^*$ ).

Ta có  $xy = 100$ . Gọi kích thước mỗi hình chữ nhật là  $a, b$  thì  $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$ .

Khi đó  $P = \frac{2}{xy} = \frac{2(x+y)}{xy} = \frac{x+y}{50}$ ;  $P$  lớn nhất khi  $(x+y)$  lớn nhất.

Mà  $(x; y) \in \{(1;100); (2;50); (4;25); (5;20); (10;10)\}$  chỉ có cặp  $(1;100)$  thoả mãn.

Khi đó  $P(\max) = 2,02$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2010 – 2011

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $A = \left[ \frac{3}{2} - \left( x^4 - \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x^3 - x(4x - 1) - 4}{x^7 + 6x^6 - x - 6} \right] : \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36}$

- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

**Lời giải**

- Điều kiện  $x \neq -26; -6; -3; -1; 1; 2$ .

Đáp số:  $A = \frac{3x - 6}{2x + 6}$ .

- Biến đổi  $2A = 3 - \frac{15}{x + 3}$ .

Vậy A nguyên khi  $\frac{15}{x + 3}$  nguyên.

Đáp số:  $x \in \{-2; -4; 0; -8; 12; -18\}$ .

**Câu II.** Cho hai đường thẳng  $(d_1): y = (2m^2 + 1)x + 2m - 1$ ;  $(d_2): y = m^2x + m - 2$ , với m là tham số.

- Tìm tọa độ giao điểm I của  $(d_1)$  và  $(d_2)$  theo m.
- Khi m thay đổi, chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

**Lời giải**

- PT hoành độ giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$  là  $(2m^2 + 1)x + 2m - 1 = m^2x + m - 2$ .

Tìm được  $I \left( -\frac{m + 1}{m^2 + 1}; \frac{-3m^2 + m - 2}{m^2 + 1} \right)$ .

- Giả sử  $I(x_1; y_1)$ , ta có: 
$$\begin{cases} y_1 = (2m^2 + 1)x_1 + 2m - 1 \\ y_1 = m^2x_1 + m - 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -x_1 - 3.$$

Suy ra I thuộc đường thẳng cố định có phương trình  $y = -x - 3$ .

**Câu III.** Giả sử bộ ba số thực (x; y; z) thỏa mãn hệ: 
$$\begin{cases} x + 1 = y + z \\ xy + z^2 - 7z + 10 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

- 1) Chứng minh  $x^2 + y^2 = -z^2 + 12z - 19$ .
- 2) Tìm tất cả các bộ  $(x; y; z)$  thỏa mãn hệ (I) sao cho  $x^2 + y^2 = 17$ .

**Lời giải**

1) Hệ phương trình (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = z - 1 \\ xy = -z^2 + 7z - 10. \end{cases}$

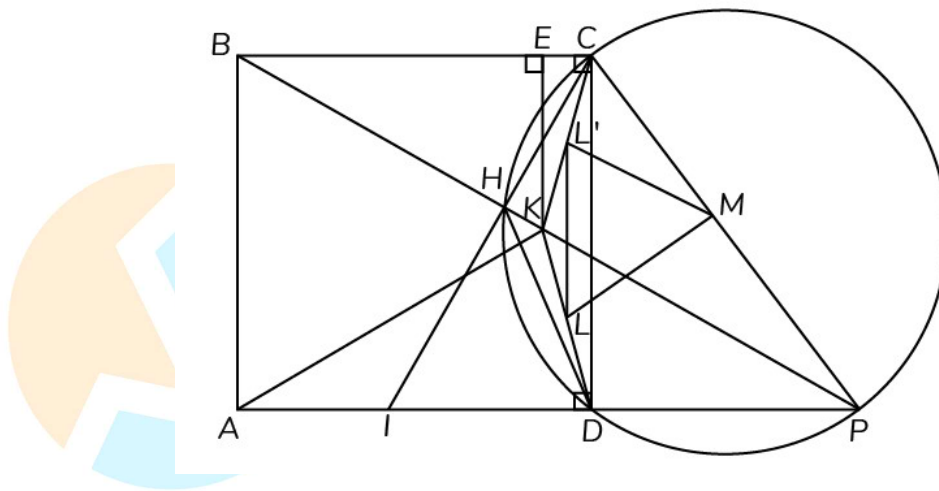
Suy ra  $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (z - 1)^2 + 2(-z^2 + 7z - 10) = -z^2 + 12z - 19$  (điều phải chứng minh).

2) Từ  $x^2 + y^2 = 17 \Rightarrow z = 6$ . Thay vào hệ phương trình (I) tìm được  $(x; y) = (4; -1); (x; y) = (1; -4)$ .

Vậy  $(x; y; z) = (4; -1; 6); (x; y; z) = (1; -4; 6)$ .

**Câu IV.** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trong hình vuông đó lấy điểm K sao cho tam giác ABK đều. Các đường thẳng BK và AD cắt nhau tại P.

- 1) Tính độ dài đoạn thẳng KC theo a.
- 2) Trên đoạn thẳng AD lấy điểm I sao cho  $DI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , các đường thẳng CI và BP cắt nhau tại H. Chứng minh tứ giác CHDP nội tiếp một đường tròn.
- 3) Gọi M và L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CP và KD. Chứng minh  $LM = \frac{a}{2}$ .

**Lời giải**

1) Kẻ KE vuông góc với BC, khi đó  $KE = \frac{a}{2}$ ,  $BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $EC = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$ .

Từ đó  $KC = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

2) Trong tam giác vuông CDI có  $CI = \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2DI$  nên  $\widehat{DCI} = 30^\circ$ .

Mặt khác  $\widehat{HPD} - 90^\circ - \widehat{ABP} = 30^\circ$ .

Suy ra tứ giác CHDP nội tiếp (đpcm).

3) Lấy trung điểm  $L'$  của đoạn KC. Do tam giác CKD cân tại K và M là trung điểm của CP suy ra L và  $L'$  đối xứng nhau qua KM nên  $LM = L'M$ .

Do  $L'M$  là đường trung bình của tam giác CKP nên  $L'M = \frac{KP}{2} = \frac{a}{2}$  (điều phải chứng minh).

**Câu V.** Giải phương trình  $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$ .

**Lời giải**

Biến đổi phương trình về dạng  $(x^2 - 4)^2 - 5(x^2 - 4)(x - 1) - 6(x - 1)^2 = 0$ .

Vì  $x = 1$  không phải là nghiệm của phương trình nên  $x \neq 1$ .

Khi đó PT đã cho tương đương với  $\left(\frac{x^2 - 4}{x - 1}\right)^2 - 5\left(\frac{x^2 - 4}{x - 1}\right) - 6 = 0$ .

Đặt  $t = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ . Phương trình trên trở thành  $t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 6. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{ 3 + \sqrt{7}; 3 - \sqrt{7}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2010 – 2011

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Giả sử  $a$  và  $b$  là hai số dương khác nhau và thỏa mãn  $a - b = \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2}$ .

Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 = 1$ .

2) Chứng minh rằng  $\sqrt{2009^2 + 2009^2 \times 2010^2 + 2010^2}$  là một số nguyên dương.

**Lời giải**

1) Từ giả thiết, ta có  $a + \sqrt{1 - a^2} = b + \sqrt{1 - b^2} \Rightarrow a\sqrt{1 - a^2} = b\sqrt{1 - b^2}$

$$\Rightarrow a^2 - a^4 = b^2 - b^4 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 1) = 0.$$

Vì  $a^2 - b^2 \neq 0$  (giả thiết  $a \neq b$ ) nên  $a^2 + b^2 = 1$ .

2) Đặt  $a = 2009$ , ta có

$$\begin{aligned} 2009^2 + 2009^2 \cdot 2010^2 + 2010^2 &= a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 = a^2 + a^2(a^2 + 2a + 1) + (a+1)^2 \\ &= a^4 + 2a^2(a+1) + (a+1)^2 = (a^2 + a + 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

**Câu II.** Giả sử bốn số thực  $a, b, c, d$  đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

(i): Phương trình  $x^2 - 2cx - 5d = 0$  có hai nghiệm  $a$  và  $b$ .

(ii): Phương trình có hai nghiệm  $c$  và  $d$ .

Chứng minh rằng

1)  $a - c = c - b = d - a$ .

2)  $a + b + c + d = 30$ .

**Lời giải**

1) Theo định lí Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} a + b = 2c & (1) \\ ab = -5d & (2) \\ c + d = 2a & (3) \\ cd = -5b & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) suy ra  $a - c = c - b = d - a$  (đpcm).

2) Đặt  $a - c = c - b = d - a = m$  thì  $c = a - m$ ;  $b = c - m = a - 2m$ ;  $d = a + m$ .

Do đó  $a + b + c + d = 4a - 2m$ ;  $d = a + m$ .

Từ (2), (4) suy ra  $a^2 - 2am = -5a - 5m$ ;  $a^2 - m^2 = -5a + 10m$ .

Từ đó, thu được  $m^2 - 2am = -15m$ .

Do  $a \neq c$  nên  $m \neq 0$  suy ra  $m - 2a = -15$ .

Suy ra  $a + b + c + d = 30$  (điều phải chứng minh).

**Câu III.** Giả sử  $m$  và  $n$  là những số nguyên dương với  $n > 1$ . Đặt  $S = m^2n^2 - 4m + 4n$ .



Chứng minh rằng:

1) Nếu  $m > n$  thì  $(mn^2 - 2)^2 < n^2S < m^2n^4$ .

2) Nếu  $S$  là số chính phương thì  $m = n$ .

**Lời giải**

1) Ta có  $(mn^2 - 2)^2 < n^2S \Leftrightarrow n^3 > 1 \Leftrightarrow n > 1$  (đúng)

$nS^2 < m^2n^4 \Leftrightarrow m > n$  (đúng theo giả thiết).

2) Giả sử  $m \neq n$ , xét hai trường hợp

Với  $m > n$ , theo 1) và do  $S$  là số chính phương suy ra  $n^2S = (mn^2 - 1)^2 \Rightarrow 4n^3 = 2mn^2 + 1$  (sai)

Với  $m < n$  khi đó

Nếu  $m \geq 2$  thì  $n > 2 \Rightarrow 2mn > 4m \Rightarrow (mn)^2 < S < (mn+1)^2$  (mâu thuẫn với  $S$  là số chính phương).

Nếu  $m = 1$  thì

Với  $n > 2$  thì  $(n+1)^2 < S < (n+2)^2$  (mâu thuẫn với  $S$  là số chính phương).

Với  $n = 2$  thì  $S = 8$  không phải là số chính phương

Vậy phải có  $m = n$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  với  $AB > AC$ ,  $AB > BC$ . Trên cạnh  $AB$  lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BC = BM$  và  $AC = AN$ .

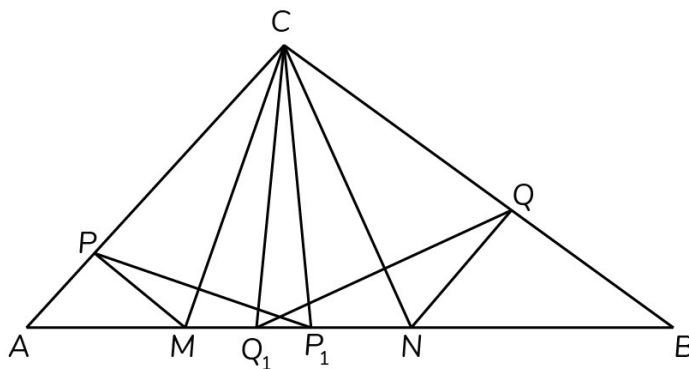
1) Chứng minh điểm  $N$  nằm trong đoạn thẳng  $BM$ .

2) Qua  $M$  và  $N$  kẻ  $MP$  song song với  $BC$  và  $AQ$  song song với  $CA$  ( $P \in CA, Q \in CB$ ).

Chứng minh rằng  $CP = CQ$ .

3) Cho  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ ,  $\widehat{CAB} = 30^\circ$  và  $AB = a$ . Hãy tính diện tích của tam giác  $MCN$  theo  $a$ .

**Lời giải**



1) Từ  $CA + CB > AB \Rightarrow AN + BM > AN + BN \Rightarrow BM > BN$  (đpcm).

2) Do tam giác  $CBM$  cân tại  $B$  nên  $\widehat{BCM} = \widehat{BMC}$ .

Mà  $\widehat{PMC} = \widehat{BMC}$  (so le trong) nên  $\widehat{PMC} = \widehat{BMC}$ .

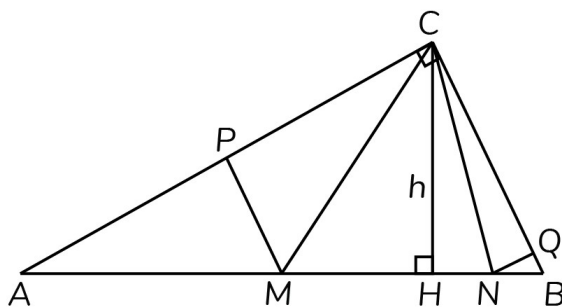
Tương tự  $\widehat{QNC} = \widehat{ANC}$ , suy ra các điểm  $P_1, Q_1$  đối xứng với điểm  $P, Q$  qua các đường thẳng  $CM$  và  $CN$  đều thuộc  $AB$  và  $CP = CP_1, CQ = CQ_1$ .

Từ  $\triangle CPM = \triangle CP_1M$ ;  $\triangle CQN = \triangle CQ_1N \Rightarrow \angle CP_1M = \angle CPM, \angle CQN = \angle CQ_1N$ .

Mặt khác  $\triangle CPM = \triangle CQN$  (cùng bù với góc  $\angle ACB$ )

$\Rightarrow \angle CP_1M = \angle CQ_1N$  nên  $CP_1 = CQ_1 \Rightarrow CP = CQ$ .

3)



Ta có  $CB = BM = \frac{a}{2}$ ,  $CA = AN = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\Rightarrow MN = BM - BN = \frac{a}{2} \left( a - \frac{\sqrt{3}a}{2} \right) = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{2}.$$

Gọi  $h$  là khoảng cách từ  $C$  đến  $AB$  thì  $h = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{MCN} = \frac{(3-\sqrt{3})}{16}a^2$ .

**Câu V.** Trên một bảng đen ta viết ba số  $\sqrt{2}$ ;  $2$ ;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ta bắt đầu thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi

lần chơi ta xóa hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là  $a$  và  $b$ , rồi viết vào hai vị trí vừa xóa

hai số mới là  $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$  và  $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ , đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng

luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể

có đồng thời ba số  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $1+\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Do  $a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2$  nên tổng bình phương ba số không thay đổi sau mỗi lần chơi.

Tổng bình phương ba số ban đầu là  $\frac{13}{2}$ .

Tổng bình phương ba số  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $1+\sqrt{2}$  là  $\frac{41}{8} + 2\sqrt{2}$ .

Như vậy, không bao giờ có thể xuất hiện đồng thời ba số  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $1+\sqrt{2}$ .

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2011 – 2012

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$  với  $x > 0, y > 0, x \neq 2y,$

$$y \neq 2 - 2x^2.$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Cho  $y = 1$ , hãy tìm  $x$  sao cho  $A = \frac{2}{5}$ .

**Lời giải**

$$1) A = \frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}.$$

$$2) \text{ Với } y = 1 \text{ thì } A = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 4x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

**Câu II.** Một nhóm công dân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức để ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công dân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

**Lời giải**

Gọi năng suất dự kiến là  $x$  sản phẩm mỗi ngày ( $x \in \mathbb{N}^*$ ). Thời gian hoàn thành theo kế hoạch là  $\frac{200}{x}$ . Bốn ngày đầu họ làm được  $4x$  sản phẩm. Trong những ngày sau năng suất là  $x + 10$  sản

phẩm mỗi ngày. Số ngày hoàn thành số sản phẩm còn lại là  $\frac{200-4x}{x+10}$ . Theo bài ra ta có

$$\frac{200}{x} = \frac{200-4x}{x+10} + 4 + 2 \Leftrightarrow x = 20 \quad (\text{do } x \in \mathbb{N}^*).$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất 20 sản phẩm.

**Câu III.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - m^2 + 3$ ,  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ . Với giá trị nào của  $m$  thì  $x_1, x_2$  là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$x^2 = mx - m^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta = 12 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ .

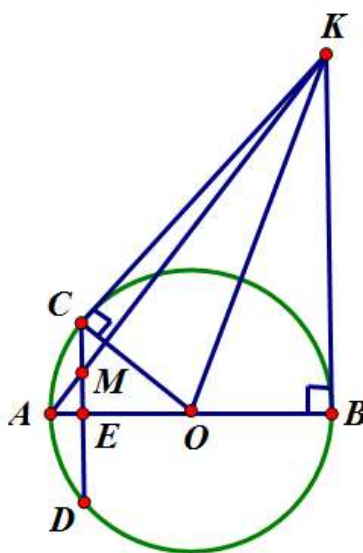
$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

**Câu IV.** Cho đường tròn (O) đường kính  $AB = 10$ . Dây cung  $CD$  của đường tròn (O) vuông góc với  $AB$  tại điểm  $E$  sao cho  $AE = 1$ . Các tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  của đường tròn (O) cắt nhau tại  $K$ ,  $AK$  và  $CE$  cắt nhau tại  $M$ .

1) Chứng minh  $\triangle AEC \sim \triangle OBK$ . Tính  $BK$ .

2) Tính diện tích tam giác  $CKM$ .

**Lời giải**



Trong tam giác vuông CEO có  $CE = \sqrt{CO^2 - OE^2} = 3$ .

Do  $\widehat{CAE} = \widehat{KOB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$  và  $\widehat{CEA} = \widehat{KBO} = 90^\circ$  nên  $\triangle AEC \sim \triangle OBK$ .

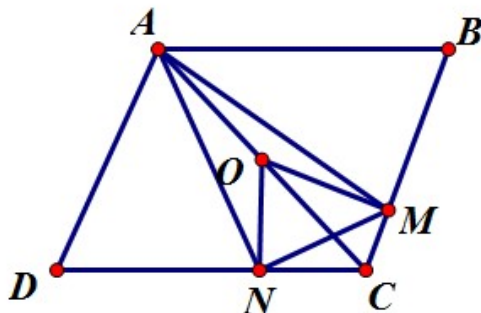
Suy ra  $\frac{KB}{CE} = \frac{OB}{AE} \Rightarrow KB = \frac{CE \cdot OB}{AE} = 15$ .

2) Do  $ME \parallel BK$  nên  $\frac{ME}{BK} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow ME = \frac{BK \cdot AE}{AB} = \frac{3}{2} \Rightarrow CM = CE - ME = \frac{3}{2}$ .

Vậy  $S_{CKM} = \frac{1}{2}CM \cdot BE = \frac{27}{4}$  (dvdđt).

**Câu V.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ . Các điểm  $M$  và  $N$  chạy trên các cạnh  $BC$  và  $CD$  tương ứng sao cho  $\widehat{MAN} = 30^\circ$ . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MAN$  thuộc một đường thẳng cố định.

## Lời giải



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN.

Ta có  $\widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 60^\circ$ ;  $OM = ON$  nên  $\widehat{OMN} = \widehat{ONM} = 60^\circ$ .

Do  $\widehat{MON} + \widehat{MCN} = 180^\circ$  nên tứ giác OMCN nội tiếp, từ đó  $\widehat{OCN} = \widehat{OMN} = 60^\circ$ .

Mà  $\widehat{ACN} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ .

Suy ra A, O, C thẳng hàng. Vậy O thuộc đường thẳng AC cố định.

**Câu VI.** Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$ .

## Lời giải

Đặt  $S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$ ,  $S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$ .

Khi đó, ta có  $S_1 + S_2 = \sqrt{81} - \sqrt{1} = 8$ .

Lại có:  $\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} > \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+1}} = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}$  ( $k \geq 1$ ).

Do vậy  $S_1 > S_2$  nên  $S_1 > 4$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2011 – 2012

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho  $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

- 1) Chứng minh rằng  $4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$ .
- 2) Tính giá trị của biểu thức  $S = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$ .

**Lời giải**

1) Từ giả thiết suy ra  $a > 0$  và

$$a + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} \Rightarrow \left(a + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{8}\right) \Rightarrow 4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0 \quad (1)$$

2) Từ (1) suy ra  $a^2 = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$

$$\Rightarrow S = a^2 + \sqrt{\frac{(1-a)^2}{8} + a + 1} = a^2 + \frac{a+3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} + \frac{(a+3)\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

**Câu II.** 1) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$ .

2) Cho hai số hữu tỉ  $a, b$  thỏa mãn đẳng thức  $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$ .  
Chứng minh rằng  $1 - ab$  là bình phương của một số hữu tỉ.

**Lời giải**

1) ĐK  $x + y > 0$ . Ta có PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y)^2 - 1 + 2xy\left(\frac{1}{x+y} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-1) - \frac{2xy(x+y-1)}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2 + y^2 + x + y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1 \quad (\text{do } x^2 + y^2 + x + y > 0).$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta có:  $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ .

2) Ta có  $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)^2 + 2(a+b) + 1 = 0 \Leftrightarrow (ab-1)(a+b)^2 + (a+b+c)^2 = 0 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra  $a+b \neq 0$  và  $1 - ab = \left(\frac{a+b+1}{a+b}\right)^2$  (điều phải chứng minh).

**Câu III.** Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  có dạng  $p = a^2 + b^2 + c^2$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $a^4 + b^4 + c^4$  chia hết cho  $p$ .



**Lời giải**

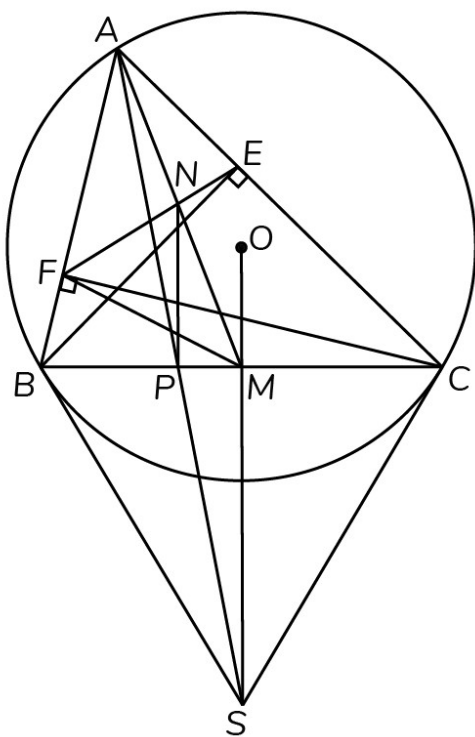
Giả sử  $a \geq b \geq c$ . Ta có  $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ .

Vì  $p$  là số nguyên tố và  $p \geq 3$ , suy ra  $a^4 + b^4 + c^4$  chia hết cho  $p$  khi và chỉ  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$  khi chia hết cho  $p$  hay  $a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2) : p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 : p \Leftrightarrow (ab - c^2)(ab + c^2) : p$ .

Do  $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$  và  $p$  là số nguyên tố nên  $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$   
 $\Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$  và  $p = 3$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $BE$  và  $CF$  là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $S$ , các đường thẳng  $BC$  và  $OS$  cắt nhau tại  $M$ .

- 1) Chứng minh rằng  $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$ .
- 2) Chứng minh rằng  $\triangle AEM \sim \triangle ABS$ .
- 3) Gọi  $N$  là giao điểm của  $AM$  và  $EF$ ,  $P$  là giao điểm của  $AS$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $NP \perp BC$ .

**Lời giải**

1) Do  $\widehat{BAE} = \widehat{SBM}$  và  $\widehat{AEB} = \widehat{BMS} = 90^\circ$  nên  $\triangle AEB \sim \triangle BMS$  suy ra  $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{BM}$ .

Mà  $BM = ME$  nên  $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$  (1)

2) Tam giác  $BME$  cân tại  $M$  nên  $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$ .

Lại có  $\widehat{SBM} + \widehat{ABE} = \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90^\circ = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{AEM}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle AEM \sim \triangle ABS$ .

3) Từ kết quả câu 2 ta có  $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$ . Mà  $\widehat{ABP} = \widehat{AEN}$  (cùng bù với  $\widehat{CEF}$ ) nên  $\triangle AEN \sim \triangle ABP$ ,  
suy ra  $\frac{AN}{AP} = \frac{NE}{PB}$  (3)

Vì  $\triangle MAE \sim \triangle SAB$  (câu 2) và tương tự ta có  $\triangle MAF \sim \triangle SAC$  nên  $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$ ,  $\widehat{AMF} = \widehat{ASC}$   
 $\widehat{EMF} = \widehat{BSC} \Rightarrow \widehat{SBP} = \widehat{MEN}$  (do hai tam giác cân có hai góc ở đỉnh bằng nhau).

Suy ra  $\triangle EMN \sim \triangle BSP \Rightarrow \frac{NE}{PS} = \frac{NM}{PS}$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $\frac{AN}{PB} = \frac{NM}{PS} \Rightarrow NP \parallel MS$  mà  $MS \perp BC$  nên  $NP \perp BC$ .

**Câu V.** Trong hộp có chứa 2011 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu), trong đó có 655 viên bi màu đỏ, 655 viên bi màu xanh, 656 viên bi màu tím và 45 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 178 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra, luôn có ít nhất 45 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 177 viên bi bất kì thì kết luận của bài toán còn đúng không?

### Lời giải

Nếu ta chọn ra 44 bi màu đỏ, 44 bi màu xanh, 44 bi màu tím và 45 bi màu vàng hoặc trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên) thì tổng số bi lấy ra là  $44 + 44 + 44 + 45 = 177$  viên bi.

Do đó không có 45 bi nào cùng màu. Vậy bài toán không đúng nếu ta chỉ lấy ra 177 viên bi

Nếu lấy ra 178 viên bi thì số bi màu trắng và vàng có tối đa là 45, như vậy vẫn còn lại ít nhất  $178 - 45 = 133$  bi có màu đỏ hoặc màu xanh hoặc màu tím.

Theo nguyên lí Dirichlet sẽ tồn tại một màu mà có ít nhất  $\left\lceil \frac{133}{3} \right\rceil + 1 = 45$  viên bi.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2012 – 2013

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \left( \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)$  với  $a > b > 0$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $P$ .
- 2) Biết  $a - b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Lời giải**

$$1) P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \left( \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)$$

$$P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})} \right) \left( \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)$$

$$P = \frac{(a-b)(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) + (a-b)(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})} \left( \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)$$

$$P = \frac{2(a-b)\sqrt{a+b}}{2b\sqrt{a-b}} \left( \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right) = \frac{a^2+b^2}{b}$$

2) Từ  $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$ .

$$\text{Khi đó } P = \frac{2b^2 + 2b + 1}{b} \Rightarrow 2b^2 + (2 - P)b + 1 = 0 \quad (1).$$

Coi (1) là phương trình bậc hai của  $b$ .

$$\text{Ta có } \Delta = (2 - P)^2 - 8 = P^2 - 4P - 4.$$

$$\text{Để có } b, \text{ thì } \Delta \geq 0 \Rightarrow P^2 - 4P - 4 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} P \geq 2 + 2\sqrt{2} \\ P \leq 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } P > 0 \Rightarrow P \geq 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow P(\min) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } b = \frac{-(2-P)}{4} = \frac{-(2-2-2\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu II.** Trên quãng đường  $AB$  dài 210km, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành đi từ  $A$  về  $B$  và một ô tô khởi hành đi từ  $B$  về  $A$ . Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến  $B$  và ô

tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

### Lời giải

Gọi vận tốc của xe máy là  $x(\text{km/h})$  và vận tốc của ô tô là  $y(\text{km/h})$

Điều kiện  $y > x > 0$ . (\*)

Đổi 2 giờ 15 phút =  $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$  giờ.

Chỗ gặp nhau cách A là  $\frac{9}{4}y(\text{km})$  và cách B là  $4x$ .

Vì quãng đường AB bằng 210km, nên ta có phương trình :  $\frac{9}{4}y + 4x = 210$  (1)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là  $\frac{210}{x}$  (giờ).

Thời gian ô tô đi từ B đến A là  $\frac{210}{y}$  (giờ).

Thời gian ô tô đi từ B đến A nhanh hơn thời gian xe máy đi từ A đến B là  $4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$  (giờ).

Vậy ta có phương trình :  $\frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4}$  (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{9}{4}y + 4x = 210 \\ \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Giải hệ ra ta được  $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$  (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của xe máy là 30(km/h) và vận tốc của ô tô là 40(km/h).

**Câu III.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) :  $y = -x^2$  và đường thẳng

(d) :  $y = mx - m - 2$ .

a) Chứng minh rằng khi  $m$  thay đổi (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1 ; x_2$

b) Tìm  $m$  để  $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$ .

### Lời giải

a) Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình

$$-x^2 = mx - m - 2 \Leftrightarrow x^2 + mx - (m + 2) = 0.$$

Có  $\Delta = m^2 + 4(m+2) = m^2 + 4m + 8 = (m+2)^2 + 4 > 0$  với mọi  $m$

$\Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$  Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2$ .

b) Theo viết ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -m - 2 \end{cases}$$

Để  $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 20$ .

Thay vào ta có  $(-m)^2 - 4(-m-2) = 20 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$  có  $\Delta' = 16 > 0$ .

Vậy phương trình có hai nghiệm  $m_1 = 2$  và  $m_2 = -6$ .

Vậy với  $m = 2$  hoặc  $m = -6$  thì thoả mãn điều kiện bài toán.

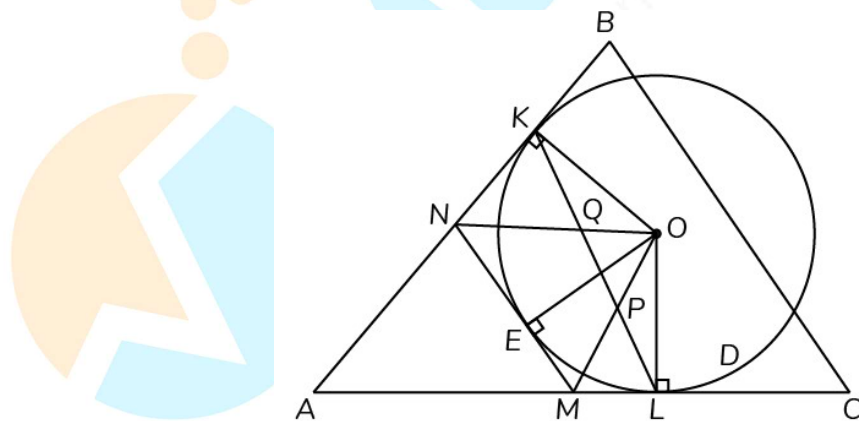
**Câu IV.** Cho tam giác ABC đường tròn ( $\omega$ ) có tâm O tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến (d) của đường tròn ( $\omega$ ) tại E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

1) Chứng minh  $\widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ .

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh  $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$ .

**Lời giải**



1) Do tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau nên ta có  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ . (1)

Tứ giác ALOK có  $\widehat{AKO} + \widehat{ALO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

$$\text{Suy ra } \widehat{BAC} + \widehat{KOL} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}(\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4) = 90^\circ$$

(2)

Từ (1) và (2), suy ra  $\frac{1}{2}\widehat{BAC} + (\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3) = 90^\circ$ .

Hay  $\frac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{MON} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$  (điều phải chứng minh).

2) Ta có  $\widehat{L}_1 = \widehat{E}_2 = \widehat{K}_3 \Rightarrow$  Tứ giác OKEB nội tiếp.

Mặt khác OKNE nội tiếp đường tròn đường kính ON

$\Rightarrow$  Năm điểm O, K, N, E, P cùng nằm trên đường tròn đường kính ON

$\Rightarrow \widehat{NPO} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow NP \perp OM$  (1)

Chứng minh tương tự, ta có:  $MQ \perp ON$  và  $OE \perp MN$ .

Suy ra ba đường cao MQ, NP và OE của tam giác OMN đồng quy.

3) Từ câu 2, suy ra  $KQ = QE$  và  $PL = PE$ .

Tứ giác ONEP nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{QNE} = \widehat{EPM}$ ;

Tứ giác OMEQ nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{NQE} = \widehat{PEM}$ .

Suy ra  $\triangle NQE \sim \triangle PEM$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{NE}{EP} = \frac{EQ}{EM} \Rightarrow EM \cdot EN = EQ \cdot EP$ .

Do đó:  $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$  (điều phải chứng minh).

**Câu V.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = (x - y)\sqrt{xy}$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + y$ .

**Lời giải**

Vì  $x, y > 0$  mà  $x + y = (x - y)\sqrt{xy} \Rightarrow x > y$ .

Cả hai vế đều dương, bình phương hai vế ta có:

$$(x + y)^2 = xy(x - y)^2 \Rightarrow (x + y)^2 = xy[(x + y)^2 - 4xy]$$

Đặt  $xy = X$ , thay  $P = x + y$  ta có  $P^2 = X(P^2 - 4X) \Leftrightarrow 4X^2 - P^2X + P^2 = 0$ .

Coi đây là phương trình bậc hai của  $X \Rightarrow \Delta = P^4 - 16P^2 = P^2(P^2 - 16)$ .

Để có nghiệm  $X$ , thì  $\Delta \geq 0 \Rightarrow P \geq 4$  (do  $P > 0$ )  $\Rightarrow \min P = 4$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} X = \frac{P^2}{8} = 2 \\ P = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do } x > y \text{ nên } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy GTNN của P bằng 4 khi } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2012 – 2013

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 + 2x} + 2\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x^2 + 4x - 4 = 0$ .**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(\sqrt{x^2 + 2x - 1})^2} + 2(x^2 + 2x - 1) - 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \ (t \geq 0), \text{ ta có } 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } t \geq 0 \text{ nên } t = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

**Câu II.** 1) Cho các số  $a, b, c$  đôi một phân biệt thỏa mãn:  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2012$ .Tính giá trị của biểu thức:  $M = c^2(a+b)$ .

