

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài 1: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Nam Định năm 2024 – 2025)

Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

Bài 2: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lào Cai năm 2024 – 2025)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$, với $x \geq 0; x \neq 9$.

Bài 3: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lào Cai năm 2024 – 2025)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2023 \frac{a^{2023}}{b^{2023}} + 2024 \frac{b^{2024}}{c^{2024}} + 2025 \frac{c^{2025}}{a^{2025}}$.

Bài 4: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Đồng Tháp năm 2024 – 2025)

Với hai số thực $a \geq b > 0$ và biểu thức

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}}$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Khi $a = 2$, tìm tất cả các số nguyên b để B nhận giá trị nguyên.

Bài 5: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán thành phố Cần Thơ năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \left(\frac{x}{\sqrt{y} + 1} + \frac{y}{\sqrt{x} - 1} \right) + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$ với

$x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $A = 2$.

Bài 6: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán thành phố Hà Nội năm 2024 - 2025)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $a^2 - 2a(b+c) = b^2 - 2b(c+a) = c^2 - 2c(a+b)$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$

Bài 7: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Quảng Ninh năm 2024 - 2025)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$.

Tính giá trị biểu thức $Q = \sqrt{a(4-b)(4-c)} + \sqrt{b(4-c)(4-a)} + \sqrt{c(4-a)(4-b)} - \sqrt{abc}$.

Bài 8: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Quảng Bình năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} - 1 \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 9: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm 2024 - 2025)

a) Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2024$$

Bài 10: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm 2024 - 2025)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Bài 11: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lai Châu năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x-4\sqrt{x}+2}{x-1}$ (với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Bài 12: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán thành phố Hải Phòng năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{5 + \sqrt{x}} + \frac{2x}{25 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

Chứng minh nếu $x > 81$ thì $A \geq 36$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 13: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Hoà Bình năm 2024 – 2025)

Rút gọn các biểu thức: $A = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; $B = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Bài 14: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm 2024 – 2025)

Cho $M = \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a - \sqrt{a} - 3}{a - \sqrt{a} - 2} \right) : \left(\frac{a - \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} - 2} + \frac{2}{\sqrt{a} - 2} \right)$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức M . b) Chứng minh rằng $M \leq \frac{1}{7}$.

Bài 15: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tuyên Quang năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = (\sqrt{x - 4} + 1)\sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x - 4}}$. Rút gọn biểu thức với $x \geq 5$

Bài 16: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Yên Bái năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

- a) Rút gọn A .
b) Tìm điều kiện của x để $A \geq -1$.

Bài 17: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 18: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tây Ninh năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $M = \left(\frac{3\sqrt{x} + 3}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x}-2}$ ($0 \leq x \neq 1$).

Bài 19: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Sơn La năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$.

Bài 20: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Tuyên Quang năm 2024 – 2025)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a > 4$.

Bài 21: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bắc Kạn năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 22: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Yên Bái năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = 4$.

Bài 23: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Thái Nguyên năm 2024 – 2025) Không sử dụng

máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức: $A = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}$.

Bài 24: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Thái Nguyên năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3}{x - 3\sqrt{x} + 2} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 25: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Lạng Sơn năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \cdot \left(x - \frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} \right)$, với $x > 0, x \neq 1$.

Bài 26: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Lạng Sơn năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} + \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0, x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các số nguyên x để P có giá trị nguyên

Bài 27: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Phú Thọ năm 2024 – 2025)

Cho số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2025$. Tìm giá trị biểu thức

$$P = \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025}$$

Bài 28: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Điện Biên năm 2024 – 2025)

Cho $P = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}$; $Q = \frac{\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$ ($x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn P .

b) Cho $M = \frac{P}{Q}$. Tìm x để M là số nguyên.

Bài 29: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán THPT Chuyên Lam Sơn năm 2024 – 2025)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 1012$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$.

b) Cho các số thực x, y, a, b với $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ và

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}. \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$$

Bài 30: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán THPT Chuyên Hà Tĩnh năm 2024 – 2025)

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $40a + 20b = 30b + 15c = 24c + 12a$. Chứng minh $a + b = c$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (a-3)^{2024} + (b-3)^{2024} + (c-3)^{2024}.$$

Bài 31: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Tin THPT Chuyên Lam Sơn năm 2024 – 2025)

a) Tính giá trị của biểu thức $P(x) = \frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ tại $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$.

b) Cho x, y là các số hữu tỉ dương sao cho $\frac{x - 2\sqrt{3}}{2 - y\sqrt{3}}$ là số hữu tỉ. Tính xy .

Bài 32: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Phú Thọ năm 2024 – 2025)

Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(60)$.

Bài 33: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \right) (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$x > y > 0$.

Bài 34: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Đại học Sư Phạm Hà Nội vòng 2 năm 2024 – 2025)

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $|a| < 2024, |b| < 2024$ và

$$\sqrt{a+2024} + \sqrt{2025-a} - \sqrt{2024-a} = \sqrt{b+2024} + \sqrt{2025-b} - \sqrt{2024-b}$$

Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}$.

Bài 35: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Tin Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội năm 2024 – 2025)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x-2y}{z} = \frac{y-2z}{x} = \frac{z-2x}{y}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(2 + \frac{x}{y}\right) \left(2 + \frac{y}{z}\right) \left(2 + \frac{z}{x}\right)$

Bài 36: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Hưng Yên năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{6}{\sqrt{x} + 3} + 1$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $(\sqrt{x} + 3)A = 10\sqrt{x}$.

Bài 37: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Hà Giang năm 2024 – 2025)

a) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{2024 - 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}}$.

b) Rút gọn $B = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{x + 3\sqrt{x}}$ (với $x > 0$). Tìm x để $B = \frac{1}{7}$.

Bài 38: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Quảng Trị năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - 4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{b}{a - 4b}\right)$, với a, b là các số thực dương thỏa

mãn $a \neq 4b$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi $a^2 + b^2 = 14ab$.

