TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài 1: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Quảng Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực $a,b,c\geq 1$ thỏa mãn $a+b+c=9$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$.

Bài 2 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Với các số thực dương a,b thỏa mãn $a^2+b^2\leq 2$.

a) Chứng minh $a+b\leq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b^2}+\dfrac{2024}{a+b+2}$.

Bài 3 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Đăk Lăk năm học 2024 – 2025)

Cho đa thức bậc hai $P(x)=ax^2+bx+c$, với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Biết $P(1)=12$ và $P(2)=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\dfrac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}$.

Bài 4 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Xét $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx\leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=xy^2+yz^2+zx^2-18(x+y+z)$.

Bài 5 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$

Bài 6 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung (Đề 1) - tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Xét ba số dương $a,\ b,\ c$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\dfrac{a}{a^3+3}+\dfrac{b}{b^3+3}+\dfrac{c}{c^3+3}$.

Bài 7 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{2x-1}{x^2+2}+\dfrac{2y-1}{y^2+2}+\dfrac{2z-1}{z^2+2}\geq\dfrac{-3}{2}$

Bài 8 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

Cho các số dương x, y thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$K = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{1}{1+xy}.$$

Bài 9 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – thành phố Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^3+b^2+c} + \dfrac{1}{b^3+c^2+a} + \dfrac{1}{c^3+a^2+b}$.

Bài 10 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán (hệ chuyên Nga – Pháp – Trung) - tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2 = 675$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{15a}{675-bc} + \dfrac{15b}{675-ac} + \dfrac{15c}{675-ab}$

Bài 11 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $a^2+b^2 = a+b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^4+b^4+\dfrac{2024}{(a+b)^2} - 6a^2b^2$

Bài 12 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng $\left(x+2y+\dfrac{2}{x+1}\right)\left(y+2x+\dfrac{2}{y+1}\right) \geq 16.$

Bài 13 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ca} + \sqrt{3c+ab}$

Bài 14 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

a) Cho a , b , c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2+bc} + \dfrac{1}{b^2+ac} + \dfrac{1}{c^2+ab} \leq \dfrac{a+b+c}{2abc}$.

b) Cho x , y là các số thực dương thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} + \dfrac{1}{xy+1}$.

Bài 15 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{(1+b)(1+c)}+\dfrac{b^2}{(1+c)(1+a)}+\dfrac{c^2}{(1+a)(1+b)}\geq\dfrac{3}{4}$

Bài 16 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+1+bc}+\frac{1}{b^2+1+ac}+\frac{1}{ab(c^3+1)+1}.$$

Bài 17 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung - tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{c^2}+\dfrac{c}{a^2}+\dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

Bài 18 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung - tỉnh Tây Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+2y+3z=2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{3}{8xy}+\frac{1}{8yz}+\frac{1}{4zx}.$$

Bài 19 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Toán Tin - tỉnh Sơn La năm học 2024 – 2025)

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$.

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2-2xyz\geq 1$.

Bài 20 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Cho $x,\ y>0$ thỏa mãn $x+y<1$. Chứng minh $\dfrac{x^2}{1-x}+\dfrac{y^2}{1-y}+\dfrac{1}{x+y}+x+y\geq\dfrac{5}{2}$.

Bài 21 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung - Trường THPT Chuyên Lam Sơn tỉnh Thanh Hoá năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $8a^2+2b^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4a-b-1}{1+b}-\frac{2a-2b+1}{1+2a}-\frac{6a+3b-6077}{6a+3b}$$

Bài 22 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $4x^2+9y^2=10$. Chứng minh rằng

$$\frac{(2x+9y)^3}{4(x^2+y^2)-4x-8y+55}\le 20.$$

Bài 23 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) $x^2+y^2+z^2\ge 3$; b) $\frac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2\ge 4$; c) $xy+yz+zx\ge 3\sqrt{xyz}$.

Bài 24 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực a,b,c. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) $\frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c}\ge 8$

b) $a^3+b^3+c^3+24abc\le (a+b+c)^3$

c) $\frac{a}{\sqrt{a^2+7bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}\ge 1$

Bài 25 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2y^2+4y+4=0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{xy}{3y+2}$

Bài 26 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a}=\frac{5}{4}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)}+\frac{(4-b)^2}{(4-a)(4-c)}+\frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}$

Bài 27 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{4}{ab+bc+ca}$$

Bài 28 : (Đề thi khảo sát vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – THPT Chuyên Lam Sơn tỉnh Thanh Hoá năm học 2024 – 2025)

Các số thực dương x, y thỏa mãn: $x^3+y^3=x-y$, chứng minh $x^2+y^2<1$.

Bài 29 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{2xyz}{x^3+y^3+z^3}+\frac{\left|x^3-y^3\right|+\left|y^3-z^3\right|+\left|z^3-x^3\right|}{3xyz}.$$

Bài 30 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz=4$.

Chứng minh $xyz\le 1$ và $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge\dfrac{x+y+z}{2}$.

Bài 31 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Toán - thành phố Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a\le 2, b\le 2, c\le 2; a+b+c=3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{ab(b+c+1)}+\sqrt{bc(c+a+1)}+\sqrt{ca(a+b+1)}$

Bài 32 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - Sở GD&ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a\le 1,\ b\le 1,\ c\le 1; a^2+b^2+c^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{a^4}{bc+2}+\dfrac{b^4}{ca+2}+\dfrac{c^4}{ab+2}$

Bài 33 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2(a+b+c)$

a) Chứng minh rằng $a+b+c\le 6$ và $(a+1)(b+1)(c+1)\le 27$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $F=(a+1)(b+1)(c+1)$

Bài 34 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực không âm và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2a+c}{1+bc}+\dfrac{2b+c}{1+ca}$

Bài 35 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Hưng Yên năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases} a>0, b>0, c\geq 2009 \\ a+b+c=2025 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc$.