2) Cho 5 số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số dương trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

**Lời giải**

$$1) \text{ Từ } a^2(b+c) = b^2(c+a) \Rightarrow ab + bc + ca = 0 \quad (\text{do } a \neq b)$$

$$\Rightarrow (b-c)(ab + bc + ca) = 0 \Rightarrow b^2a + b^2c - bc^2 - ac^2 = 0.$$

$$\text{Vậy } M = c^2(a+b) = b^2(c+a) = 2012.$$

2) Gọi các số đã cho là  $a_i \ (1 \leq i \leq 5)$ . Biểu diễn  $a_i = 2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i}$ , với  $\alpha_i, \beta_i$  là các số tự nhiên.Xét năm cặp số  $(\alpha_i, \beta_i) \ (1 \leq i \leq 5)$ : mỗi cặp rơi vào một trong bốn trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn), (lẻ, lẻ). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai cặp  $(\alpha_i, \beta_i)$  và  $(\alpha_j, \beta_j) \ (i \neq j)$  cùng thuộc một trường hợp. Khi đó  $\alpha_i + \alpha_j, \beta_i + \beta_j$  là những số chẵn, suy ra  $a_i \cdot a_j$  là một số chính phương.**Câu III.** Cho  $n$  số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  với  $n \geq 3$ . Kí hiệu  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  là số lớn nhất trong các số  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$\text{Chứng minh rằng } \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|}{2n}.$$

**Lời giải**

Áp dụng nhận xét  $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|}{2n} &= \frac{(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) + \dots + (x_n + x_1 + |x_n - x_1|)}{2n} \\ &= \frac{\max\{x_1, x_2\} + \dots + \max\{x_n, x_1\}}{n} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Câu IV.** Trong một lớp học có 36 bàn học cá nhân, được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ 1 đến 9). Sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau một học kỳ cô giáo chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Đối với mỗi học sinh của lớp, giả sử trước khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng thứ  $m$ , cột thứ  $n$  và sau khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở hàng thuộc hàng  $a_m$ , cột thứ  $a_n$ , ta gán cho bạn đó số nguyên  $(a_m + a_n) - (m + n)$ . Chứng minh tổng của 35 số nguyên gán với 35 bạn học sinh không vượt quá 11.

### Lời giải

Bổ sung một học sinh “đặc biệt”  $H$  ngồi vào bàn còn trống. Sau khi chuyển chỗ 35 học sinh của lớp, ta cũng chuyển học sinh  $H$  sang ngồi ở bàn trống mới. Gán cho  $H$  một số nguyên theo quy tắc như đối với các học sinh khác. Với 36 học sinh này (sau khi đã bổ sung  $H$ ), thì việc chuyển chỗ chỉ là một hoán vị  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq 9$ ) các vị trí cho nhau.

Do đó tổng của tất cả các chỉ số hàng và chỉ số cột ứng với 36 học sinh trước khi chuyển chỗ và sau khi chuyển chỗ là như nhau. Điều đó có nghĩa là tổng số các số được gán cho 36 học sinh là bằng 0. Vậy tổng các số được gán cho 35 học sinh của lớp là  $-h$ , với  $h$  là số được gán cho học sinh  $H$ . Rõ ràng  $h \geq (1+1) - (4+9) = -11$ . Do đó tổng các số được gán cho 35 học sinh của lớp là không vượt quá 11.

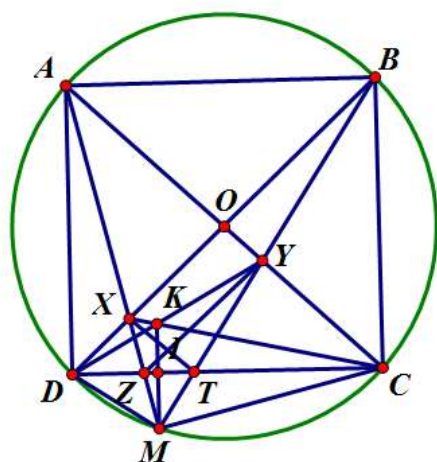
**Câu V.** Cho hình vuông  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  thuộc cung nhỏ  $CD$  của  $(O)$ ,  $M$  khác  $C$  và  $D$ .  $MA$  cắt  $DB, DC$  theo thứ tự tại  $X, Z$ ;  $MB$  cắt  $CA, CD$  theo thứ tự tại  $Y, T$ ;  $CX$  cắt  $DY$  tại  $K$ .

a) Chứng minh rằng:  $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$ ,  $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$  và  $\widehat{CKD} = 135^\circ$ .

b) Chứng minh rằng:  $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = 1$ .

c) Gọi  $I$  là giao điểm của  $MK$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:  $XT, YZ, OI$  cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KZT$ .

### Lời giải



a) Do  $\widehat{XDT} = \widehat{XMT} (= 45^\circ)$  nên tứ giác XDMT nội tiếp mà  $\widehat{DMT} = 90^\circ$  nên  $\widehat{DXT} = 90^\circ$ .

Tam giác AXC và XO là phân giác trong và  $XO \perp XT$  nên XT là phân giác ngoài.

Vậy  $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$ ;  $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$ .

Kẻ  $ME \perp CD$ ,  $E \in (O)$ . CX cắt AD tại V, DE cắt AB tại L.

Dễ thấy  $DZ = DV$ ,  $DZ = AL$  nên  $DV = AL$ . Do đó  $CV \perp DL$ . Tương tự  $DY \perp CE$ .

Do vậy  $\widehat{CKD} = \widehat{XKY} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

b) Ta có  $\widehat{KMX} = \widehat{DAM} = \widehat{DBM} = \widehat{YMO}$ .

Mà tứ giác MXOC nội tiếp nên  $\widehat{MXK} = \widehat{MOY}$ .

Vậy  $\triangle MXK \sim \triangle MOY$ . Suy ra  $\frac{KX}{MX} = \frac{YO}{CO} = \frac{ZD}{CD}$  (do  $YZ \parallel OZ$ ).

Tương tự  $\frac{KY}{MY} = \frac{TC}{CD}$ .

Do đó  $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = \frac{ZD + TC + ZT}{CD} = 1$ .

c) Gọi  $XT \cap YZ = I$ . Theo định lí Thales ta có  $\frac{IT}{IC} = \frac{MT}{MB} = \frac{ZT}{AB} = \frac{ZT}{CD} = \frac{TJ}{CO}$ .

Mặt khác  $TJ \parallel CO$  nên I, J, O thẳng hàng. Vậy XT, YZ, OI đồng quy.

Gọi  $EM \cap AB = H$  thì  $\frac{IJ}{IO} = \frac{IT}{IC} = \frac{MT}{MB} = \frac{MI}{MH} = \frac{IK}{IE}$ .

Vậy  $JK \parallel OE$ . Suy ra  $\frac{JK}{OE} = \frac{IJ}{IO} = \frac{JT}{OC}$ .

Vì  $OE = OC$  nên  $JK = JT = JZ$ . Do đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2013 – 2014

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Cho biểu thức:  $Q = \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}}$  với  $a, b > 0, a \neq b$ .

Chứng minh giá trị của  $Q$  không phụ thuộc vào  $a, b$ .

2) Các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$ .

Chứng minh đẳng thức:  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có: } Q &= \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a}(a-b)} \\ &= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 0. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Ta có } a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (*)$$

$$\text{Từ } a + b + c = 0, \text{ ta có } ab + bc + ca = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}.$$

Thay vào (\*) ta có điều phải chứng minh.

**Câu II.** Cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = -mx + \frac{1}{2m^2}$  (tham số  $m \neq 0$ ).

1) Chứng minh rằng với  $m \neq 0$ ,  $(d)$  cắt  $(P)$  tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  là 2 giao điểm đó, tìm giá trị nhỏ nhất của  $M = y_1^2 + y_2^2$ .

**Lời giải**

1) Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $x^2 + mx - \frac{1}{2m^2} = 0$  có  $\Delta = m^2 + \frac{2}{m^2} > 0$ ,

$m \neq 0$ , suy ra điều cần chứng minh.

2) Do  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in (P)$  nên

$$y_1^2 + y_2^2 = x_1^4 + x_2^4 = \left[ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \right]^2 - 2x_1^2x_2^2 = m^4 + \frac{1}{2m^4} + 2 \geq 2\sqrt{m^4 \cdot \frac{1}{2m^4}} + 2 = \sqrt{2} + 2.$$

Vậy  $\min(y_1^2 + y_2^2) = 2 + \sqrt{2}$  khi  $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Câu III.** Giả sử  $a, b, c$  là các số thực,  $a \neq b$  sao cho 2 phương trình  $x^2 + ax + 1 = 0$ ,  $x^2 + bx + c = 0$  có nghiệm chung và 2 phương trình  $x^2 + x + a = 0$ ,  $x^2 + cx + b = 0$  có nghiệm chung. Tính  $a + b + c$ .

**Lời giải**

Giả sử  $x_1$  là nghiệm chung của hai phương trình  $x^2 + ax + 1 = 0$  (1);  $x^2 + bx + c = 0$  (2) (do  $a \neq b$ )  
 $x_2$  là nghiệm chung của hai phương trình  $x^2 + x + a = 0$  (3);  $x^2 + cx + b = 0$  (4).

Do  $a \neq b$  tìm được  $x_1 = \frac{c-1}{a-b}$ ,  $x_2 = \frac{a-b}{c-1} \Rightarrow x_1x_2 = 1$ .

Theo định lí Viét suy ra  $x_2$  là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_2^2 + ax_2 + 1 = 0 \\ x_2^2 + x_2 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(x_2-1) = 0.$$

Nếu  $a = 1$ , thay vào phương trình (1) được  $x^2 + x + 1 = 0$ , phương trình này vô nghiệm (loại).

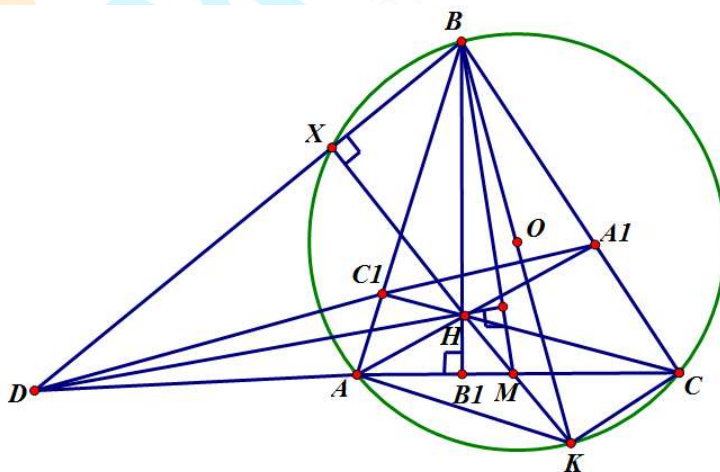
$$\text{Với } x_2 = 1, \text{ thay vào các phương trình (3) và (4) ta được } \begin{cases} 2 + a = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -3.$$

Vậy  $a + b + c = -3$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $AA_1 = BB_1 = CC_1$  cắt nhau ở  $H$ ,  $AC_1$  cắt  $AC$  tại  $D$  và  $X$  là giao điểm thứ 2 của  $BD$  và  $(O)$ .

1. Chứng minh  $DX \cdot DB = DC_1 \cdot DA_1$ .
2. Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ . Chứng minh  $DH \perp BM$ .

**Lời giải**



1) Do  $B, X, A, C \in (O)$  nên  $DX \cdot DB = DA \cdot DC$ .

Dễ thấy  $A_1, C_1, A, C$  thuộc đường tròn đường kính  $AC$  nên  $DA \cdot DC = DC_1 \cdot DA_1$ .

Suy ra  $DX \cdot DB = DC_1 \cdot DA_1$ .

2) Từ 1) suy ra  $X$  thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BA_1C_1$  đường kính  $BH$  nên  $HX \perp XB$ .

Gọi  $XH \cap (O) = K$  thì  $BK$  là đường kính của đường tròn  $(O)$  nên  $KC \perp BC$ .

Mà  $AA_1 \perp BC$  suy ra  $KC \parallel AA_1$ . Tương tự  $KA \parallel CC_1$ .

Do đó tứ giác  $CKAH$  là hình bình hành, suy ra  $M, H, K, X$  thẳng hàng.

Vậy  $H$  là trực tâm tam giác  $BDM$ , suy ra  $DH \perp BM$ .

**Câu V.** Các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2011} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} \\ \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2012} + \sqrt{y+2013} \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $x = y = z$ .

**Lời giải**

Điều kiện  $x \geq -2011, y \geq -2011, z \geq -2011$ .

Không giảm tổng quát giả sử  $x = \max\{x, y, z\}$ .

$$\text{Ta có } \sqrt{x+2013} - \sqrt{x+2012} + \sqrt{x+2012} - \sqrt{x+2011} = \sqrt{y+2012} - \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2013} - \sqrt{z+2012}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2013} + \sqrt{x+2012}} + \frac{1}{\sqrt{x+2012} + \sqrt{x+2011}} = \frac{1}{\sqrt{y+2012} + \sqrt{y+2011}} + \frac{1}{\sqrt{z+2013} + \sqrt{z+2012}} \quad (1).$$

Do  $x \geq y, x \geq z$  nên VT(1)  $\leq$  VP(1). Đẳng thức xảy ra khi  $x = y = z$ .

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2013 – 2014

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức sau:

(i):  $(a + b)(b + c)(c + a) = abc.$

(ii):  $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3.$

Chứng minh rằng  $abc = 0.$

2) Các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $ab > 2013a + 2014b.$

Chứng minh bất đẳng thức  $a + b > (\sqrt{2013} + \sqrt{2014})^2.$

**Lời giải**

1) Từ i) và ii) suy ra  $abc(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3.$

Nếu  $abc \neq 0$  thì suy ra  $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ac + a^2) = a^2b^2c^2$  (1)

Lại có  $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ac + a^2) \geq |ab| \cdot |bc| \cdot |ca| = a^2b^2c^2$

Kết hợp với (1) suy ra  $a = b = c$ , do đó  $8a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow abc = 0$ , mâu thuẫn với  $abc \neq 0.$

Vậy  $abc = 0.$

2) Từ giả thiết suy ra  $1 > \frac{2013}{b} + \frac{2014}{a} \Rightarrow a + b > 2013 + \frac{2013a}{b} + \frac{2014b}{a} + 2014$   
 $\geq 2013 + 2\sqrt{\frac{2013a}{b} \cdot \frac{2014b}{a}} + 2014 = (\sqrt{2013} + \sqrt{2014})^2.$

**Câu II.** Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ  $(x; y)$  thỏa mãn hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y \\ 6x^2 - 19xy + 15y^2 = 1 \end{cases}$

**Lời giải**

Với  $x = 0$  thì hệ phương trình vô nghiệm.

Với  $x \neq 0$ , đặt  $y = tx (t \in \mathbb{Q})$ , hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} x^2(1 - 2t^3) = 1 + 4t \\ x^2(15t^2 - 19t + 6) = 1 \end{cases}$

Suy ra  $\frac{1 + 4t}{1 - 2t^3} = \frac{1}{15t^2 - 19t + 6} \Leftrightarrow (2t - 1)(31t^2 - 15t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$  (do  $t \in \mathbb{Q}$ ).

Do đó  $x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 1.$

Vậy  $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; 1)\}.$

**Câu III.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , ký hiệu  $S_n$  là tổng của  $n$  số nguyên tố đầu tiên

( $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3, S_3 = 2 + 3 + 5, \dots$ ). Chứng minh rằng trong dãy số  $S_1, S_2, S_3, \dots$  không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương.

**Lời giải**



Kí hiệu  $p_n$  là số nguyên tố thứ  $n$ .

Giả sử tồn tại  $m \in \mathbb{N}^*$  mà  $S_{m-1} = k^2$ ;  $S_m = l^2$ ;  $k, l \in \mathbb{N}^*$ .

Vì  $S_2 = 5, S_3 = 10, S_4 = 17$  nên  $m > 4$ .

Ta có  $p_m = S_m - S_{m-1} = (l-k)(l+k)$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} l-k=1 \\ l+k=p_m \end{cases}$$

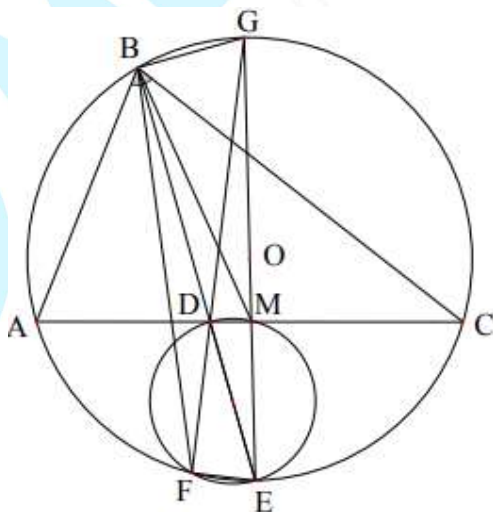
$$\text{Do đó } p_m = 2l-1 = 2\sqrt{S_m} - 1 \Rightarrow S_m = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Do } m > 4 \text{ nên } S_m &\leq (1+3+5+7+\dots+p_m) + 2 - 1 - 9 \\ &= 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + \dots + \left[\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2\right] - 8 \\ &= \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2 - 8 < \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2. \text{ Mâu thuẫn với (1).} \end{aligned}$$

**Câu IV.** Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), BD là đường phân giác của góc ABC. Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Đường tròn (O<sub>1</sub>) đường kính DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

- 1) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với BF qua đường thẳng BD đi qua trung điểm cạnh AC.
- 2) Biết tam giác ABC vuông tại B,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và bán kính của đường tròn (O) bằng R. Hãy tính bán kính của đường tròn (O<sub>1</sub>) bằng R.

**Lời giải**



1) Gọi  $G = DF \cap (O)$  thì GE là đường kính của (O).

Ta có  $\widehat{EA} = \widehat{EC}$ . Gọi M là trung điểm của AC suy ra G, M, O, E thẳng hàng.

Do đó  $\angle GBE = 90^\circ$ , mà  $\angle GMD = 90^\circ$  nên tứ giác BDMG nội tiếp đường tròn đường kính GD.

Ta có  $\widehat{MBD} = \widehat{DGM} = \widehat{FGE} = \widehat{FBE}$ . Suy ra BF và BM đối xứng nhau qua BD.

2) Khi  $\widehat{ABC} = 90^\circ$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  thì  $AB = R$ ,  $BC = R\sqrt{3}$ ,  $AC = 2R$ .

Theo tính chất phân giác  $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \sqrt{3}DA$ .

Kết hợp với  $DA + DC = 2R$  suy ra  $\begin{cases} DA = (\sqrt{3} - 1)R; DM = R - DA = (2 - \sqrt{3})R \\ DE = \sqrt{ME^2 + MD^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}R \end{cases}$ .

Vậy bán kính đường tròn  $(O_1)$  bằng  $2\sqrt{2 - \sqrt{3}}R$ .

**Câu V.** Độ dài ba cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên tố. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

**Lời giải**

Giả sử  $a, b, c$  là các số nguyên tố và là độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Đặt  $P, S$  thứ tự là chu vi, diện tích của tam giác ABC.

Ta có  $16S^2 = P(P - 2a)(P - 2b)(P - 2c)$ . (1)

Giả sử  $S$  là số tự nhiên. Từ (1) suy ra  $P = a + b + c$  là số chẵn.

Nếu  $a, b, c$  có một số chẵn và hai số lẻ, giả sử  $a$  chẵn thì  $a = 2$ .

Nếu  $b \neq c$  thì  $|b - c| \geq 2 = a$ , vô lý

Nếu  $b = c$  thì  $S^2 = b^2 - 1 \Rightarrow (b - S)(b + S) = 1$ . (2)

Đẳng thức (2) không xảy ra vì  $b, S$  là các số tự nhiên.

**Câu VI.** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  là các số nguyên dương lớn hơn bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} = 407$ . Tồn tại hay không số nguyên dương  $n$  sao cho tổng các số dư của các phép chia  $n$  cho 22 số  $a_1, a_2, \dots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$  bằng 2012.

**Lời giải**

Giả sử tồn tại số nguyên dương  $n$  thỏa mãn đề bài, ta luôn có tổng các số dư trong phép chia  $n$  cho  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  không thể vượt quá  $407 - 11 = 396$ ; cho các số  $4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$  không vượt quá  $4 \cdot 407 - 11 = 1617$ . Suy ra tổng các số dư trong phép chia  $n$  cho các số  $a_1, a_2, \dots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$  không thể vượt quá  $396 + 1617 = 2013$ . Kết hợp với giả thiết tổng các số dư bằng 2012, suy ra khi chia  $n$  cho 22 số trên thì có 21 phép chia có số dư lớn nhất và một phép chia có số dư nhỏ hơn số chia 2 đơn vị.

Do đó tồn tại  $k$  sao cho  $a_k, 4a_k$  thỏa mãn điều kiện trên. Khi đó một trong hai số  $n + 1; n + 2$  chia hết cho  $a_k$ , số còn lại chia hết cho  $4a_k$ . Suy ra  $\text{ƯCLN}(n + 1; n + 2) \geq a_k \geq 2$ , điều này không đúng. Vậy không tồn tại  $n$  thỏa mãn đề ra.

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2014 – 2015

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho các số thực dương  $a, b; a \neq b$ .

Chứng minh rằng 
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} - \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} = 0 \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

**Câu II.** Quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được  $\frac{3}{4}$  quãng đường, xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường còn lại cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

**Lời giải**

Gọi vận tốc trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường ban đầu là  $x$  (km/h) ( $x > 10$ ).

Thì vận tốc trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường sau là  $x - 10$  (km/h).

Thời gian đi trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường ban đầu là  $\frac{90}{x}$  (giờ).

Thời gian đi trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường sau là  $\frac{30}{x}$  (giờ).

Vì thời gian đi cả 2 quãng đường là 11 giờ 40 phút – 7 giờ – 10 phút =  $\frac{9}{2}$  (giờ).

Ta có phương trình:

$$\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{180(x-10)}{2x(x-10)} + \frac{60x}{2x(x-10)} = \frac{9x(x-10)}{2x(x-10)}$$

$$\Leftrightarrow 240x - 1800 = 9x^2 - 90x \Leftrightarrow 9x^2 - 330x + 1800 = 0.$$

Giải ra  $x = 30$  thỏa mãn điều kiện. Thời gian đi trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường ban đầu  $\frac{90}{30} = 3$  (giờ).

Vậy xe hỏng lúc 10 giờ.

**Câu III.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng

$$(d): y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3} \quad (m \text{ là tham số}).$$

1) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của  $m$  đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2) Gọi  $x_1; x_2$  là hoành độ các giao điểm (d) và (P), đặt  $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$ .

Chứng minh rằng:  $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3$ .

**Lời giải**

$$1) \text{ Xét hệ phương trình } \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{-2(m+1)}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^2 + 2(m+1)x - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Phương trình (1) có hệ số a và c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt mọi  $m$  nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi  $m$ .

$$2) \text{ Theo Viét } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+1)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = \frac{-3(x_1 + x_2)}{2} \\ 3x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 + (m+1)(x_1^2 - x_2^2) - x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] = 2x_1^3 - 2x_2^3 - 3(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_2^2) - 2x_1 + 2x_2$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] = -x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2(x_2 - x_1) - 2(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] = -x_1^3 + x_2^3 + (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] = -[x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2(x_1 - x_2)]$$

$$\Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] = -[(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)]$$

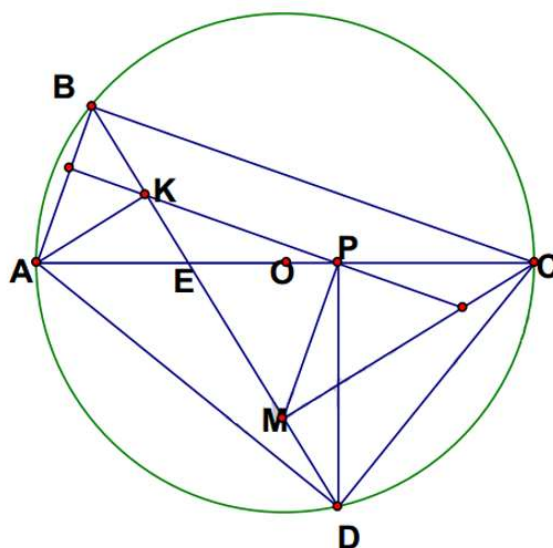
$$\Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] = -(x_1 - x_2)^3.$$

$$\text{Vậy } f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3.$$

**Câu IV.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC = 2R. Gọi K, M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE ( $K \neq B; K \neq E$ ). Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

- 1) Chứng minh tứ giác AKPD nội tiếp đường tròn.
- 2) Chứng minh  $KP \perp PM$ .
- 3) Biết  $\widehat{ABD} = 60^\circ$  và  $AK = x$ . Tính BD theo R và x.

**Lời giải**



1) Ta có  $\widehat{PAD} = \widehat{PKD}$  (cùng bằng  $\widehat{CBD}$ ) nên tứ giác AKPD nội tiếp.

2) Vì tứ giác AKPD nội tiếp nên  $\widehat{APD} = \widehat{AKD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DPC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow MDCP$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MPD} = \widehat{MCD}$ .

Mà  $\widehat{MCD} = \widehat{ACB}$  (cùng phụ với 2 góc bằng nhau là  $\widehat{MDC} = \widehat{ACB}$ ) nên  $\widehat{MPD} = \widehat{ACB}$ .

Lại có  $\widehat{APK} = \widehat{ACB}$  (đồng vị) nên  $\widehat{MPD} = \widehat{APK}$ .

Mặt khác  $\widehat{MPD} + \widehat{MPE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{APK} + \widehat{MPE} = 90^\circ$  suy ra  $KP \perp PM$ .

3) Ta có  $AD = R\sqrt{3}$ .

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông AKD vuông tại K, ta được  $KD = \sqrt{3R^2 - x^2}$ .

Xét tam giác BAK vuông tại K có  $\widehat{ABK} = 60^\circ \Rightarrow BK = AK \cdot \cot \widehat{ABK} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ .

Vậy  $BD = BK + KD = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3R^2 - x^2}$  (đơn vị độ dài).

**Câu V.** Giải phương trình:  $\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4$ .

**Lời giải**

Điều kiện xác định:  $x \neq \frac{4}{7}$ ;  $x \neq \sqrt[3]{2}$ .

Đặt  $4 - 7x = b$ ;  $x^3 + 2 = a$ ; ( $a$ ;  $b \neq 0$ ).

Ta có: 
$$\begin{cases} x^3 - 56x = x^3 + 2 + 8(4 - 7x) - 34 = a + 8b - 34 \\ 21x + 24 = -3(4 - 7x) + 34 = 32 - 3b \end{cases}$$

Ta có phương trình  $\frac{a + 8b - 34}{b} - \frac{34 - 3b}{a} = 4 \Leftrightarrow a^2 + 8ab - 34a - 34b + 3b^2 = 4ab$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a + 3b - 34) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 3b = 34 \end{cases}$$

Với  $a + b = 0$  ta có  $x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 1 \end{cases}$

Với  $a + 3b = 34$  ta có  $x^3 - 21x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 5 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{-4; -3; -1; 1; 2; 5\}$ .

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2014 – 2015

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Giả sử  $a, b, c, x, y, z$  là các số thực khác 0 thỏa mãn  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$  và  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

Chứng minh rằng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{cxy + ayz + bxz}{abc}\right) = 1. \quad (*) \end{aligned}$$

Từ  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$  thay vào (\*), ta được

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Câu II.** Tìm tất cả các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$ .

**Lời giải**

Điều kiện xác định  $|x| \leq \sqrt{3}; |y| \leq 1; |z| \leq \sqrt{2}$ .

Áp dụng bất đẳng thức  $AB \leq \frac{A^2+B^2}{2}$  ta có

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} \leq \frac{x^2+1-y^2}{2} + \frac{y^2+2-z^2}{2} + \frac{z^2+3-x^2}{2} = 3$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 0 \\ z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy cặp số  $(x; y; z)$  thỏa mãn là  $(x; y; z) = (1; 0; \sqrt{2})$ .

**Câu III.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên  $n \geq 6$  thì số  $a_n = 1 + \frac{2.6.10 \dots (4n-2)}{(n+5)(n+6) \dots (2n)}$  là một số

chính phương.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } a_n = 1 + \frac{2^n \cdot [1.3.5 \dots (2n-1)] \cdot (n+4)!}{(2n)!} = 1 + \frac{2^n \cdot (n+4)!}{2.4.6 \dots 2n}$$



$$= 1 + \frac{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} = 1 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = (n^2 + 5n + 5)^2.$$

Vì  $n$  nguyên nên  $a_n$  là số chính phương.

**Câu IV.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương  $abc = 1$ .

Chứng minh rằng  $\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

Đặt  $a = \frac{x}{y}$ ;  $b = \frac{y}{z}$ ;  $c = \frac{z}{x}$ , ta có

$$P = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} = \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$\Leftrightarrow 3 - P = 1 - \frac{yz}{xy+xz+2yz} + 1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$\Leftrightarrow 3 - P = (xy + yz + xz) \left( \frac{1}{xy + xz + 2yz} + \frac{1}{xy + yz + 2xz} + \frac{1}{xz + yz + 2xy} \right)$$

$$\geq (xy + yz + xz) \frac{9}{4xy + 4yz + 4xz} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} xy + yz + 2xz = xy + 2yz + xz = 2xy + yz + xz \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**Câu V.** Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho  $MN \parallel AP$ . Chứng minh rằng

- 1) Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và  $\widehat{NOP} = 45^\circ$ .
- 2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.
- 3) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

**Lời giải**

1) Đặt  $AB = a$ , ta có  $AC = BD = a\sqrt{2}$ .

Ta có  $AP \parallel MN$  và  $BN \parallel AD \Rightarrow \widehat{DAP} = \widehat{MNB}$

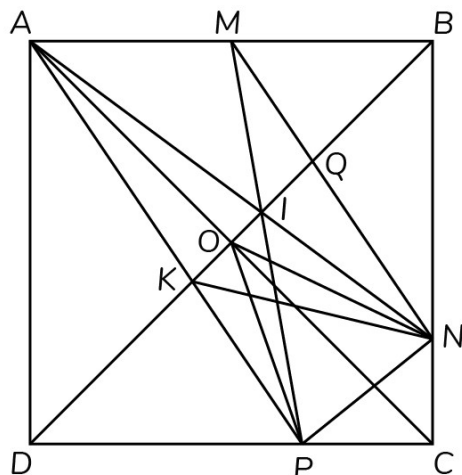
$$\Rightarrow \triangle ADP \sim \triangle NBM \Rightarrow \frac{BM}{DP} = \frac{BN}{AD} \Rightarrow BN \cdot DP = \frac{a^2}{2}.$$

Mà  $OB \cdot OD = \frac{a^2}{2}$  nên  $OB \cdot OD = BN \cdot DP$

$$\Rightarrow \frac{OD}{BN} = \frac{DP}{OB} \Rightarrow \triangle BNO \sim \triangle DOP \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BON} = \widehat{OPD}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{NOP} &= 180^\circ - \widehat{BON} - \widehat{POD} \\ &= 180^\circ - \widehat{OPD} - \widehat{POD} = \widehat{ODP} = 45^\circ. \end{aligned}$$



2) Theo chứng minh trên, ta có  $\triangle BNO \sim \triangle DOP \Rightarrow \frac{ON}{OP} = \frac{OB}{DP} = \frac{OD}{DP}$ .

Mà  $\widehat{ODP} = \widehat{NOP} = 45^\circ$  nên  $\triangle DOP \sim \triangle ONP$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{DOP} = \widehat{ONP}$

$\Rightarrow DO$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OPN$ .

Mặt khác  $OD \perp OC$  nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OPN$  thuộc  $OC$ .

3) Gọi giao điểm của  $BD$  với  $MN$  và  $AP$  lần lượt là  $Q$  và  $K$ .

Áp dụng tính chất tia phân giác, ta có  $\frac{QM}{QN} = \frac{BM}{BN}$ ;  $\frac{KP}{KA} = \frac{DP}{AD} \Rightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow \frac{QM}{KP} = \frac{QN}{KA}$ . (1)

Giả sử  $MP$  cắt  $AN$  tại  $I$  và  $KI$  cắt  $MN$  tại  $H$ .

Áp dụng định lý Thales, ta có  $\frac{HM}{PK} = \frac{HN}{KA}$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $\frac{HM}{HN} = \frac{QM}{QN} \Leftrightarrow Q \equiv H$ .

Vậy ba đường thẳng  $BD, PM, AN$  đồng quy.

**Câu VI.** Có bao nhiêu tập hợp con  $A$  của tập hợp  $\{1; 2; 3; 4; \dots; 2014\}$  thỏa mãn điều kiện  $A$  có ít nhất 2 phần tử và nếu  $x \in A, y \in A, x > y$ , thì  $\frac{y^2}{x-y} \in A$ .

### Lời giải

Với mỗi tập  $A$  là tập con của  $S = \{1; 2; 3; \dots; 2014\}$  thỏa mãn đề bài, gọi  $a$  và  $b$  lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của  $A$  ( $a, b \in S, a < b$ ).

Ta chứng minh  $b \leq 2a$ , thật vậy, giả sử  $b > 2a$ .

Theo giả thiết  $c = \frac{a^2}{b-a} \in A$ .

Mà  $b > 2a \Rightarrow b - a > a > 0 \Rightarrow c = \frac{a^2}{b-a} < \frac{a^2}{a} = a$ , mâu thuẫn với  $a$  là phần tử nhỏ nhất của  $A$ .

Vậy  $b \leq 2a$ .