Bài 39: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A < -\frac{8}{5}$.

Bài 40: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Sóc Trăng năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Tìm các số nguyên x để A đạt giá trị nguyên

Bài 41: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin thành phố Cần Thơ năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho P nhận giá trị là số chẵn.

Bài 42: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Kiên Giang năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $|A| + A = 0$.

Bài 43: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tiền Giang năm 2024 – 2025)

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024}$ tại $x = \sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

Bài 44: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tiền Giang năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$, ($x \geq 0, x \neq 4$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P biết $x = 9 + 4\sqrt{5}$.

Bài 45: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x} \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+5} \right)$ với $0 \leq x \neq 4$

Bài 46: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Đắk Nông năm 2024 – 2025)

Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Bài 47: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Trường THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+4}-2}} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+4}+2}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$

Bài 48: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lâm Đồng năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức: $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{21+8\sqrt{5}}$ và $B = \left(1 + \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Tìm tất cả các số tự nhiên x để $B \geq A$.

Bài 49: (Đề thi vào lớp 10 Toán chuyên Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Tỉnh Khánh Hoà năm 2024 – 2025)

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy$ ($0 < x, y < 5$). Chứng minh $x^2 + y^2 = 25$.

Bài 50 : (Đề thi vào lớp 10 Toán chuyên tỉnh Phú Yên năm 2024 – 2025)

a) Biết $x = \sqrt{2} + 1$, tính $A = \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + x - \sqrt{2}}$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$

c) Cho biết $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tính $x + y$

Bài 51 : (Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Tin tỉnh Bình Định năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4\sqrt{x}+4} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $T < 0$

Bài 52 : (Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán tỉnh Bình Định năm 2024 – 2025)

Cho $a-b = \sqrt{17-12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2024$.

Bài 53 : (Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán tỉnh Quảng Ngãi năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1} \right)$, với $a \geq 0, a \neq 1$.

Bài 54 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$

Bài 55 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chuyên Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – thành phố à Nẵng năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{11\sqrt{x}+4}{x+3\sqrt{x}+2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{-2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các giá trị của x để P là số nguyên.

Bài 56 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chung Trường Đại Học Sư Phạm – TP Hà Nội năm 2024 – 2025)

Cho $A = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}$. Tính A^3

Bài 57 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chung Trường THPT Chuyên Lam Sơn – tỉnh Thanh Hoá năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ (với $x \geq 0$ và $x \neq \frac{1}{9}$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P = \frac{2}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Nam Định năm 2024 – 2025)

Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4} \Rightarrow (xy+4)(x+y+2) = 5(x+1)(y+1)$$

$$\Rightarrow xy(x+y) + 3 = 3xy + x + y \Rightarrow (x+y-3)(xy-1) = 0 \quad (1)$$

Với $x, y > 1$ thì $xy - 1 > 0$ do đó (1) $\Leftrightarrow x + y = 3$

$$\begin{aligned} A &= x^3 + y^3 + 9xy \\ &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 9xy \\ &= 3^3 - 3xy \cdot 3 + 9xy \\ &= 27 \end{aligned}$$

Vậy $A = 27$

Bài 2: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lào Cai năm 2024 – 2025)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$, với $x \geq 0; x \neq 9$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } P = \sqrt{x} - 1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $P \geq 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{9}{\sqrt{x}+1}} - 2 = 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 3 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy $\min P = 4$ tại $x = 4$.

Bài 3: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lào Cai năm 2024 - 2025)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2023 \frac{a^{2023}}{b^{2023}} + 2024 \frac{b^{2024}}{c^{2024}} + 2025 \frac{c^{2025}}{a^{2025}}$.

Lời giải:

Ta có $a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} = 0$

$$2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca} = 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c > 0$$

Thay vào $P = 2023 + 2024 + 2025 = 6072$.

Bài 4: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Đồng Tháp năm 2024 - 2025)

Với hai số thực $a \geq b > 0$ và biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}}$

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Khi $a = 2$, tìm tất cả các số nguyên b để B nhận giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $a \geq b > 0$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}^2 - \sqrt{a-b}^2} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}^2 - \sqrt{a-b}^2} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{\sqrt{a+b}}{b} \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a+b^2}{b} \end{aligned}$$

b) Khi $a = 2$, ta có $B = \frac{2+b^2}{b} = b + \frac{2}{b}$

Để B nhận giá trị nguyên thì b là ước của 2

Suy ra $b \in \{1; 2\}$.

Bài 5: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán thành phố Cần Thơ năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \left(\frac{x}{\sqrt{y} + 1} + \frac{y}{\sqrt{x} - 1} \right) + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$ với

$$x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0, x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn điều kiện $A = 2$.

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \left(\frac{x}{\sqrt{y} + 1} + \frac{y}{\sqrt{x} - 1} \right) + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{x(\sqrt{x} - 1) + y(\sqrt{y} + 1)}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= -\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x + y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= -\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= -\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y - \sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{-x + \sqrt{xy} - y + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{-x + \sqrt{xy} - y + \sqrt{x} - \sqrt{y} + xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{y} + 1)(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{xy})}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = -\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} \end{aligned}$$

b) Để $A = 2$ thì $-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} - 1) = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + 1 \leq 2$$

Do đó $0 \leq \sqrt{y} \leq 2$ hay $0 \leq y \leq 4$

TH1: $y = 0 \Rightarrow -\sqrt{x} = 2$ (loại)

TH2: $y = 1 \Rightarrow -\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = 2 \Rightarrow 1 = 2$ (vô lý)

TH3: $y = 2 \Rightarrow -\sqrt{x} + \sqrt{2} + \sqrt{2x} = 2 \Rightarrow x = 2$ (thoả mãn)

TH4: $y = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ (loại)

TH5: $y = 4 \Rightarrow x = 0$ (thoả mãn)

Vậy $(x; y) \in \{(2; 2); (0; 4)\}$

Bài 6: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán thành phố Hà Nội năm 2024 - 2025)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thoả mãn $a^2 - 2a(b + c) = b^2 - 2b(c + a) = c^2 - 2c(a + b)$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$

Lời giải:

Ta có $a^2 - 2a(b + c) = b^2 - 2b(c + a) \Rightarrow a^2 - b^2 = 2c(a - b) \Rightarrow (a - b)(a + b - 2c) = 0$

Chứng minh tương tự ta có $(b - c)(b + c - 2a) = (c - a)(c + a - 2b) = 0$

Xét các trường hợp:

+) Nếu có hai số bằng nhau, giả sử $a - b = 0$

Ta có $M = 0 + \frac{a-c}{a} + \frac{c-a}{a} = 0$

+) Nếu $a + b = 2c$, $b + c = 2a$ ta có $a + b - b - c = 2c - 2a$ hay $a - c = 2c - 2a$.