Bài 36 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng $\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\leq \frac{3x-1}{2}$, với $x\geq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$, với x,y,z là các số thực không nhỏ hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{xyz}$.

Bài 37 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=4$.

a) Chứng minh $4ab+ac+bc\geq 4abc$

b) Chứng minh $\frac{2a}{4a+bc}+\frac{2b}{4b+ac}+\frac{3c}{4c+ab}\leq \frac{4}{3}$.

Bài 38 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\geq 9$

Bài 39 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Bài 40 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Cho ba số thực x,y,z, thỏa mãn: $(x-y)(y-z)(z-x)\geq 2$

Chứng minh rằng, $x^2+y^2+z^2\geq 2$.

Bài 41 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1, y>1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$

Bài 42 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Toán, Tin - tỉnh Long An năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là ba số thực không âm.

a) Chứng minh rằng $(a+b+c)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$.

b) Giả sử $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le 1$.

Bài 43 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - Trường Phổ Thông Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+3=2\left(ab+bc+ca\right)$.

Chứng minh rằng $3\le a+b+c\le\frac{2\left(ab+bc+ca\right)+3}{3}$

Bài 44 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh lần lượt là a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$ và $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Bài 45 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}+\frac{3}{2}$$

Bài 46 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^4>\frac{2024}{27}.$$

Bài 47 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Lê Quý Đôn tỉnh Khánh Hoà năm học 2024 – 2025)

1. Tìm tất cả số thực $k>0$ sao cho $\frac{x}{xy+2}\le\frac{1}{k}\left(x+\frac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x,y>0$.

2. Cho $a,b,c,x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4$.

Chứng minh: $\frac{x}{ax+2}+\frac{y}{by+2}+\frac{z}{cz+2}\le 1$

Bài 48 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025)

Cho $x\ge 0, y\ge 0, xy\le \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{1+2\sqrt{xy}}\ge \frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}$

Bài 49 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện $2024a+1011b\le 2023$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{20}{a}+\frac{23}{b}-1944a-988b$.

Bài 50 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x-1}{x+3}+\frac{y-1}{y+4}\ge \frac{6}{z+5}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(2x+2)(2y+3)(2z+4)$

Bài 51 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Lê Quý Đôn thành phố Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{ab}+1\le 2\sqrt{b}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{\sqrt{ab}}{2024a+2025b}+\frac{2009a}{b}$$

Bài 52 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – Trường THPT Chuyên KHTN năm học 2024 – 2025)

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(a+2)b^2+(b+2)c^2+(c+2)a^2\ge 8+abc$

Chứng minh rằng: $2(ab+bc+ca)\le a^2(a+b)+b^2(b+c)+c^2(c+a)$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Quảng Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực $a,b,c\geq 1$ thỏa mãn $a+b+c=9$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta có

$$P=\frac{1^2}{a+b}+\frac{1^2}{b+c}+\frac{1^2}{c+a}\geq\frac{(1+1+1)^2}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}=\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$$

Dấu "=" khi $a=b=c=3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1}{2}$ khi $a=b=c=3$

Không mất tính tổng quát, giả sử: $1\leq a\leq b\leq c$, mà $a+b+c=9\ \Rightarrow\ 3\leq c\leq 7$

Ta có $(a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow ab\geq a+b-1$

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)}=\frac{9+c}{ab+c(a+b)+c^2}\leq\frac{9+c}{a+b-1+c(a+b)+c^2}$$

$$=\frac{9+c}{9-c-1+c(9-c)+c^2}=\frac{9+c}{8c+8}\Rightarrow\ P\leq\frac{1}{9-c}+\frac{9+c}{8c+8}$$

Ta đi chứng minh: $P=\dfrac{1}{9-c}+\dfrac{9+c}{8c+8}\leq\dfrac{3}{4}$ (1) với mọi $3\leq c\leq 7$

Thật vậy (1) $\Rightarrow c^2-8c+7\leq 0\Rightarrow(c-7)(c-1)\leq 0$ (Đúng), dấu "=" xảy ra khi $c=7, a=b=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{4}$ khi $c=7, a=b=1$

Bài 2 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Với các số thực dương a,b thỏa mãn $a^2+b^2\leq 2$.

a) Chứng minh $a+b\leq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b^2}+\dfrac{2024}{a+b+2}$.

Lời giải

a) Chứng minh $a+b\leq 2$

Chứng minh được : $\dfrac{(a+b)^2}{2}\leq a^2+b^2;\ \forall a,b$ (*)

Khi đó: $\dfrac{(a+b)^2}{2}\le a^2+b^2\le 2\Rightarrow (a+b)^2\le 4$

Mà $a,\ b>0$ nên $a+b\le 2$ (điều phải chứng minh)

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Áp dụng (*), ta có: $P\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)+\dfrac{2024}{a+b+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b+2)+\dfrac{8\sqrt{2}}{a+b+2}+\dfrac{2024-8\sqrt{2}}{a+b+2}-\sqrt{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Arithmetic Means - Geometric Means cho hai số dương:

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b+2);\dfrac{8\sqrt{2}}{a+b+2}$ và kết quả $a+b\le 2$, ta có: $P\ge 4\sqrt{2}+\dfrac{2024-8\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}=\sqrt{2}+506$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=2 \\ a^2+b^2\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b+2)=\dfrac{8\sqrt{2}}{a+b+2} \end{cases} \Rightarrow a=b=1.$

Vậy: $P_{min}=\sqrt{2}+506$ tại $a=b=1$.