Gọi  $d$  là phần tử lớn nhất của tập  $B = A \setminus \{b\}$ .

Ta chứng minh  $b \geq 2d$ . Thật vậy giả sử  $b < 2d$ , theo giả thiết thì  $e = \frac{d^2}{b-d} \in A$ .

Mà  $b < 2d$  nên  $0 < b - d < d \Rightarrow e > \frac{d^2}{d} = d$ .

Suy ra  $e \in A$  nhưng  $e \notin B \Rightarrow e = b \Rightarrow \frac{d^2}{b-d} = b \Rightarrow d^2 = b^2 - bd \Rightarrow 5d^2 = 4b^2 - 4bd + d^2 = (2b - d)^2$

(mâu thuẫn vì VP là số chính phương, VT không là số chính phương).

Vậy  $b \geq 2d \Rightarrow 2d \leq b \leq 2a \Rightarrow d \leq a$ .

Mà  $a \leq d$  ( $a$  và  $d$  lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của  $B$ ) nên  $a = d \Rightarrow b = 2a$ .

Vậy  $A = \{a; 2a\}$ .

Kiểm tra lại ta thấy  $A$  thỏa mãn đề bài.

Vì  $a \in S$  và  $2a \in S$  nên  $2 \leq 2a \leq 2014 \Rightarrow 1 \leq a \leq 1007$ .

Vậy số tập con  $A$  thỏa mãn đề bài là 1007 tập.

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2015 – 2016

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$ .

1) Chứng minh  $P = \frac{1}{ab}$ .

2) Giả sử  $a, b$  thay đổi sao cho  $4a + b + \sqrt{ab} = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có: } P &= \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} + \frac{ab}{ab}\right)\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2}{\frac{a^4}{a^2b^2} + \frac{b^4}{a^2b^2} - \left(\frac{a^3b}{a^2b^2} + \frac{ab^3}{a^2b^2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}\right)\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4 + b^4 - a^3b - ab^3}{a^2b^2}} = \frac{(a^3 - b^3)(a-b)}{(a^3 - b^3)(a-b)} = \frac{1}{ab} \end{aligned}$$

Vậy  $P = \frac{1}{ab}$ .

2) Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương  $4a$  và  $b$  ta có:

$$4a + b \geq 2\sqrt{4a \cdot b} = 4\sqrt{ab} \Rightarrow 1 = 4a + b + \sqrt{ab} \geq 5\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{25} \Rightarrow P = \frac{1}{ab} \geq 25.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} b = 4a > 0 \\ 4a + b + \sqrt{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a > 0 \\ 10a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Vậy  $\min P = 25 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}, b = \frac{2}{5}$ .

**Câu II.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$  với  $m$  là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi  $m = 2$ .

2) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ . Giả sử  $(x_0; y_0)$  là một nghiệm của hệ.

Chứng minh đẳng thức  $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$ .

**Lời giải**

1) Thay  $m = 2$ , hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -12 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -19 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{19}{5} \\ 2x + \frac{19}{5} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $\left(\frac{8}{5}; \frac{19}{5}\right)$ .

$$2) \text{ Ta có: } \begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m \\ m(my + 2 - 4m) + y = 3m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m \\ m^2y + 2m - 4m^2 + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m & (1) \\ (m^2 + 1)y = m + 1 + 4m^2 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) là phương trình bậc nhất ẩn  $y$  có hệ số  $a = m^2 + 1 \neq 0, \forall m$  nên phương trình (2)

có nghiệm duy nhất  $y = \frac{m + 1 + 4m^2}{m^2 + 1}, \forall m$ .

$$\text{Thay vào (1) ta được: } x = my + 2 - 4m = \frac{m^2 + m + 4m^3 + 2(m^2 + 1) - 4m(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = \frac{3m^2 - 3m + 2}{m^2 + 1}.$$

$$\text{Do đó: } \forall m, \text{ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } (x_0; y_0) = \left(\frac{3m^2 - 3m + 2}{m^2 + 1}; \frac{m + 1 + 4m^2}{m^2 + 1}\right).$$

$$\text{Vì } (x_0; y_0) \text{ là nghiệm của hệ phương trình đã cho nên } \begin{cases} x_0 - my_0 = 2 - 4m \\ mx_0 + y_0 = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(y_0 - 4) = x_0 - 2 \\ 1 - y_0 = m(x_0 - 3) \end{cases}$$

Xét  $m = 0 \Rightarrow x_0 = 2$  và  $y_0 = 1$ . Khi đó (\*) đúng.

$$\begin{aligned} \text{Xét } m \neq 0. \text{ Ta có: } m(y_0 - 4)(1 - y_0) &= m(x_0 - 2)(x_0 - 3) \Leftrightarrow -y_0^2 + 5y_0 - 4 = x_0^2 - 5x_0 + 6 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh đúng với mọi  $m$ .

**Câu III.** Cho  $a, b$  là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình  $a(a - x)^2 + b(x - b)^2 = 0$  có nghiệm duy nhất. Chứng minh  $|a| = |b|$ .

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} a(x^2 - 2ax + a^2) + b(x^2 - 2bx + b^2) &= 0 \Leftrightarrow ax^2 - 2a^2x + a^3 + bx^2 - 2b^2x + b^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + b)x^2 - 2x(a^2 + b^2) + a^3 + b^3 = 0. \end{aligned}$$

• Xét  $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ , phương trình (1) trở thành:

$$-2x(a^2 + a^2) + a^3 - a^3 = 0 \Leftrightarrow -4a^2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (do } a \neq 0).$$

Do đó với  $a + b = 0$  thì (1) có nghiệm duy nhất  $x = 0$ .

- Xét  $a + b \neq 0$ . Khi đó (1) là phương trình bậc hai ẩn  $x$ .

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta = (a^2 + b^2)^2 - (a+b)(a^3 + b^3) = 0 \Leftrightarrow a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - (a^4 + ab^3 + a^3b + b^4) = 0$$

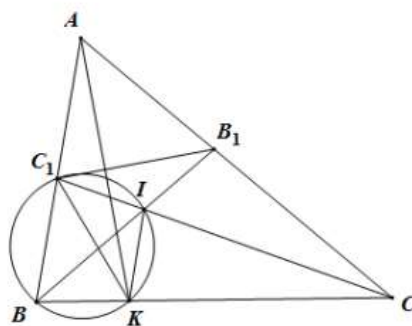
$$\Leftrightarrow 2a^2b^2 - ab^3 - a^3b = 0 \Leftrightarrow -ab(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ (do } ab \neq 0)$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $b = \pm a \Leftrightarrow |a| = |b|$ .

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{ABC}$ ;  $\widehat{ACB}$  nhọn và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Các đường phân giác trong  $BB_1$ ,  $CC_1$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $I$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $AB_1IC_1$  nội tiếp.
- 2) Gọi  $K$  là giao điểm thứ hai (khác  $B$ ) của đường thẳng  $BC$  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BC_1I$ . Chứng minh tứ giác  $CKIB_1$  nội tiếp.
- 3) Chứng minh  $AK \perp B_1C_1$ .

**Lời giải**



- 1) Ta có  $\widehat{B_1IC_1} = \widehat{BIC}$  (hai góc đối đỉnh);

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{ACB}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B_1IC_1} + \widehat{BAC} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Mà hai góc này là hai góc đối nhau của tứ giác  $AC_1IB_1$  nên tứ giác  $AC_1IB_1$  là tứ giác nội tiếp.

- 2) Vì tứ giác  $BC_1IK$  là tứ giác nội tiếp (giả thiết) nên  $\widehat{BKI} = \widehat{AC_1I}$  (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện). (1)

Vì tứ giác  $AC_1IB_1$  là tứ giác nội tiếp (chứng minh trên) nên  $\widehat{AC_1I} = \widehat{IB_1C}$  (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện). (2)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{IB_1C} = \widehat{BKI} = 180^\circ - \widehat{CKI} \Rightarrow \widehat{IB_1C} + \widehat{CKI} = 180^\circ.$$

Đây là hai góc đối của tứ giác  $CKIB_1$  nên tứ giác này là tứ giác nội tiếp.

- 3) Vì  $BC_1IK$  là tứ giác nội tiếp nên  $\widehat{BKC_1} = \widehat{BIC_1} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CKC_1} = 180^\circ - \widehat{BKC_1} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CKC_1} + \widehat{CAC_1} = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác  $AC_1KC$  là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{C_1KA} = \widehat{C_1CA} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } C_1A)$$

$$\Rightarrow \widehat{C_1AK} = \widehat{C_1CK} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } C_1K).$$

Mặt khác  $CC_1$  là phân giác  $\widehat{C}$  (giả thiết) nên  $\widehat{C_1CK} = \widehat{C_1CA} \Rightarrow \widehat{C_1KA} = \widehat{C_1AK}$ .

$$\text{Suy ra tam giác } C_1AK \text{ cân tại } C_1 \Rightarrow C_1A = C_1K. \quad (3)$$

$$\text{Tương tự ta có: } B_1A = B_1K. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra  $C_1B_1$  là trung trực của đoạn thẳng  $AK \Rightarrow AK \perp B_1C_1$  (điều phải chứng minh).

**Câu V.** Tìm các số thực không âm  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$ .

### Lời giải

Với mọi  $x, y$  không âm, ta có:  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} \geq x. (*)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $x = \frac{1}{2}$ .

Từ  $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy. (**)$

Dấu "=" xảy ra  $x = y$ .

Áp dụng BĐT (\*) với  $x = a$  và  $x = b$  ta được 
$$\begin{cases} a^2 + b + \frac{3}{4} = \left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + b + \frac{1}{2} \geq a + b + \frac{1}{2} > 0 \\ b^2 + a + \frac{3}{4} = \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + a + \frac{1}{2} \geq b + a + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Áp dụng BĐT (\*\*) ta được:

$$\left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 = \left[\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{4}\right)^2\right] \geq 4\left(a + \frac{1}{4}\right)\left(b + \frac{1}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = \frac{1}{2}$ .

Vậy  $a = b = \frac{1}{2}$  là giá trị cần tìm.

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2015 – 2016

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** 1) Cho  $a \geq 0, a \neq 1$ .

Rút gọn biểu thức  $S = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} : \left[ \frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right]$ .

2) Cho  $x, y$  thỏa mãn  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  và  $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ .

**Lời giải**

1) Ta có  $S = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} : \left[ \frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right]$   
 $= (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + (\sqrt{a} - 1) : \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{2(\sqrt{a} - 1)} = 2 + 2 = 4$ .

2) Ta có  $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow 2(x+y) = 1 + 3xy \Leftrightarrow x+y = \frac{1+3xy}{2}$ .

Thay  $x+y = \frac{1+3xy}{2}$ , ta có

$$P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$$

$$= x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 3xy} = \frac{1+3xy}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+3xy}{2}\right)^2 - 3xy} = \frac{1+3xy}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-3xy}{2}\right)^2} = \frac{1+3xy}{2} + \left| \frac{1-3xy}{2} \right|$$

Nếu  $xy > \frac{1}{3}$  thì  $P = 2$ .

Nếu  $xy < \frac{1}{3}$  thì  $P = 3xy$ .

**Câu II.** Một xe tải có chiều rộng 2,4m và chiều cao 2,5m muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là  $2\sqrt{5}$  m (bỏ qua độ dày của cổng)

1) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi parabol  $(P): y = ax^2$  với  $a < 0$  là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh  $a = -1$ .

2) Hỏi xe tải có thể qua cổng được không? Tại sao?

**Lời giải**

1) Áp dụng định lý Pytago ta có  $|y| = 4$ .

Thay  $x = 2$ , ta được  $4 = |x| \cdot 4$  suy ra  $a = -1 \Rightarrow y = -x^2$ .

2) Thay  $x = 1,2$  ta có  $y = 1,44$ .

Khoảng cách còn lại  $4 - 1,44 = 2,56$  vậy ô tô đi qua được.

**Câu III.** Cho 2 số nguyên  $a, b$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$ . Chứng minh  $a$  và  $b$  là hai số chính phương liên tiếp.

**Lời giải**

Ta có  $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a \Leftrightarrow (a - b + 1)^2 = 4a$  là số chính phương suy ra  $a$  là số chính phương  $a = x^2$  ( $x$  là số nguyên).

Suy ra  $(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - b + 1 = 2x \Leftrightarrow b = (x - 1)^2$ .

Vậy  $a$  và  $b$  là hai số chính phương liên tiếp.

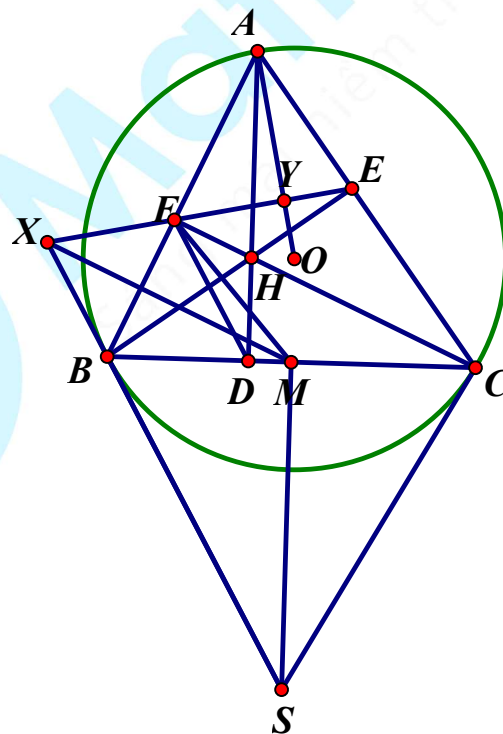
**Câu IV.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ).  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .  $O$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$  đồng quy tại  $H$ . Các tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $B, C$  cắt nhau tại  $S$ . Gọi  $X, Y$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $EF$  với các đường thẳng  $BS, AO$ . Chứng minh rằng:

1)  $MX \perp BF$ .

2) Hai tam giác  $SMX$  và  $DHF$  đồng dạng.

3)  $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$ .

**Lời giải**



1) Ta có  $BE, CF, AD$  là ba đường cao.

Suy ra các tứ giác  $BFHD, BFEC, BFEC$  nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{XFB} = \widehat{FBX}$  (cùng chắn cung AB, góc trong bằng góc ngoài đối diện).

Tam giác BXF cân suy ra  $XF = XB$ .

Vì M là trung điểm của BC nên FM là trung tuyến suy ra  $FM = MB$ .

Vậy XM là trung trực BF hay  $MX \perp BF$ .

2) Xét hai tam giác FHD và tam giác XMS.

Ta có  $\widehat{DFH} = \widehat{SXM}$  (vì cùng phụ với hai góc bằng nhau);

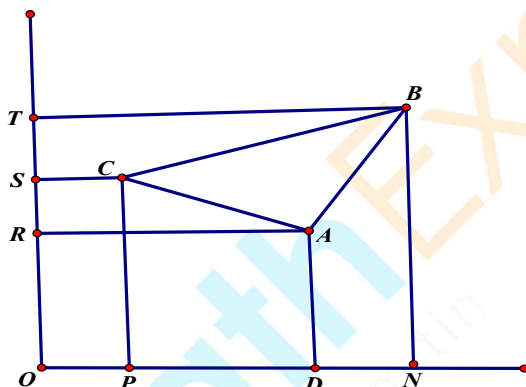
$\widehat{FDH} = \widehat{FBH} = \widehat{BSM}$  (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Vậy hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

3) Ta chứng minh được tam giác AFE đồng dạng tam giác ACB và tam giác AFY đồng dạng tam giác ADC suy ra  $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$ .

**Câu V.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác ABC là một số nguyên.

**Lời giải**



Đặt  $A(x_2; y_2)$ ;  $B(x_3; y_3)$ ;  $C(x_1; y_1)$  thì P có hoành độ là  $x_1$ ; D có hoành độ  $x_2$ , N có hoành độ là  $x_3$ , R có tung độ  $y_2$ , S có tung độ là  $y_1$ , T có tung độ là  $y_3$ .

$$S_{ABC} = S_{CBNP} - S_{ABND} - S_{ADPC} = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(y_3x_3 - y_3x_1 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_3x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 + y_2x_2 - y_2x_2 + y_2x_1 - y_1x_2 + y_1x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(-y_3x_1 - y_2x_1 + y_3x_2 + y_2x_1) = \frac{1}{2}x_1(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}y_3(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC} = x_1(y_2 - y_1) + y_3(x_2 - x_1).$$

Vì các tọa độ là các số nguyên vậy diện tích hai lần diện tích tam giác ABC là số nguyên.

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2016 – 2017

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right)$  với  $0 < a < 1$ .

Chứng minh rằng  $P = -1$ .

**Lời giải**

Điều kiện xác định của biểu thức  $0 < a < 1$

$$\begin{aligned}
 P &= \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left[ \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-(1-a)} \right] \left( \sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left[ \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{(1+a)}-\sqrt{1-a}} \right] \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}-1}{a} = \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{-(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})^2}{2a} \\
 &= \frac{-(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1
 \end{aligned}$$

Vậy  $P = -1$  hay bài toán được chứng minh.

**Câu II.** Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2mx - 1$  với  $m$  là tham số.

- 1) Tìm tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  khi  $m = 1$ .
- 2) Chứng minh với mỗi giá trị của  $m$  thì  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Gọi  $y_1, y_2$  là tung độ của  $A, B$ . Tìm  $m$  sao cho  $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$ .

**Lời giải**

1) Gọi  $(x_0, y_0)$  là tọa độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  khi  $m = 1$ . Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y_0 = -x_0^2 \\ y_0 = 2x_0 - 1 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{2} \\ x_0 = -1 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -3 + 2\sqrt{2} \\ y_0 = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  khi  $m = 1$  là  $(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$  và  $(-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$

2) Gọi  $(x_0, y_0)$  là tọa độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$ . Tương tự ta có  $x_0^2 + 2mx_0 - 1 = 0$

Phương trình trên là phương trình bậc hai có  $\Delta = 4m^2 + 4 > 0$  với mọi  $m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt hay d luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt A và B.

Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ của A và B. Theo hệ thức Viét ta có  $x_1 + x_2 = -2m; x_1 x_2 = -1$

$$\text{Ta có } \begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |(2mx_1 - 1)^2 - (2mx_2 - 1)^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |4m(x_1^2 - x_2^2)[m(x_1 + x_2) - 1]|$$

$$\Leftrightarrow |4m(x_1^2 - x_2^2)[m(x_1 + x_2) - 1]| = |4m(2m^2 + 1)(x_1 - x_2)| = 4(2m^2 + 1)|m(x_1 - x_2)|$$

$$\text{Ta tính } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

Khi đó  $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 8(2m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1}|m|$ . Bình phương hai vế ta có

$$y_1^2 - y_2^2 = 45 \Leftrightarrow 16(4m^4 + 4m^2 + 1)(4m^4 + 4m^2) = 45$$

Đặt  $4m^4 + 4m^2 = t > 0$ . Khi đó phương trình trên trở thành  $16t^2 + 16t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$  (vì  $t > 0$ )

$$\text{Suy ra } 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

Vậy với  $m = \pm \frac{1}{2}$  ta được  $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$ .

**Câu III.** Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120km. Vận tốc trên  $\frac{3}{4}$

quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường AB sau bằng  $\frac{1}{2}$  vận tốc trên  $\frac{3}{4}$

quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc

trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe

trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

**Lời giải**

Gọi  $x$  là vận tốc xe máy đã đi trên  $\frac{1}{4}$  quãng đường AB sau ( $x > 0$ )

Vận tốc xe máy đi trên  $\frac{3}{4}$  quãng đường AB đầu là  $2x$ . Vận tốc xe máy đi từ B trở về A là  $2x + 10$

$$\text{Ta có phương trình } \frac{90}{2x} + \frac{30}{x} + \frac{120}{2x+10} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \frac{45}{x} + \frac{30}{x} + \frac{60}{x+5} = 8 \Leftrightarrow (x-15)(8x+25) = 0$$

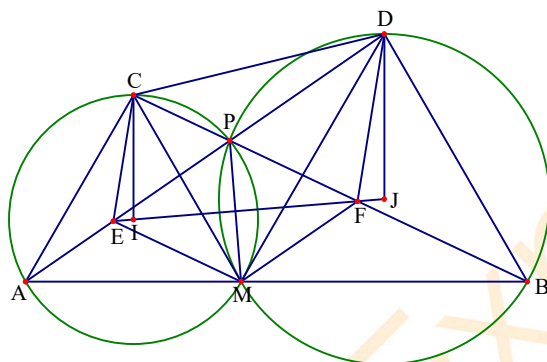
Vì  $8x+25 > 0$  ta được  $x-15=0$  hay  $x=15$ .

Vậy vận tốc xe máy đi từ B về A là  $2x + 10 = 40$  (km/h).

**Câu IV.** Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

- 1) Chứng minh rằng AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh rằng  $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = AB$ .
- 3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh rằng tứ giác CDFE là hình thang.

**Lời giải**



1) Ta có  $AM = CM; MD = MB; \widehat{AMD} = \widehat{CMB}$

Suy ra  $\triangle CMB = \triangle AMD \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{DAM}; \widehat{MBC} = \widehat{MDA}$

Suy ra tứ giác CPMA và tứ giác MPDB nội tiếp

2) Vì  $\widehat{MPB} = \widehat{MDB} = \widehat{CMA} = 60^\circ$ . Suy ra  $180^\circ - \widehat{CMA} = 180^\circ - \widehat{BPM} \Rightarrow \widehat{CPM} = \widehat{CMB}$  lại có  $\widehat{BCM}$

chung nên  $\triangle MPC \sim \triangle BMC$  suy ra  $CP \cdot CB = CM^2$

Chứng minh tương tự ta có  $DP \cdot DA = AM^2$ . Khi đó  $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = \sqrt{AM^2} + \sqrt{CM^2} = AB$

3) Để chứng minh được CDFE là hình thang ta cần chứng minh được CE song song với DF. Để ý ta thấy EF là trục đối xứng của PM. Mà do ta đã có  $\widehat{APM} = \widehat{BPM} = 60^\circ$  nên ta dễ dàng suy ra được

PEMF là hình thoi. Mà theo định lý Talets ta có  $\frac{AE}{AP} = \frac{AM}{AB}$  hay  $\frac{AE}{AC} = \frac{MF}{MD}$ .

Mặt khác ta lại có  $\widehat{CAE} = \widehat{PMD}$  nên tam giác ACE đồng dạng với tam giác MDF.

Do đó  $\widehat{CFM} = \widehat{CEA}$ , từ đây ta suy ra DF song song với CE.

Vậy CEDF là hình thang.

**Câu V.** Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn  $a + b + c = 1$ .

Chứng minh:  $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có  $0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow a^2 \leq a; b^2 \leq b; c^2 \leq c$ . Từ đó ta được

$$\sqrt{5a+4} = \sqrt{a+4a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = a+2$$

$$\sqrt{5b+4} = \sqrt{b+4b+4} \geq \sqrt{b^2+4b+4} = b+2$$

$$\sqrt{5c+4} = \sqrt{c+4c+4} \geq \sqrt{c^2+4c+4} = c+2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được  $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq a+b+c+6 = 7$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại  $a=1; b=c=0$  và các hoán vị.

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2016 – 2017

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của  $n$ .

$$P = \left[ \sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2} \right] \sqrt{4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}}$$

**Lời giải**

Biến đổi các biểu thức trong căn thức ta được

$$\begin{aligned} 4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1} &= 4n^2 + 2 - 2\sqrt{(2n^2 + 1)^2 - 4n^2} \\ &= 2n^2 + 2n + 1 - 2\sqrt{(2n^2 + 1 - 2n)(2n^2 + 1 + 2n)} + 2n^2 - 2n + 1 \\ &= \left( \sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 1} \right)^2 \end{aligned}$$

Từ đó ta được  $\sqrt{4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}} = \sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 1}$ . Do đó

$$\begin{aligned} P &= \left( \sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2} \right) \left( \sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 1} \right) \\ &= \left( \sqrt{2n^2 + 2n + 1} + \sqrt{2n^2 - 2n + 1} \right) \left( \sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 1} \right) \\ &= (2n^2 + 2n + 1 - 2n^2 + 2n - 1) = 4n \end{aligned}$$

Vậy  $P$  nhận giá trị nguyên dương với  $n$  là số nguyên dương.

**Câu II.** 1) Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $x^8 - y^8 = 95(x^2 + y^2)$ .

2) Tìm các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $\frac{x^2 - 4}{x} + \frac{y^2 - 4}{y} + 8 = 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})$ .

**Lời giải**

1) Đặt  $d = (x, y)$  khi đó  $x = da; y = db$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $(a, b) = 1$ .

Và phương trình trở thành  $d(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 95(a^2 + b^2)$

Vì  $(a^2 + b^2, a^2 + ab + b^2) = 1$  nên  $a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 - 3ab$  là ước của  $95 = 5 \cdot 19$ , ước này chia 3 dư 1 hoặc 0 và lớn hơn 1 nên chỉ có thể là 19, như vậy  $(a-b)^2 - 3ab = 19$

Từ đó ta được  $\begin{cases} a-b=1 \\ a \cdot b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow d=65 \Rightarrow \begin{cases} x=195 \\ y=130 \end{cases}$

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là  $(x, y) = (195; 130)$

2) Từ hệ thức bài toán cho ta có điều kiện xác định là  $x > 1; y > 1$ . Hệ thức đã cho có chứa cả biến ở mẫu và chứa cả căn thức bậc hai, do đó để tìm được các  $x, y$  thỏa mãn ta sẽ biến đổi hệ thức đã cho về dạng tổng các bình phương. Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 4}{x} + \frac{y^2 - 4}{y} + 8 = 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 4}{x} - \frac{4x\sqrt{x-1}}{x} + 4 + \frac{y^2 - 4}{y} - \frac{4y\sqrt{y-1}}{y} + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x}(x^2 - 4 + 4x\sqrt{x-1} + 4x) + \frac{1}{y}(y^2 - 4 + 4y\sqrt{y-1} + 4y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x}(x - 2\sqrt{x-1})^2 + \frac{1}{y}(y - 2\sqrt{y-1})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x > 1; y > 1 \text{ nên ta có } \frac{1}{x}(x - 2\sqrt{x-1})^2 + \frac{1}{y}(y - 2\sqrt{y-1})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x-1} = 0 \\ y - 2\sqrt{y-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy  $(x; y) = (2; 2)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu III.** Cho  $S$  là tập các số nguyên dương  $n$  có dạng  $n = x^2 + 3y^2$ , trong đó  $x, y$  là các số nguyên.

Chứng minh rằng:

1) Nếu  $a, b \in S$  thì  $ab \in S$ .

2) Nếu  $N \in S$  và  $N$  là số chẵn thì  $N$  chia hết cho 4 và  $\frac{N}{4} \in S$ .

**Lời giải**

1) Ta có  $a, b \in S$  nên  $a = m^2 + 3n^2$  và  $b = p^2 + 3q^2$  với  $m, n, p, q$  là các số nguyên. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} ab &= (m^2 + 3n^2)(p^2 + 3q^2) = m^2p^2 + 3n^2p^2 + 3m^2q^2 + 9n^2q^2 \\ &= (m^2p^2 + 6mnpq + 9n^2q^2) + 3(m^2q^2 - 2mnpq + n^2p^2) \\ &= (mp + nq)^2 + 3(mq - np)^2 \end{aligned}$$

Do vậy  $ab \in S$ .

2) Do  $N \in S$  nên ta có  $N = x^2 + 3y^2$  với  $x, y$  là các số nguyên và do  $N$  là số chẵn nên  $x, y$  có cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trường hợp sau

+ Xét trường hợp  $x$  và  $y$  đều là số chẵn. Khi đó dễ thấy  $N$  chia hết cho 4.

Đặt  $x = 2a; y = 2b$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ), khi đó  $\frac{N}{4} = a^2 + 3b^2$  nên  $\frac{N}{4} \in S$ .

+ Xét trường hợp  $x$  và  $y$  đều là số lẻ. Khi đó đặt  $x = 2a + 1; y = 2b + 1$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

Ta có  $N = x^2 + 3y^2 = (2a + 1)^2 + 3(2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 12b^2 + 12b + 4$  nên  $N$  chia hết cho 4.

Mặt khác do  $x, y$  là các số lẻ nên  $x^2 - y^2 : 8$  nên  $x - 3y : 4$  hoặc  $x + 3y : 4$ .

Với  $x - 3y : 4$  ta được  $\frac{N}{4} = \left(\frac{x - 3y}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{x + y}{4}\right)^2$  nên  $\frac{N}{4} \in S$

Với  $x+3y:4$  ta được  $\frac{N}{4} = \left(\frac{x-3y}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{4}\right)^2$  nên  $\frac{N}{4} \in S$ .

Vậy bài toán được chứng minh.

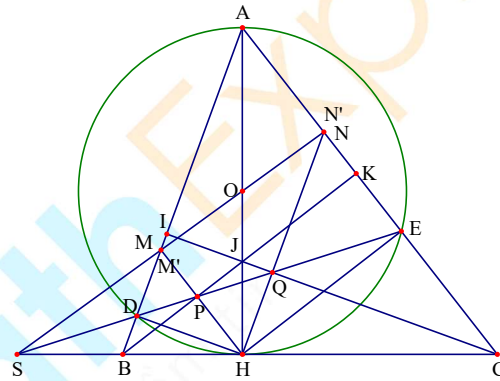
**Câu IV.** Cho tam giác ABC nhọn có  $AB < AC$ . Kẻ đường cao AH và đường tròn (O) đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại D và E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S.

- 1) Chứng minh rằng tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.
- 2) Chứng minh rằng  $SB \cdot SC = SH^2$ .
- 3) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N. Đường thẳng DE cắt HM và HN tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng BP, CQ, AH đồng quy.

**Lời giải**

- 1) Chứng minh rằng tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

Ta có  $\widehat{AED} = \widehat{AHD}$  (cùng chắn cung AD)  
 và  $\widehat{AHD} = \widehat{ABH}$  (cùng phụ  $\widehat{DHB}$ ). Do đó  
 suy ra  $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$  nên tứ giác BDEC  
 nội tiếp đường tròn.



- 2) Chứng minh rằng  $SB \cdot SC = SH^2$ .  
 Xét hai tam giác SBD và tam giác SEC  
 có  $\widehat{DSB}$  chung và  $\widehat{DBS} = \widehat{DEC}$  (vì tứ  
 giác BDEC nội tiếp)

Từ đó suy ra tam giác SBD đồng dạng với tam giác SEC. Do đó ta được  $SB \cdot SC = SD \cdot SE$

Xét tam giác SBH và tam giác SEH có  $\widehat{DSH}$  chung và  $\widehat{SHD} = \widehat{SEH}$  (cùng chắn cung DH) nên suy ra tam giác SHD đồng dạng tam giác SEH. Do đó ta được  $SH^2 = SD \cdot SE$

Kết hợp các kết quả trên ta được  $SB \cdot SC = SH^2$

- 3) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N. Đường thẳng DE cắt HM và HN tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng BP, CQ, AH đồng quy

Kẻ đường thẳng  $HM'$  song song với AC ( $M'$  thuộc AB) và đường thẳng  $HN'$  song song với AB ( $N'$  thuộc AC). Khi đó ta có  $AM'HN'$  là hình bình hành. Suy ra  $M', O, N'$  thẳng hàng. Áp dụng định lý

Menelaus vào tam giác ABC với ba điểm S, D, E thẳng hàng ta có  $\frac{SB}{SC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$ .

Mà ta lại có  $\frac{EC}{EA} = \frac{HC^2}{HA^2}$  và  $\frac{DB}{DA} = \frac{HB^2}{HA^2}$  nên ta được  $\frac{SB}{SC} \cdot \frac{HC^2}{HA^2} \cdot \frac{HA^2}{HB^2} = 1 \Rightarrow \frac{SB}{SC} \cdot \frac{HC^2}{HB^2} = 1$

Áp dụng định lý Talets ta có  $\frac{HC}{HB} = \frac{AM'}{M'B}$  và  $\frac{HC}{HB} = \frac{CN'}{AN'}$  nên suy ra  $\frac{SB}{SC} \cdot \frac{AM'}{BM'} \cdot \frac{CN'}{AN'} = 1$

Từ đó suy ra ba điểm S, M', N' thẳng hàng, do đó M trùng với M' và N trùng với N'. Từ đó ta có AMHN là hình bình hành nên ta được  $\widehat{PHE} = \widehat{HEC} = 90^\circ$  do đó  $\widehat{PHE} = \widehat{HDB} = 90^\circ$

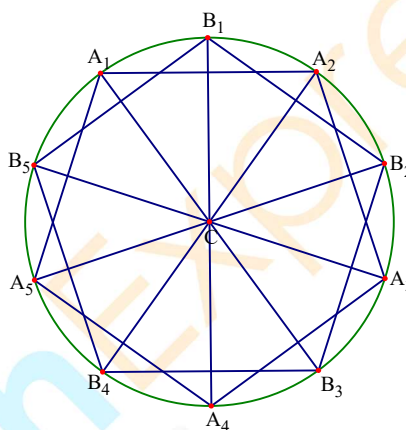
Mà  $\widehat{PEH} = \widehat{DHB}$  nên  $\widehat{DBH} = \widehat{EPH}$ , do đó tứ giác BDPH nội tiếp. Suy ra ta được  $\widehat{BPH} = 90^\circ$  hay BP vuông góc AC. Chứng minh tương tự CQ vuông góc AB.

Trong tam giác ABC có các đường cao là AH, BP, CQ nên AH, BP, CQ đồng quy.

**Câu V.** Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác cân.

**Lời giải**

Ta xét một đường tròn tâm C. Trên đường tròn (C) lấy ra hai ngũ giác đều  $A_1A_2A_3A_4A_5$  và  $B_1B_2B_3B_4B_5$ . Giả sử C được tô màu xanh. Khi đó nếu trong 10 điểm  $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$  có hai điểm được tô xanh thì ta có điều phải chứng minh. Xét trong trường hợp 10 điểm chỉ có nhiều 1 điểm được tô xanh khi đó trong hai ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  và  $B_1B_2B_3B_4B_5$  tồn tại một ngũ giác không có điểm được tô xanh.