Do đó $a = c$, ta quay lại trường hợp 1

Vậy trong mọi trường hợp ta có $M = 0$.

Bài 7: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Quảng Ninh năm 2024 - 2025)

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$.

Tính giá trị biểu thức $Q = \sqrt{a(4-b)(4-c)} + \sqrt{b(4-c)(4-a)} + \sqrt{c(4-a)(4-b)} - \sqrt{abc}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } a + b + c + \sqrt{abc} = 4 \Rightarrow 4 - b - c = a + \sqrt{abc}$$

$$\text{Xét } a(4-b)(4-c) = a(16-4b-4c+bc) = a[4(4-b-c)+bc] = a[4(a+\sqrt{abc})+bc]$$

$$= 4a^2 + 4a\sqrt{abc} + abc = (2a + \sqrt{abc})^2 \Rightarrow \sqrt{a(4-b)(4-c)} = 2a + \sqrt{abc}$$

$$\text{tương tự } \sqrt{b(4-c)(4-a)} = 2b + \sqrt{abc}, \sqrt{c(4-a)(4-b)} = 2c + \sqrt{abc}$$

$$\text{Vậy } Q = 2(a+b+c) + 3\sqrt{abc} - \sqrt{abc} = 2(a+b+c + \sqrt{abc}) = 8$$

Bài 8: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Quảng Bình năm 2024 - 2025)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} - 1 \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

a) Rút gọn biểu thức A b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.**Lời giải:**a) Với $x \geq 0, x \neq 9$, ta có:

$$A = \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 3x - 3}{x-9} : \frac{2\sqrt{x} + 4 - \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} = \frac{-3\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{x} - 3}$$

b) Vì x nguyên nên A nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x} - 3$ là ước số của 3

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = -3 \\ \sqrt{x} - 3 = -1 \\ \sqrt{x} - 3 = 1 \\ \sqrt{x} - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{x} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 16 \\ x = 36 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x \in \{0; 4; 16; 36\}$ thì A nhận giá trị nguyên.**Bài 9: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Hải Dương năm 2024 - 2025)**

$$\text{a) Cho biểu thức } A = \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}.$$

Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2024$$

Lời giải:

a) Đặt $\sqrt{x} = a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2a^2 - 1 + a}{1 - a^2} + \frac{2a^3 + a^2 - a}{a^3 + 1} \right] \cdot \frac{(a^2 - a)(1 - a)}{2a - 1} - 1 \\ &= \left[\frac{(a+1)(2a-1)}{(1-a)(1+a)} + \frac{a(a+1)(2a-1)}{(a+1)(a^2-a+1)} \right] \cdot \frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1} - 1 = \left[\frac{(2a-1)}{(1-a)} + \frac{a(2a-1)}{(a^2-a+1)} \right] \cdot \frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1} - 1 \\ &= \left[\frac{1}{(1-a)} + \frac{a}{(a^2-a+1)} \right] \cdot (2a-1) \cdot \frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1} - 1 = \frac{a^2 - a}{a^2 - a + 1} - 1 = \frac{-1}{a^2 - a + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A < -\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{a^2 - a + 1} > \frac{1}{7} \Rightarrow a^2 - a + 1 < 7 \Rightarrow a^2 - a - 6 < 0 \Rightarrow -2 < a < 3.$$

Mà $a \geq 0$ nên $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$

Vậy $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề

b) Ta có $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1 \Rightarrow b + c = 1 - a - 2\sqrt{abc}$, nên:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-b)(1-c)} &= \sqrt{(1-b-c+bc)} = \sqrt{1-(b+c)+bc} \\ &= \sqrt{1-(1-2\sqrt{abc}-a)+bc} = \sqrt{a+2\sqrt{abc}+bc} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{bc})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{bc} \\ \Rightarrow \sqrt{a(1-b)(1-c)} &= \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{bc}) = a + \sqrt{abc} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \sqrt{(1-c)(1-a)} = \sqrt{b} + \sqrt{ca} \Rightarrow \sqrt{b(1-c)(1-a)} = b + \sqrt{abc}$$

$$\sqrt{(1-a)(1-b)} = \sqrt{c} + \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{c(1-a)(1-b)} = c + \sqrt{abc}$$

Do đó, ta được:

$$P = a + \sqrt{abc} + b + \sqrt{abc} + c + \sqrt{abc} - \sqrt{abc} + 2024 = a + b + c + 2\sqrt{abc} + 2024 = 2025.$$

Vậy $P = 2025$.

Bài 10: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm 2024 - 2025)

$$\text{Rút gọn biểu thức } P = \left(\frac{x\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) : \left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right) \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$.

$$\begin{aligned}
 P &= \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left[\frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \right] : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.

Bài 11: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lai Châu năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x-4\sqrt{x}+2}{x-1}$ (với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \left[\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 : (\sqrt{x}-1) \Rightarrow \sqrt{x}-1 \in \{-1; 1; -2; 2\} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 = -1 \\ \sqrt{x}-1 = 1 \\ \sqrt{x}-1 = -2 \\ \sqrt{x}-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $x > 0, x \neq 1$, để A nguyên thì $x \in \{4; 9\}$.