Bài 3 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – tỉnh Đăk Lăk năm học 2024 – 2025)

Cho đa thức bậc hai $P(x)=ax^2+bx+c$, với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Biết $P(1)=12$ và $P(2)=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\dfrac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} P(1)=a+b+c=12 \\ P(2)=4a+2b+c=16 \end{cases}\Rightarrow 3a+b=4$

Cách 1:	Cách 2:
Cách 1: $(a-b)^2(a+3b)\ge 0$ $\Rightarrow a^3+a^2b+3b^3\ge 5ab^2$ $\Rightarrow \dfrac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}\ge 5$.	**Cách 2:** $\begin{cases} a^3+b^3+b^3\ge 3ab^2 \\ a^2b+b^3\ge 2ab^2 \end{cases}\Rightarrow a^3+a^2b+3b^3\ge 5ab^2$ $\Rightarrow \dfrac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}\ge 5$

Ta có:

$$A=\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}=\frac{24}{25}.\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{1}{25}.\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}$$

Mà $\frac{1}{25}.\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}\ge 2\sqrt{\frac{1}{25}.\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}.\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}}=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow A\ge \frac{24}{25}.5+\frac{2}{5}=\frac{26}{5}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=1,\ c=10$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{26}{5}$.

Bài 4 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Xét $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx\le xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=xy^2+yz^2+zx^2-18(x+y+z)$.

Lời giải

Từ giả thiết có $1\ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có

$xy^2+yz^2+zx^2\ge \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\ge (y+z+x)^2$

Suy ra $Q\ge (x+y+z)^2-18(x+y+z)=(x+y+z-9)^2-81\ge -81$.

Khi $x=y=z=3$ thì các giả thiết được thỏa mãn và $Q=-81$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng -81.

Cách khác: $Q+81\ge xy^2-18y+\frac{81}{x}+yz^2-18z+\frac{81}{y}+zx^2-18x+\frac{81}{z}$

$$=x\left(y-\frac{9}{x}\right)^2+y\left(z-\frac{9}{y}\right)^2+z\left(x-\frac{9}{z}\right)^2\ge 0.$$

Bài 5 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

Lời giải

Với $a,b,c>0$, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ra có $\sqrt{\frac{b+c}{a}}=\sqrt{\frac{b+c}{a}\cdot 1}\le \frac{\frac{b+c}{a}+1}{2}=\frac{a+b+c}{2a}$

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge \frac{2a}{a+b+c}$.

Tương tự $\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \geq \dfrac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \geq \dfrac{2c}{a+b+c}$

Do đó $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \geq \dfrac{2a}{a+b+c}+\dfrac{2b}{a+b+c}+\dfrac{2c}{a+b+c}=2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{b+c}{a}=1 \\ \dfrac{c+a}{b}=1 \Rightarrow a+b+c=0 \text{ (vô lí)} \\ \dfrac{a+b}{c}=1 \end{cases}$

Vậy $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2\cdot$

Bài 6: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung (Đề 1) - tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Xét ba số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\dfrac{a}{a^3+3}+\dfrac{b}{b^3+3}+\dfrac{c}{c^3+3}$.

Lời giải

$S=\dfrac{a}{a^3+1+1+1}+\dfrac{b}{b^3+1+1+1}+\dfrac{c}{c^3+1+1+1} \leq \dfrac{a}{3a+1}+\dfrac{b}{3b+1}+\dfrac{c}{3c+1}$.

Ta đi chứng minh $\dfrac{a}{3a+1}+\dfrac{b}{3b+1}+\dfrac{c}{3c+1} \leq \dfrac{3}{4}$.

Đặt $a=\dfrac{x}{y}, b=\dfrac{y}{z}, c=\dfrac{z}{x}$ với $x, y, z>0$.

Ta cần chứng minh $\dfrac{x}{3x+y}+\dfrac{y}{3y+z}+\dfrac{z}{3z+x} \leq \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{3x}{3x+y}+\dfrac{3y}{3y+z}+\dfrac{3z}{3z+x} \leq \dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{3x}{3x+y}+1-\dfrac{3y}{3y+z}+1-\dfrac{3z}{3z+x} \geq 3-\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{3x+y}+\dfrac{z}{3y+z}+\dfrac{x}{3z+x} \geq \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{y^2}{3xy+y^2}+\dfrac{z^2}{3yz+z^2}+\dfrac{x^2}{3zx+x^2} \geq \dfrac{3}{4}$

$\text{VT} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{3xy+3yz+3zx+x^2+y^2+z^2} \geq \dfrac{3}{4} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (luôn đúng).

Vậy $S \le \frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{4}$.