Giả sử ngũ giác  $B_1B_2B_3B_4B_5$  không có điểm xanh khi đó tồn tại 3 đỉnh trong ngũ giác đều này được tô cùng màu.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2017 – 2018

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right)$  với  $a, b > 0, a \neq b$

và  $a+b \neq a^2$ .1) Chứng minh rằng  $P = a - b$ .2) Tìm các số  $a$  và  $b$  biết  $P = 1$  và  $a^3 - b^3 = 7$ .**Lời giải**1) Với  $a, b > 0; a \neq b; a+b \neq a^2$  ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right) \\ &= \frac{a^4 - a^2 - 2ab - b^2}{(a - \sqrt{a+b})(a + \sqrt{a+b})} : \frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b + b(a+b)}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a^4 - (a+b)^2}{a^2 - (a+b)} : \frac{a^2(a+b) + (a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = [a^2 + a + b] : \frac{a^2 + a + b}{a-b} = a - b \end{aligned}$$

Từ đó ta được  $P = a - b$ .2) Với  $a, b > 0; a \neq b; a+b \neq a^2$  ta được  $P = a - b$ . Khi  $P = 1$  và  $a^3 - b^3 = 7$  ta có hệ

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ (a - b)[(a - b)^2 + 3ab] = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được  $(a; b) = (2; 1)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu II.** Giả sử  $x, y$  là hai số thực phân biệt thỏa mãn  $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$ .

Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$ .

**Lời giải**

Thực hiện biến đổi giả thiết của bài toán ta có

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{xy+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-y^2}{(x^2+1)(xy+1)} + \frac{xy-x^2}{(y^2+1)(xy+1)} = 0 \Leftrightarrow (xy-y^2)(y^2+1) + (xy-x^2)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x-y)(y^2+1) + x(y-x)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) = 0$$

Do  $x \neq y$  nên ta được  $xy = 1$ . Kết hợp với giả thiết  $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$  ta có

$$P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1} = \frac{2}{xy+1} + \frac{2}{xy+1} = \frac{4}{xy+1} = \frac{4}{1+1} = 2$$

Vậy ta được  $P = 2$ .

**Câu III.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = -2ax - 4a$  (với  $a$  là tham số).

- 1) Tìm tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  khi  $a = -\frac{1}{2}$ .
- 2) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để đường thẳng  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| = 3$ .

**Lời giải**

- 1) Khi  $a = -\frac{1}{2}$  thì đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = x + 2$ .

Hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là nghiệm của phương trình

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $A(-1; 1)$  và  $B(2; 4)$ .

- 2) Xét phương trình hoành độ của  $(d)$  và  $(P)$  là  $x^2 + 2ax + 4a = 0$

Để  $(d)$  và  $(P)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Từ đó ta có } \Delta' = a^2 - 4a = a(a-4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó theo hệ thức Viét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = 4a \end{cases}$$

$$\text{Ta có } |x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9.$$

$$\text{Kết hợp với hệ thức Viét ta được } 4a^2 - 8a + |8a| = 9.$$

$$+ \text{ Với } a < 0 \text{ ta được } 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 - 16a - 9 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \text{ thỏa mãn}$$

+ Với  $a > 4$  ta được  $4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{2}$ , không thỏa mãn.

Vậy  $a = -\frac{1}{2}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu IV.** Anh nam đi xe đạp từ A đến C. Trên quãng đường AB ban đầu (B nằm giữa A và C). Anh Nam đi với vận tốc không đổi  $a$ (km/h) và thời gian đi từ A đến B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm  $t$  (tính bằng giờ) kể từ B là  $v = -8t + a$  (km/h). Quãng đường đi được từ B đến thời điểm  $t$  đó là  $S = -4t^2 + at$ . Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16km.

### Lời giải

Vì xe đến C dừng hẳn nên thời gian xe đi từ B đến C thỏa mãn  $-8t + a = 0 \Rightarrow t = \frac{a}{8}$  do đó quãng

đường BC là  $S = -4t^2 + at = 16 \Rightarrow -4\left(\frac{a}{8}\right)^2 + \frac{a^2}{8} = 16 \Leftrightarrow a^2 = 256 \Leftrightarrow a = 16$ .

Từ đó ta được  $S_{AB} = 1,5.a = 24$ (km).

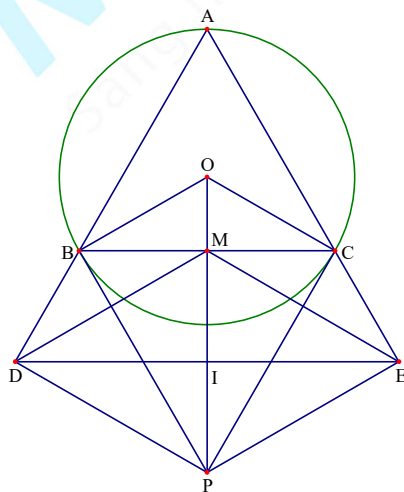
**Câu V.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $R$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại các điểm  $B, C$  cắt nhau tại điểm  $P$ . Gọi  $D, E$  tương ứng là chân đường các đường vuông góc kẻ từ  $P$  xuống các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ .

1) Chứng minh rằng  $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$ .

2) Giả sử  $B, C$  cố định và  $A$  chạy trên  $(O)$  sao cho tam giác  $ABC$  luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng  $DE$  luôn đi qua một điểm cố định.

3) Khi tam giác  $ABC$  đều. Hãy tính diện tích tam giác  $ADE$  theo  $R$ .

### Lời giải



1) Tứ giác BDPM có  $\widehat{BDP} + \widehat{BMP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  nên nội tiếp được, suy ra  $\widehat{MBP} = \widehat{MDP}$ .

Tương tự ta có tứ giác CEPD nội tiếp đường tròn, do đó ta lại có  $\widehat{MCP} = \widehat{MEP}$ .



Mặt khác do BP và CP là hai tiếp tuyến cắt nhau nên  $\widehat{MBP} = \widehat{MCP}$ .

Từ đó ta được  $\widehat{MEP} = \widehat{MBP} = \widehat{MCP} = \widehat{MDP}$ .

2) Ta có  $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$  và  $\widehat{CBP} + \widehat{ABC} + \widehat{PBD} = 180^\circ$

Mà ta lại có  $\widehat{BAC} = \widehat{CBP}$  nên ta được  $\widehat{ACB} = \widehat{PBD} = \widehat{DMP}$ .

Mặt khác ta có  $\widehat{ACB} = \widehat{MPE}$  nên suy ra  $\widehat{DMP} = \widehat{MPE}$ , từ đó ta được MD song song với PE.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được ME song song với PD.

Điều này dẫn đến tứ giác MEPD là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo MP và DE cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Do B, C cố định trên đường tròn (O) nên PM cố định, do đó I cố định. Vậy đường thẳng DE luôn đi qua điểm I cố định.

3) Khi tam giác ABC đều thì ta có A, O, M, P thẳng hàng và AI vuông góc với DE.

Do đó ta có  $S_{ADE} = \frac{1}{2}DE \cdot AI$ . Do tam giác ABC đều nên ta có  $AB = R\sqrt{3}; OA = R$ .

Do đó ta tính được  $AM = \frac{3R}{2}; AI = \frac{3R}{2} + \frac{3R}{4} = \frac{9R}{4}$ .

Dễ thấy  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  nên ta được  $\frac{BC}{DB} = \frac{AM}{AI} = \frac{2}{3}$ . Do đó suy ra  $DE = \frac{3R\sqrt{3}}{2}$

Từ đó ta có  $S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9R}{4} \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{2} = \frac{27R^2\sqrt{3}}{16}$  (đvdt)

**Câu VI.** Các số thực không âm  $x_1; x_2; \dots; x_9$  thỏa mãn hệ điều kiện  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + \dots + 9x_9 = 18 \end{cases}$

Chứng minh rằng  $1.19x_1 + 2.18x_2 + 3.17x_3 + \dots + 9.11x_9 \geq 270$ .

**Lời giải**

Từ  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9 = 10$  ta được  $9(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9) = 90$ . Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} 9(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9) = 90 \\ 10(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 9x_9) = 180 \end{cases} \Rightarrow 19x_1 + 29x_2 + 39x_3 + \dots + 99x_9 = 270$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} 1.19x_1 + 2.18x_2 + 3.17x_3 + \dots + 9.11x_9 &= 19x_1 + 36x_2 + 51x_3 + \dots + 99x_9 \\ &= (19x_1 + 29x_2 + 39x_3 + \dots + 99x_9) + (7x_2 + 12x_3 + 15x_4 + \dots + 7x_8) \\ &= 270 + (7x_2 + 12x_3 + 15x_4 + \dots + 7x_8) \end{aligned}$$

Để ý ta thấy  $7x_2 + 12x_3 + 15x_4 + \dots + 7x_8 \geq 0$ .

Nên ta được  $270 + (7x_2 + 12x_3 + 15x_4 + \dots + 7x_8) \geq 270$ .

Vậy ta có  $1.19x_1 + 2.18x_2 + 3.17x_3 + \dots + 9.11x_9 \geq 270$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 7x_2 + 12x_3 + 15x_4 + \dots + 7x_8 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 9x_9 = 18 \\ 19x_1 + 29x_2 + 39x_3 + \dots + 99x_9 = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_8 = 0 \\ x_9 = 1 \end{cases}$$

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2017 – 2018

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho các số dương  $a, b, c, d$ . Chứng minh rằng trong 4 số  $a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ;  $b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ;  $c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}$ ;

$d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

**Lời giải**

Giả sử cả bốn số trên đều nhỏ hơn 3. Khi đó ta có

$$P = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 12$$

Mặt khác  $P = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta chứng minh được

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a + b + c + d}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{(a + b + c + d)^2}{4} + \frac{16}{a + b + c + d} + \frac{16}{a + b + c + d} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a + b + c + d)^2}{4} \cdot \frac{16}{a + b + c + d} \cdot \frac{16}{a + b + c + d}} = 12 \end{aligned}$$

Trái điều giả sử trên. Do vậy không thể có cả bốn số cùng nhỏ hơn 3 hay trong bốn số có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

**Câu II.** Giải phương trình  $\sqrt{(x^2 + 2x)^2 + 4(x + 1)^2} - \sqrt{x^2 + (x + 1)^2 + (x^2 + x)^2} = 2017$ .

**Lời giải**

Điều kiện xác định của phương trình là  $x \in \mathbb{R}$ . Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x^2 + 2x)^2 + 4(x + 1)^2} - \sqrt{x^2 + (x + 1)^2 + (x^2 + x)^2} = 2017 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 8x + 8} - \sqrt{x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^4 + 2x^3 + x^2} = 2017 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^2} - \sqrt{(x^2 + x + 1)^2} = 2017 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - x^2 - x - 1 = 2017 \Leftrightarrow x = 2016 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là  $x = 2016$ .

**Câu III.** 1) Tìm tất cả các số nguyên dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $a^2 = b^3; c^3 = d^4; a = d + 98$ .

2) Tìm tất cả các số thực  $x$  sao cho trong 4 số  $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2}; x - \frac{1}{x}; x + \frac{1}{x}$  có đúng một số không phải là số nguyên.

### Lời giải

1) Giả sử  $a = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \dots p_n^{x_n}$  trong đó  $p_1; p_2; \dots; p_n$  là các số nguyên tố  $x_1; x_2; \dots; x_n \in \mathbb{N}$

Tương tự  $d = q_1^{y_1} \cdot q_2^{y_2} \cdot q_3^{y_3} \dots q_n^{y_n}$  trong đó  $q_1; q_2; \dots; q_n$  là các số nguyên tố  $y_1; y_2; \dots; y_n \in \mathbb{N}$

Ta có  $a > 1; d > 1$ . Vì  $a^2 = p_1^{2x_1} \cdot p_2^{2x_2} \dots p_n^{2x_n} = b^3 \Rightarrow 2x_1; 2x_2; \dots; 2x_n : 3 \Rightarrow x_1; x_2; \dots; x_n : 3 \Rightarrow a = x^3, (x \in \mathbb{Z}^+)$ .

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được  $d = y^3, (y \in \mathbb{Z}^+)$ .

Từ giả thiết  $a = d + 98$  ta được  $x^3 = y^3 + 98 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 98$ .

Do  $a > d$  nên ta suy ra được  $x - y > 0$  từ đó dẫn đến

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 < x^2 + xy + y^2 \Rightarrow x - y < x^2 + xy + y^2$$

Do đó ta đi xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với  $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 98 \end{cases}$ , khi đó ta được

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ (y + 1)^2 + (y + 1)y + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 3y - 97 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \notin \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

+ Trường hợp 2. Với  $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}$ , khi đó ta được

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2)^2 + (y + 2)y + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5; y = 3 \\ x = -3; y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 5; y = 3$$

Vậy từ đó ta tính được  $a = 5^3 = 125; d = 3^3 = 27; b = 25; c = 81$ .

2) Nếu  $x - \frac{1}{x}; x + \frac{1}{x}$  nguyên thì ta có  $x - \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = 2x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ .

Từ đó suy ra  $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2}$  đều không là số hữu tỷ. Do vậy một trong hai số  $x - \frac{1}{x}; x + \frac{1}{x}$  không

là số nguyên khi đó  $x - \sqrt{2} \in \mathbb{Z}; x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - \sqrt{2} + x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

Đặt  $x - \sqrt{2} = a, (a \in \mathbb{Z})$ . Khi đó ta được  $x^2 + 2\sqrt{2} = (a + \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = a^2 + 2 + 2\sqrt{2}(a + 1) \in \mathbb{Z}$ .

Từ đó dẫn đến  $2\sqrt{2}(a + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$  nên ta được  $x = \sqrt{2} - 1$

Thử lại ta thấy  $x = \sqrt{2} - 1$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy số cần tìm là  $x = \sqrt{2} - 1$ .

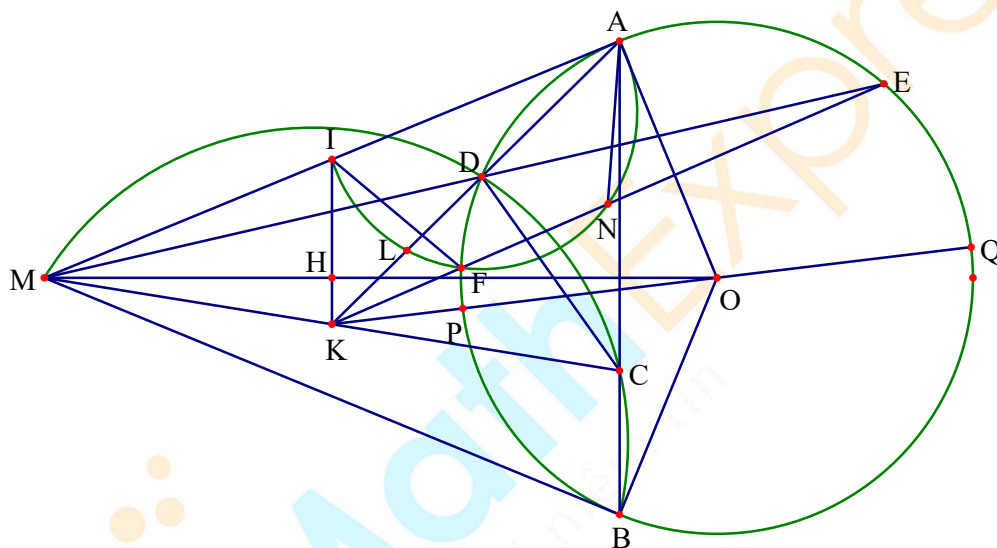
**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $R$  và một điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  tới đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy điểm  $C$  ( $C$  khác  $A, C$  khác  $B$ ). Gọi  $I, K$  là trung điểm  $MA, MC$ . Đường thẳng  $KA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $D$ .

1) Chứng minh  $KO^2 - KM^2 = R^2$ .

2) Chứng minh tứ giác  $BCDM$  là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi  $E$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $MD$  với đường tròn  $(O)$  và  $N$  là trung điểm  $KE$ , đường thẳng  $KE$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $F$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $I, A, N, F$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Lời giải**



1) Ta có  $IM = IA$  và  $KM = KC$  nên  $IK$  là đường trung bình tam giác  $AMC$ , do đó  $IK$  song song với  $AC$ .

Lại có  $MA = MB$  (tính chất tiếp tuyến cắt nhau tại  $M$ ) và  $OA = OB = R$  nên  $OM$  là trung trực của  $AB$ .

Do đó ta được  $OM \perp AB$ , suy ra  $IK \perp OM$ . Gọi giao điểm của  $IK$  và  $OM$  là  $H$ .

Áp dụng định lý Pitygo cho các tam giác vuông  $MHI; KHO; MHK; OHI$  ta có

$$MI^2 = MH^2 + HI^2; KO^2 = KH^2 + HO^2; MK^2 = MH^2 + HK^2; OI^2 = KH^2 + HO^2$$

Do  $IM = IA$  nên từ đó ta suy ra được

$$MI^2 + KO^2 = MK^2 + IO^2 \Rightarrow KO^2 - KM^2 = IO^2 - MI^2 = IO^2 - IA^2 = OA^2 = R^2$$

Vậy ta được  $KO^2 - KM^2 = R^2$

2) Đường thẳng  $KO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $Q$  và  $P$ .

Ta có  $KC = KM$  nên suy ra  $KO^2 - KM^2 = R^2 \Leftrightarrow KO^2 - KC^2 = R^2$

Từ đó ta được  $KC^2 = KO^2 - OP^2 = (KO + OP)(KO - OP) = KQ.KP$

Do tứ giác  $ADPQ$  nội tiếp đường tròn nên ta có  $KQ.KP = KD.KA$  nên suy ra  $KC^2 = KD.KA$ .

Từ đó dẫn đến  $\triangle CKD \sim \triangle AKD$  nên  $\widehat{DCK} = \widehat{KAC} = \widehat{DBM}$

Vậy tứ giác  $MDCB$  nội tiếp đường tròn.

3) Gọi  $E$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $MD$  với đường tròn  $(O)$  và  $N$  là trung điểm  $KE$  đường thẳng  $KE$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $F$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $I, A, N, F$  cùng nằm trên một đường tròn.

Gọi  $L$  là trung điểm của  $KD$  ta có  $\triangle MKD \sim \triangle AKM$  nên suy ra  $\widehat{AEM} = \widehat{MAK} = \widehat{EMK}$ . Do đó ta được  $AE$  song song với  $KM$ .

Mặt khác ta có  $KF.KE = KD.KA \Rightarrow KF.KN = KL.KA$  nên tứ giác  $ANFL$  nội tiếp

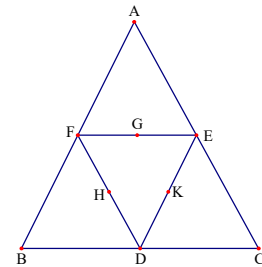
Suy ra ta được  $\widehat{LAF} = \widehat{LNF} = \widehat{MEK} = \widehat{FMK}$  (vì  $KF.KE = KD.KA = KC^2 = KM^2$ ).

Từ đó suy ra  $\widehat{KAF} = \widehat{KMF}$  nên tứ giác  $MKFA$  nội tiếp. Do đó ta được  $\widehat{AFN} = \widehat{AMK} = \widehat{AIN}$ .

Dẫn đến tứ giác  $IANF$  cùng thuộc một đường tròn

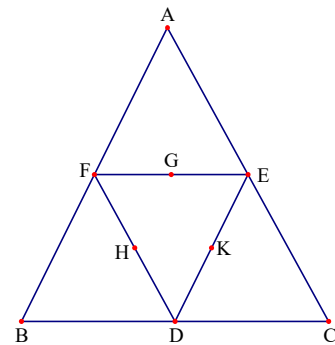
### Câu V.

Xét hình bên: Ta viết các số 1, 2, 3, 4, ..., 9 vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ bên sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng ba số trên một cạnh của tam giác bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm  $(A; B; C; D; E; F; G; H; K)$  của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?



### Lời giải

**Cách 1:** Ta thấy trong dãy 1; 2; 3; 4; ...; 9 có hai số là 8 và 9 khi lấy tổng 2 số với số 1 thì bằng 18. Do đó ta thấy tại điểm  $A$  (tương tự  $B, C$ ) không thể điền số 1 vì nếu trái lại thì  $B$  và  $F$  phải điền cặp 8 và 9, tại  $C$  và  $E$  cũng phải điền cặp số 8 và 9. Điều này vô lí vì mỗi số chỉ điền vào một điểm. Tương tự tại  $D, E, F$  cũng không thể điền số 1. Do đó số 1 được điền tại một trong các điểm  $H, G, K$ .



Xét trường hợp số 1 được điền tại G (tương tự tại H, K) khi đó E điền số 8 và F điền số 9 (hoặc ngược lại). Giả sử tại A điền a, tại C điền c, tại D điền d, tại K điền k, tại H điền  $k + 1$ , tại B điền  $c + 1$ .

Khi a; d; c;  $c + 1$ ; k;  $k + 1$  phân biệt thuộc tập hợp  $\{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} a + c = 9 \\ d + k = 9 \\ d + 2c = 17 \end{cases} \Rightarrow d \in \{3; 5; 7\}. \text{ Thử từng trường hợp ta được } d = 7 \text{ thỏa mãn}$$

Từ đó ta suy ra được  $a = 4; c = 5; k = 2$

Như vậy ứng với mỗi cách điền số 1 và số 2 ta có một cách duy nhất để điền các số còn lại. Vậy có tất cả 6 cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Cách 2:** Để ý rằng ta có tất cả các bộ ba số phân biệt thuộc tập hợp  $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$  mà tổng bằng 18

$$18 = 9 + 8 + 1 = 9 + 7 + 2 = 9 + 6 + 3 = 9 + 5 + 5 = 8 + 7 + 3 = 8 + 7 + 4 = 7 + 6 + 5$$

Trong tất cả các vị trí A, B, C, D, E, F, G, H, K thì

- + A, B, C xuất hiện trong hai tổng (do là giao điểm của của hai cạnh).
- + D, E, F xuất hiện trong ba tổng (do là giao điểm của ba cạnh).
- + G, H, K xuất hiện trong một tổng.

Do 1 và 2 chỉ xuất hiện trong một tổng nên các vị trí A, B, C, D, E, F không thể điền số 1 và số 2.

Các số 1 và 2 chỉ có thể điền vào điểm G, H, K. Có tất cả 6 cách điền số 1 và 2 và ba điểm G, H, K.

Không mất tính tổng quát ta có cách điền  $G = 1; H = 2$ .

Do số 9 xuất hiện trong các tổng chứa 1 và chứa 2 nên dễ thấy đỉnh  $F = 9$ , suy ra  $E = 8; D = 7$ . Từ đó dẫn đến  $K = 3$  và  $A, B, C \in \{4; 5; 6\}$ .

Lại có  $A + F + B = 18; B + C + D = 18; C + E + A = 18$  nên  $A = 3; B = 5; C = 6$ .

Như vậy ứng với mỗi cách điền số 1 và số 2 ta có một cách duy nhất để điền các số còn lại.

Vậy có tất cả 6 cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1} + (x-1)\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$  với  $x > 1$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $P$ .
- 2) Tìm  $x$  để  $P = x - 1$ .

**Lời giải**

- 1) Đặt  $\sqrt{x+1} = a, \sqrt{x-1} = b$ , khi đó  $2x = a^2 + b^2$  và

$$P = \frac{2}{a^3 + b^3} \cdot \frac{\frac{a^2 + b^2}{b} - a}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{2}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \cdot \frac{\frac{a^2 + b^2 - ab}{b}}{\frac{a-b}{ab}} = \frac{2a}{a^2 - b^2}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1 - (x-1)} = \sqrt{x+1}$$

- 2) Với điều kiện  $x > 1$  thì  $\sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 3$  (do  $x > 1$ ).

Vậy  $x = 3$  là giá trị cần tìm.

**Câu II.** Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2015, nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của thị trường tiêu thụ nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2016 và 2017 đều giảm. Cụ thể: số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016 giảm  $x\%$  so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015, số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 cũng giảm  $x\%$  so với số lượng sản xuất được năm 2016. Biết rằng số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015. Tìm  $x$ .

**Lời giải**

Số lượng sản phẩm sản xuất được trong năm 2016 là  $5000 - 5000 \cdot x\% = 5000 - 50x$

Số lượng sản phẩm sản xuất được trong năm 2017 là

$$5000 - 50x - (5000 - 50x) \cdot x\% = \frac{x^2}{2} - 100x + 5000 = \frac{1}{2}(x - 1000)^2$$

Theo giả thiết số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015 nên ta có phương trình

$$\frac{1}{2}(x - 1000)^2 = 5000 - 5000 \cdot 51\% \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 100)^2 = 2450 \Leftrightarrow (x - 100)^2 = 4900 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 170 \\ x = 30 \end{cases}$$

Vì  $0 < x < 100$  nên  $x = 30$ .

**Câu III.** Cho phương trình  $x^3 - x - 1 = 0$ . Giả sử  $x_0$  là một nghiệm của phương trình đã cho.

1) Chứng minh  $x_0 > 0$ .

2) Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{x_0^2 - 1}{x_0^3} \sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2}$ .

### Lời giải

1) Vì  $x_0$  là nghiệm của phương trình nên  $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0^2 - x_0 - 1 = x_0^2$

$$\Leftrightarrow x_0^2(x_0 + 1) - (x_0 + 1) = x_0^2 \Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 - 1) = x_0^2 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(x_0 - 1) = x_0^2 \quad (1)$$

Dễ thấy  $x_0 = -1$  và  $x_0 = 0$  không thỏa mãn (1) nên  $x_0 - 1 = \frac{x_0^2}{(x_0 + 1)^2} > 0 \Rightarrow x_0 > 1 \Rightarrow x_0 > 0$

**Chú ý:** Đây là cách chứng minh trực tiếp  $x_0 > 1$ . Ta có thể chứng minh  $x_0 > 0$  bằng phương pháp phản chứng như sau:

Giả sử  $x_0 \leq 0$ . Ta có  $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = x_0 + 1$ .

Dễ thấy  $x_0 = 0$  không thỏa mãn.

Nếu  $x_0 < 0$  thì  $x_0^3 < 0 \Rightarrow x_0 + 1 < 0 \Rightarrow x_0 < -1 \Rightarrow x_0^2 > 1$

$$\Rightarrow x_0(x_0^2 - 1) < 0 \Rightarrow x_0^3 - x_0 < 0 \quad (\text{vô lý vì } x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0^3 - x_0 = 1)$$

Và từ  $x_0 > 0 \Rightarrow x_0 + 1 > 1 \Rightarrow x_0^3 > 1 \Rightarrow x_0 > 1$

2) Vì  $x_0$  là nghiệm của phương trình nên  $x_0^3 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = x_0 + 1$

Kết hợp với  $x_0 > 1$  ta được

$$\begin{aligned} M &= \frac{x_0^2 - 1}{x_0^3} \sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2} = \frac{(x_0 - 1)(x_0 + 1)}{x_0^3} \sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2} \\ &= (x_0 - 1) \sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2} = \sqrt{(x_0 - 1)^2 (2x_0^2 + 3x_0 + 2)} = \sqrt{2x_0^4 - x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2} \\ &= \sqrt{2x_0(x_0 + 1) - (x_0 + 1) - 2x_0^2 - x_0 + 2} = \sqrt{2x_0^2 + 2x_0 - x_0 - 1 - 2x_0^2 - x_0 + 2} = 1. \end{aligned}$$

**Câu IV.** Cho hình chữ nhật ABCD với  $BC = a$ ,  $AB = b$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt đường chéo AC của hình chữ nhật ABCD tại điểm P và cắt đường thẳng BC tại điểm Q sao cho B nằm giữa C và Q.

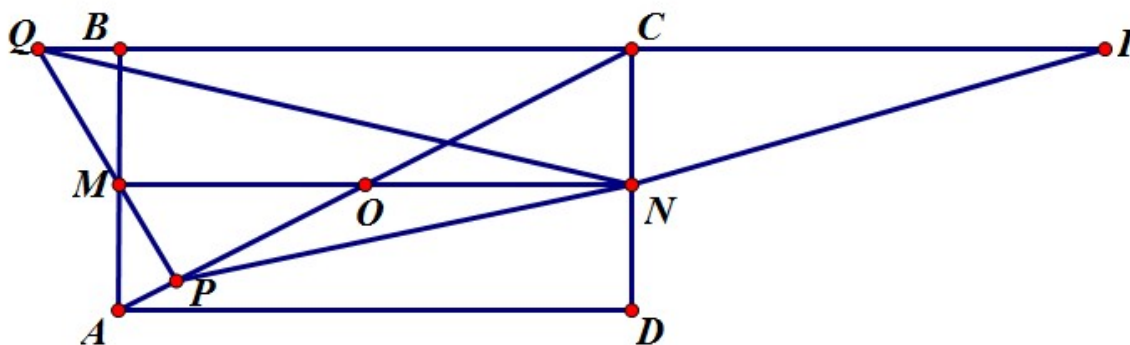
1) Khi  $MP \perp AC$ , hãy:

a) Tính PQ theo a và b.

b) Chứng minh  $a \cdot BP = b \cdot PN$ .

2) Chứng minh  $\widehat{MNP} = \widehat{MNQ}$  (không nhất thiết MP và AC vuông góc với nhau).

### Lời giải



1a) Ta có M là trực tâm góc ACQ. Suy ra  $BQ \cdot BC = BM \cdot BA$ .

$$\text{Từ đó } BQ = \frac{BM \cdot BA}{BC} = \frac{b^2}{2a} \Rightarrow CQ = BC + BQ = a + \frac{b^2}{2a} = \frac{2a^2 + b^2}{2a}.$$

$$\text{Ta lại có } PQ \cdot AC = AB \cdot QC \text{ nên suy ra } PQ = \frac{AB \cdot QC}{AC} = \frac{b(2a^2 + b^2)}{2a\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Ta có các tứ giác BMNC, BMPC nội tiếp nên 5 điểm B, M, P, N, C cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó  $\widehat{PBM} = \widehat{PNM}$ ,  $\widehat{PAM} = \widehat{PMN}$  nên các tam giác PBA và PNM đồng dạng.

$$\text{Suy ra } \frac{PB}{PN} = \frac{AB}{MN} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow a \cdot BP = b \cdot PN.$$

2) Gọi I là giao điểm của PN và BC, O là giao điểm của AC và MN.

Ta có  $OM = ON$  nên  $CI = CQ \Rightarrow \widehat{CQN} = \widehat{CIN}$  suy ra  $\widehat{MNQ} = \widehat{MNP}$  (điều phải chứng minh)

**Câu V.** Các số nguyên  $x, x_1, x_2, \dots, x_9$  thỏa mãn:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_9) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_9) = x.$$

Tính  $P = x \cdot x_2 \cdot x_2 \dots x_9$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ đẳng thức đề bài ta suy ra } (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) \dots (1 - x_9^2) = (1 + x_1)^2 (1 + x_2)^2 \dots (1 + x_9)^2.$$

Nếu trong các số  $x_1, x_2, \dots, x_9$  có một số bằng 0 thì  $P = 0$ . Trong trường hợp ngược lại, tất cả các thừa số ở vế trái đều  $\leq 0$ , do đó vế trái  $\leq 0$  (có 9 thừa số), trong khi đó tất cả các thừa số ở vế phải không âm, do đó vế phải  $\geq 0$ . Vì hai vế bằng nhau nên ta suy ra hai vế đều bằng 0.

Vậy  $x = 0$ , suy ra  $P = 0$ . Như vậy trong mọi trường hợp ta có  $P = 0$ .

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho các số thực  $x, y$  không âm thỏa mãn điều kiện  $(x+1)(y+1) = 2$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + 2 + xy$ .

**Lời giải**

Đặt  $S = x + y$  và  $T = xy$ .

Từ giả thiết, ta có  $S + T = 1$ , suy ra

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + 2 = S^2 - 2T + 2 - \sqrt{2[(1-T)^2 + S^2]}$$

$$= S^2 - 2(1-S) + 2 - \sqrt{2(S^2 + S^2)} = S^2.$$

Từ đó ta có  $P = S + T = 1$ .

Vậy giá trị của biểu thức  $P$  cần tính là 1.

**Câu II.** Cho các số thực không âm  $x, y, z$  thay đổi thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6$ .

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = x + y + z$ .

**Lời giải**

**Tìm giá trị lớn nhất của  $P$ :**

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$x^2y^2 + 1 \geq 2xy, \quad y^2z^2 + 1 \geq 2yz, \quad z^2x^2 + 1 \geq 2zx.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, sau đó cộng hai vế của bất đẳng thức thu được với

$$x^2 + y^2 + z^2, \text{ ta được } (x + y + z)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 = 9.$$

Từ đó suy ra  $Q \leq 3$ .

Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi  $x = y = z = 1$  nên ta có kết luận  $\max Q = 3$ .

**Giá trị nhỏ nhất của  $P$ :** Ta sẽ chứng minh  $Q \geq \sqrt{6}$  với dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi

$Q \geq \sqrt{6}$ . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2xy + x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6,$$

Từ đó suy ra  $xy \leq \sqrt{7} - 1 < 2$ .

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $yz < 2, zx < 2$ .

Do đó, ta có  $Q^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6$ .

Hay  $Q \geq \sqrt{6}$ .

Vậy  $\min Q = \sqrt{6}$ .

**Câu III.** 1) Cho  $a, b$  là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức  $M = \frac{(a+b)^2}{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}$ .

Chứng minh rằng  $M$  không thể nhận giá trị nguyên.