Bài 12: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hải Phòng năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{5 + \sqrt{x}} + \frac{2x}{25 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

Chứng minh nếu $x > 81$ thì $A \geq 36$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 25; x \neq 81$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{5 + \sqrt{x}} + \frac{2x}{25 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 5} - \frac{2x}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 5)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 5) - 2x}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} : \frac{\sqrt{x} - 1 - 2(\sqrt{x} - 5)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 5)} \\ &= -\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 5)}{9 - \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x} - 9}. \end{aligned}$$

Nếu $x > 81$ thì $\sqrt{x} - 9 > 0$. Do đó, $A = \sqrt{x} + 9 + \frac{81}{\sqrt{x} - 9} = \left(\sqrt{x} - 9 + \frac{81}{\sqrt{x} - 9} \right) + 18 \geq 2\sqrt{81} + 18 = 36$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x} - 9 = \frac{81}{\sqrt{x} - 9} \\ x > 81 \end{cases} \Rightarrow x = 324$ (thoả mãn)

Bài 13: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hoà Bình năm 2024 – 2025)

Rút gọn các biểu thức: $A = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; $B = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = 3 \\ B &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 1 \end{aligned}$$

Bài 14: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm 2024 – 2025)

Cho $M = \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1} - \frac{a-\sqrt{a}-3}{a-\sqrt{a}-2} \right) : \left(\frac{a-\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-2} + \frac{2}{\sqrt{a}-2} \right)$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Chứng minh rằng $M \leq \frac{1}{7}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1} - \frac{a-\sqrt{a}-3}{a-\sqrt{a}-2} \right) : \left(\frac{a-\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-2} + \frac{2}{\sqrt{a}-2} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2) - (a-\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)} : \frac{a-\sqrt{a}+2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)} \\ &= \frac{a-4-a+\sqrt{a}+3}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)} : \frac{a-\sqrt{a}+2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)}{a+\sqrt{a}+2} = \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+2} \leq \frac{1}{7} &\Rightarrow \frac{1}{7} - \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{a+\sqrt{a}+2-7\sqrt{a}+7}{7(a+\sqrt{a}+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{a-6\sqrt{a}+9}{7(a+\sqrt{a}+2)} \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}-3)^2}{7(a+\sqrt{a}+2)} \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } a \geq 0, a \neq 4). \end{aligned}$$

Vậy $M \leq \frac{1}{7}$ với mọi $a \geq 0, a \neq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 9$.

Bài 15: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tuyên Quang năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = (\sqrt{x-4}+1)\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}$. Rút gọn biểu thức với $x \geq 5$

Lời giải:

Với $x \geq 5$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-4}+1)\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} = (\sqrt{x-4}+1)\sqrt{x-4-2\sqrt{x-4}+1} \\ &= (\sqrt{x-4}+1)\sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} = (\sqrt{x-4}+1)(\sqrt{x-4}-1) = x-4-1 = x-5 \end{aligned}$$

Bài 16: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Yên Bái năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm điều kiện của x để $A \geq -1$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{(x-9)-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}}$$

b) Ta có: $A \geq -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}} \geq -1$, (do $\sqrt{x}+1 > 0$)

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 \geq -(\sqrt{x}+1) \Rightarrow 2\sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có: $x \geq \frac{1}{4}; x \neq 4; x \neq 9$

Vậy $x \geq \frac{1}{4}; x \neq 4; x \neq 9$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 17: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải:

$$a) A = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-8)}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{2(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

b) Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $A = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$.

Để $\frac{4}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $A = 4 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$.

Bài 18: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tây Ninh năm 2024 - 2025)

Rút gọn biểu thức $M = \left(\frac{3\sqrt{x} + 3}{x - 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 2}$ ($0 \leq x \neq 1$).

Lời giải:

$$M = \left(\frac{3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 2} = \left(\frac{3}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} : \frac{\sqrt{x} + 3}{2(\sqrt{x} - 1)} = 2$$

Bài 19: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Sơn La năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2} + 1}$.

Lời giải:

$$a) P = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x} + 1} = \left(\frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2x}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2x} = (x + \sqrt{x} + 1 - x + \sqrt{x} - 1) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2x}$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2x} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$b) \text{Ta có: } x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 3(\sqrt{2} - 1) = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$$

Bài 20: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Tuyên Quang năm 2024 – 2025)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a > 4$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11+(2-3\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

b) Ta có $Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2} = \sqrt{a}-1 + \frac{4}{\sqrt{a}-2} = \left(\sqrt{a}-2 + \frac{4}{\sqrt{a}-2}\right) + 1$.

Với $a > 4$ thì $\sqrt{a}-2 > 0$. Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM (Côsi) ta được:

$$Q \geq 2\sqrt{(\sqrt{a}-2) \cdot \frac{4}{\sqrt{a}-2}} + 1 = 5 \Rightarrow \min Q = 5 \text{ khi } a = 16. \text{ Vậy } \min Q = 5.$$

Bài 21: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bắc Kạn năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có: $A = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$

$$b) \text{ Để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \text{ thì } \sqrt{x}-2 \text{ là ước của } 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 = -2 \\ \sqrt{x}-2 = -1 \\ \sqrt{x}-2 = 1 \\ \sqrt{x}-2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (ko t/m)} \\ x = 1 \\ x = 9 \\ x = 16 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 9; 16\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$

Bài 22: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Yên Bái năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = 4$.

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot (\sqrt{x}-1) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot (\sqrt{x}-1)$$

$$= \frac{x+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

Vậy $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

b) $A = 4 \Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x}} = 4 \Rightarrow x+3 = 4\sqrt{x} \Rightarrow x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=0 \\ \sqrt{x}-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện chỉ có $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu đề.

Vậy với $x = 9$ thì $A = 4$.