Bài 7 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên– tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \ge \frac{-3}{2}$

Lời giải

Trong 3 số x, y, z luôn có hai số cùng không âm hoặc cùng không dương do $x + y + z = 0$

Không mất tổng quát, giả sử $xy \ge 0$. Đặt $P = \frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2}$

Áp dụng $\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} \ge \frac{(m+n)^2}{a+b}$ với $a, b > 0$ (không cần chứng minh)

$$P + 3 = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} + 1\right) + \left(\frac{2y-1}{y^2+2} + 1\right) + \left(\frac{2z-1}{z^2+2} + 1\right) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$$

$$P + 3 \ge \frac{(x+y+2)^2}{x^2+y^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \ge \frac{(x+y+2)^2}{(x+y)^2 - 2xy + 4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$$

$$\Rightarrow P + 3 \ge \frac{(x+y+2)^2}{(x+y)^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \text{ (vì } xy \ge 0)$$

Do $x + y + z = 0$ nên $P + 3 \ge \frac{(z-2)^2}{z^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$

Ta chứng minh $P + 3 \ge \frac{3}{2}$. Thật vậy $\frac{(z-2)^2}{z^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \ge \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(z-2)^2\left(z^2+2\right) + (z+1)^2\left(z^2+4\right)}{z^4+6z^2+8} \ge \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow 2\left(z^2 - 4z + 4\right)\left(z^2+2\right) + 2\left(z^2 + 2z + 1\right)\left(z^2+4\right) \ge 3\left(z^4 + 6z^2 + 8\right)$$

$$\Rightarrow z^4 - 4z^3 + 4z^2 \ge 0 \Rightarrow z^2\left(z^2 - 4z + 4\right) \ge 0 \Rightarrow z^2(z-2)^2 \ge 0,$$

Điều này đúng với mọi z. Dấu bằng xảy ra khi $z = 0$ hoặc $z = 2$.

Suy ra $P + 3 \ge \frac{3}{2} \Rightarrow P \ge \frac{-3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$, $x \cdot y = 0, z^2(z-2)^2 = 0, x + y + z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.

Vậy có điều phải chứng minh.

Bài 8 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên– tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

Cho các số dương $x,\ y$ thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$K = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{1}{1+xy}.$$

Lời giải

Ta có: $K = \left(\frac{x}{1+y}+1\right) + \left(\frac{y}{1+x}+1\right) + \frac{1}{1+xy} - 2 = (x+y+1)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right) + \frac{1}{1+xy} - 2$.

Mặt khác với mọi a,b dương ta có: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \geq \frac{4}{a+b+2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Khi đó ta có $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \geq \frac{4}{x+y+2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Do đó ta được $K \geq \frac{4(x+y+1)}{x+y+2} + \frac{1}{xy+1} - 2 = 4\left(1 - \frac{1}{x+y+2}\right) + \frac{1}{xy+1} - 2$

$= 2 + \frac{1}{xy+1} - \frac{4}{x+y+2}$.

Đặt $t = \sqrt{xy}, t \geq 1$ và có $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ ta được

$$K \geq 2 + \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t+1} = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t+1}\right) \quad (\forall t \geq 1)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{(t-1)^3}{2(t+1)(t^2+1)} \geq \frac{3}{2}$$

$K = \frac{3}{2}$ khi $t=1$, ta được $x=y=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của K bằng $\frac{3}{2}$ khi $x=y=1$.

Bài 9 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – thành phố Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^3+b^2+c} + \frac{1}{b^3+c^2+a} + \frac{1}{c^3+a^2+b}$.

Lời giải

Ta có $(a^3+b^2+c)\left(\frac{1}{a}+1+c\right) \geq (a+b+c)^2$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).

$\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^2+c} \leq \frac{\frac{1}{a}+1+c}{(a+b+c)^2} = \frac{bc+1+c}{(a+b+c)^2}$. Tương tự suy ra

$$P \leq Q = \frac{(ab+bc+ca)+(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2}.$$

Ta chứng minh $Q\le 1 \Rightarrow (ab+bc+ca)+(a+b+c)+3\le (a+b+c)^2$.

$\Rightarrow (a+b+c)+3\le (a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)$

Điều này đúng do $\begin{cases} a^2+b^2+c^2\ge \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2\ge \sqrt[3]{abc}(a+b+c)=a+b+c \\ ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3 \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 10 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán (hệ chuyên Nga – Pháp – Trung) – tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=675$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{15a}{675-bc}+\dfrac{15b}{675-ac}+\dfrac{15c}{675-ab}$

Lời giải

Có $675-bc\ge 675-\dfrac{b^2+c^2}{2}=675-\dfrac{675-a^2}{2}=\dfrac{675+a^2}{2}$; $15a\le \dfrac{a^2+225}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{15a}{675-bc}\le \dfrac{a^2+225}{a^2+675}=1-\dfrac{450}{a^2+675}$

Tương tự: $\dfrac{15b}{675-ca}\le 1-\dfrac{450}{b^2+675}$; $\dfrac{15c}{675-ab}\le 1-\dfrac{450}{c^2+675}$

$$P\le 3-450\cdot\left(\frac{1}{a^2+675}+\frac{1}{b^2+675}+\frac{1}{c^2+675}\right)\le 3-450\cdot\frac{9}{a^2+b^2+c^2+675.3}=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=15$. Vậy $\max P=\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a=b=c=15$.

Bài 11 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $a^2+b^2=a+b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^4+b^4+\dfrac{2024}{(a+b)^2}-6a^2b^2$

Lời giải

Ta có $2\sqrt{ab}\le a+b$; $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Mà giả thiết cho $a^2+b^2=a+b$ nên $a+b\le\sqrt{2(a+b)}\Rightarrow a+b\le 2$. Từ đó suy ra $ab\le 1$.

Ta có $P=\left(a^2+b^2\right)^2+\frac{2024}{(a+b)^2}-8a^2b^2=(a+b)^2+\frac{16}{(a+b)^2}+\frac{2008}{(a+b)^2}-8(ab)^2$

Ta có $(a+b)^2+\frac{16}{(a+b)^2}\geq 2\sqrt{(a+b)^2\frac{16}{(a+b)^2}}=8$; $\frac{2008}{(a+b)^2}\geq\frac{2008}{4}=502$; $-8(ab)^2\geq -8$

Vậy $P\geq 8+502-8=502$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a+b=2\\ ab=1\end{cases}\Rightarrow a=b=1.$

Vậy $\min P=502$ đạt được khi $a=b=1$.