2) Cho  $a, b$  là hai số nguyên dương, đặt  $A = (a+b)^2 - 2a^2, B = (a+b)^2 - 2b^2$ .

Chứng minh rằng  $A$  và  $B$  không đồng thời là số chính phương.

**Lời giải**

1) Ta có biến đổi  $M = \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}$ .

Giả sử  $M$  là số nguyên, khi đó ta có  $(a+b)^2$  chia hết cho  $a^2 + b^2$ .

Suy ra  $2ab$  chia hết cho  $a^2 + b^2$ . Điều này vô lý do  $0 < 2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 < a^2 + b^2$ .

Vậy  $M$  không thể là số nguyên.

2) Giả sử tồn tại các số dương  $a, b$  sao cho  $(a+b)^2 - 2a^2$  và  $(a+b)^2 - 2b^2$  đều là số chính phương.

Trong các cặp số nguyên dương  $(a, b)$  như vậy, ta xét cặp sao cho  $a$  nhỏ nhất.

Đặt  $(a+b)^2 - 2a^2 = x^2, (a+b)^2 - 2b^2 = y^2$  với  $x, y$  nguyên dương.

Ta có  $(a+b)^2 - x^2 = 2a^2$  nên  $a+b$  và  $x$  cùng tính chẵn lẻ, suy ra  $(a+b)^2 - 2a^2$  chia hết cho

4. Từ đó ta có  $2a^2$  chia hết cho 4, suy ra  $a$  chia hết cho 2.

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $b$  chia hết cho 2, suy ra  $x, y$  chẵn.

Từ đó, ta có  $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2, \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2$ .

Đều là số chính phương. Do đó cặp số  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$  cũng thỏa mãn yêu cầu.

Điều này mâu thuẫn với cách chọn cặp  $(a, b)$ .

Vậy với mọi  $a, b$  nguyên dương, các số  $A, B$  không thể đồng thời là số chính phương.

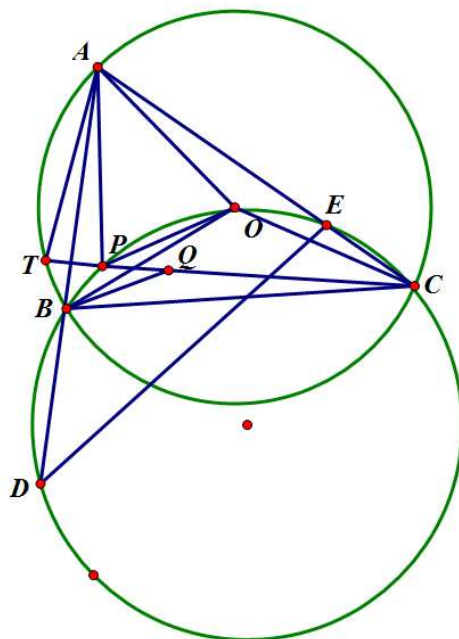
**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn,  $AB < AC$  và nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BOC$  cắt các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự tại  $D$  và  $E$ . Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BOC$  lấy điểm  $P$  sao cho  $AP$  vuông góc với  $PC$ . Đường thẳng qua  $B$  song song với  $OP$  cắt  $PC$  tại  $Q$ . Chứng minh rằng

1)  $PB = PQ$ .

2)  $O$  là trực tâm của tam giác  $ADE$ .

3)  $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$ .

**Lời giải**



1) Ta có  $\widehat{BPQ} = \widehat{BOC}$  và  $\widehat{PQB} = \widehat{OPQ} = \widehat{OBC}$  nên các tam giác  $PBQ$  và  $OCB$  đồng dạng (g-g). Mà  $OB = OC$  nên ta có  $PB = PQ$ .

2) Ta có  $\widehat{OBE} = \widehat{OCB} = \widehat{OAC}$ , mà  $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$  nên  $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$ .

Từ đó suy ra  $EA = EB$ . Lại có  $OA = OB$  nên  $OE \perp AB$ .

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $OD \perp AC$  nên  $O$  là trực tâm của tam giác  $ADE$ .

3) Gọi  $T$  là giao điểm thứ hai của  $CP$  và  $(O)$ .

Ta có  $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$  nên  $PT = PB$ .

Mà  $PB = PQ$  nên  $PT = PQ$ .

Mà  $\widehat{APQ} = 90^\circ$  nên  $\widehat{PAQ} = \widehat{PAT} = 90^\circ - \widehat{ATP} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{OAC}$ .

Từ đó, ta có  $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$ .

**Câu V.** Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen thuộc nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi  $S$  là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

1) Xây dựng ví dụ để  $S = 870$ .

2) Chứng minh rằng  $S \leq 870$ .

**Lời giải**

1) Chia 45 người thành 9 nhóm, nhóm thứ  $i$  có  $i$  người ( $1 \leq i \leq 9$ ). Ta xét ví dụ khi mỗi người ở một nhóm đều quen tất cả mọi người ở nhóm khác, nhưng không quen ai ở chính nhóm mình. Nói cách khác, mỗi người ở nhóm  $i$  quen đúng  $45 - i$  người khác.

Khi đó  $S = \frac{1}{2}(1.44 + 2.43 + \dots + 9.36) = 870$ .

2) Gọi  $a_i$  là số người quen đúng  $i$  người khác ( $1 \leq i \leq 44$ ). Nếu một người  $P$  quen  $i$  người thì anh ta không quen ai trong  $a_i$  người này, nghĩa là  $P$  quen nhiều nhất  $45 - a_i$  người, hay  $i \leq 45 - a_i$  suy ra  $a_i \leq 45 - i$ . Ta có  $a_1 + \dots + a_{44} = 45$  và

$$S = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \dots + 44a_{44}) \leq \frac{1}{2}(36a_1 + 36a_2 + \dots + 36a_{36} + 37a_{37} + \dots + 44a_{44})$$

$$= \frac{1}{2}(36(a_1 + a_2 + \dots + a_{44}) + a_{37} + 2a_{38} + \dots + 8a_{44}) \leq \frac{1}{2}(36.45 + 1.8 + 2.7 + \dots + 8.1) = 870.$$

Khẳng định được chứng minh.

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘIKỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

## ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Cho  $a$  là số thực khác 1 và  $-1$ . Rút gọn biểu thức  $P = \frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + 3} \div \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1}$ .

b) Cho các số thực  $x, y, a$  thoả mãn  $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a$ .

Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } P &= \frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + 3} \div \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1} = \frac{(a+1)^2 + 3(a-1)^2}{(a-1)^2 + 3(a+1)^2} \div \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} - \frac{2a}{a-1} \\ &= \frac{4(a^2-a+1)}{4(a^2+a+1)} \cdot \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2} \cdot \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} - \frac{2a}{a-1} = \frac{a+1}{a-1} - \frac{2a}{a-1} = \frac{1-a}{a-1} = -1. \end{aligned}$$

Vậy  $P = -1$ .

b) Đặt  $s = \sqrt[3]{x^2}$  và  $t = \sqrt[3]{y^2}$  thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành  $\sqrt{s^3 + s^2 t} + \sqrt{t^3 + t^2 s} = a$ .

Do  $s, t \geq 0$  nên  $\sqrt{s^3 + s^2 t} = s\sqrt{s+t}$ ,  $\sqrt{t^3 + t^2 s} = t\sqrt{s+t}$ .

Từ đó ta có  $(s+t)\sqrt{s+t} = a$  hay  $(s+t)^3 = a^2$ .

Suy ra  $s+t = \sqrt[3]{a^2}$ . Đây là kết quả cần chứng minh.

**Câu II.** Trên quãng đường dài 20km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tốc của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quãng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

**Lời giải**

Gọi  $a$  (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC,  $b$  (km/h) là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Rõ ràng  $a > 1, b > 0$ .

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là  $2a$  (km) và độ dài quãng đường BC là  $2b$  (km).

Do  $AC + BC = AB$  nên ta có  $2a + 2b = 20$ , tức  $a + b = 10$  (1)

Thời gian An đi trên quãng đường BC là  $\frac{2b}{a-1}$  (giờ).

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là  $\frac{2a}{b-1}$  (giờ).

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là  $\frac{4}{5}$  (giờ) (48 phút =  $\frac{4}{5}$  giờ)

$$\text{Nên } \frac{2a}{b+1} - \frac{2b}{a-1} = \frac{4}{5} \text{ hay } \frac{a}{b+1} + 1 - 1 - \frac{b}{a-1} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Một cách tương đương, ta có } \frac{a+b+1}{b+1} - \frac{a+b-1}{a-1} = \frac{2}{5}. \quad (2)$$

Từ (1), ta có  $b = 10 - a$ .

$$\text{Thay vào phương trình (2), ta được } \frac{11}{11-a} - \frac{9}{a-1} = \frac{2}{5}, \text{ hay } (a+44)(a-6) = 0.$$

Do  $a > 1$  nên ta có  $a = 6$ , suy ra  $b = 4$  (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là 6 (km/h).

**Câu III.** Cho các đa thức  $P(x) = x^2 + ax + b$ ,  $Q(x) = x^2 + cx + d$  với  $a, b, c, d$  là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của  $a, b$  để 1 và  $a$  là nghiệm của phương trình  $P(x) = 0$ .

b) Giả sử phương trình  $P(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và phương trình  $Q(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_3, x_4$  sao cho  $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$ .

Chứng minh rằng  $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$ .

**Lời giải**

a) Để 1 và  $a$  là nghiệm thì ta phải có  $P(1) = 1 + a + b = 0$ ,  $P(a) = a^2 + a^2 + b = 0$ .

Rút  $b = -1 - a$  từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được  $2a^2 - a - 1 = 0$ .

Từ đó  $a = 1$  hoặc  $a = -\frac{1}{2}$ , tương ứng  $b = -2$  hoặc  $b = -\frac{1}{2}$ .

Vậy có hai cặp  $(a, b)$  thỏa mãn điều kiện đề bài là  $(1; -2)$  và  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ .

b) Do  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình  $P(x) = 0$  nên  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ .

Tương tự, ta cũng có  $Q(x) = (x - x_3)(x - x_4)$ .

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành  $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2 + x_1 - x_4) + (x_4 - x_1 + x_2 - x_3)(x_4 - x_2) = 0$ .

Hay  $(x_3 - x_2 + x_1 - x_4)(x_3 - x_1 + x_2 - x_4) = 0$ .

Một cách tương đương, ta có  $(x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2$  hay  $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$ .

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$ , bán kính  $R$ , ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn. Gọi  $AA_1, BB_1, CC_1$  là các đường cao của tam giác  $ABC$  ( $A_1$  thuộc  $BC$ ,  $B_1$  thuộc  $CA$ ,  $C_1$  thuộc  $AB$ ). Đường thẳng  $A_1C_1$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $A'$  và  $C'$  ( $A_1$  nằm giữa  $A'$  và  $C_1$ ). Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A'$  và  $C'$  cắt nhau tại  $B'$ .

- a) Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $HC_1 \cdot A_1C = A_1C_1 \cdot HB_1$ .  
 b) Chứng minh rằng ba điểm  $B, B', O$  thẳng hàng.  
 c) Khi tam giác  $ABC$  là tam giác đều, hãy tính  $A'C'$  theo  $R$ .

**Lời giải**

a) Hai tam giác  $AB_1H$  và  $AA_1C$  có  $\widehat{AB_1H} = \widehat{AA_1C} = 90^\circ$  và chung góc  $\widehat{HAB_1}$  nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra  $\frac{HB_1}{A_1C} = \frac{AH}{AC}$ . (1)

Tứ giác  $AC_1A_1C$  có  $\widehat{AC_1C} = \widehat{AA_1C} = 90^\circ$  nên nội tiếp.

Suy ra  $\widehat{HC_1A_1} = \widehat{CAH}$  (cùng chắn cung  $A_1C$  của đường tròn  $(AC_1A_1C)$ ) và  $\widehat{HA_1C_1} = \widehat{HCA}$  (cùng chắn cung  $AC_1$  của đường tròn  $(AC_1A_1C)$ ).

Từ đó, ta có  $\Delta C_1A_1H \sim \Delta ACH$  (g-g). Suy ra  $\frac{HC_1}{A_1C_1} = \frac{HA}{AC}$ . (2)

Từ (1) và (2), ta được  $\frac{HB_1}{A_1C} = \frac{HC_1}{A_1C_1}$  hay  $HB_1 \cdot A_1C_1 = HC_1 \cdot A_1C$ .

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có  $OB' \perp A'C'$ . (3)

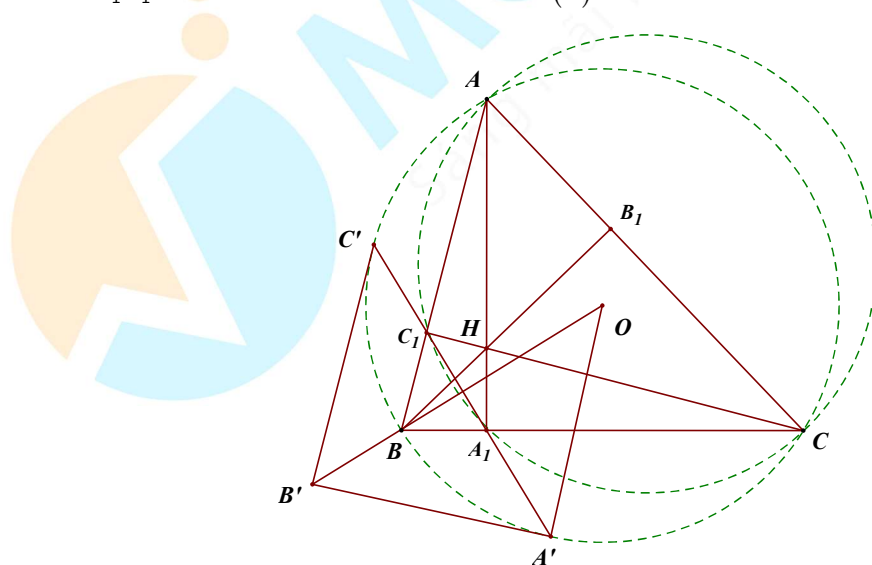
Ta sẽ chứng minh  $OB \perp A'C'$ , hay  $OB \perp A_1C_1$ .

Do tam giác  $OBC$  cân tại  $O$  nên  $\widehat{OBA_1} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{BAC}}{2} = 90^\circ - \widehat{BAC}$ .

Mặt khác, do tứ giác  $AC_1AC$  nội tiếp nên  $\widehat{C_1A_1B} = \widehat{BAC}$  (cùng bù với  $\widehat{C_1A_1C}$ ).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được  $\widehat{OBA_1} = \widehat{C_1A_1B} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ$ .

Do đó  $OB \perp A_1C_1$ , hay  $OB \perp A'C'$ . Kết hợp với (3), ta suy ra  $B, B', O$  thẳng hàng.



- c) Khi tam giác  $ABC$  đều thì  $BO$  đi qua  $B_1$ ,  $B_1$  là trung điểm của  $AC$  và  $A'C' \perp BO$ .  
 Gọi  $K$  là giao điểm  $BO$  và  $A'C_1$  thì  $K$  là trung điểm của  $A'C'$ .

Do tam giác  $AB_1C_1$  đều và  $OB \perp A_1C_1$  nên  $K$  cũng là trung điểm của  $A_1C_1$ .

Do tam giác  $ABC$  đều nên  $O$  cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra  $OC_1 = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$ .

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác  $OC_1B$  vuông tại  $C_1$  có  $C_1K$  là đường cao, ta có

$$OC_1^2 = OK \cdot OB. \text{ Suy ra } OK = \frac{OC_1^2}{OB} = \frac{1}{4}R.$$

Từ đây, sử dụng định lý Pythagoras trong tam giác  $A'KO$  vuông tại  $K$ , ta có

$$A'K = \sqrt{OA'^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Vậy } A'C' = 2A'K = \frac{R\sqrt{15}}{2}.$$

**Câu V.** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46.$$

**Lời giải**

Biểu thức  $P$  có thể được viết lại dưới dạng  $P = x(x-2)y(y+6) + 13x(x-2) + 4y(y+6) + 46$ .

Đặt  $a = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$  và  $b = y(y+6) = (y+3)^2 - 9$  thì ta có

$$P = ab + 13a + 4b + 46 = (a+4)(b+13) - 6 = \left[ (x-1)^2 + 3 \right] \left[ (y+3)^2 + 4 \right] - 6 \geq 3 \cdot 4 - 6 = 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = 1$  và  $y = -3$ . Vậy  $\min P = 6$ .

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho hai số thực phân biệt  $a$  và  $b$  thỏa mãn điều kiện  $a^3 + b^3 = a^2b^2(ab - 3)$ .

Tính giá trị của biểu thức  $T = a + b - ab$ .

**Lời giải**

Nếu  $a = 0$  thì ta có  $b^3 = 0$  suy ra  $b = 0 = a$ , vô lý vì  $a \neq b$ . Do đó  $a \neq 0$ . Chứng minh tương tự, ta cũng có  $b \neq 0$ . Từ đó giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = 1 - \frac{3}{ab}$ .

Đặt  $x = \frac{1}{a}$  và  $y = \frac{1}{b}$  thì ta có  $x \neq y$  và  $x^3 + y^3 = 1 - 3xy$ .

Sử dụng kết quả quen thuộc  $A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$ , ta được

$$0 = x^3 + y^3 - 1 + 3xy = x^3 + y^3 + (-1)^3 - 3.x.y.(-1) = (x + y - 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy + x + y).$$

Mặt khác ta lại có  $x^2 + y^2 + 1 - xy + x + y = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + (y+1)^2 + (x-y)^2] > 0$ .

Nên từ kết quả ở trên, ta suy ra  $x + y = 1$ , tức là  $a + b = ab$ .

Vậy  $T = 0$ .

**Câu II.** Cho các đa thức  $P(x) = m_1x^2 + n_1x + k_1$ ,  $Q(x) = m_2x^2 + n_2x + k_2$ ,  $R(x) = m_3x^2 + n_3x + k_3$  với  $m_i, n_i, k_i$  là các số thực và  $m_i > 0, i = 1, 2, 3$ . Giả sử phương trình  $P(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $a_1, a_2$ ; phương trình  $Q(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $b_1, b_2$ ; phương trình  $R(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $c_1, c_2$  thỏa mãn

$$P(c_1) + Q(c_1) = P(c_2) + Q(c_2),$$

$$P(b_1) + R(b_1) = P(b_2) + R(b_2),$$

$$Q(a_1) + R(a_1) = Q(a_2) + R(a_2).$$

Chứng minh rằng  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$ .

**Lời giải**

Sử dụng định lý Viét, ta có  $S_1 = a_1 + a_2 = -\frac{n_1}{m_1}$ ,  $S_2 = b_1 + b_2 = -\frac{n_2}{m_2}$ ,  $S_3 = c_1 + c_2 = -\frac{n_3}{m_3}$ .

Ta có  $P(c_1) - P(c_2) = m_1(c_1^2 - c_2^2) + n_1(c_1 - c_2) = (c_1 - c_2)[m_1(c_1 + c_2) + n_1] = m_1(c_1 - c_2)(S_3 - S_1)$ .

Tương tự, ta cũng có  $Q(c_1) - Q(c_2) = m^2(c_1 - c_2)(S_3 - S_2)$ .

Do  $P(c_1) - P(c_2) + Q(c_1) - Q(c_2) = 0$  và  $c_1 \neq c_2$  nên từ hai biến đổi trên, ta suy ra

$$m_1(S_3 - S_1) + m_2(S_3 - S_2) = 0. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$m_2(S_1 - S_2) + m_3(S_1 - S_3) = 0. \quad (2)$$

$$m_3(S_2 - S_3) + m_1(S_2 - S_1) = 0. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), có thể thấy vai trò của  $S_1, S_2, S_3$  là như nhau. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $S_1 = \max\{S_1, S_2, S_3\}$ . Khi đó, ta có  $S_1 - S_2 \geq 0$  và  $S_1 - S_3 \geq 0$ . Lại có  $m_2, m_3 > 0$  nên  $VT_{(2)} \geq 0$ . Để xảy ra dấu đẳng thức như (2) thì dấu bằng trong các đánh giá phải xảy ra, tức ta phải có  $S_1 = S_2 = S_3$ . Đây chính là kết quả cần chứng minh.

**Câu III.** a) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2y^2 - 4x^2y + y^3 + 4x^2 - 3y^2 + 1 = 0$ .

b) Cho ba số nguyên dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 14. Chứng minh rằng  $abc$  cũng chia hết cho 14.

**Lời giải**

a) Phương trình đã cho có thể được viết lại thành  $x^2(y-2)^2 + y^3 - 3y^2 + 4 = 3$

$$\text{hay } (y-2)^2(x^2 + y + 1) = 3.$$

Suy ra  $(y-2)^2 = 1$  và  $x^2 + y + 1 = 3$ . Giải ra, ta được  $x = \pm 1$  và  $y = 1$ . Vậy có hai cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn yêu cầu của đề bài là  $(1; 1)$  và  $(-1; 1)$ .

b) Do  $a^3 + b^3 + c^3$  chẵn nên trong các số  $a, b, c$  có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích  $abc$  chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số  $a, b, c$  không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi  $x$  nguyên không chia hết cho 7 thì  $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$ , suy ra  $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$ .

Do đó  $a^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$ ,  $b^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$ ,  $c^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$ .

Suy ra  $a^3 + b^3 + c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod{7}$ , tức  $a^3 + b^3 + c^3$  không chia hết cho 7, mâu thuẫn.

Vậy trong ba số  $a, b, c$  phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích  $abc$  chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý  $(2; 7) = 1$ , ta có  $abc$  chia hết cho 14.

**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $AB > AC$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là chân đường cao của tam giác  $ABC$  hạ từ  $A, B$ . Gọi  $F$  là chân đường vuông góc hạ từ  $B$  lên đường thẳng  $AO$ .

a) Chứng minh rằng  $B, D, E, F$  là bốn đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng  $EF$  đi qua trung điểm của  $BC$ .

c) Gọi  $P$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $AO$  và đường tròn  $(O)$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $EF$  và  $CP$ . Tính số đo góc  $BMN$ .

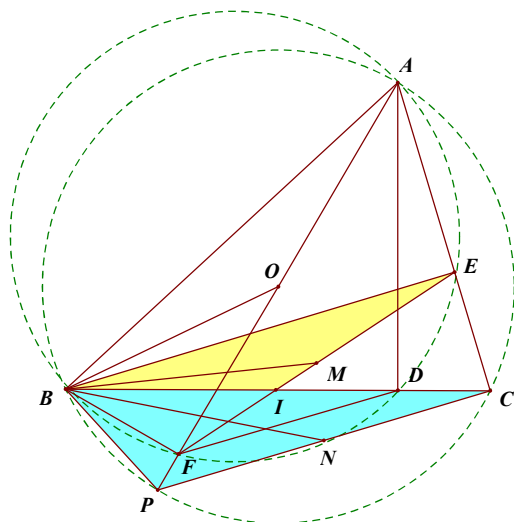
**Lời giải**

a) Ta có  $\widehat{AFB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$  nên năm điểm  $A, B, D, E, F$  cùng nằm trên một đường tròn.

$$\text{Lại có } \widehat{DAE} = 90^\circ - \widehat{ACB} \text{ và } \widehat{FAB} = \widehat{OAB} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{ACB}}{2} = 90^\circ - \widehat{ACB}$$



Nên  $\widehat{FAB} = \widehat{DAE}$ . Đây là góc nội tiếp chắn các cung tương ứng là  $BF$  và  $DE$  của đường tròn  $(ABFDE)$ , do đó  $FB = DE$ . Tứ giác  $BFDE$  nội tiếp và có  $BF = DE$  nên là hình thang cân.



b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$ . Do tứ giác  $BFDE$  là hình thang cân nên  $BI = IE$ . Suy ra tam giác  $BIE$  cân tại  $I$ . Từ đó, ta có  $\widehat{IBE} = \widehat{IEB}$ .

Lại có  $\widehat{IBE} = 90^\circ - \widehat{ICE}$  và  $\widehat{IEB} = 90^\circ - \widehat{IEC}$  nên  $\widehat{ICE} = \widehat{IEC}$ .

Suy ra tam giác  $IEC$  cân tại  $I$ , tức ta có  $IC = IE = IB$ . Vậy  $EF$  đi qua trung điểm  $I$  của  $BC$ .

c) Do tứ giác  $ABFE$  nội tiếp nên  $\widehat{BFE} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ .

Lại có  $\widehat{BPC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$  (do tứ giác  $APBC$  nội tiếp) nên  $\widehat{BFE} = \widehat{BPC}$ . (1)

Do  $BFDE$  là hình thang cân nên  $DF \parallel BE$ . Mà  $BE \perp AC$  nên  $DF \perp AC$ .

Lại có  $PC \perp AC$  nên  $DF \parallel PC$ . Suy ra  $\widehat{BCP} = \widehat{BDF} = \widehat{BEF}$  (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra  $\triangle BEF \sim \triangle BCP$  (g-g).

Lại có  $M$  là trung điểm của  $EF$  và  $N$  là trung điểm của  $CP$  nên từ kết quả trên, ta cũng suy ra

$\triangle BEM \sim \triangle BCN$ . Từ đó, ta có  $\triangle NBC \sim \triangle MBE$  (3) và  $\frac{BN}{BM} = \frac{BC}{BE}$ . (4)

Từ (3), ta suy ra  $\widehat{CBE} = \widehat{MBN}$ . Kết hợp với (4), ta được  $\triangle BMN \sim \triangle BEC$ .

Do đó  $\widehat{BMN} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ .

**Câu V.** Cho tập hợp  $X$  thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con  $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$  của  $X$  sao cho mỗi tập con  $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$  có đúng ba phần tử và hai tập  $A_i, A_j$  đều có đúng một phần tử chung với mọi  $1 \leq i < j \leq 2019$ . Chứng minh rằng

a) Tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$  sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

b) Số phần tử của  $X$  phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

**Lời giải**

a) Xét tập hợp  $A_1$  có ba phần tử  $a, b, c$ . Mỗi một tập hợp  $A_i$  với  $i = 2, \dots, 2019$  sẽ phải có chung với  $A_1$  đúng một phần tử. Ta chia các tập hợp  $A_i$  với  $i = 2, \dots, 2019$  tạo thành ba nhóm. Nhóm thứ nhất



gồm các tập hợp chứa phần tử  $a$ , nhóm thứ hai gồm các tập hợp chứa phần tử  $b$  và nhóm thứ ba gồm các tập hợp chứa phần tử  $c$ . Ba nhóm này tổng hợp lại có 2018 tập hợp, do đó phải có một nhóm chứa ít nhất 673 tập hợp. 673 tập hợp này cùng với  $A_1$  sẽ tạo thành 674 tập hợp có đúng một phần tử chung. Chỉ cần lấy 4 tập hợp trong chúng ra sẽ được 4 tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán. (Chú ý, giao của bốn tập hợp không thể có quá một phần tử).

b) Xét bốn tập hợp  $A_1, A_2, A_3, A_4$  có chung phần tử  $a$ . Ta chứng minh tất cả các tập hợp còn lại đều có chung phần tử  $a$ . Thật vậy, giả sử tồn tại tập hợp  $A$  không chứa  $a$ . Khi đó mỗi một tập trong các  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sẽ có chung với  $A$  một phần tử (khác  $a$ ). Vì  $A$  chỉ có ba phần tử nên theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai tập hợp trong chúng có chung phần tử chung với  $A$ . Chẳng hạn  $A_1, A_2$  có chung phần tử  $b$  với  $A$ . Nhưng lúc này ta có điều mâu thuẫn vì khi đó  $A_1, A_2$  có chung hai phần tử  $a$  và  $b$ . Vậy tất cả các tập hợp đều có chung phần tử  $a$ . Do giao của hai tập hợp bất kỳ có đúng một phần tử nên tất cả các phần tử khác  $a$  còn lại đều đôi một khác nhau, suy ra  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{2019}| \geq 1 + 2019 \times 2 = 4039$ .

Từ đó suy ra số phần tử của  $X$  không ít hơn 4039.

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI**
**KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2020 – 2021**
**Môn: TOÁN (VÒNG 1)**
**Thời gian làm bài: 120 phút**  
*(Không kể thời gian giao đề)*
**ĐỀ CHÍNH THỨC**

 Đề thi gồm **01** trang

**Câu I.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) \div \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0, x \neq 4$  và  $x \neq 9$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm tất cả các số thực  $m$  sao cho bất đẳng thức  $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$  đúng với mọi  $x > 9$ .

**Lời giải**

a) Với điều kiện  $x > 0, x \neq 4$  và  $x \neq 9$ , ta có

$$= \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = \frac{4\sqrt{x}(2-\sqrt{x})+8x}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = \frac{4\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = \frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$

$$\text{Và } \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}$$

$$\text{Do đó } P = \frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \div \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{Vậy với } x > 0, x \neq 4 \text{ và } x \neq 9 \text{ thì } P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

b) Theo câu a), ta cần tìm tất cả các số thực  $m$  sao cho bất đẳng thức  $m(\sqrt{x}-3) \cdot \frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1$

đúng với mọi  $x > 9$ , hay ta phải có  $4m > \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow 4m-1 > \frac{1}{x}$ .

Trước hết, ta sẽ chứng minh với  $m \geq \frac{5}{18}$  thì bất đẳng thức trên được thỏa mãn với mọi số thực

$x > 9$ . Thật vậy, với  $m \geq \frac{5}{18}$  thì ta có  $4m-1 - \frac{1}{x} \geq \frac{10}{9} - 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-9}{9x} > 0, \forall x > 9$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh không tồn tại số thực  $m < \frac{5}{18}$  để bất đẳng thức (1) đúng với mọi

$x > 9$ . Thật vậy, giả sử tồn tại  $m_0 < \frac{5}{18}$  sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi  $x > 9$ .

Rõ ràng  $4m_0 - 1 > 0$ . Chọn  $x = x_0 = \frac{1}{4m_0 - 1}$  thì rõ ràng  $x_0 > \frac{1}{4 \cdot \frac{5}{18} - 1} = 9$ .

Khi đó, theo bất đẳng thức (1), ta phải có  $4m_0 - 1 > \frac{1}{x_0} = 4m_0 - 1$ , mâu thuẫn.

Từ các lý luận trên, ta suy ra  $m \geq \frac{5}{18}$  chính là điều kiện cần tìm. Bình luận. Có lẽ, sẽ có nhiều thí sinh từ bất đẳng thức  $4m - 1 > \frac{1}{x}$  với  $x > 9$  sẽ "suy ra trực tiếp" luôn  $4m - 1 \geq \frac{1}{9}$ . Tuy nhiên, viết như vậy là không chặt chẽ.

Ở chương trình cấp ba, khi đã học về giới hạn và liên tục, các em học sinh có thể suy ra kết quả nhờ lấy giới hạn  $x \rightarrow 9^+$ . Tuy nhiên, với các em học sinh cấp hai, việc trình bày chặt chẽ để suy ra điều kiện chặn  $m \geq \frac{5}{18}$  khá vất vả. Lời giải trên sử dụng phương pháp phản chứng để có một lời giải chặt như vậy.

Có thể thấy câu này "gài" khá hiểm hóc, có lẽ sẽ có nhiều thí sinh bị trừ điểm khi làm câu này.

**Câu II.** a) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng  $(d_1): y = 5x + 9$  và

$(d_2): y = (m^2 - 4)x + 3m$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  song song với nhau.

b) Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình trên có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$ .

c) Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng vận tốc của mỗi ô tô là không đổi trên cả quãng đường AB.

**Lời giải**

a) Để  $(d_1)$  và  $(d_2)$  song song với nhau thì ta phải có: 
$$\begin{cases} m^2 - 4 = 5, \\ 3m \neq 9. \end{cases}$$

Hệ này có duy nhất một nghiệm là  $m = -3$ . Vậy có duy nhất một giá trị  $m$  thỏa mãn là  $m = -3$ .

b) Phương trình đã cho là phương trình bậc hai ẩn  $x$ . Vì biệt thức của phương trình

$$\Delta' = (m-1)^2 - (2m-5) = (m-2)^2 + 2 > 0$$

với mọi  $m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

Do  $x_1$  là nghiệm của phương trình nên ta có  $x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0$ , hay

$$x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = -2x_1 + 4 = -2(x_1 - 2).$$

Do đó, điều kiện đã cho có thể được viết lại thành  $-2(x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 0$ , hay  $(x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0$ .

Một cách tương đương, ta phải có:  $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0$ .

Áp dụng định lý Vieta, ta có  $x_1 + x_2 = 2(m-1)$  và  $x_1x_2 = 2m - 5$ . Do đó, bất đẳng thức (1) có thể

được viết lại thành  $2m - 5 - 4(m-1) + 4 \geq 0$ , từ đó ta phải có  $m \leq \frac{3}{2}$ .

Vậy  $m \leq \frac{3}{2}$  chính là điều kiện cần tìm.

c) Gọi vận tốc của ô tô thứ hai là  $x$  ( km / h ) (điều kiện:  $x > 0$  ). Khi đó, vận tốc của ô tô thứ nhất là  $x + 10$  ( km / h ). Khi đó,

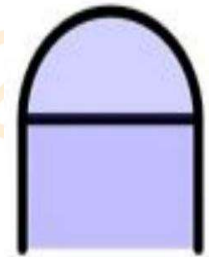
Thời gian để ô tô thứ nhất đi từ A đến B là  $\frac{120}{x+10}$  giờ.

Vì ô tô thứ nhất đến sớm hơn ô tô thứ hai 0,4 giờ nên ta có

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{1200}{x(x+10)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x(x+10) = 3000 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 3025.$$

Từ đó  $x + 5 = 55$ , tức  $x = 50$  ( km / h ), thỏa mãn điều kiện  $x > 0$  . Vậy vận tốc của hai ô tô đã cho lần lượt là 60 ( km / h ) và 50 ( km / h ).