Bài 23: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Thái Nguyên năm 2024 - 2025)

Không sử dụng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}} \\
 &= \sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 2\sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

Bài 24: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Thái Nguyên năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3}{x - 3\sqrt{x} + 2} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

a. Rút gọn biểu thức A .

b. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải:

a. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \text{ (*)} \\ x \neq 4 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó } A &= \left[\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \right] : \left(\frac{2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \frac{x - 1 + x - 4 - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} \\
 &= \frac{2(x - 4)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} \\
 &= \frac{2(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - 2}.
 \end{aligned}$$

b. Với điều kiện (*) ta có $A = \frac{2(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2(\sqrt{x} - 2 + 4)}{\sqrt{x} - 2} = 2 + \frac{8}{\sqrt{x} - 2}$.

Vì biểu thức A nhận giá trị nguyên nên ta xét các trường hợp:

$\sqrt{x} - 2$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
\sqrt{x}	-6	-2	0	1	3	4	6	10
x			0	1	9	16	36	100
	loại	loại	thỏa mãn	loại	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy tập hợp các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên là $T = \{0; 9; 16; 36; 100\}$.

Bài 25: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Lạng Sơn năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0, x \neq 1$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot [x - (1-\sqrt{x}+x)] \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}-1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Bài 26: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Lạng Sơn năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} + \frac{2-\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các số nguyên x để P có giá trị nguyên

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} + \frac{2-\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \left(\frac{x+\sqrt{x}-2+2+\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x-1}
 \end{aligned}$$

b) Do x nguyên nên để P nguyên thì $2:(x-1) \Rightarrow x-1 \in \{-2; 2; -1; 1\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 3; 0; 2\}$, kết hợp với điều kiện xác định $\Rightarrow x \in \{3; 2\}$

Vậy $x \in \{3; 2\}$ thì P có giá trị nguyên.

Bài 27: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Phú Thọ năm 2024 - 2025)

Cho số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2025$. Tìm giá trị biểu thức

$$P = \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} = \frac{a^2 + ab + ca - 2025}{a^2 + 2025} = \frac{a(a+b) + a(a+c)}{a^2 + 2025} - 1 = \frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} - 1$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} = \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1; \quad \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025} = \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025} \\ &= \frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ca}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2 - ab}{(c+b)(c+a)} \\ &= \frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} - 1 + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1 + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} - 1 \\ &= \left(\frac{a}{c+a} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) - 3 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $P = 0$.

Bài 28: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Điện Biên năm 2024 - 2025)

$$\text{Cho } P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}; \quad Q = \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

a) Rút gọn P .

b) Cho $M = \frac{P}{Q}$. Tìm x để M là số nguyên

Lời giải:

$$\text{a) } P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$b) M = \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} : \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Để thấy $0 < M < 3$ nên nếu M là số nguyên thì $M = 1$ hoặc $M = 2$

Trường hợp 1: $M = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (thoả mãn)

Trường hợp 2: $M = 2 \Rightarrow x = 4$ (thoả mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 4 \right\}$ thì M là số nguyên

Bài 29: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hoá năm 2024 – 2025)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 1012$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$.

b) Cho các số thực x, y, a, b với $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ và

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}. \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$$

Lời giải:

a) $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 1012$

$$\text{Từ: } x^2 - yz = y^2 - zx \Rightarrow (x^2 - y^2) + (zx - yz) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y+z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tương tự ta có } \begin{cases} y = z \\ z = x \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ . Do đó } \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp $x = y$ (trường hợp $y = z, z = x$ thực hiện tương tự), thay vào giả thiết ta được

$$x^2 - xz = x^2 - zx = z^2 - x^2 = 1012 \Rightarrow x^2 - zx = z^2 - x^2 = 1012 \Rightarrow x(x-z) + (x-z)(x+z) = 0$$

$$\Rightarrow (2x+z)(x-z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x = y \\ z = -2x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \neq 1012 \\ z^2 - xy = \frac{3z^2}{4} = 1012 \Rightarrow z^2 = \frac{4048}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 = \frac{z^2}{4} = \frac{1012}{3} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + z^2 = 2024.$$

$$\text{Xét trường hợp } x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = 1012.3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) = 6072 \Rightarrow P = 2024. \text{ Vậy } P = 2024.$$

$$\text{b) Từ giả thiết ta có } (a+b)\left(\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b}\right) = 1 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow x^4 + \frac{bx^4}{a} + y^4 + \frac{ay^4}{b} = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\Rightarrow b^2x^4 + a^2y^4 = 2bx^2ay^2 \Rightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0 \Rightarrow bx^2 = ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a}{a+b}; y^2 = \frac{b}{a+b}$$

$$\text{Do đó: } \frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{a^{1012}}{a^{1011} \cdot (a+b)^{1012}} + \frac{b^{1012}}{b^{1011} \cdot (a+b)^{1012}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$$

$$\text{Vậy } \frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}. \text{ Ta được điều phải chứng minh.}$$

Bài 30: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán THPT Chuyên Hà Tĩnh năm 2024 – 2025)

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $40a + 20b = 30b + 15c = 24c + 12a$. Chứng minh $a + b = c$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (a-3)^{2024} + (b-3)^{2024} + (c-3)^{2024}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } 40a + 20b = 30b + 15c \Rightarrow 40a - 10b = 15c \Rightarrow 8a - 2b = 3c$$

$$\text{Ta có: } 30b + 15c = 24c + 12a \Rightarrow 12a - 30b = -9c \Rightarrow 4a - 10b = -3c$$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} 12a - 12b = 0 \\ 8a - 2b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 8a - 2a = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2a \end{cases} \Rightarrow a + b = c. \text{ Ta được điều phải chứng minh.}$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c) = 12 - 4 \cdot 6 = -12$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = (b-2)^2 = (c-2)^2 \Rightarrow a = b = c = 2$$

$$\Rightarrow P = (2-3)^{2024} + (2-3)^{2024} + (2-3)^{2024} = 3.$$

Bài 31: (Đề thi khảo sát vào lớp 10 chuyên Tin THPT Chuyên Lam Sơn năm 2024 – 2025)

a) Tính giá trị của biểu thức $P(x) = \frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ tại $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$.

b) Cho x, y là các số hữu tỉ dương sao cho $\frac{x - 2\sqrt{3}}{2 - y\sqrt{3}}$ là số hữu tỉ. Tính xy .