Bài 12 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực $x,y>0$ thỏa mãn $xy\geq 1$. Chứng minh rằng $\left(x+2y+\frac{2}{x+1}\right)\left(y+2x+\frac{2}{y+1}\right)\geq 16$.

Lời giải

a) Ta có $x+2y+\frac{2}{x+1}=\left(\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)+\frac{3y}{2}-\frac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\left(\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)+\frac{3y}{2}-\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}}+2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}}+\frac{3y}{2}-\frac{1}{2}\geq 2+2.\frac{1}{2}+\frac{3y}{2}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3y}{2}.$$

Suy ra $x+2y+\frac{2}{x+1}\geq\frac{5}{2}+\frac{3y}{2}$.Chứng minh tương tự ta cũng có: $y+2x+\frac{2}{y+1}\geq\frac{5}{2}+\frac{3x}{2}$.

Khi đó $\left(x+2y+\frac{2}{x+1}\right)\left(y+2x+\frac{2}{y+1}\right)\geq\left(\frac{5}{2}+\frac{3y}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3x}{2}\right)$

$$=\frac{25}{4}+\frac{15}{4}(x+y)+\frac{9xy}{4}$$

$$\geq\frac{25}{4}+\frac{15}{4}\cdot 2\sqrt{xy}+\frac{9xy}{4}\geq\frac{25}{4}+\frac{15}{4}\cdot 2+\frac{9}{4}=16.$$

Suy ra điều phải chứng minh. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y=1$.

Bài 13 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\sqrt{3a+bc}+\sqrt{3b+ca}+\sqrt{3c+ab}$

Lời giải

Vì $a+b+c=3$ nên $\sqrt{3a+bc}=\sqrt{(a+b+c)a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\sqrt{(a+b)(a+c)} \le \dfrac{a+b+a+c}{2} = \dfrac{2a+b+c}{2}$

Suy ra $\sqrt{3a+bc} \le \dfrac{2a+b+c}{2}$ (1). Tương tự ta có $\sqrt{3b+ac} \le \dfrac{a+2b+c}{2}$ (2) và

$\sqrt{3c+ab} \le \dfrac{a+b+2c}{2}$ (3)

Cộng vế với vế các bất đẳng thức (1); (2); (3) ta có $P \le \dfrac{4(a+b+c)}{2} = \dfrac{4.3}{2} = 6$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=6$ khi $a=b=c=1$

Bài 14 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2+bc} + \dfrac{1}{b^2+ac} + \dfrac{1}{c^2+ab} \le \dfrac{a+b+c}{2abc}$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} + \dfrac{1}{xy+1}$.

Lời giải

a) Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\dfrac{2abc}{a^2+bc} + \dfrac{2abc}{b^2+ac} + \dfrac{2abc}{c^2+ab} \le a+b+c$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Arithmetic Means - Geometric Means (AG – MG) ta có :

$a^2+bc \ge 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \dfrac{2abc}{a^2+bc} \le \sqrt{bc}$

Tương tự suy ra $\dfrac{2abc}{a^2+bc} + \dfrac{2abc}{b^2+ac} + \dfrac{2abc}{c^2+ab} \le \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có : $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

Tương tự suy ra $\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} \le a+b+c$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

b) Ta có $\dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} + \dfrac{1}{xy+1} = \dfrac{x^2}{xy+x} + \dfrac{y^2}{xy+y} + \dfrac{1}{xy+1} \ge \dfrac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \dfrac{1}{xy+1}$ (Bất đẳng thức Cauchy Schwarz dạng Engel)

Sử dụng $(x+y)^2 \geq 4xy$ suy ra :

$$\frac{(x+y)^2}{2xy+x+y}+\frac{1}{xy+1} \geq \frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2}+x+y}+\frac{1}{\frac{(x+y)^2}{4}+1}=\frac{2(x+y)}{x+y+2}=\frac{4}{(x+y)^2+4}$$

Đặt $t=x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2$

Ta thấy $\frac{2t}{t+2}+\frac{4}{t^2+4} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(t-2)^3}{2(t+2)(t^2+4)} \geq 0$ luôn đúng với mọi $t \geq 2$

Vậy $\min P=\frac{3}{2}$ tại $x=y=1$.

Bài 15 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^2}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có: $\frac{a^2}{(1+b)(1+c)}+\frac{(1+b)(1+c)}{16} \geq \frac{1}{2}a$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{(1+b)(1+c)}+\frac{b+c+bc+1}{16} \geq \frac{1}{2}a \Rightarrow \frac{a^2}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{1}{2}a-\frac{b+c+bc+1}{16} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{b^2}{(1+c)(1+a)} \geq \frac{1}{2}b-\frac{c+a+ca+1}{16}$ (2)

và $\frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{1}{2}c-\frac{a+b+ab+1}{16}$ (3)

Cộng theo vế ba bất đẳng thức (1) (2) và (3), ta được:

$$\frac{a^2}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^2}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{8}(a+b+c)-\frac{1}{16}(ab+bc+ca)-\frac{3}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3.3=9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$

Suy ra: $\frac{a^2}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^2}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{8}.3-\frac{1}{16}.3-\frac{3}{16}=\frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 16 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+1+bc}+\frac{1}{b^2+1+ac}+\frac{1}{ab(c^3+1)+1}.$$