**Câu III.** Bác An muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài các khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình vẽ bên dưới, bỏ qua độ rộng của khuôn gỗ) là 8 m. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất.



### Lời giải

Gọi  $a$  ( m ) là đường kính của nửa hình tròn (điều kiện:  $a > 0$  ). Gọi  $b$  ( m ) là độ dài cạnh còn lại của

hình chữ nhật. Theo giả thiết, ta có  $2b + a + \frac{a\pi}{2} = 8$ , hay  $\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a + 2b = 8$ .

Diện tích của cửa sổ mà bác An muốn làm là

$$S = ab + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = a \left(\frac{\pi}{8}a + b\right) = \frac{1}{2}a \left(\frac{\pi}{4}a + 2b\right) = \frac{1}{2}a \left[\frac{\pi}{4}a + 8 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a\right] = \frac{1}{2}a \left[8 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng  $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ , ta có

$$\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a \left[8 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a\right] \leq \left[\frac{\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a + 8 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a}{2}\right]^2 = 16$$

$$\text{Do đó } a \left[8 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a\right] \leq \frac{16}{1 + \frac{\pi}{4}} = \frac{64}{\pi + 4}.$$

Từ đây, ta suy ra  $S \leq \frac{32}{\pi + 4}$ . Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a = 8 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)a$ , tức

$$a = \frac{16}{\pi + 4} \text{ ( m )}. \text{ Khi đó } 2b = 8 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a = 8 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{16}{\pi + 4} = \frac{16}{\pi + 4}, \text{ tức } b = \frac{8}{\pi + 4} \text{ ( m )}.$$

Vậy diện tích cửa sổ bác An muốn làm lớn nhất là  $\frac{32}{\pi+4}$  (m<sup>2</sup>), điều này đạt được khi và chỉ khi

$$a = \frac{16}{\pi+4} \text{ (m)} \text{ và } b = \frac{8}{\pi+4} \text{ (m)}.$$

**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn. Qua  $A$ , kẻ tiếp tuyến  $AB$  đến đường tròn  $(O)$  ( $B$  là tiếp điểm). Kẻ đường kính  $BC$  của đường tròn  $(O)$ . Trên đoạn  $CO$ , lấy điểm  $I$  khác  $C$  và  $D$ . Đường thẳng  $IA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm  $D$  và  $E$  ( $D$  nằm giữa  $A$  và  $E$ ). Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn  $DE$ .

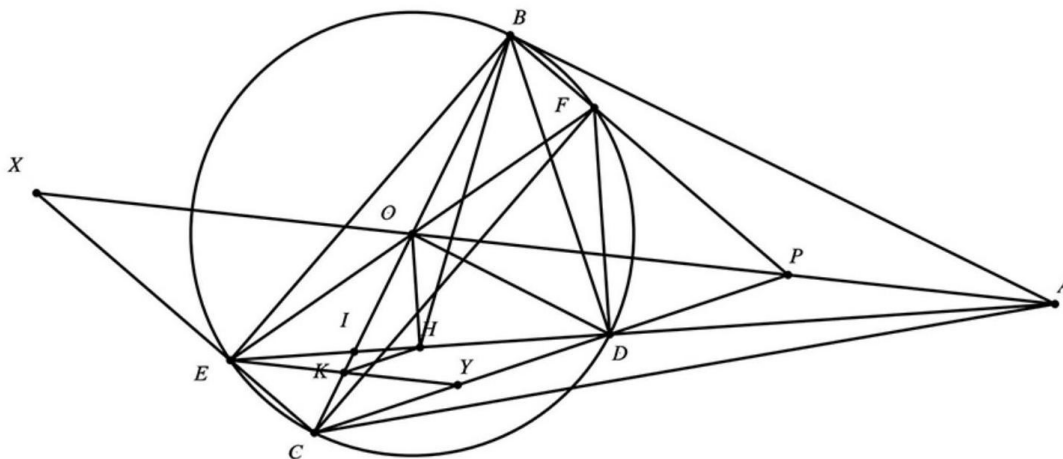
a) Chứng minh rằng  $AB \cdot BE = BD \cdot AE$ .

b) Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $E$  song song với đường thẳng  $AO$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $K$ . Chứng minh rằng  $HK \parallel CD$ .

**Lời giải**

a) Hai tam giác  $ABD$  và  $AEB$  có góc chung  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$  (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp cùng chắn cung đó) nên tam giác  $ABD$  đồng dạng với tam giác  $AEB$ . Suy

$$\text{ra } \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{BE}, \text{ hay } AB \cdot BE = BD \cdot AE.$$



b) Theo đề bài, ta có  $\widehat{ABO} = 90^\circ$  ( $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ ) và  $\widehat{AHO} = 90^\circ$  ( $H$  là trung điểm dây cung  $DE$  của  $(O)$ ) nên  $\widehat{ABO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$ , suy ra tứ giác  $ABHO$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AO$ . Từ đó  $\widehat{OBH} = \widehat{OAH}$ .

Mặt khác, với chú ý  $EK \parallel AO$ , ta có  $\widehat{KEH} = \widehat{OAH} = \widehat{OBH} = \widehat{KBH}$ . Suy ra tứ giác  $BEKH$  nội tiếp. Kết hợp với tứ giác  $BECD$  nội tiếp, ta có  $\widehat{HKB} = \widehat{HEB} = \widehat{DEB} = \widehat{DCB}$ . Suy ra  $HK \parallel CD$ .

c) Gọi  $Y$  là giao điểm của  $EK$  và  $CD$ ,  $X$  là giao điểm của  $EC$  và  $AO$ . Vì tứ giác  $BEKH$  nội tiếp nên  $\widehat{EKB} = \widehat{EHB}$ . Khi đó, hai tam giác  $EKC$  và  $BHD$  có  $\widehat{ECK} = \widehat{ECB} = \widehat{EDB} = \widehat{HDB}$  và

$$\widehat{EK C} = 180^\circ - \widehat{EKB} = 180^\circ - \widehat{EHB} = \widehat{BHD} \text{ nên đồng dạng với nhau (g-g). Suy ra } \frac{EK}{KC} = \frac{BH}{HD}.$$

Vì  $\widehat{KCY} = \widehat{BCD} = \widehat{BED} = \widehat{BEH}$  và  $\widehat{CKY} = \widehat{EKB} = \widehat{EHB}$  nên hai tam giác  $CKY$  và  $EHB$  đồng dạng với nhau (g-g). Suy ra  $\frac{KY}{KC} = \frac{HB}{HE}$ .

Vì  $H$  là trung điểm  $DE$  nên  $\frac{HB}{HE} = \frac{BH}{HD}$ . Do đó  $\frac{EK}{KC} = \frac{KY}{KC}$ , suy ra  $KE = KY$ . Sử dụng định lý Thales, với chú ý  $EY \parallel XP$  (do  $EK \parallel AO$ ) và  $KE = KY$ , ta suy ra  $OP = OX$ . Do đó, tứ giác  $BPCX$  là hình bình hành, suy ra  $BP \parallel CX$  hay  $BP \parallel CE$ . Mà  $CE \perp BE$  nên  $BP \perp BE$ . Do  $F$  là giao điểm của  $BP$  và  $EO$  nên  $\widehat{EBF} = 90^\circ$ , dẫn đến  $EF$  là đường kính của  $(O)$ . Vậy tứ giác  $BFCE$  là hình chữ nhật.

**Câu V.** Tìm tất cả các số thực  $x, y, z$  với  $0 < x, y, z \leq 1$  thỏa mãn

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

**Lời giải**

**Cách 1.** Từ giả thiết, ta có  $1+y+zx \geq x^2 + xy + xz = x(x+y+z)$ . Suy ra

$$\frac{x}{1+y+zx} \leq \frac{x}{x(x+y+z)} = \frac{1}{x+y+z}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:  $\frac{y}{1+z+xy} \leq \frac{1}{x+y+z}$ ,  $\frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{1}{x+y+z}$ .

Do đó: 
$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{3}{x+y+z}.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức trên phải xảy ra. Nghĩa là, dấu đẳng thức trong từng đánh giá phụ cũng phải xảy ra, tức ta phải có  $x = y = z = 1$ . Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một bộ số  $(x, y, z)$  thỏa mãn yêu cầu là  $(1, 1, 1)$ .

**Cách 2.** Từ giả thiết, ta có  $(1-x)(1-z) \geq 0$ , hay  $1+xz \geq x+z$ . Từ đó suy ra  $\frac{x}{1+y+zx} \leq \frac{x}{x+y+z}$ .

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $\frac{y}{1+z+xy} \leq \frac{y}{x+y+z}$ ,  $\frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{z}{x+y+z}$ .

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được  $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq 1$ .

Mặt khác, ta cũng có  $\frac{3}{x+y+z} \geq 1$ . Do đó  $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq 1 \leq \frac{3}{x+y+z}$ .

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức trên phải xảy ra. Nghĩa là, dấu đẳng thức trong từng đánh giá phụ cũng phải xảy ra, tức ta phải có  $x = y = z = 1$ . Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một bộ số  $(x, y, z)$  thỏa mãn yêu cầu là  $(1, 1, 1)$ .

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{6} \\ x \cdot y \cdot z > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .

**Lời giải**

Đặt  $2x^3 = 3y^3 = 4z^3 = t$

Ta có:  $t^3 = 24(x \cdot y \cdot z)^3 \Rightarrow t > 0 \Rightarrow x, y, z > 0$ .

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = \sqrt[3]{t \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)}. \text{ Mặt khác, } \sqrt[3]{2} \cdot x = \sqrt[3]{3} \cdot y = \sqrt[3]{4} \cdot z = \sqrt[3]{t}.$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \cdot \sqrt[3]{t}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{t \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}. \text{ (Do } t > 0 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0 \text{).}$$

**Câu II.** Xét phương trình bậc 2:  $ax^2 + bx + c = 0(1)$ , trong đó  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Biết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn: phương trình (1) có nghiệm; số  $\overline{a2020b}$  chia hết cho 12; số  $c^3 + 3$  chia hết cho  $c + 3$ . Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng  $a + b + c$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } \overline{a2020b} \text{ chia hết cho 12 nên } \begin{cases} a+b+4:3 \\ b:4 \end{cases} \Rightarrow b \in \{4; 8\} \Rightarrow b \leq 8.$$

Lại có,  $b^2 - 4ac \geq 0$  nên  $ac \leq 16 \Rightarrow c \leq 16$  (Vì  $a$  là số nguyên dương).

$$\text{Mà } c^3 + 3 : c + 3; c^3 + 3 = c^3 + 27 - 24 = (c + 3)(c^2 - 3c + 9) - 24 \text{ nên } 24 : c + 3.$$

$$\text{Vì } c \text{ là số nguyên dương và } c \leq 16 \text{ nên ta có } c + 3 \in \{4; 6; 8; 12\} \Rightarrow c \in \{1; 3; 5; 9\}.$$

Xét các trường hợp sau:

$$b = 8 \text{ thì } \begin{cases} ac \leq 16 \\ a:3; c \in \{1; 3; 5; 9\} \end{cases}$$

Khi đó  $a + c$  lớn nhất khi  $(a; c) = (9; 1) \Rightarrow a + b + c = 18$ .



$$2) b = 4 \text{ thì } \begin{cases} ac \leq 4 \\ a \equiv 1 \pmod{3}; c \in \{1; 3; 5; 9\} \end{cases}$$

Trong trường hợp này chỉ có cặp  $(a; c)$  là  $(1; 1), (1; 3), (4; 1)$  thỏa mãn; khi đó  $a + c$  lớn nhất khi  $(a; c) = (4; 1) \Rightarrow a + b + c = 9$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $a + b + c = 18$ .

**Câu III.** Tìm số nguyên  $a$  bé nhất sao cho:  $x^4 + 2x^2 - 4x + a \geq 0$  với mọi số thực  $x$ .

**Lời giải**

Do  $x^4 + 2x^2 - 4x + a \geq 0$  đúng với mọi số thực  $x$ . Xét  $x = \frac{1}{2}$  ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + a &\geq 0 \\ \Rightarrow a &\geq \frac{23}{16} \Rightarrow a \geq 2 \text{ (do } a \text{ nguyên)}. \end{aligned}$$

Ta chứng minh  $a = 2$  thỏa mãn điều kiện bài toán,

Thật vậy, ta có:  $x^4 + 2x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2 \geq 0$  (đúng).

Vậy  $a_{\min} = 2$ .

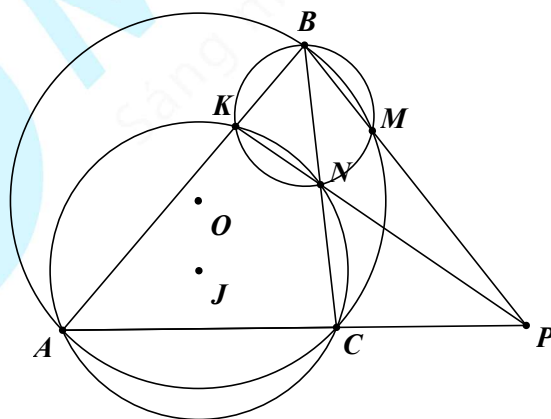
**Câu IV.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $AB > BC$ . Một đường tròn đi qua hai đỉnh  $A, C$  của tam giác  $ABC$  lần lượt cắt các cạnh  $AB, BC$  tại hai điểm  $K, N$  ( $K, N$  khác các đỉnh của tam giác  $ABC$ ). Giả sử đường tròn  $(O)$  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BKN$  cắt nhau tại giao điểm thứ hai là  $M$  ( $M$  khác  $B$ ). Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng  $BM, KN, AC$  đồng quy tại điểm  $P$

b) Tứ giác  $MNCP$  nội tiếp

c)  $BM^2 - PM^2 = BK \cdot BA - PC \cdot PA$

**Lời giải**



a) Gọi  $P$  là giao điểm của  $KN$  với  $AC, BP$  cắt  $(O)$  tại  $M'$ .

Do tứ giác  $ABM'C$  nội tiếp  $\Rightarrow \triangle PCM' \sim \triangle PBA$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PM'}{PA} \Rightarrow PB \cdot PM' = PA \cdot PC$ .

Chứng minh tương tự, tứ giác  $AKNC$  nội tiếp  $\Rightarrow PA \cdot PC = PK \cdot PN$

$$\Rightarrow PK \cdot PN = PB \cdot PM' \Rightarrow \frac{PK}{PB} = \frac{PM'}{PN} \Rightarrow \Delta PKB \sim \Delta PM'N \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{PM'N} = \widehat{PKB}$$

$\Rightarrow KBM'N$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow BM, KN, AC$  đồng quy tại  $P$

b) Do  $AKNC$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{CNP} = \widehat{BAC}$ .

Do  $ABMC$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{CMP} = \widehat{BAC}$ .

Từ đây suy ra  $\widehat{CNP} = \widehat{CMP} \Rightarrow CNMP$  là tứ giác nội tiếp.

c) Từ  $CNMP$  là tứ giác nội tiếp, ta có  $BM \cdot BP = BN \cdot BC$  (do  $\Delta BNM \sim \Delta BPC$ )

Mặt khác,  $BN \cdot BC = BK \cdot BA$  (do  $\Delta BKB \sim \Delta BCA$ )  $\Rightarrow BM \cdot BP = BK \cdot BA$

Từ câu a ta có:  $PM \cdot PB = PC \cdot PA$

$$\Rightarrow BK \cdot BA - PC \cdot PA = BM \cdot BP - PM \cdot BP$$

$$= BP \cdot (BM - PM) = (BM + PM) \cdot (BM - PM) = BM^2 - PM^2 \text{ (đpcm)}$$

**Câu V.** Cho hai số  $A, B$  cùng có 2020 chữ số. Biết rằng: số  $A$  có đúng 1945 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 15 chữ số ngoài cùng về bên phải; số  $B$  có đúng 1954 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 24 chữ số ngoài cùng về bên phải. Chứng minh rằng  $UCLN(A, B)$  là một số có không quá 1954 chữ số.

### Lời giải

Viết  $A = \overline{x00\dots0y}$  và  $B = \overline{z00\dots0t}$ . Với  $x, z$  có 1930 chữ số và  $y$  có 15 chữ số,  $t$  có 24 chữ số.

Ta có:  $A = 10^{90} \cdot x + y$  và  $B = 10^{90} \cdot z + t$ .

Đặt  $d = UCLN(A, B)$  ta có  $x \cdot B - z \cdot A$  chia hết cho  $d \Rightarrow xt - yz$  chia hết cho  $d$ .

Dễ thấy  $xt > yz$  nên  $xt - yz > 0 \Rightarrow d \leq xt - yz < xt$ .

Lại có:  $x < 10^{1930}, t < 10^{24}$  nên  $d < 10^{1930} \cdot 10^{24} = 10^{1954} \Rightarrow d$  có không quá 1954 chữ số.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2021 – 2022

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu 1.** Cho  $P = \left( \frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} \right) : \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$  với  $(a \geq 0; b \geq 0; a \neq b)$ .

a) Rút gọn  $P$ .

b) Chứng minh rằng  $P \geq 0$ .

**Lời giải**

a) Với  $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ , ta có:

$$P = \left( \frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} \right) : \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \left( \sqrt{a}+\sqrt{b} - \frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$= \left( \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$= \left( \frac{a+2\sqrt{ab}+b-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

b) Chứng minh rằng  $P \geq 0$ .

$$\text{Với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{ab} \geq 0 \\ a - \sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab} > 0 \end{cases}$$

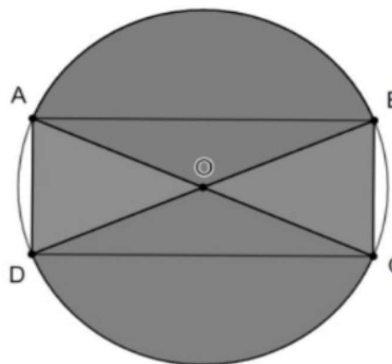
$$\text{Suy ra } P = \frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b} \geq 0.$$

Vậy  $P \geq 0$  (đpcm).

**Câu II.** a) Chứng minh rằng: Với mọi  $m$ , ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 3 = 0 \quad (1); \quad x^2 - mx + 4m - 11 = 0 \quad (2)$$

b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm  $O$ , bán kính bằng 1,6m. Giả sử hình chữ nhật  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính bằng 1,6m sao cho  $\widehat{BOC} = 45^\circ$  (Hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần tô đậm là 150 nghìn đồng/m<sup>2</sup> và phần còn lại là 200 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho  $\pi = 3,14$ .



**Lời giải**

a) Phương trình:  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 3 = 0 \quad (1)$  là phương trình bậc hai ẩn  $x$ , có biệt thức

$$\Delta_1 = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 3) = 4m - 11.$$

Phương trình:  $x^2 - mx + 4m - 11 = 0 \quad (2)$  là phương trình bậc hai ẩn  $x$ , có biệt thức

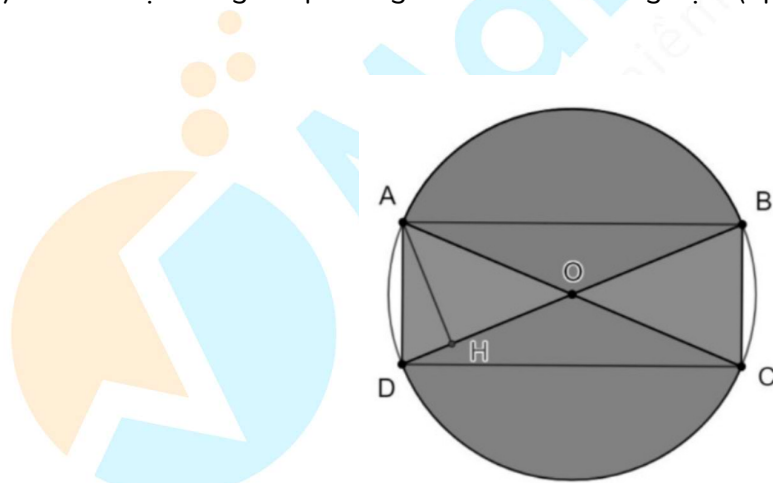
$$\Delta_2 = m^2 - 4(4m - 11) = m^2 - 16m + 44$$

$$\text{Khi đó: } 4\Delta_1 + \Delta_2 = 4(4m - 11) + (m^2 - 16m + 44) = m^2 \geq 0; \forall m$$

Từ đó suy ra ít nhất một trong hai số  $4\Delta_1, \Delta_2$  lớn hơn hoặc bằng 0 hay ít nhất một trong hai số  $\Delta_1, \Delta_2$  lớn hơn hoặc bằng 0.

Do vậy ít nhất một trong hai phương trình bài cho có nghiệm (đpcm).

b)



Kẻ  $AH \perp BD$  tại  $H$  (như hình vẽ).

$$\text{Khi đó, ta có: } AH = AO \cdot \sin \widehat{AOH} = 1,6 \cdot \sin 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{5} (m)$$

$$\text{Suy ra } S_{AOD} = \frac{1}{2} AH \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{5} \cdot 1,6 = \frac{16\sqrt{2}}{25} (m^2)$$

Vì  $\widehat{BOC} = 45^\circ$  nên  $\widehat{AOB} = 135^\circ$ . Khi đó ta có

$$S_{\text{hình quạt } AOB} = \pi \cdot 1,6^2 \cdot \frac{135}{360} \approx 3,0144(\text{m}^2)$$

$$\text{Vì } S_{BOC} = S_{AOD}, S_{\text{hình quạt } COD} = S_{\text{hình quạt } AOB}$$

$$\text{nên ta có } S_{\text{tô đậm}} = 2 \left( \frac{16\sqrt{2}}{25} + 3,0144 \right) \approx 7,839(\text{m}^2)$$

$$\text{Khi đó } S_{\text{không tô đậm}} = S_{\text{hình tròn}} - S_{\text{tô đậm}} \approx 3,14 \cdot 1,6^2 - 7,839 = 0,1994(\text{m}^2)$$

Vậy, số tiền cần để sơn toàn bộ biển quảng cáo là:

$$7,839 \cdot 150 + 0,1994 \cdot 200 \approx 1216(\text{nghìn đồng}).$$

**Câu III.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định sao cho  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Gọi  $(d)$  là đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ . Lấy điểm  $M$  tùy ý trên  $(d)$ . Đường thẳng đi qua  $B$  vuông góc với  $AM$  cắt các đường thẳng  $AM, (d)$  lần lượt tại các điểm  $I$  và  $N$ . Đường thẳng  $MB$  cắt  $AN$  tại  $K$ .

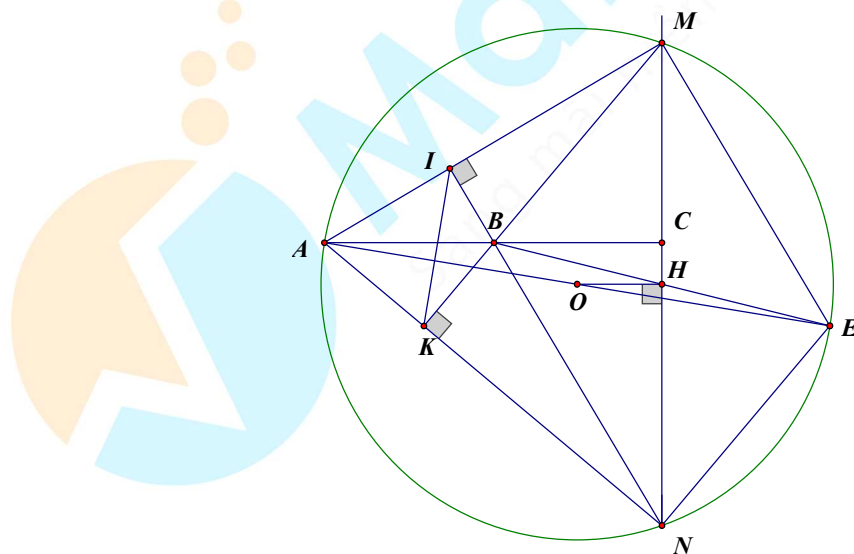
a) Chứng minh rằng tứ giác  $MIKN$  nội tiếp.

b) Chứng minh rằng  $CM \cdot CN = AC \cdot BC$ .

c) Gọi  $O$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$ . Vẽ hình bình hành  $MBNE$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BE$ . Chứng minh rằng  $OH$  vuông góc với đường thẳng  $(d)$  và

$$OH = \frac{1}{2}AB.$$

**Lời giải**



a) Xét tam giác  $AMN$  có hai đường cao là  $AC$  và  $NI$  cắt nhau tại  $B$  nên suy ra  $B$  là trực tâm của tam giác  $AMN$ . Suy ra  $MB$  cắt và vuông góc với  $AN$  tại  $K$ . Do đó  $\widehat{MKN} = \widehat{MIN} = 90^\circ$  suy ra  $K$  và  $I$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $MN$ . Vậy tứ giác  $MIKN$  nội tiếp đường tròn đường kính  $MN$ .

b) Chứng minh rằng  $CM \cdot CN = AC \cdot BC$

Ta có  $\triangle MKN$  vuông tại  $K$  suy ra

$$\widehat{BMC} = 90^\circ - \widehat{ANM} \text{ và } \triangle ACN \text{ vuông tại } C \text{ suy ra } \widehat{NAC} = 90^\circ - \widehat{ANM}$$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{NAC}$  (cùng phụ với  $\widehat{ANM}$ ).

Xét  $\triangle MBC$  và  $\triangle ANC$  có:

$$\widehat{MCB} = \widehat{ACN} = 90^\circ \text{ (vì } AC \perp MN)$$

$$\widehat{BMC} = \widehat{NAC}$$

suy ra  $\triangle MBC \sim \triangle ANC$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = AC \cdot BC.$$

c) Chứng minh rằng  $OH$  vuông góc với đường thẳng  $(d)$  và  $OH = \frac{1}{2}AB$ .

Vì  $BMEN$  là hình bình hành  $\Rightarrow ME \parallel BN$

mà  $BN \perp AM \Rightarrow ME \perp AN \Rightarrow \widehat{AME} = 90^\circ$

suy ra  $AE$  là đường kính của  $(O)$

suy ra  $O$  là trung điểm của  $AE$ .

Vì  $BMEN$  là hình bình hành,  $H$  là trung điểm của  $BE$

nên  $H$  cũng là trung điểm của  $MN$ .

Xét  $\triangle ABE$  có  $H$  là trung điểm của  $BE$ ,  $O$  là trung điểm của  $AE$

suy ra  $OH$  là đường trung bình của  $\triangle ABE \Rightarrow \begin{cases} OH \parallel AB \\ OH = \frac{1}{2}AB \end{cases}$ .

Vì  $OH \parallel AB$  mà  $AB \perp MN \Rightarrow OH \perp MN$  hay  $OH \perp (d)$ .

**Câu IV.** a) Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 57 & (1) \\ |x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} = 1 & (2) \end{cases}$$

b) Cho  $a$  và  $b$  là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  cũng là số hữu tỉ thì  $a = b = 0$ .

**Lời giải**

a) **Cách 1.** Ta có  $|x-1|^{2021} \geq 0$ ;  $|x-2|^{2020} \geq 0$  và  $|x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} = 1$

nên  $|x-1|^{2021} \leq 1$  và  $|x-2|^{2020} \leq 1$ .

Từ đó  $|x-1| \leq 1$  và  $|x-2| \leq 1$ ,

Suy ra tương ứng  $0 \leq x \leq 2$  và  $1 \leq x \leq 3$ .

Kết hợp lại, ta được  $1 \leq x \leq 2$ .

Nếu  $1 < x < 2$  thì  $0 < |x-1| < 1$  và  $0 < |x-2| < 1$ . Do đó

$$|x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} < |x-1| + |x-2| = x-1+2-x=1 \quad (\text{mâu thuẫn}).$$

Vậy  $x=1$  hoặc  $x=2$ .

Thử lại  $x=1$  hoặc  $x=2$  thỏa mãn phương trình (2)

- Thay  $x=1$  vào phương trình (1) của hệ, ta được  $y^2 = 60 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60}$ .
- Thay  $x=2$  vào phương trình (1) của hệ, ta được  $y^2 = 61 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{61}$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm  $(x; y)$  là

$$(1, \sqrt{60}), (1, -\sqrt{60}), (2, \sqrt{61}), (2, -\sqrt{61})$$

**Cách 2.** Đặt  $x-2 = a$  thì phương trình (2) trở thành  $|a|^{2021} + |a+1|^{2020} = 1$

Từ đó suy ra  $|a| \leq 1$  và  $|a+1| \leq 1$

Hay  $-1 \leq a \leq 1$  và  $-1 \leq a+1 \leq 1$

Suy ra:  $-1 \leq a \leq 0$

Ta có  $|a|^{2021} + |a+1|^{2020} \leq |a| + |a+1| = -a + a + 1 = 1$ .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=0$  hoặc  $a=-1$ .

Suy ra  $x=2$  hoặc  $x=1$

- Thay  $x=1$  vào phương trình (1) của hệ, ta được  $y^2 = 60 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60}$ .
- Thay  $x=2$  vào phương trình (1) của hệ, ta được  $y^2 = 61 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{61}$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm  $(x; y)$  là  $(1, \sqrt{60}), (1, -\sqrt{60}), (2, \sqrt{61}), (2, -\sqrt{61})$

b) Ta đặt:  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow c^2 = (a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = 2a^2 + 3b^2 + 6ab\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow c^2 - 2a^2 - 3b^2 = 6ab\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$$

Nếu  $6ab \neq 0 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{c^2 - 2a^2 - 3b^2}{6ab}$  là số hữu tỉ, vô lý.

$$\text{Nếu } 6ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1:  $a=0 \Rightarrow b\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b=0$  (do  $b \in \mathbb{Q}$ ).

Trường hợp 2:  $b=0 \Rightarrow a\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a=0$  (do  $a \in \mathbb{Q}$ ).

Vậy  $a=b=0$  (đpcm).

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2021 – 2022

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

- a) Tìm một đa thức bậc hai  $Q(x)$  với hệ số nguyên sao cho  $\alpha$  là nghiệm của  $Q(x)$ .  
b) Cho đa thức  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ . Tính giá trị của  $P(\alpha)$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $2\alpha = 1 + \sqrt{5}$  nên  $(2\alpha - 1)^2 = 5$  hay  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

Từ đó suy ra  $\alpha$  là nghiệm của  $Q(x) = x^2 - x - 1$ .

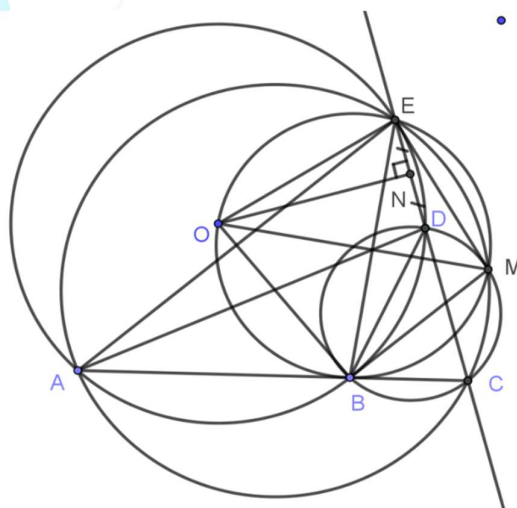
b) Ta có  $P(x) = (x^2 - x - 1)(x^3 + x + 1) + x + 2$ .

Vậy  $P(\alpha) = \alpha + 2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Câu II.** Cho  $A, B$  là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Giả sử  $C$  là điểm cố định trên tia đối của tia  $BA$ . Một cát tuyến thay đổi qua  $C$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  và  $E$  ( $D$  nằm giữa  $C, E$ ). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $BCD$  và  $ACE$  cắt nhau tại giao điểm thứ hai  $M$ . Biết rằng bốn điểm  $O, B, M, E$  tạo thành tứ giác  $OBME$ . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác  $OBME$  nội tiếp.  
b)  $CD \cdot CE = CO^2 - R^2$ .  
c)  $M$  luôn chuyển động trên một đường tròn cố định.

**Lời giải**



a) Vì AEMC, BCMD, EABD là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{EMB} = \widehat{EMC} - \widehat{BMC} = \widehat{EMC} - \widehat{BDC} = 180^\circ - 2\widehat{EAC} = 180^\circ - \widehat{EOB} \Rightarrow \widehat{EMB} + \widehat{EOB} = 180^\circ.$$

Suy ra OBME là tứ giác nội tiếp.

b) Qua điểm O kẻ đường thẳng ON vuông góc với đường thẳng DE tại N. Khi đó N là trung điểm của DE, ta có

$$CE \cdot CD = (CN + NE)(CN - DN) = (CN + NE)(CN - NE) = CN^2 - NE^2 = CO^2 - OE^2 = CO^2 - R^2.$$

c) Ta có các tứ giác OBME, AEDB, BDMC nội tiếp suy ra

$$\widehat{OMC} = \widehat{OMB} + \widehat{BMC} = \widehat{OEB} + \widehat{BDC} = \widehat{OEB} + \widehat{BAE} = \widehat{OEB} + \frac{1}{2}\widehat{BOE} = 90^\circ.$$

Mà O, C cố định nên M nằm trên đường tròn đường kính OC cố định.

**Câu III.** Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng  $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$  với x, y là hai số nguyên dương.

**Lời giải**

Với N = 1 thì ta thấy x = y - 1 thỏa mãn do đó N có vô số cách biểu diễn. Vô lí nên loại N = 1.