Lời giải:

a) Ta có $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = 4 - \sqrt{3} \Rightarrow 4 - x = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 8x + 13 = 0$.

Do đó $x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23 = (x^2 - 8x + 13)(x^2 + 2x + 1) + 10 = 10$.

Vậy $P(\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}) = \frac{10}{2} = 5$.

b) Ta có $\frac{x - 2\sqrt{3}}{2 - y\sqrt{3}} = \frac{(x - 2\sqrt{3})(2 + y\sqrt{3})}{4 - 3y^2} = \frac{2x - 3.2y + (xy - 4)\sqrt{3}}{4 - 3y^2}$, là số hữu tỉ khi $xy = 4$.

Cách khác: Đặt $\frac{x - 2\sqrt{3}}{2 - y\sqrt{3}} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}; a, b \neq 0$) $\Rightarrow bx - 2a = (2b - ay)\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 2b - ay = 0 \\ bx - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow xy = 4$.

Bài 32: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Phú Thọ năm 2024 – 2025)

Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(60)$.

Lời giải:

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{(4n + \sqrt{4n^2 - 1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3} \right)$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(60) &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{121^3} - \sqrt{119^3}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{121^3} - \sqrt{1^3}) = 665. \end{aligned}$$

Bài 33: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2024 - 2025)

Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \right) (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$x > y > 0.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Bài 34: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Đại học Sư Phạm Hà Nội vòng 2 năm 2024 - 2025)

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $|a| < 2024, |b| < 2024$ và

$$\sqrt{a + 2024} + \sqrt{2025 - a} - \sqrt{2024 - a} = \sqrt{b + 2024} + \sqrt{2025 - b} - \sqrt{2024 - b}$$

Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}$.

Lời giải:

a) Giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành

$$\sqrt{a + 2024} + \frac{1}{\sqrt{2025 - a} + \sqrt{2024 - a}} = \sqrt{b + 2024} + \frac{1}{\sqrt{2025 - b} + \sqrt{2024 - b}} \quad (1)$$

Nếu $a > b$, thì ta có $\sqrt{a + 2024} > \sqrt{b + 2024}$ và $\sqrt{2025 - a} + \sqrt{2024 - a} < \sqrt{2025 - b} + \sqrt{2024 - b}$

Do đó VT₍₁₎ > VP₍₁₎, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $a < b$, thì ta có VT₍₁₎ < VP₍₁₎, cũng dẫn đến mâu thuẫn. Do đó $a = b$ (thử lại thỏa mãn). Từ đây, ta suy ra $M = 0$.

Bài 35: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Tin Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội năm 2024 - 2025)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x - 2y}{z} = \frac{y - 2z}{x} = \frac{z - 2x}{y}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(2 + \frac{x}{y} \right) \left(2 + \frac{y}{z} \right) \left(2 + \frac{z}{x} \right)$

Lời giải:

Ta có ngay $x + y + z > 0$ và $x - 2y; y - 2z; z - 2x \neq 0$

Vì thế áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{x - 2y}{z} = \frac{y - 2z}{x} = \frac{z - 2x}{y} = \frac{x - 2y + y - 2z + z - 2x}{x + y + z} = \frac{-x - y - z}{x + y + z} = -1$$

Vậy $x - 2y = -z \Rightarrow x + z = 2y$

Tương tự cũng có được $y + z = 2x, x + y = 2z$

Từ đó $x + y + z = 3x = 3y = 3z \Rightarrow x = y = z$

Vì vậy giá trị của biểu thức $P = (2 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 27$

Bài 36: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Hưng Yên năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{6}{\sqrt{x} + 3} + 1$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $(\sqrt{x} + 3)A = 10\sqrt{x}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{6}{\sqrt{x} + 3} + 1 \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - 6(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2x - 6\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 6 + x + 2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x(\sqrt{x} - 1) + 16(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

$$\text{b) } (\sqrt{x} + 3)A = 10\sqrt{x} \Rightarrow x + 16 = 10\sqrt{x} \Rightarrow x - 10\sqrt{x} + 16 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 64 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{4; 64\}$

Bài 37: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin tỉnh Hà Giang năm 2024 – 2025)

a) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{2024 - 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}}$.

b) Rút gọn $B = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{x + 3\sqrt{x}}$ (với $x > 0$). Tìm x để $B = \frac{1}{7}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \sqrt{2024 - 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} = \sqrt{2023 - 2\sqrt{2023} + 1} - \sqrt{2023 + 2\sqrt{2023} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2023} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2023} + 1)^2} = \sqrt{2023} - 1 - \sqrt{2023} - 1 = -2 \end{aligned}$$

b) Với $x > 0$, ta có $B = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{x+3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$

Để $B = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{7} \Rightarrow \sqrt{x}+3=7 \Rightarrow \sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$ (Thỏa mãn)

Bài 38: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Quảng Trị năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{b}{a-4b} \right)$, với a, b là các số thực dương thỏa

mãn $a \neq 4b$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi $a^2 + b^2 = 14ab$.

Lời giải:

a) Với $a \neq 4b$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - 1 + 1 - \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})} - \frac{b}{a-4b} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{a+3\sqrt{ab}+2b}{a-4b} - \frac{b}{a-4b} \right) = \frac{a-4b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{a+\sqrt{3ab}+b}{a-4b} = \frac{a+3\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}$$

b) Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Rightarrow (a+b)^2 = 16ab \Rightarrow a+b = 4\sqrt{ab}$, do a, b là các số thực dương.

Khi đó: $P = \frac{a+3\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}} = \frac{4\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 7$.

Bài 39: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A < -\frac{8}{5}$.

Lời giải:

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{15\sqrt{x}-11-(3x+7\sqrt{x}-6)-(2x+\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Để } A < \frac{-8}{5} \Rightarrow \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} < \frac{-8}{5} \Rightarrow -25\sqrt{x}+10 < -8\sqrt{x}-24 \text{ (do } \sqrt{x}+3 > 0)$$

Suy ra $\sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$ (thỏa mãn).