Lời giải

$$P=\frac{a}{a^3+a+abc}+\frac{b}{b^3+b+abc}+\frac{c}{abc(c^3+1)+c}\leq\frac{a}{a^3+a+1}+\frac{b}{b^3+b+1}+\frac{c}{c^3+c+1}$$

$\forall x>0$, ta luôn có $(x-1)^2(x+1)\geq 0 \Rightarrow x^3-x^2-x+1\geq 0$

$\Rightarrow x^3+x+1\geq x^2+2x \Rightarrow \frac{x}{x^3+x+1}\leq\frac{1}{x+2}$, đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

Suy ra $\frac{a}{a^3+a+1}+\frac{b}{b^3+b+1}+\frac{c}{c^3+c+1}\leq\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\leq 1$ (6)

Thật vậy, $(6)\Rightarrow(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)\leq(a+2)(b+2)(c+2)$

$\Rightarrow ab+bc+ca+abc\geq 4$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $ab+bc+ac\geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3$

Mặt khác $abc\geq 1\Rightarrow ab+bc+ca+abc\geq 4$ nên (6) đúng, suy ra $P\leq 1$.

Vậy $\max P=\frac{1}{3}$ khi $a=b=c=1$

Bài 17 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung - tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{9}{2(a+b+c)}$.

Lời giải

Ta có: $a+b+c=abc(a+b+c)=\frac{3abc(a+b+c)}{3}\leq\frac{(ab+bc+ac)^2}{3}$ (Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+xz)$)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$; $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}$; $\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{a}$;

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ac$ (Do $abc=1$)

$$\Rightarrow P\geq ab+bc+ac+\frac{27}{2(ab+bc+ac)^2}=\frac{ab+bc+ac}{2}+\frac{ab+bc+ac}{2}+\frac{27}{2(ab+bc+ac)^2}\geq 3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$ khi $a=b=c=1$

Bài 18 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Tây Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+2y+3z=2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{3}{8xy}+\frac{1}{8yz}+\frac{1}{4zx}.$$

Lời giải

$$M=\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{1}{6xy}+\frac{1}{18yz}+\frac{1}{9zx}+\frac{5}{12}\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{6yz}+\frac{1}{3zx}\right)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq\frac{16}{a+b+c+d}$. Tương tự $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$

Ta có $M\geq\frac{16}{x^2+4y^2+9z^2+6xy+18yz+9zx}+\frac{5}{12}\left(\frac{9}{2xy+6yz+3zx}\right)$

$$=\frac{16}{(x+2y+3z)^2+2xy+6yz+3zx}+\frac{15}{4(2xy+6yz+3zx)}$$

Mặt khác $ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$

$$\Rightarrow M\geq\frac{16}{(x+2y+3z)^2+\frac{(x+2y+3z)^2}{3}}+\frac{15}{4.\frac{(x+2y+3z)^2}{3}}=\frac{16}{2024^2+\frac{2024^2}{3}}+\frac{45}{4.2024^2}=\frac{93}{4.2024^2}$$

Vậy $M_{\min}=\frac{93}{4.2024^2}$ khi $x=2y=3z=\frac{2024}{3}$

Bài 19 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán Tin – tỉnh Sơn La năm học 2024 – 2025)

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$.

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2-2xyz\ge 1$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2\ge 2xy \\ y^2+z^2\ge 2yz \\ z^2+x^2\ge 2zx \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx.$

Theo giả thiết: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\Rightarrow xy+yz+zx=3xyz\ \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2xyz\ge xyz$ (1)

Từ giả thiết áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\Rightarrow xyz\ge 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 20 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Cho $x, y>0$ thỏa mãn $x+y<1$. Chứng minh $\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{1-y}+\frac{1}{x+y}+x+y\ge\frac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}-x-1,\ \frac{y^2}{1-y}=\frac{1}{1-y}-y-1$

Bất đẳng thức trở thành: $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}-2\ge\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{9}{2}$

Chứng minh bất đẳng thức: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ với $a, b, c>0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta có:

$$(1-x+1-y+x+y)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\right)\ge 9\Rightarrow\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $1-x=1-y=x+y\Rightarrow x=y=\frac{1}{3}$

Bài 21 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – Trường THPT Chuyên Lam Sơn tỉnh Thanh Hoá năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $8a^2+2b^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4a-b-1}{1+b}-\frac{2a-2b+1}{1+2a}-\frac{6a+3b-6077}{6a+3b}$$

Lời giải

Đặt $x=2a,\ y=b$. Do $8a^2+2b^2=1\Rightarrow 2(x^2+y^2)=1$

$$T=\frac{4a-b-1}{1+b}-\frac{2a-2b+1}{1+2a}-\frac{6a+3b-6077}{6a+3b}=\frac{2x-y-1}{1+y}-\frac{x-2y+1}{1+x}-\frac{3x+3y-6077}{3x+3y}$$

$$=\frac{2x}{y+1}-1+\frac{2y}{x+1}-1+\frac{6077}{3(x+y)}-1=\frac{2x}{y+1}+\frac{2y}{x+1}+\frac{6077}{3(x+y)}-3$$

$$=\frac{2x^2}{xy+x}+\frac{2y^2}{xy+y}+\frac{6077}{3(x+y)}-3\geq\frac{2(x+y)^2}{2xy+x+y}+\frac{6077}{3(x+y)}-3$$

Do $x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow 2xy\leq\frac{1}{2}$

$$(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)\Rightarrow x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)}=1\Rightarrow 2xy+x+y\leq\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow T\geq\frac{2(x+y)^2}{\frac{3}{2}}+\frac{6077}{3(x+y)}-3=\frac{4}{3}(x+y)^2+\frac{4}{3(x+y)}+\frac{4}{3(x+y)}+\frac{2023}{x+y}-3$$

$$\geq\frac{4}{3}.3+\frac{2023}{1}-3=2024$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$

Vậy MinT = 2024 khi $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2}$

Bài 22 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho $x,\ y$ là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $4x^2+9y^2=10$.