Với N ≥ 2 ta sẽ chứng minh N có thể biểu diễn duy nhất. Thật vậy

$$N = \frac{x^2 + y}{xy + 1} \Leftrightarrow Nxy + N = x^2 + y \Leftrightarrow x^2 - Nxy + y - N = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì  $\Delta = (Ny)^2 - 4y + 4N$  phải là số chính phương.

$$(Ny - 1)^2 = (Ny)^2 - 2Ny + 1 \leq (Ny)^2 - 4y + 1 \leq (Ny)^2 + 4N < (Ny + 2)^2.$$

Mà  $\Delta \equiv (Ny)^2 \pmod{2}$  nên  $\Delta = (Ny)^2$  suy ra  $y = N$ , từ đó  $x = N^2$  do x là số nguyên dương.

Do đó phương trình chỉ có nghiệm duy nhất  $(N^2, N)$  nên N cũng chỉ có một cách biểu diễn duy nhất.

Vậy N > 1.

**Câu IV.** Cho a, b, c là 3 số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được ở dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai  $ax^2 - bx + c = 0$  (1) có hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

**Lời giải**

Từ giả thiết, ta có  $a = 2^m, b = 2^n, c = 2^p$  với m, n, p là số tự nhiên.

Vì phương trình (1) có nghiệm nguyên nên ta có:  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^{2n} - 2^{m+p+2}$  phải là số chính phương.

$$\text{Đặt } 2^{2n} - 2^{m+p+2} = u^2 \text{ với } u \text{ tự nhiên, khi đó ta có: } (2^n - u)(2^n + u) = 2^{m+p+2} \quad (2)$$

Giả sử  $u > 0$ . Từ (2), ta suy ra  $2^n - u$  và  $2^n + u$  đều là lũy thừa của 2.

Đặt  $2^n - u = 2^k$  và  $2^n + u = 2^l$  với k, l là các số tự nhiên ( $k < l$ ), khi đó ta có

$$2^{n+1} = 2^k + 2^l = 2^k(2^{l-k} + 1).$$

Suy ra  $2^{l-k} + 1$  là lũy thừa của 2, mâu thuẫn vì  $2^{l-k} + 1$  là số nguyên lẻ lớn hơn 1.

Như vậy, ta phải có  $u = 0$ . Suy ra  $\Delta = 0$ , tức là phương trình (1) có nghiệm kép.

Do đó hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** Cho  $A = \left( \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) \div \frac{1}{x - 1}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho  $\frac{1}{A}$  là số nguyên dương.

**Lời giải**

a) Bằng biến đổi trực tiếp, dễ dàng chứng minh được với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$  thì  $A = (\sqrt{x} + 1)^2$ .

b) Ta có  $\frac{1}{A} > 0$  và  $\frac{1}{A} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \leq 1$ . Vì  $\frac{1}{A}$  là số nguyên dương nên  $\frac{1}{A} = 1$

Từ đó  $(\sqrt{x} + 1)^2 = 1$ , hay  $x = 0$  (thỏa mãn). Vậy  $x = 0$  là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu.

**Câu II.** a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng (d):  $y = ax + b$  biết đường thẳng (d) đi qua điểm  $A(2, -1)$  và song song với đường thẳng  $y = -3x + 1$ .

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

**Lời giải**

a) Do đường thẳng (d) song song với đường thẳng  $y = -3x + 1$  nên  $a = -3$  và  $b \neq 1$ . Mặt khác, do đường thẳng (d) đi qua điểm  $A(2, -1)$  nên  $-1 = 2a + b = -6 + b$ , từ đó  $b = 5$  (thỏa mãn  $b \neq 1$ ).

Vậy phương trình của đường thẳng (d) cần tìm là (d):  $y = -3x + 5$ .

b) Gọi x (đồng) là giá tiền của chiếc tivi lúc nhập về. Rõ ràng  $x > 0$ . Ta có tiền lãi của chiếc tivi đó khi bán là  $10\%x = \frac{x}{10}$  (đồng), suy ra giá bán của chiếc tivi là  $x + \frac{x}{10} = \frac{11x}{10}$  (đồng).

Nếu cửa hàng này nâng giá của chiếc tivi thêm 5% so với giá đã bán thì số tiền lãi thêm là

$\frac{11x}{10} \cdot 5\% = \frac{11x}{200}$  (đồng). Thế thì, sau khi tăng thêm 5% giá đã bán thì giá mới của chiếc tivi (khi

chưa giảm giá) là  $\frac{11x}{10} + \frac{11x}{200} = \frac{231x}{200}$  (đồng). Khi giảm cho khách hàng 245000 đồng thì giá bán là

$\frac{231x}{200} - 245000$  (đồng). Với giá này thì cửa hàng thu được lãi 12% của giá nhập về, tức bằng

$12\%x = \frac{3x}{25}$  (đồng). Như vậy, ta có

$$\left(\frac{231x}{200} - 245000\right) - x = \frac{3x}{25}.$$

Giải phương trình này, ta được  $x = 7000000$ . Vậy giá nhập về của chiếc tivi là 7000000 đồng.

**Câu III.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $D$  thuộc cung nhỏ  $AB$  ( $D$  khác  $A$  và  $B$ ). Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại các điểm  $B$  và  $C$  cắt đường thẳng  $AD$  theo thứ tự tại  $E$  và  $G$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $CE$  và  $BG$ .

a) Chứng minh rằng hai tam giác  $EBC$  và  $BCG$  đồng dạng.

b) Tính số đo góc  $BIC$ . Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác  $BIDE$  nội tiếp.

c) Gọi  $K$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DI$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $BK^2 = KI \cdot KD$ .

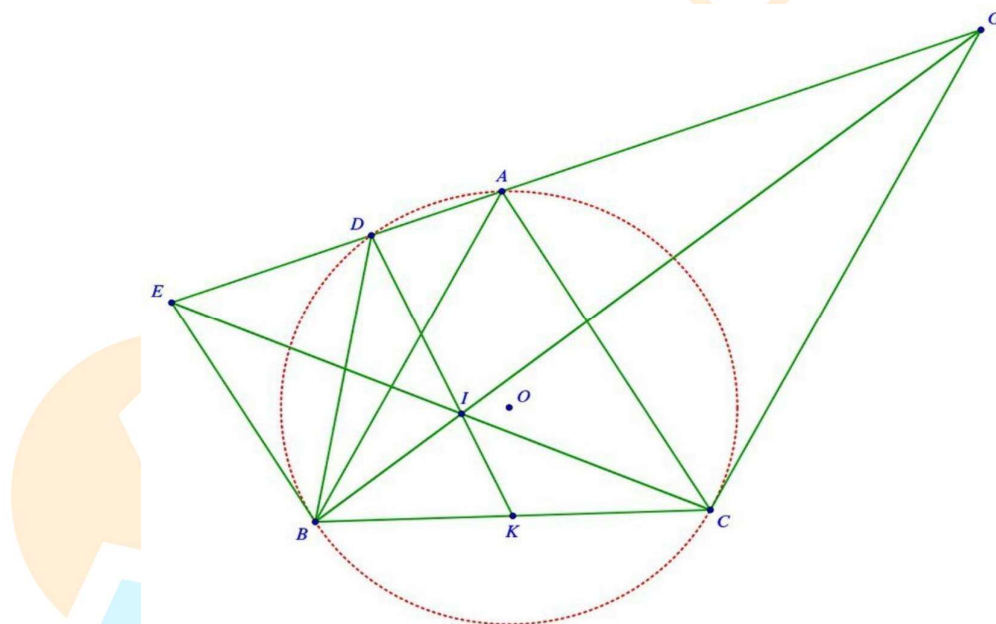
### Lời giải

a) Do tam giác  $ABC$  đều nên  $AB = BC = CA$ ,  $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ , tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  cũng là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Do đó  $BO \perp AC$ . Lại có  $BE$  là tiếp tuyến tại  $B$  của  $(O)$  nên  $BE \perp BO$ , từ đó  $BE \parallel AC$ .

Tương tự, ta cũng có  $CG \parallel AB$ . Suy ra  $\widehat{AEB} = \widehat{GAC}$  và  $\widehat{BAE} = \widehat{AGC}$  (các góc đồng vị). Từ đó

$\triangle AEB \sim \triangle GAC$  (g-g), dẫn đến  $\frac{BE}{AC} = \frac{BA}{CG}$ . Mà  $AC = AB = BC$  nên  $\frac{BE}{BC} = \frac{CB}{CG}$ . Từ đây, kết hợp với

$\widehat{EBC} = \widehat{GCB} = 120^\circ$ , ta được  $\triangle EBC \sim \triangle BCG$  (c-g-c).



b) Từ (1), ta có  $\widehat{BEC} = \widehat{CBG}$ . Từ đó  $\triangle CEB \sim \triangle CBI$ , dẫn đến  $\widehat{CIB} = \widehat{CBE} = 120^\circ$ . Suy ra  $\widehat{BIE} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 60^\circ$ .

Do tứ giác  $ADBC$  nội tiếp  $(O)$  nên  $\widehat{BDE} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ , suy ra  $\widehat{BIE} = \widehat{BDE}$ .

Tứ giác  $BIDE$  có  $\widehat{BIE} = \widehat{BDE}$ , mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh  $BE$  nên tứ giác  $BIDE$  là tứ giác nội tiếp.

c) Do tứ giác  $BIDE$  nội tiếp nên  $\widehat{BDI} = \widehat{BEI}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $BI$ ), mà  $\widehat{BEC} = \widehat{CBG}$  nên  $\widehat{KBI} = \widehat{KDB}$ . Xét hai tam giác  $KBI$  và  $KDB$  có góc  $K$  chung và  $\widehat{KBI} = \widehat{KDB}$  nên hai tam giác này đồng dạng (g-g). Suy ra  $\frac{KB}{KI} = \frac{KD}{KB}$ , từ đó  $KB^2 = KI \cdot KD$ .

Bình luận. Bài hình ra giống đề thi vòng 2 của chuyên Sư phạm năm 2004–2005. Câu a) gây khó khăn cho học sinh khi phải tìm ra hai tam giác đồng dạng góc góc thì mới chứng minh được cặp tam giác đề bài ra. Hai câu b) và c) lại khá nhẹ nhàng khi chỉ cần dùng ý trước là có thể làm được ngay.

**Câu IV.** a) Tìm tất cả các số thực  $x$  thỏa mãn  $a = x + \sqrt{2}$  và  $b = x^3 + 5\sqrt{2}$  là hai số hữu tỉ.

b) Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_{2022}, b_1, b_2, \dots, b_{2022}$  thỏa mãn mỗi phương trình  $x^2 + a_i x + b_i = 0$  đều có hai nghiệm thực phân biệt  $x_0$  và  $x_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 2022$ .

Chứng minh rằng số thực  $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}}{2022}$  là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 + \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}}{2022} \right) x + \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}}{2022} \right) = 0.$$

**Lời giải**

a) Ta có  $x = a - \sqrt{2}$ , do đó

$$b = x^3 + 5\sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + 5\sqrt{2} = a^3 + 6a + 3\sqrt{2}(1 - a^2).$$

Vì  $a, b$  là các số hữu tỉ nên  $3\sqrt{2}(1 - a^2)$  là số hữu tỉ. Suy ra  $1 - a^2 = 0$ , tức  $a = \pm 1$ . Từ đây, ta có

$x = 1 - \sqrt{2}$  hoặc  $x = -1 - \sqrt{2}$ . Thử lại, ta thấy các giá trị này đều thỏa mãn yêu cầu. Vậy, có hai giá trị  $x$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $x = 1 - \sqrt{2}$  và  $x = -1 - \sqrt{2}$ .

b) Sử dụng định lý Vieta, ta có  $x_0 + x_i = -a_i$  và  $x_0 x_i = b_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 2022$ . Từ đó suy ra

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}) = 2022x_0 + (x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}) = 2022(x_0 + \alpha)$$

và

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{2022} = x_0(x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}) = 2022x_0\alpha.$$

Như vậy,  $x_0 + \alpha = -\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}}{2022}$  và  $x_0\alpha = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}}{2022}$ .

Do đó, theo định lý Viet đảo, cả hai số  $x_0$  và  $\alpha$  đều là nghiệm của phương trình

$$x^2 + \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}}{2022} \right) x + \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}}{2022} \right) = 0.$$

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức  $P = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ .

b) Cho đa thức  $P(x) = ax^2 + bx + c$  với  $a \neq 0$ . Chứng minh rằng, nếu đa thức  $P(x)$  nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên  $x$  thì  $2a, a+b, c$  đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng nếu ba số  $2a, a+b, c$  là những số nguyên thì  $P(x)$  cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên  $x$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $P = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ .

b) Giả sử  $P(x)$  nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên  $x$ . Khi đó, ta có  $P(-1), P(0)$  và  $P(1)$  là các số nguyên. Suy ra  $a-b+c, c, a+b+c$  là các số nguyên. Từ đó ta có  $a+b = (a+b+c) - c$  là số nguyên và  $2a = (a+b+c) + (a-b+c)$  là số nguyên. Vậy  $2a, a+b$  và  $c$  là các số nguyên.

Bây giờ, giả sử  $2a, a+b$  và  $c$  là các số nguyên. Khi đó, ta có

$$P(x) = a(x^2 - x) + (a+b)x + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c$$

luôn nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên  $x$ , do  $\frac{x(x-1)}{2}$  là số nguyên với mọi  $x$  nguyên.

**Câu II.** Cho tam giác đều  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Cung nhỏ  $OB$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OBC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $E$ . Tia  $BE$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $F$ .

a) Chứng minh rằng tia  $EO$  là tia phân giác của góc  $CEF$ .

b) Chứng minh rằng tứ giác  $ABOF$  nội tiếp.

c) Gọi  $D$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $CE$  và đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, F, D$  thẳng hàng.

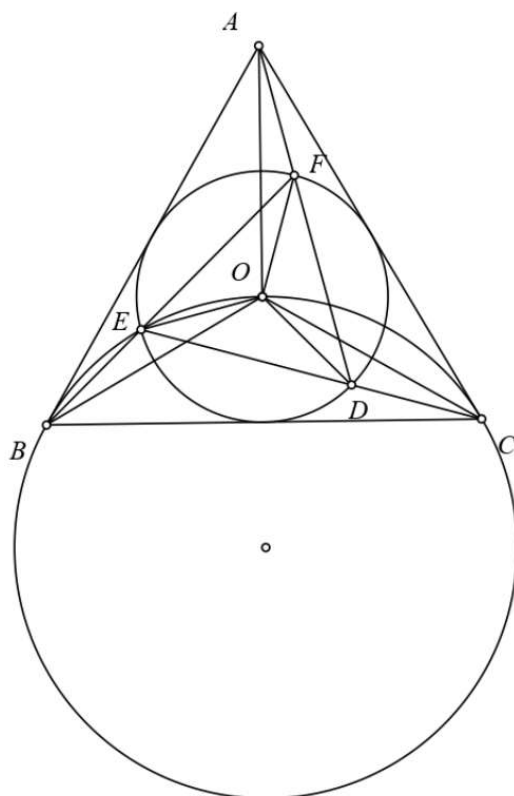
**Lời giải**

a) Do đường tròn  $(O)$  nội tiếp tam giác đều  $ABC$  nên  $\widehat{BAC} = \widehat{CBA} = \widehat{ACB} = 60^\circ$  và  $AO, BO, CO$  là các đường phân giác của tam giác  $ABC$ .

Do tứ giác  $OEBC$  nội tiếp nên  $\widehat{OEF} = \widehat{OCB} = 30^\circ$  và  $\widehat{OEC} = \widehat{OBC} = 30^\circ$ . Suy ra  $\widehat{OEF} = \widehat{OEC}$  nên  $EO$  là tia phân giác của  $\widehat{CEF}$ .

b) Vì tam giác  $OEF$  cân tại  $O$  nên  $\widehat{OFE} = \widehat{OEF} = 30^\circ$ . Do  $\widehat{BAO} = \widehat{BFO} = 30^\circ$  nên tứ giác  $ABOF$  nội tiếp.





c) Hai tam giác  $OED, OEF$  có  $OE = OF = OD$  và  $\widehat{OEF} = \widehat{OED}$  nên chúng bằng nhau. Suy ra  $ED = EF$ . Từ đó, tam giác  $DEF$  cân tại  $E$ . Mà  $\widehat{DEF} = 60^\circ$  nên tam giác này là tam giác đều. Bây giờ, với chú ý rằng tứ giác  $ABOF$  nội tiếp, ta có:  $\widehat{AFB} + \widehat{BFD} = \widehat{AOB} + \widehat{EFD} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ . Vậy ba điểm  $A, F, D$  thẳng hàng.

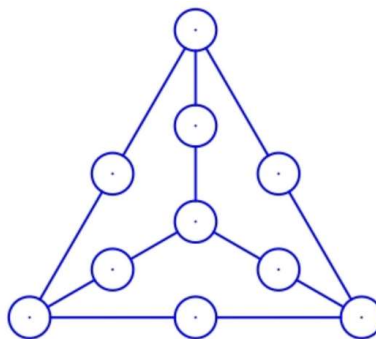
**Câu III.** Cho  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $ab = cd$ . Chứng minh rằng số  $N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$  là hợp số.

**Lời giải**

Từ giả thiết, ta có  $\frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{d^{2022}}{b^{2022}} = \frac{x}{y}$  với  $x, y$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Do  $\frac{x}{y}$  là phân số tối giản nên tồn tại các số nguyên dương  $m, n$  sao cho  $a^{2022} = mx, c^{2022} = my, d^{2022} = nx$  và  $b^{2022} = ny$ . Từ đó, ta có:  $N = mx + ny + my + nx = (m+n)(x+y)$  là hợp số, do  $m+n$  và  $x+y$  là các số nguyên dương lớn hơn 1.

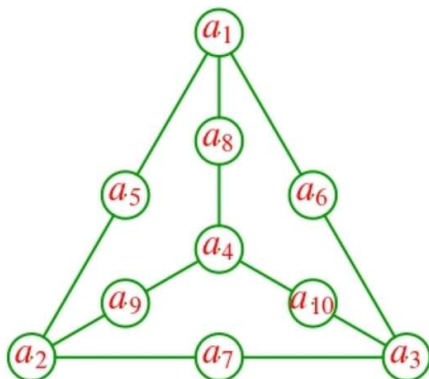
**Câu IV.**

Ta viết mười số  $0, 1, 2, \dots, 9$  vào mười ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng một lần. Sau đó, ta tính tổng của ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được sáu tổng. Có hay không một cách viết mười số như thế sao cho sáu tổng nhận được là bằng nhau?



**Lời giải**

Giả sử tồn tại một cách điền số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi các số được điền là  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  như hình vẽ.



Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
 6S &= (a_1 + a_5 + a_2) + (a_2 + a_7 + a_3) + (a_3 + a_6 + a_1) + (a_3 + a_{10} + a_4) \\
 &\quad + (a_4 + a_9 + a_2) + (a_4 + a_8 + a_1) \\
 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) \\
 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \\
 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 45.
 \end{aligned}$$

Suy ra 45 là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại cách điền số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu V.** a) Trong mặt phẳng cho năm điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm đã cho.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho.

**Lời giải**

a) Xét năm điểm  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Có thể thấy rằng bao lồi  $C$  của năm điểm này phải là một ngũ giác lồi hoặc một tứ giác lồi hoặc một tam giác.

- Trường hợp 1: Bao lồi  $C$  của năm điểm này là một ngũ giác lồi. Không mất tính tổng quát, giả sử ngũ giác đó là  $A_1A_2A_3A_4A_5$ . Khi đó, ta có

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \angle A_3A_4A_5 + \angle A_4A_5A_1 + \angle A_5A_1A_2 = 540^\circ.$$

Suy ra, trong các góc  $\angle A_1A_2A_3, \angle A_2A_3A_4, \angle A_3A_4A_5, \angle A_4A_5A_1$  và  $\angle A_5A_1A_2$ , phải có một góc lớn hơn  $90^\circ$ .

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

- Trường hợp 2: Bao lồi  $C$  của năm điểm này là một tứ giác lồi. Không mất tính tổng quát, giả sử tứ giác đó là  $A_2A_3A_4A_5$ . Khi đó, điểm  $A_1$  phải nằm trong tứ giác  $A_2A_3A_4A_5$ . Ta có

$$\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \angle A_4A_1A_5 + \angle A_5A_1A_2 = 360^\circ.$$

Do đó, góc lớn nhất trong các góc  $\angle A_2A_1A_3, \angle A_3A_1A_4, \angle A_4A_1A_5$  và  $\angle A_5A_1A_2$  phải có số đo không nhỏ hơn  $90^\circ$ . Nếu góc này có số đo bằng  $90^\circ$  thì cả bốn góc  $\angle A_2A_1A_3, \angle A_3A_1A_4, \angle A_4A_1A_5, \angle A_5A_1A_2$  đều phải bằng nhau và bằng

$90^\circ$ , suy ra  $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 = 180^\circ$ , tức ba điểm  $A_2, A_1, A_4$  thẳng hàng, mâu thuẫn. Như vậy, góc lớn nhất trong các góc  $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4, A_4A_1A_5$  và  $A_5A_1A_2$  phải là góc tù. Ta có điều phải chứng minh.

- Trường hợp 3: Bao lồi  $\mathcal{C}$  của năm điểm này là một tam giác. Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác đó là  $A_2A_3A_4$ . Khi đó, hai điểm  $A_1$  và  $A_5$  phải nằm trong tam giác này. Suy ra  $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \angle A_4A_1A_2 = 360^\circ$ . Từ đó, góc lớn nhất trong ba góc  $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4$  và  $A_4A_1A_2$  phải có số đo không nhỏ hơn  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ > 90^\circ$ . Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát sau bằng quy nạp theo  $n$ : Với  $n+4$  điểm trên mặt phẳng cho trước, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, tồn tại ít nhất  $n$  tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ  $n+4$  điểm đã cho.

Theo kết quả câu a), mệnh đề đúng với  $n=1$ . Giả sử mệnh đề đúng đến  $n=k$  với  $k$  nguyên dương, ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với  $n=k+1$ . Xét  $k+5$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{k+5}$  trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó, với năm điểm  $A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3}, A_{k+4}, A_{k+5}$ , theo câu a), ta tìm được một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm này. Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác  $A_{k+3}A_{k+4}A_{k+5}$  tù. Bỏ qua điểm  $A_{k+5}$  và xét  $k+4$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{k+4}$ . Theo giả thiết quy nạp, từ  $k+4$  điểm đang xét, ta tìm được  $k$  tam giác tù có các đỉnh được lấy từ  $k+4$  điểm này. Như vậy, từ  $k+5$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{k+5}$ , ta tìm được  $k+1$  tam giác tù có các đỉnh được lấy từ  $k+5$  điểm đang xét. Khẳng định cũng đúng với  $n=k+1$ . Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi  $n$  nguyên dương.

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x > 0$ .

b) Một khay nước có nhiệt độ  $125^\circ\text{F}$  khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ khay nước chỉ còn là  $64^\circ\text{F}$ ?

**Lời giải**

a) Với  $x > 0$ , ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 8)}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} - \frac{4(x - 4)}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)}{x - 2\sqrt{x} + 4} + 2\sqrt{x} + 1 - \frac{4(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) + 2\sqrt{x} + 1 - 4(\sqrt{x} - 2) = x + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1 - 4\sqrt{x} + 8 = x + 9. \end{aligned}$$

Vậy với  $x > 0$  thì  $A = x + 9$ .

b) **Cách 1:**

Nhiệt độ của khay nước sau giờ thứ nhất là  $125 - 125 \cdot 20\% = 80\% \cdot 125 = 100$  ( $^\circ\text{F}$ ).

Nhiệt độ của khay nước sau giờ thứ hai là

$$100 - 20\% \cdot 100 = 80\% \cdot 100 = 80$$
 ( $^\circ\text{F}$ ).

Nhiệt độ của khay nước sau giờ thứ ba là

$$80 - 20\% \cdot 80 = 80\% \cdot 80 = 64$$
 ( $^\circ\text{F}$ ).

Dễ thấy sau  $x$  giờ, với  $x > 3$  thì nhiệt độ của khay nước là nhỏ hơn  $64^\circ\text{F}$  (không thỏa mãn)

Vậy sau 3 giờ, nhiệt độ nước trong khay chỉ còn là  $64^\circ\text{F}$ .

**Cách 2:**

Gọi  $t$  ( $t > 0$ , đơn vị: giờ) là thời gian để sau  $t$  giờ đó nhiệt độ nước trong khay chỉ còn là  $64^\circ\text{F}$ .

Giả sử  $x$  ( $^\circ\text{F}$ ) là nhiệt độ của khay nước khi bắt đầu cho vào tủ đá.

Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm 20%.

Do đó sau một giờ, nhiệt độ của khay nước là  $x - 20\% = 80\%x$ .

Sau hai giờ, nhiệt độ của khay nước là  $x - 20\% = 80\%x - 20\% = 80\%x \cdot (1 - 20\%) = (80\%)^2 x$ .

Sau  $t$  giờ, nhiệt độ của khay nước là  $(80\%)^t x$ .

Với  $x = 125^\circ\text{F}$  và sau  $t$  giờ, nhiệt độ của khay nước là  $64^\circ\text{F}$ , ta có:

$$(80\%)^t \cdot 125 = 64 \text{ hay } \left(\frac{4}{5}\right)^t = \left(\frac{4}{5}\right)^3. \text{ Do đó } t = 3$$

Vậy sau 3 giờ, nhiệt độ nước trong khay chỉ còn là  $64^\circ\text{F}$ .

**Câu II.** a) Cho phương trình:  $x^2 - (2m - 1)x - (m^2 + 1) = 0$ . (1)

Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$ , phương trình (1) luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào  $m$ .

b) Cho Parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) đi qua  $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ . Tìm tọa độ điểm M trên Parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

### Lời giải

a) Xét phương trình (1) có

$$\Delta = [-(2m - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(m^2 + 1)] = 8m^2 - 4m + 5 = 2\left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0 \text{ với mọi } m.$$

Suy ra với mọi giá trị của  $m$ , phương trình (1) luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

Theo hệ thức Viét, ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = -(m^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_1 + x_2 + 1}{2} \\ x_1 x_2 = -m^2 - 1 \end{cases}$$

Thay  $m = \frac{x_1 + x_2 + 1}{2}$  vào  $x_1 x_2 = -m^2 - 1$  ta được:  $x_1 x_2 = -\left(\frac{x_1 + x_2 + 1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{(x_1 + x_2 + 1)^2}{4} - 1$

Suy ra  $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 5 = 0$

Vậy biểu thức giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$  là:

$$x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 5 = 0.$$

b) Vì Parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) đi qua  $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$  nên  $\frac{1}{2} = a \cdot (-1)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ .

Khi đó (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

Vì  $M \in (P): y = \frac{1}{2}x^2$  nên  $M\left(k; \frac{1}{2}k^2\right)$ .

Khoảng cách từ M đến trục tung là  $|k|$ .

Khoảng cách từ M đến trục hoành là  $\left|\frac{1}{2}k^2\right|$ .

Theo giả thiết, ta có phương trình  $|k| = 2\left|\frac{1}{2}k^2\right| \Leftrightarrow |k| = k^2 \Leftrightarrow k^2 = k^4 \Leftrightarrow k^2(k^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = \pm 1 \end{cases}$ .

Vậy tọa độ các điểm M cần tìm là  $M_1(0;0)$ ;  $M_2\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ ;  $M_3\left(1;\frac{1}{2}\right)$ .

**Câu III.** Cho hình bình hành ABCD có  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ ,  $BC = 2AB$ . Dựng đường tròn tâm O đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh:

- Tam giác ABD là tam giác vuông.
- Tứ giác OBEH là tứ giác nội tiếp.
- SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

### Lời giải

a) Gọi K là trung điểm của đoạn AD

Ta có tam giác ABK đều (do  $AB = AK = a$  và  $\widehat{BAK} = 60^\circ$ )

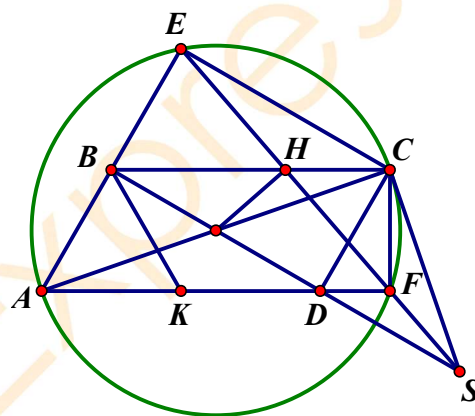
Suy ra  $\widehat{ABK} = 60^\circ$  (1)

Tam giác KBD cân tại K và  $\widehat{BKD} = 120^\circ$

Suy ra  $\widehat{KBD} = 30^\circ$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{ABD} = 90^\circ$

Vậy tam giác ABD là tam giác vuông tại B.



b) Do đó  $OB \perp AE$  và  $OA = OE$ , suy ra B là trung điểm của AE.

Xét tam giác EAF có B là trung điểm của AE và  $BH \parallel AF$  nên H là trung điểm của EF.

Suy ra  $OH \perp EF$ .

Tứ giác BEHO có  $\widehat{OBE} = \widehat{OHE} = 90^\circ$  tứ giác BEHO là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có:  $\widehat{CHS} = \widehat{BHE}$ . Do tứ giác BEHO nội tiếp nên  $\widehat{BHE} = \widehat{BOE} = \widehat{BOA} = \widehat{COS}$ .

Suy ra  $\widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90^\circ$ . Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Câu IV.** Có hay không các số nguyên a, b sao cho  $(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$ ?

### Lời giải

Ta có  $(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab\sqrt{2023} + 2023b^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow (a^2 + 2023b^2 - 2024) + (2ab - 2023)\sqrt{2023} = 0$ .

Vì a, b nguyên nên  $\begin{cases} a^2 + 2023b^2 - 2024 = 0 \\ 2ab - 2023 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2023b^2 = 2024 \\ ab = \frac{2023}{2} \end{cases}$ .



Mà  $a, b$  nguyên nên  $ab$  nguyên.

Suy ra không tồn tại các cặp số nguyên  $a, b$  thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Câu V.** Trên bảng ta viết đa thức:  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

Ta viết đa thức mới:  $P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$  rồi xoá đa thức  $P(x)$ .

Ta viết đa thức mới:  $P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2}$  rồi xoá đa thức  $P_1(x)$ .

Ta tiếp tục làm thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

### Lời giải

Ta có:  $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c \\ P(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x+1) + P(x-1) = 2ax^2 + 2bx + 2a + 2c$$

$$\Rightarrow P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2} = ax^2 + bx + a + c.$$

Tương tự, ta tính được:  $P_2(x) = ax^2 + bx + 2a + c$ ;  $P_3(x) = ax^2 + bx + 3a + c$

Làm như vậy đến lần thứ  $n$ , ta nhận được đa thức:  $P_n(x) = ax^2 + bx + na + c$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Khi đó } \Delta_n = b^2 - 4a(na + c) = (b^2 - 4ac) - 4a^2n.$$

Xét các trường hợp:

+) Nếu  $P(x)$  vô nghiệm thì  $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta_n < 0 \Rightarrow$  Đa thức  $P_n(x)$  vô nghiệm.

+) Nếu  $P(x)$  có nghiệm thì  $b^2 - 4ac = k \geq 0$ . Khi đó với  $n$  đủ lớn thì  $\Delta_n = k - 4a^2n < 0$

$\Rightarrow$  Đa thức  $P_n(x)$  vô nghiệm.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

----- HẾT -----



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Câu I.** a) Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.

b) Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  là nghiệm của hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$$

**Lời giải**

a) Gọi bốn số nguyên là  $n, n+1, n+2, n+3$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

$$\begin{aligned} \text{Xét } A &= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có 
$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y - 1) = 10 \\ (x + 1)(y + 1) = 12 \end{cases}$$

Vì  $x, y$  nguyên và  $2y - 1$  là số lẻ nên ta có  $x \in U(10); x + 1 \in U(12)$  và  $x$  là số chẵn.

Suy ra  $x \in \{-10; -2; 2; 10\}$  và  $x + 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$ .

Do đó  $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ . Thay vào hệ phương trình, ta chỉ tìm được cặp  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$  thoả mãn.

Vậy  $(x; y) = (2; 3)$  là cặp số cần tìm.

**Câu II.** a) Cho  $a, b$  là các số thực không âm,  $c$  là số thực dương thoả mãn đẳng thức:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$ .

b) Tìm các số nguyên dương  $a$  và  $b$  sao cho  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}}$  là số hữu tỉ.

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$ . (1)

Trường hợp 1: Nếu  $b = c$  thì  $\sqrt{a} - \sqrt{a} = \sqrt{c} + \sqrt{c} \Rightarrow c = 0$  (mâu thuẫn với giả thiết).

Trường hợp 2: Nếu  $b \neq c$ , ta có  $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c} \Leftrightarrow \frac{a - (a+b-c)}{\sqrt{a} + \sqrt{a+b-c}} = \frac{b-c}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

$$\Leftrightarrow \frac{-(b-c)}{\sqrt{a} + \sqrt{a+b-c}} = \frac{b-c}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a+b-c} = -\sqrt{b} + \sqrt{c}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra  $\sqrt{a} = \sqrt{c} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{a+b-c} = \sqrt[3]{b} \end{cases}$ .

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Đặt  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}} = \frac{m}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  và  $(m, n) = 1$ .

Ta có  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}} = \frac{m}{n} \Rightarrow n\sqrt{3} + n\sqrt{a} = m\sqrt{5} + m\sqrt{b} \quad (*)$

$$\Leftrightarrow n\sqrt{3} - m\sqrt{b} = m\sqrt{5} - n\sqrt{a} \Leftrightarrow 3n^2 - 2mn\sqrt{3b} + bm^2 = 5m^2 - 2mn\sqrt{5a} + an^2$$

$$\Leftrightarrow 2mn\sqrt{5a} - 2mn\sqrt{3b} = 5m^2 + an^2 - 3n^2 - bm^2$$

$$\Rightarrow 2mn\sqrt{5a} - 2mn\sqrt{3b} \text{ là số hữu tỉ} \Rightarrow \sqrt{5a} - \sqrt{3b} \text{ là số hữu tỉ.}$$

Trường hợp 1:  $\sqrt{5a} - \sqrt{3b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = k$  với  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Khi đó  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3k}}{\sqrt{5} + \sqrt{5k}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$  không là số hữu tỉ.