Bài 40: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Sóc Trăng năm 2024 - 2025)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

Tìm các số nguyên x để A đạt giá trị nguyên

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1} = \left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$A \text{ đạt giá trị nguyên} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -2 \\ x+1 = -1 \\ x+1 = 2 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta thấy chỉ có $x = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề.

Vậy $x = 0$ thì A đạt giá trị nguyên.

Bài 41: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin thành phố Cần Thơ năm 2024 - 2025)

$$\text{Cho biểu thức } P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4, x \neq 9.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho P nhận giá trị là số chẵn.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}-9 - (x-9) + (2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } P = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để P nhận giá trị là số chẵn, trước tiên ta đi tìm điều kiện để P là số nguyên

Khi đó $\sqrt{x}-3$ là ước số của 4

$\sqrt{x}-3$	4	-4	2	-2	1	-1
\sqrt{x}	7	-1	5	1	4	2
x	49		25	1	16	4
P	2		3	-1	5	-3
	thoả mãn	(loại)	(loại)	(loại)	(loại)	(loại)

Thử lại ta thấy P nhận giá trị chẵn khi $x=49$.

Bài 42: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Kiên Giang năm 2024 - 2025)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $|A| + A = 0$.

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 4$.

$$\text{Với điều kiện đó, ta có: } A = \frac{x-3\sqrt{x}+4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$$

b) Để $|A| + A = 0 \Rightarrow |A| = -A \Rightarrow A \leq 0$

$$\text{nên, theo kết quả ý a), ta có: } |A| + A = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 4 \\ \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 4 \\ \sqrt{x}-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 4$$

Bài 43: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tiền Giang năm 2024 - 2025)

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024}$ tại $x = \sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x &= \sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}} - \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{8+2\sqrt{15}} - \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} - (\sqrt{5}+1) \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} - 1 = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } (x+1)^2 = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 2$$

$$\text{Do đó } P = (x^2 + 2x + 2021)^{2024} = 2023^{2024}.$$

Bài 44: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Tiền Giang năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$, ($x \geq 0, x \neq 4$)

a. Rút gọn biểu thức P .b. Tính giá trị của biểu thức P biết $x = 9 + 4\sqrt{5}$.**Lời giải:**a) Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4} = \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+2) + (1-2\sqrt{x})(\sqrt{x}-2) + x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}+2x+x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-2x+4\sqrt{x}+x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)(x+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}.$$

b) Ta có $x = 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Suy ra } \sqrt{x} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}.$$

Do đó $P = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 1}{2 + \sqrt{5} - 2} = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} + 4$. Vậy với $x = 9 + 4\sqrt{5}$ thì $P = 2\sqrt{5} + 4$.

Bài 45: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Đồng Nai năm 2024 - 2025)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 5} \right)$ với $0 \leq x \neq 4$

Lời giải:

Với $0 \leq x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 5} \right) = \left(\frac{(\sqrt{x})^3 - 8}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right) : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5) - 5\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 5} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{x + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 4} = (x + 2\sqrt{x} + 4 - 2\sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{x + 4} = \sqrt{x} + 5. \end{aligned}$$

Bài 46: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Đắk Nông năm 2024 - 2025)

Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Lời giải:

a) Ta có: $x = 64$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$). Khi đó: $A = \frac{\sqrt{64} - 1}{\sqrt{64}} = \frac{8 - 1}{8} = \frac{7}{8}$.

Vậy $A = \frac{7}{8}$ khi $x = 64$.

b) Ta có: $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1 - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

Vậy $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0$.

c) Ta có: $\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} > \frac{3}{2}$ (ĐKXD: $x > 0$ và $x \neq 1$)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}+2-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \text{ (vì } x > 0) \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4.$$

Kết hợp điều kiện, ta được $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

Vậy $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ khi $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

Bài 47: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Trường THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm 2024 – 2025)

Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0 \text{ ta có } A &= \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2 - (\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)}{(\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)(\sqrt{\sqrt{x}+4}+2)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2 - \sqrt{\sqrt{x}+4}+2}{(\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)(\sqrt{\sqrt{x}+4}+2)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 4 \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0$ thì $P = 4$.

Bài 48: (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Lâm Đồng năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức: $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{21+8\sqrt{5}}$ và $B = \left(1 + \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Tìm tất cả các số tự nhiên x để $B \geq A$.

Lời giải:

Ta có: $A = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{(4+\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2 - 4 - \sqrt{5} = -6$

Ta có: $B = \left[1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}}\right] \cdot \left[1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}\right] = (1+\sqrt{x}) \cdot (1-\sqrt{x}) = 1-x$

$B \geq A \Rightarrow 1-x \geq -6 \Rightarrow x \leq 7$. Mà $x \neq 1$. Vậy $x \in \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Bài 49: (Đề thi vào lớp 10 Toán chuyên Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Tỉnh Khánh Hoà năm 2024 – 2025)

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy$ ($0 < x, y < 5$). Chứng minh $x^2 + y^2 = 25$.

Lời giải:

Cách 1: $y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy$ ($0 < x, y < 5$)

$$y(\sqrt{25-y^2} - x) + x(\sqrt{25-x^2} - y) = 0$$

$$\frac{y(25-x^2-y^2)}{\sqrt{25-y^2}+x} + \frac{x(25-x^2-y^2)}{\sqrt{25-x^2}+y} = 0$$

$$(25-x^2-y^2) \left(\frac{y}{\sqrt{25-y^2}+x} + \frac{x}{\sqrt{25-x^2}+y} \right) = 0$$

Vì $0 < x, y < 5$ nên $\frac{y}{\sqrt{25-y^2}+x} + \frac{x}{\sqrt{25-x^2}+y} > 0$

Do đó $25-x^2-y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ (điều phải chứng minh)

Cách 2: Giả sử $x^2 + y^2 < 25 \Rightarrow \begin{cases} 25-x^2 > y^2 \\ 25-y^2 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{25-x^2} > y \\ \sqrt{25-y^2} > x \end{cases}$ (Do $0 < x, y < 5$)

Khi đó: $2xy = y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} > yx + xy = 2xy$ (vô lý)

\Rightarrow Điều giả sử sai. Do đó: $x^2 + y^2 \geq 25$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $x^2 + y^2 \leq 25$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 = 25$ (điều phải chứng minh).