Chứng minh rằng $\dfrac{(2x+9y)^3}{4\left(x^2+y^2\right)-4x-8y+55}\leq 20.$

Lời giải

Vì x, y là các số thực dương nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$4x^2+1\ge 2\sqrt{4x^2}\Rightarrow 4x^2+1\ge 4x.$

$9y^2+9\ge 2\sqrt{81y^2}\Rightarrow 9y^2+9\ge 18y.$

Do đó $4x^2+9y^2+10\ge 4x+18y\Rightarrow 2x+9y\le 10.$ (1)

Ta có: $4\left(x^2+y^2\right)-4x-8y+55=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y-1\right)^2+50$

Vì $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0, 4\left(y-1\right)^2\ge 0$ nên $4\left(x^2+y^2\right)-4x-8y+55\ge 50.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{\left(2x+9y\right)^3}{4\left(x^2+y^2\right)-4x-8y+55}\le\frac{10^3}{50}=20.$ (điều phải chứng minh)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$ và $y=1$

Bài 23 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) $x^2+y^2+z^2\ge 3$;

b) $\frac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2\ge 4$;

c) $xy+yz+zx\ge 3\sqrt{xyz}$.

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2+1\ge 2x; y^2+1\ge 2y; z^2+1\ge 2z$

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế ta được $x^2+y^2+z^2+3\ge 2\left(x+y+z\right)\Rightarrow x^2+y^2+z^2+3\ge 6$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

b) Đặt $t=x^2+y^2+z^2\ge 3$, bất đẳng thức $\frac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2\ge 4$ trở thành

$\frac{3}{t}+t\ge 4\Rightarrow 3+t^2\ge 4t\Rightarrow t^2-4t+3\ge 0\Rightarrow\left(t-1\right)\left(t-3\right)\ge 0$

Bất đẳng thức này đúng đúng vì $t\ge 3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

c) $xy+yz+zx\ge 3\sqrt{xyz}\Rightarrow (xy+yz+zx)^2\ge 9xyz$

$\Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\ge 9xyz\Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge 3xyz$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$x^2y^2+y^2z^2\ge 2xy^2z;\ \ y^2z^2+z^2x^2\ge 2xyz^2;\ \ z^2x^2+x^2y^2\ge 2x^2yz$

Cộng các bất đẳng thức trên trên vế theo vế ta được: $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z)=3xyz$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 24 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực a,b,c. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) $\dfrac{b+c}{a}.\dfrac{c+a}{b}.\dfrac{a+b}{c}\ge 8$

b) $a^3+b^3+c^3+24abc\le (a+b+c)^3$

c) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+7bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}\ge 1$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\dfrac{b+c}{a}.\dfrac{c+a}{b}.\dfrac{a+b}{c}\ge \dfrac{2\sqrt{bc}}{a}.\dfrac{2\sqrt{ca}}{b}.\dfrac{2\sqrt{ab}}{c}=8$

b) Có $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$ ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+7bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}=\dfrac{a^2}{a\sqrt{a^2+7bc}}+\dfrac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c^2}{c\sqrt{c^2+9ab}}$

$=\dfrac{a^2}{\sqrt{a}.\sqrt{a^3+7abc}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{c}.\sqrt{c^3+9abc}}$

$\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}.\sqrt{a^3+7abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+9abc}}$

Lại có: $\left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+7abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+9abc}\right)^2\le (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)$

(Bất đẳng thức Bunhiacopxki)

Sử dụng kết quả ý b), ta được:

$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)\le (a+b+c)(a+b+c)^3=(a+b+c)^4$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+7abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+9abc}\right)^2\le(a+b+c)^4$$

$$\Rightarrow\sqrt{a}.\sqrt{a^3+7abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+9abc}\le(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}.\sqrt{a^3+7abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+9abc}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1$$

Bài 25 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x^2y^2+4y+4=0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{xy}{3y+2}$

Lời giải

Vì $x^2y^2+4y+4=0\Rightarrow y+1=\dfrac{-x^2y^2}{4}$

Ta có: $T=\dfrac{xy}{3y+2}=\dfrac{4xy}{3(4y+4)-4}=\dfrac{4xy}{-3x^2y^2-4}=\dfrac{-4xy}{3x^2y^2+4}$

Đặt $m=xy\Rightarrow T=\dfrac{-4m}{3m^2+4}\Rightarrow 3Tm^2+4m+4T=0\quad(1)$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn m, T là tham số. Khi đó: $\Delta'=2^2-3T.4T=4(1-3T^2)$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\ge0\ \Rightarrow1-3T^2\ge0\Rightarrow\dfrac{-\sqrt3}{3}\le T\le\dfrac{\sqrt3}{3}$

Do đó: $T_{\min}=\dfrac{-\sqrt3}{3}\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow m=\dfrac{-2}{3T}=\dfrac{2\sqrt3}{3}\Rightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{2\sqrt3}{3}\\ y=\dfrac{-4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-\sqrt3}{2}\\ y=\dfrac{-4}{3}\end{cases}$