Trường hợp 2:  $\sqrt{5a} - \sqrt{3b} \neq 0$ .

Mà  $(\sqrt{5a} - \sqrt{3b})(\sqrt{5a} + \sqrt{3b}) = 5a - 3b$  là số hữu tỉ nên  $\sqrt{5a} + \sqrt{3b}$  là số hữu tỉ.

Do đó  $\sqrt{5a}$  và  $\sqrt{3b}$  là các số hữu tỉ.

Đặt  $\sqrt{5a} = \frac{x}{y}$  với  $x, y \in \mathbb{N}^*$  và  $(x, y) = 1$ .

Ta có  $x^2 = 5ay^2 \Rightarrow x^2 : y^2$ . Mà  $(x, y) = 1$  nên  $y = 1 \Rightarrow a = \frac{x^2}{5}$ .

Chứng minh tương tự, ta có  $b = \frac{y^2}{3}$ ,  $y \in \mathbb{N}^*$ .

Thay vào (\*), ta được:  $n\sqrt{3} + \frac{nx}{\sqrt{5}} = m\sqrt{5} + \frac{my}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{5}(3n - my) = \sqrt{3}(5m - nx)$ .

Mà  $\sqrt{3}, \sqrt{5}$  là các số vô tỉ nên  $\begin{cases} 3n - my = 0 \\ 5m - nx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = my \\ 5m = nx \end{cases} \Rightarrow xy = 15mn$ .

Mặt khác  $m, n \in \mathbb{N}^*$  nên  $xy = 15$ .

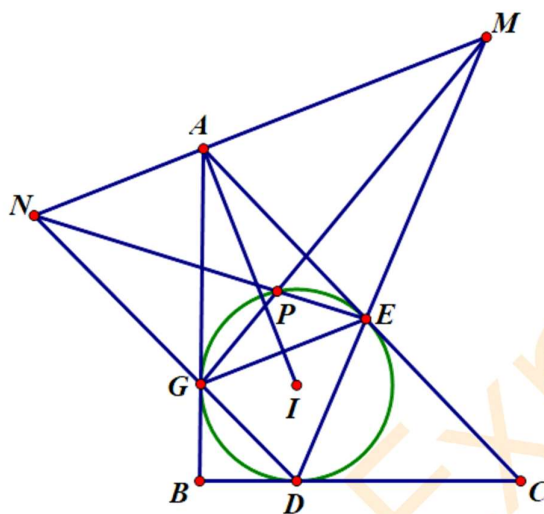
Từ đó, ta tìm được các cặp số  $(x; y)$  và thử lại thấy  $(x; y) = (5; 3)$  thỏa mãn. Suy ra  $(a; b) = (5; 3)$ .

Vậy  $(a; b) = (5; 3)$ .

**Câu III.** Cho tam giác  $ABC$ . Đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  lần lượt tiếp xúc các cạnh  $BC, CA, AB$  tại các điểm  $D, E, G$ . Hai đường thẳng  $DE, DG$  lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc  $BAC$  tại  $M, N$ . Hai đường thẳng  $MG, NE$  cắt nhau tại điểm  $P$ . Chứng minh:

- $EG \parallel MN$ .
- Điểm  $P$  nằm trên đường tròn  $(I)$ .

**Lời giải**



a) Vì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  nên  $AI$  là phân giác trong của góc  $BAC$ . Mà  $AM$  là phân giác ngoài của góc  $BAC$  nên  $MN \perp AI$

Do  $AE, AG$  là hai tiếp tuyến của đường tròn  $(I)$  nên  $EG \perp AI$ . Vậy  $EG \perp AI$

b) Ta có  $\widehat{GDE} = \widehat{GEA}$  (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung)

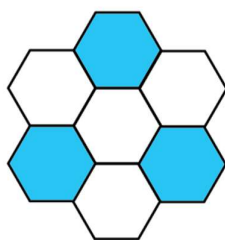
Mà  $\widehat{GEA} = \widehat{EAM}$  (So le trong) suy ra  $\widehat{GDE} = \widehat{EAM}$ . Do đó tứ giác  $AEDN$  nội tiếp. Vì thế  $\widehat{NED} = \widehat{NAD}$ .

Chứng minh tương tự ta có tứ giác  $AGDM$  nội tiếp. Suy ra  $\widehat{MAD} = \widehat{MGD}$ .

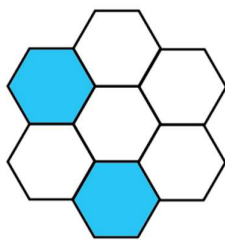
Ta có  $\widehat{DEP} + \widehat{DGP} = \widehat{DEN} + \widehat{MGD} = \widehat{NAD} + \widehat{MAD} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác  $DEPG$  nội tiếp. Vậy điểm  $P$  nằm trên đường tròn  $(I)$ .

**Câu IV.** Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng 2 màu trắng, đen như Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách trên bao nhiêu lần đi nữa cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.



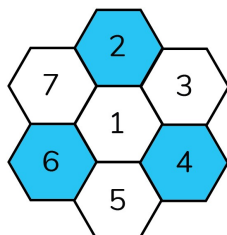
Hình 1



Hình 2

**Lời giải**

Giả sử ta đánh số các lục giác đều như hình vẽ.



Hình 1

Xét 4 lục giác đều ở vị trí số 3; 4; 6; 7.

Khi thực hiện đổi màu của một lục giác và tất cả các lục giác có chung cạnh với lục giác đó thì 4 lục giác số 3; 4; 6; 7 luôn có 2 lục giác hoặc cả 4 lục giác này đều đổi màu.

Suy ra số lục giác được tô màu trong 4 lục giác này không thay đổi tính chẵn lẻ.

Ban đầu có 2 lục giác được tô màu nên ta không thể có bước thực hiện để lúc sau có 1 lục giác được tô màu như Hình 2.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Câu V.** Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương  $n > 10^{2023}$  sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn  $n$  là một số nguyên tố cùng nhau với  $n$ .

**Lời giải**

Gọi  $p_1; p_2; p_3; \dots; p_k; \dots$  là các số nguyên tố.

Đặt  $S_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k$ .

Giả sử không tồn tại số  $n$  thỏa mãn đề bài. Gọi  $p_i$  là số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn  $n$ . Như vậy với mọi  $i$  thì  $p_i$  cũng không thỏa mãn.

Xét  $p_i$  không thỏa mãn đề bài. Khi đó do  $p_i$  là số nguyên tố nên  $S_{i-1} \not\equiv p_i$ .

Mà  $S_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{i-1} + p_i = S_{i-1} + p_i$  nên  $S_i \equiv p_i$ .

Tương tự, ta chứng minh  $S_i \equiv p_i$  và  $S_i \equiv p_{i+1}$ .

Mà  $p_i$  và  $p_{i+1}$  là hai số nguyên tố liên tiếp nên  $(p_i, p_{i+1}) = 1$

$\Rightarrow S_i \equiv p_i p_{i+1} \pmod{p_i p_{i+1}}$  (\*)

Mặt khác do  $p_i < \frac{p_i + p_{i+1} + 1}{2}$  nên  $S_i = p_1 + p_2 + \dots + p_i = 2 + 3 + 5 + \dots + p_i < \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + p_i + p_i + 1}{2}$

$$\Rightarrow S_i < \frac{(p_i + 1)(p_i + 2)}{4}. \quad (**)$$

Từ (\*) và (\*\*), suy ra với  $i$  đủ lớn (để  $p_{i+1} > p_i > 10^{2023}$ ) thì vô lí.

Hay sẽ tồn tại  $n = p_i$  hoặc  $n = p_{i+1}$  thoả mãn.

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI

KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 90 phút  
(Không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Đề thi gồm 01 trang

**Bài 1 (3,0 điểm)**

a) Cho  $A = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ . Tìm giá trị của  $A^3$ .

b) Cho  $b, c$  là hai số thực thỏa mãn  $24b + c = -523$ . Biết phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Tìm hai nghiệm đó.

**Lời giải**

$$a) A = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} = (3 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2}) = 6$$

Vậy  $A^3 = 6^3 = 216$ .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  (1) là  $p, q$ .

Theo định lí Vi-ét, ta có:  $p + q = -b$  và  $p \cdot q = c$ .

Dễ thấy:  $b = -(p + q)$ .

Do  $24b + c = -523$  nên  $-24(p + q) + pq = -523$ .

Hay  $pq - 24p - 24q = -523$

$$\Leftrightarrow (pq - 24p) - (24q - 24^2) = 24^2 - 523$$

$$\Leftrightarrow p(q - 24) - 24(q - 24) = 24^2 - 523$$

$$\Leftrightarrow (p - 24)(q - 24) = 53 = 1 \cdot 53 = (-1) \cdot (-53) \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $p \leq q$ . Suy ra  $q - 24 \geq p - 24$  (\*\*).

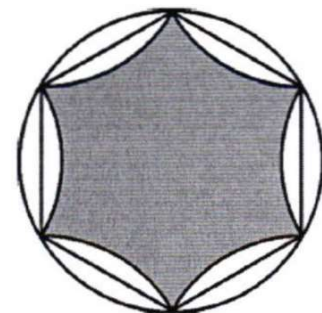
$$\text{Từ (*) và (**)} \text{ suy ra } \begin{cases} p - 24 = 1, & q - 24 = 53 \\ p - 24 = -53, & q - 24 = -1 \end{cases}$$

Xét  $p - 24 = 1$  và  $q - 24 = 53$ : Suy ra  $p = 25$  và  $q = 77$ .

Xét  $p - 24 = -53$  và  $q - 24 = -1$ : Suy ra  $p = -29 < 0$  (Loại).

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là 25 và 77.

**Bài 2 (1,5 điểm).** Bạn Hạnh làm một ngôi sao 6 cánh có dạng hình phẳng tô đậm như hình bên theo cách như sau: Trên tờ giấy, bạn vẽ đường tròn bán kính 2 cm, ngoại tiếp một lục giác đều. Sau đó, mỗi cung tròn nhỏ căng dây cung là một cạnh của lục giác đều được lấy đối xứng qua cạnh đó. Hình phẳng tô đậm giới hạn bởi 6 cung tròn vừa được vẽ tạo thành ngôi sao bạn định làm. Em hãy giúp bạn Hạnh tìm diện tích ngôi sao 6 cánh đó (lấy giá trị của  $\pi$  là 3,14 và giá trị của  $\sqrt{3}$  là 1,73).



**Lời giải**

Hình tròn có bán kính bằng 2 nên diện tích của hình tròn đó là  $S_{\text{hình tròn}} = \pi \cdot 2^2$ .

Vì ta lấy giá trị của  $\pi$  là 3,14 nên  $S_{\text{hình tròn}} = 3,14 \cdot 4 = 12,56$ .

Do lục giác  $ABCDEF$  là đều nên tam giác  $OAB$  là tam giác đều có cạnh bằng 2.

Suy ra  $S_{\text{AOB}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ . Vì ta lấy giá trị của  $\sqrt{3}$  là 1,73 nên  $S_{\text{AOB}} = 1,73$ .

Suy ra  $S_{\text{ABCDEF}} = 6S_{\text{AOB}} = 6 \cdot 1,73 = 10,38$ .

Do đó phần hình tròn (màu trắng) nằm ngoài lục giác đều  $ABCDEF$  có diện tích là  $12,56 - 10,38 = 2,18$ .

Suy ra phần hình tròn (màu trắng) nằm ngoài ngôi sao 6 cánh có diện tích là  $2,18 \cdot 2 = 4,36$

Vậy ngôi sao 6 cánh có diện tích là  $12,56 - 4,36 = 8,2$  ( $\text{cm}^2$ ).

**Bài 3 (3,0 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $DB = 2DC$ .

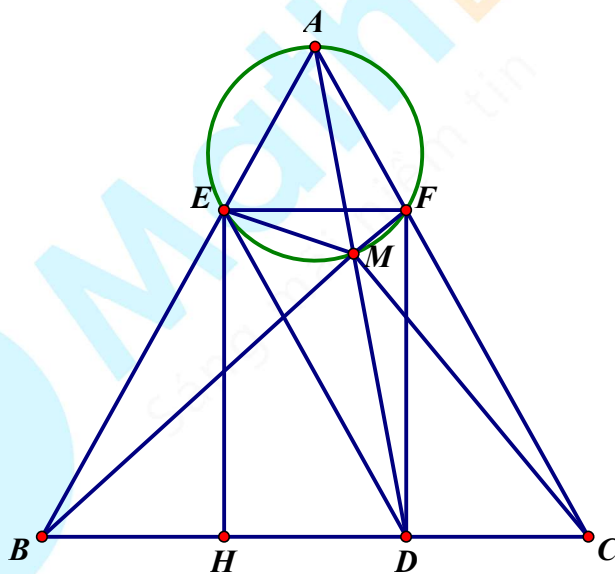
Đường thẳng qua  $D$  song song với  $AC$  cắt cạnh  $AB$  tại  $E$ . Đường thẳng qua  $E$  song song với  $BC$  cắt cạnh  $AC$  tại  $F$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  cắt  $AD$  tại  $M$  ( $M$  khác  $A$ ).

a) Chứng minh tứ giác  $BDME$  và tứ giác  $CDMF$  là hai tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh  $MB = 2MA$ .

c) Chứng minh  $\widehat{BMD} = 2\widehat{CMD}$ .

**Lời giải**



a) Do tứ giác  $AEMF$  nội tiếp nên  $\widehat{AME} = \widehat{AFE}$ .

Do  $EF \parallel BC$  nên  $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ .

Mà tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nên  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ . Suy ra  $\widehat{AME} = \widehat{ABC}$ .

Vậy tứ giác  $BDME$  là tứ giác nội tiếp.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có tứ giác  $CDMF$  là tứ giác nội tiếp.



b) Do tứ giác  $BDME$  nội tiếp nên  $\widehat{BME} = \widehat{BDE}$ . Do  $DE \parallel AC$  nên  $\widehat{BDE} = \widehat{BCA}$ .

Do  $EF \parallel BC$  nên  $\widehat{BCA} = \widehat{EFA}$ .

Theo chứng minh ở câu a), ta có  $\widehat{AME} = \widehat{AFE}$ . Suy ra  $\widehat{BME} = \widehat{AME}$ .

Do đó  $ME$  là đường phân giác của tam giác  $AMB$ . Suy ra  $\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB}$ .

Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác  $ABC$  với  $DE \parallel AC$ , ta có:  $\frac{EA}{EB} = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$ .

Suy ra  $\frac{MA}{MB} = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$ . Vậy  $MB = 2MA$ .

c) Tứ giác  $BDME$  nội tiếp nên  $\widehat{BMD} = \widehat{BED}$ .

Tứ giác  $CDMF$  nội tiếp nên  $\widehat{CMD} = \widehat{CFD}$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $BD$ , suy ra  $BH = HD = DC$ .

Do tam giác  $EBD$  cân tại  $E$  nên  $EH$  là đường phân giác của  $\widehat{BED}$ , suy ra  $\widehat{BED} = 2\widehat{HED}$ .

Xét hai tam giác  $EDH$  và  $FCD$ , ta có:

$DE = CF$  (do  $CDEF$  là hình bình hành);  $\widehat{EDH} = \widehat{FCD}$ ;  $DH = CD$ .

Suy ra  $\triangle EDH = \triangle FCD$  (c.g.c). Do đó  $\widehat{HED} = \widehat{DFC}$ .

Vậy  $\widehat{BMD} = \widehat{BED} = 2\widehat{HED} = 2\widehat{DFC} = 2\widehat{CMD}$ .

**Bài 4 (1,5 điểm).** Tìm số thực  $x$  sao cho các số  $x + \sqrt{2024}$  và  $\frac{185}{x} - \sqrt{2024}$  đều là các số nguyên.

**Lời giải**

Đặt  $a = x + \sqrt{2024}$  và  $b = \frac{185}{x} - \sqrt{2024}$ .

Thay  $x = a - \sqrt{2024}$  vào  $b$ , ta có:  $b = \frac{185}{a - \sqrt{2024}} - \sqrt{2024}$  hay  $(a - b)\sqrt{2024} = 2209 - ab$ .

Nếu  $a \neq b$  thì  $\sqrt{2024} = \frac{2209 - ab}{a - b}$ . Điều này là vô lí (vì  $\sqrt{2024}$  là số vô tỉ,  $\frac{2209 - ab}{a - b}$  là số hữu tỉ do  $a, b$  là các số nguyên).

Suy ra  $a = b$  và  $a \cdot b = 2209$  (1).

Từ (1) suy ra  $a = 47$  hoặc  $a = -47$

Do đó  $x = 47 - \sqrt{2024}$  hoặc  $x = -47 - \sqrt{2024}$ .

**Bài 5 (1,0 điểm).** Cho 45 số  $a_1, a_2, \dots, a_{45}$ , mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị là 0; 2; 3. Biết rằng

$$(a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_{45} - 2)^2 = 65 \text{ và } (a_1 - 3)^3 + (a_2 - 3)^3 + \dots + (a_{45} - 3)^3 = -280.$$

Hỏi trong 45 số nói trên có bao nhiêu số bằng 0?

**Lời giải**

Giả sử trong 45 số  $a_1, a_2, \dots, a_{45}$  có  $m$  số bằng 0, có  $n$  số bằng 2, có  $p$  số bằng 3.

Khi đó  $m+n+p=45$

Suy ra  $(a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_{45} - 2)^2 = (0-2)^2 \cdot m + (2-2)^2 \cdot n + (3-2)^2 \cdot p = 4m+p$ ,

do đó  $4m+p=65$  hay  $p=65-4m$ .

Thay  $p=65-4m$  vào (1), ta có:  $45 = m+n+p = m+n+65-4m = -3m+n+65 \Rightarrow 3m-n=20$ . (2)

Tương tự ta có:  $(a_1 - 3)^3 + (a_2 - 3)^3 + \dots + (a_{45} - 3)^3 = (0-3)^3 \cdot m + (2-3)^3 \cdot n + (3-3)^3 \cdot p = -27m-n$   
nên  $-27m-n=-280$  hay  $27m+n=280$ . (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3m-n=20 \\ 27m+n=280 \end{cases} \Rightarrow 30m=300 \Rightarrow m=10$$

Vậy trong 45 số đã cho có 10 số bằng 0.

----- HẾT -----



MathExpress  
Sáng mãi niềm tin

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
HÀ NỘI**
**ĐỀ CHÍNH THỨC**

 Đề thi gồm **01** trang

**KỶ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM  
NĂM HỌC 2024 – 2025**

 Môn: **TOÁN (VÒNG 2)**

 Thời gian làm bài: **120 phút**

(Không kể thời gian giao đề)

**Bài 1 (3,0 điểm).** a) Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn các điều kiện sau:  $|a| < 2024, |b| < 2024$  và

$$\sqrt{a+2024} + \sqrt{2025-a} - \sqrt{2024-a} = \sqrt{b+2024} + \sqrt{2025-b} - \sqrt{2024-b}.$$

 Tính giá trị của biểu thức  $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}$ .

 b) Tồn tại hay không các số hữu tỉ dương  $a, b$  sao cho  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}}$  ?

**Lời giải**

 a) Điều kiện:  $-2024 < a < 2024, -2024 < b < 2024$ . Ta có:

$$\sqrt{a+2024} + \sqrt{2025-a} - \sqrt{2024-a} = \sqrt{b+2024} + \sqrt{2025-b} - \sqrt{2024-b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+2024} - \sqrt{b+2024}) + (\sqrt{2025-a} - \sqrt{2025-b}) + (\sqrt{2024-b} - \sqrt{2024-a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{a+2024} + \sqrt{b+2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025-a} + \sqrt{2025-b}} + \frac{1}{\sqrt{2024-b} + \sqrt{2024-a}} \right) = 0 (*)$$

 Do  $\frac{1}{\sqrt{2024-a} + \sqrt{2024-b}} - \frac{1}{\sqrt{2025-a} + \sqrt{2025-b}} > 0$  nên

$$\frac{1}{\sqrt{a+2024} + \sqrt{b+2024}} + \frac{1}{\sqrt{2024-a} + \sqrt{2024-b}} - \frac{1}{\sqrt{2025-a} + \sqrt{2025-b}} > 0.$$

 Do đó, từ (\*) suy ra  $a = b$ .

 Với  $a = b$  thì  $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025} = 0$ .

 b) Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương  $a, b$  sao cho  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}}$ .

 Ta có:  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}} \Rightarrow a + b + 2\sqrt{ab} = \sqrt{2024}$ 

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} = \sqrt{2024} - (a+b)$$

$$\Rightarrow 4ab = 2024 + (a+b)^2 - 2(a+b)\sqrt{2024} (*)$$

 Từ (\*) và  $a > 0, b > 0$ , ta suy ra:

$$2(a+b)\sqrt{2024} = 2024 + [(a+b)^2 - 4ab] \Rightarrow \sqrt{2024} = \frac{2024 + [(a+b)^2 - 4ab]}{2(a+b)} (**).$$

 Từ (\*\*), ta nhận được mâu thuẫn vì  $\sqrt{2024}$  là số vô tỉ, còn  $\frac{2024 + [(a+b)^2 - 4ab]}{2(a+b)}$  là số hữu tỉ.

 Vậy không tồn tại các số hữu tỉ dương  $a, b$  sao cho  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}}$ .

**Bài 2 (2,0 điểm).** Giả sử ta có quy tắc  $*$  mà với mỗi cặp số nguyên dương  $(a;b)$ , ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu là  $a*b$ , sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

- i)  $a*a = a$  với mọi số nguyên dương  $a$ ;
- ii)  $a*b = b*a$  với mọi số nguyên dương  $a$  và  $b$ ;
- iii)  $a*b = (a-b)*b$  với mọi số nguyên dương  $a$  và  $b$  mà  $a > b$ .

- a) Tính giá trị của  $16*2024$ .
- b) Hãy chỉ ra một quy tắc  $*$  thỏa mãn ba điều kiện trên.

**Lời giải**

a) Ta có:  $16*2024 = 2024*16 = (2024 - 16)*16 = (2024 - 2.16)*16 = \dots = (2024 - 126.16)*16$   
 $= 8*16 = 16*8 = (16 - 8)*8 = 8*8 = 8.$

b) Xét quy tắc  $*$  cho tương ứng mỗi cặp số nguyên dương  $(a;b)$  với ƯCLN  $(a,b)$ .

Tức là  $a*b = UCLN(a,b)$ .

Ta thấy:

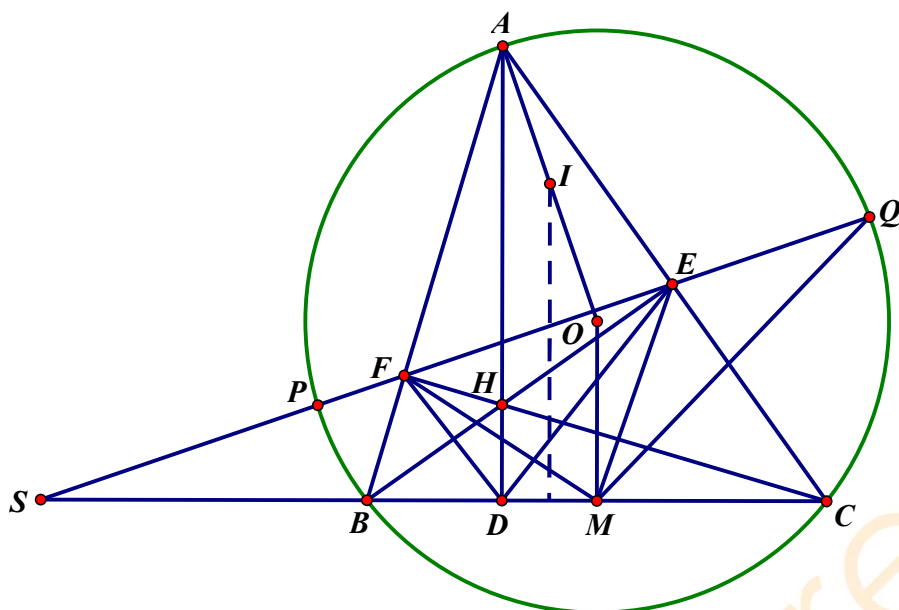
- i) Do  $ƯCLN(a,a) = a$  nên  $a*a = a$  với mọi số nguyên dương  $a$ ;
- ii) Do  $ƯCLN(a,b) = UCLN(b,a)$  nên  $a*b = b*a$  với mọi số nguyên dương  $a,b$ ;
- iii) Xét  $a,b$  nguyên dương thỏa mãn  $a > b$ : Do  $ƯCLN(a,b) = ƯCLN(a-b,b)$  nên  $a*b = (a-b)*b$ .

Vậy quy tắc  $*$  xác định như trên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

**Bài 3 (3,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O;R)$  và dây cung  $BC$  cố định không đi qua tâm  $O$ . Điểm  $A$  di động trên  $(O;R)$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn và  $AB \neq AC$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại điểm  $H$ . Đường thẳng  $EF$  cắt  $(O;R)$  tại hai điểm  $P$  và  $Q$  (điểm  $F$  nằm giữa hai điểm  $P$  và  $E$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh:

- a)  $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$ .
- b) Bốn điểm  $P, Q, M, D$  cùng thuộc một đường tròn  $(\omega)$ .
- c) Tâm  $I$  của đường tròn  $(\omega)$  chạy trên một đường tròn cố định.

**Lời giải**



a) Do tứ giác BCEF nội tiếp nên  $\widehat{AFQ} = \widehat{ACB}$ .

Suy ra số  $\widehat{AQ} + \text{sđ} \widehat{PB} = \text{sđ} \widehat{AB}$ , tức là  $\widehat{AQ} = \widehat{AP}$  (cung ở đây ta hiểu là cung nhỏ).

Vì thế  $AP = AQ$ .

Do  $\triangle ADB \sim \triangle AFH$  nên  $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AD \cdot AH$ .

Xét hai tam giác AFP và APB, ta có:  $\widehat{FAP} = \widehat{PAB}$ ;  $\widehat{APF} = \widehat{ABP}$  (do  $\widehat{AQ} = \widehat{AP}$ ).

Suy ra  $\triangle AFP \sim \triangle APB$ , do đó  $\frac{AP}{AF} = \frac{AB}{AP} \Rightarrow AB \cdot AF = AP^2$ .

Vậy  $AP^2 = AQ^2 = AD \cdot AH$ .

b) Gọi S là giao điểm của đường thẳng EF và BC. Do tứ giác BCQP nội tiếp nên  $\triangle SPB \sim \triangle SCQ$ ,

suy ra  $\frac{SB}{SP} = \frac{SQ}{SC} \Rightarrow SP \cdot SQ = SB \cdot SC$ .

Do tứ giác BCEF nội tiếp nên  $\triangle SBF \sim \triangle SEC$ , suy ra  $\frac{SB}{SF} = \frac{SE}{SC} \Rightarrow SB \cdot SC = SF \cdot SE$ .

Do đó  $SP \cdot SQ = SF \cdot SE$  (1).

Do tam giác CFM cân tại M nên  $\widehat{BMF} = 2\widehat{BCF}$ .

Do tứ giác BCEF nội tiếp nên  $\widehat{FEB} = \widehat{BCF}$ .

Do tứ giác CDHE nội tiếp nên  $\widehat{HED} = \widehat{BCF}$ .

Suy ra  $\widehat{DEF} = \widehat{HED} + \widehat{FEB} = 2\widehat{BCF}$ . Do đó  $\widehat{DMF} = \widehat{BMF} = \widehat{DEF}$ ,

Suy ra bốn điểm D, M, E, F nằm trên một đường tròn.

Do bốn điểm D, M, E, F nằm trên một đường tròn nên  $\triangle SDF \sim \triangle SEM$ , suy ra

$\frac{SD}{SF} = \frac{SE}{SM} \Rightarrow SF \cdot SE = SD \cdot SM$  (2).

Từ (1) và (2) ta có:  $SP \cdot SQ = SD \cdot SM$ . Vậy bốn điểm P, D, M, Q nằm trên cùng một đường tròn.

c) Do  $AP = AQ$  nên  $AO$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $PQ$ . Mà  $PQ$  là dây cung của đường tròn  $(\omega)$  nên điểm  $I$  nằm trên đường thẳng  $AO$ .

Do  $DM$  là dây cung của đường tròn  $(\omega)$  nên điểm  $I$  nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng  $DM$ .

Do tứ giác  $ADMO$  là hình thang vuông với hai đáy là  $OM, AD$  nên đường trung trực của đoạn thẳng  $DM$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AO$ .

Do đó  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AO$ . Suy ra  $OI = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$ .

Vậy  $I$  chạy trên đường tròn tâm  $O$  bán kính  $\frac{1}{2}R$ .

**Bài 4 (1,0 điểm).** Với  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta đặt  $f(n)$  là tổng các chữ số của số  $3n^2 + n + 1$  (Ví dụ: với  $n = 3$  thì  $3n^2 + n + 1 = 31$  và  $f(3) = 4$ ). Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của  $f(n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

#### Lời giải

Vì  $3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1$  là số lẻ nên chữ số hàng đơn vị của nó khác 0.

Mà  $3n^2 + n + 1 > 1$  nên  $f(n) \geq 2$ .

Nếu  $f(n) = 2$  thì  $3n^2 + n + 1$  có dạng  $\overline{10\dots 01}$ , trong đó chữ số đầu và chữ số cuối bằng 1, các chữ số còn lại (nếu có) phải bằng 0. Do đó  $3n^2 + n + 1 = 10^k + 1$  với  $k$  nguyên dương  
 $\Rightarrow 3n^2 + n = 10^k \Rightarrow n(3n+1) = 10^k$ .

Vì  $(n; 3n+1) = 1$  nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $n = 1, 3n+1 = 10^k \Rightarrow 4 = 10^k$ : Điều này là vô lí.

Trường hợp 2:  $n = 2^k, 3n+1 = 5^k \Rightarrow 3 \cdot 2^k + 1 = 5^k$ .

Nếu  $k = 1$  thì  $3 \cdot 2 + 1 = 5$ : Điều này là vô lí.

Nếu  $k \geq 2$  thì  $5^k > 4^k = 2^k \cdot 2^k \geq 4 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^k + 2^k > 3 \cdot 2^k + 1$ : Điều này là vô lí.

Vậy ta luôn có  $f(n) > 2$ , tức  $f(n) \geq 3$ . Mặt khác, ta có:  $f(8) = 3$ .

Vì thế giá trị nhỏ nhất của  $f(n)$  là 3.

**Bài 5 (1,0 điểm).** Cho bảng vuông kích thước  $8 \times 8$  được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn ba điều kiện sau:

- i) Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;
- ii) Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;
- iii) Mọi hình vuông gồm 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng  $k$  domino màu đen.

**Lời giải**

Ta đánh dấu  $\times$  vào một số ô vuông đơn vị của bảng đã cho như sau:

		$\times$			$\times$		
		$\times$			$\times$		
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
		$\times$			$\times$		
		$\times$			$\times$		
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
		$\times$			$\times$		
		$\times$			$\times$		

Phần bảng còn lại gồm các ô vuông đơn vị không được đánh dấu là hợp của 9 hình vuông  $2 \times 2$ , ta gọi các hình vuông này là hình vuông "đẹp". Ta kí hiệu 9 hình vuông "đẹp" này là  $H_1, H_2, \dots, H_9$ .

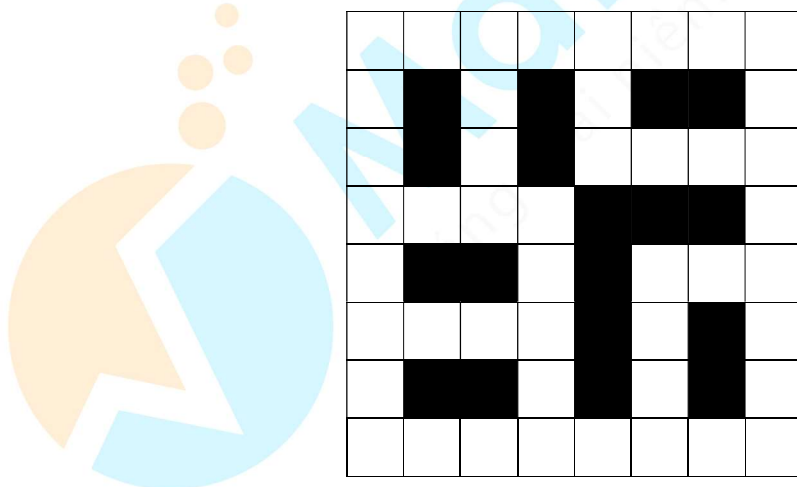
Xét một cách lát thỏa mãn yêu cầu. Với mỗi hình vuông "đẹp"  $H_i$ , ta gọi  $d_i$  là số domino màu đen phủ ít nhất một ô vuông đơn vị của nó. Xét  $T = d_1 + d_2 + \dots + d_9$ .

Theo giả thiết, ta có:  $d_i \geq 1, \forall i = 1, 2, \dots, 9$ , suy ra  $T \geq 9$ .

Do không thể có domino màu đen được lát nào lại phủ lên cả hai hình vuông "đẹp" khác nhau nên số domino màu đen cần dùng lớn hơn hoặc bằng  $T$ .

Vậy số domino màu đen cần sử dụng để lát được theo yêu cầu lớn hơn hoặc bằng 9.

Ta chỉ ra cách lát với 9 domino màu đen và 23 domino màu trắng thỏa mãn đề bài.



Bước 1: Ta lát 9 domino màu đen như hình vẽ.

Bước 2: Ta lát kín phần còn lại của bảng bằng 23 domino màu trắng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $k$  là 9.

----- HẾT -----