Bài 50: (Đề thi vào lớp 10 Toán chuyên tỉnh Phú Yên năm 2024 – 2025)

a) Biết $x = \sqrt{2} + 1$, tính $A = \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + x - \sqrt{2}$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$

c) Cho biết $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tính $x + y$

Lời giải:

a) Từ $x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x - \sqrt{2} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{2}$

Áp dụng kết quả này ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + x - \sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + 1} \\
 &= \sqrt{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) + 1} \\
 &= \sqrt{(x^4-1)(x^4+1) + 1} \\
 &= \sqrt{x^8 - 1 + 1} \\
 &= \sqrt{x^8} = x^4 = (\sqrt{2} + 1)^4
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Có thể thí sinh tính ra kết quả tương đương $A = 17 + 12\sqrt{2}$

b) Ta có:
$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} \\
 &= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + (\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2 + \sqrt{10})}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} \\
 &= 1 + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

c) Do $(\sqrt{y^2+1}-y)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1 \Rightarrow \sqrt{y^2+1}-y \neq 0$ ta có

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{y - \sqrt{y^2+1}}{y - \sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1} - y$$

$$x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } y + \sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x \Rightarrow x + y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta được $x + y = 0$

Bài 51 : (Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Tin tỉnh Bình Định năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4\sqrt{x}+4} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $T < 0$

Lời giải:

a) Với điều kiện xác định $x > 0, x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4\sqrt{x}+4} \right) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Ta có: $T < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0$ với $x > 0, x \neq 4$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

Kết hợp điều kiện xác định, ta được $0 < x < 4$

Vì x nhận các giá trị nguyên nên $x \in \{1, 2, 3\}$

Kết luận: Với các giá trị nguyên $x \in \{1, 2, 3\}$ thì $T < 0$.

Bài 52 : (Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán tỉnh Bình Định năm 2024 – 2025)

Cho $a-b = \sqrt{17-12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2024$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } a-b = \sqrt{17-12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3$$

$$\text{Ta có: } A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2024$$

$$= a^3 + a^2 - b^3 + b^2 - 11ab + 2024$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^3 - b^3) + (a^2 + b^2) - 11ab + 2024 \\
 &= (a - b)[(a - b)^2 + 3ab] + [(a - b)^2 + 3ab] - 12ab + 2024 \\
 &= 3(9 + 3ab) + (9 + 3ab) - 12ab + 2024 = 27 + 9 + 2024 = 2060
 \end{aligned}$$

Bài 53 : (Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán tỉnh Quảng Ngãi năm 2024 - 2025)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1} \right)$, với $a \geq 0, a \neq 1$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } A &= \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}+1)} \right) = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}+1)} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(a+1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{a-1}{a+1}.
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{a-1}{a+1}$, với $a \geq 0, a \neq 1$.

Bài 54 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2024 - 2025)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$

Lời giải:

Với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{x-4\sqrt{x}+4-(x-6\sqrt{x}+9)+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Để } A > -1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} > -1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3 > 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 9 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Vậy với $x > 9$ hoặc $0 \leq x < 1$ thì $A > -1$.

Bài 55 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chuyên Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – thành phố à Nẵng năm 2024 – 2025)

$$\text{Cho biểu thức } P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{11\sqrt{x}+4}{x+3\sqrt{x}+2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{-2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}} \right) \text{ với } x > 0, x \neq 4$$

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các giá trị của x để P là số nguyên.

Lời giải:

Với điều kiện $x > 0$ và $x \neq 4$, khai triển và rút gọn ta được

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{11\sqrt{x}+4}{x+3\sqrt{x}+2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{-2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{2(\sqrt{x}+2) + 3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (11\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \right) : \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \\ &= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Với điều kiện } x > 0, \text{ ta chứng minh được } 0 < P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 3$$

Mà P là số nguyên nên $P \in \{1; 2\}$

$$+ \text{ Với } P = 1 \text{ ta có } \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Với } P = 2 \text{ ta có } \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $x = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm để P là số nguyên.

Bài 56 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chung Trường Đại Học Sư Phạm – TP Hà Nội năm 2024 – 2025)

Cho $A = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}$. Tính A^3

Lời giải:

$$A = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2} + 3+\sqrt{2} = 6 \Rightarrow A^3 = 6^3 = 216.$$

Bài 57 : (Đề thi vào lớp 10 Toán Chung Trường THPT Chuyên Lam Sơn – tỉnh Thanh Hoá năm 2024 – 2025)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ (với $x \geq 0$ và $x \neq \frac{1}{9}$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P = \frac{2}{3}$.

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq \frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}-1}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} + \frac{8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{3x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 1 - 3\sqrt{x} + 1 + 8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} : \frac{3\sqrt{x}+1 - 3\sqrt{x} + 2}{3\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3x + 3\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} : \frac{3}{3\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1}{3} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1}$$

$$\text{b) Để } P = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)}{3\sqrt{x} - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)}{3\sqrt{x} - 1} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{2(x + \sqrt{x})}{2(3\sqrt{x} - 1)} - \frac{3(3\sqrt{x} - 1)}{2(3\sqrt{x} - 1)} = 0$$

$$\frac{2x + 2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + 3}{2(3\sqrt{x} - 1)} = 0$$

$$2x - 7\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$2x - 6\sqrt{x} + 3 - \sqrt{x} = 0$$

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) - (\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$(\sqrt{x} - 3)(2\sqrt{x} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với x thuộc tập $S = \left\{9; \frac{1}{4}\right\}$ thì $P = \frac{3}{2}$.



MathExpress
Sang mãi niềm tin