$T_{\max}=\dfrac{\sqrt3}{3}\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow m=\dfrac{-2}{3T}=\dfrac{-2\sqrt3}{3}\Rightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{-2\sqrt3}{3}\\ y=\dfrac{-4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt3}{2}\\ y=\dfrac{-4}{3}\end{cases}$

Vậy $T_{\min}=\dfrac{-\sqrt3}{3}\ \Rightarrow\ (x,y)=\left(\dfrac{-\sqrt3}{2};\dfrac{-4}{3}\right)$ và $T_{\max}=\dfrac{\sqrt3}{3}\ \Rightarrow\ (x,y)=\left(\dfrac{\sqrt3}{2};\dfrac{-4}{3}\right)$

Bài 26 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a}=\frac{5}{4}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)}+\frac{(4-b)^2}{(4-c)(4-a)}+\frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}$

Lời giải

Vì $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a<b+c, b<a+c, c<a+b$ và $a+b+c=8$ nên ta được $a,\ b,\ c<4$.

Đặt $\begin{cases}x=4-a\\y=4-b\\z=4-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=4\\4>x,y,z>0\end{cases}$, viết lại giả thiết thành

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{5}{2}$$

Biến đổi biểu thức ta được $P=\frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)}+\frac{(4-b)^2}{(4-a)(4-c)}+\frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}=\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}$

$$=\frac{(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz}{xyz}=\frac{64}{xyz}-27$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwart $\frac{5}{2}-\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}=\frac{4}{4-z}\Rightarrow(z-2)(5z-4)\leq 0$

Suy ra: $\frac{4}{5}\leq z\leq 2$

Tương tự ta được: $\frac{4}{5}\leq x,y,z\leq 2$

Khi đó $\begin{cases}(2-x)(2-y)(2-z)\geq 0\\(5x-4)(5y-4)(5z-4)\geq 0\Rightarrow 2\leq xyz\leq\frac{256}{125}\\xy+yz+zx=\frac{5}{2}xyz\end{cases}$

Khi đó ta được $\frac{17}{4}\leq P\leq 5$. Giá trị lớn nhất của $P=5$

Dấu "=" xảy ra khi $(x;y;z)=(1;1;2)$ hay $(a;b;c)=(3;3;2)$

Bài 27 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Hà Tĩnh tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{4}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$

$$\Rightarrow\frac{1}{(b-c)^2}\ge\frac{1}{b^2};\frac{1}{(c-a)^2}=\frac{1}{(a-c)^2}\ge\frac{1}{a^2}\ \Rightarrow\ \frac{4}{ab}\ge\frac{4}{ab+bc+ca}$$

Cần chứng minh $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{4}{ab}$. Hay $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}\ge 4\quad(1)$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{(a-b)^2}{ab}+2>2$ vì $a\ne b$

(1) trở thành $t+\frac{1}{t-2}\ge 4$

Hay $t^2-2t+1\ge 4t-8\Rightarrow(t-3)^2\ge 0\Rightarrow$ điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3\\ c=0\end{cases}$

Bài 28 : (Đề thi khảo sát vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – THPT Chuyên Lam Sơn tỉnh Thanh Hoá năm học 2024 – 2025)

Các số thực dương x,y thỏa mãn: $x^3+y^3=x-y$, chứng minh $x^2+y^2<1$.

Lời giải

Do x,y dương nên $x-y=x^3+y^3>0\Rightarrow x>y$

Do x,y dương nên $x-y=x^3+y^3>x^3-y^3\Rightarrow x-y>x^3-y^3\Rightarrow x^2+xy+y^2<1$

Suy ra $x^2+y^2<1$ (điều phải chứng minh)

Bài 29 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{2xyz}{x^3+y^3+z^3}+\frac{\left|x^3-y^3\right|+\left|y^3-z^3\right|+\left|z^3-x^3\right|}{3xyz}.$$

Lời giải

Bổ đề: $\left|x^3-y^3\right|+\left|y^3-z^3\right|+\left|z^3-x^3\right|\geq x^3+y^3+z^3-3xyz$

Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử $x\geq y\geq z$ bổ đề cần chứng minh tương đương với

$2\left(x^3-z^3\right)\geq x^3+y^3+z^3-3xyz\Rightarrow\left(x^3-y^3\right)+3\left(xyz-z^3\right)\geq 0$ đúng do $x\geq y\geq z$.

Áp dụng: $M\geq\dfrac{2xyz}{x^3+y^3+z^3}+\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{3xyz}=\left(\dfrac{2xyz}{x^3+y^3+z^3}+\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}-\dfrac{5}{3}\right)+\dfrac{2}{3}$

Ta chứng minh $\dfrac{2xyz}{x^3+y^3+z^3}+\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}-\dfrac{5}{3}\geq 0$, điều này tương đương với

$\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-5\left(x^3+y^3+z^3\right)xyz+6\left(xyz\right)^2\geq 0$

$\Rightarrow\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)\left(x^3+y^3+z^3-2xyz\right)\geq 0$

Bất đẳng thức này đúng do $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ (Bất đẳng thức Cauchy).

Vậy GTNN của $M=\dfrac{2}{3}$ khi $x=y=z$ và $x,y,z>0$.

Bài 30 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz=4$.

Chứng minh $xyz\leq 1$ và $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\geq\dfrac{x+y+z}{2}$.

Lời giải

Ta có $4=xy+yz+zx+xyz\geq 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}+xyz$.

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}\ \left(t>0\right)$, ta được $t^3+3t^2\leq 4\Rightarrow\left(t-1\right)\left(t+2\right)^2\leq 0\Rightarrow t\leq 1$. Do đó $xyz\leq 1$.

Ba số x,y,z không thể cùng lớn hơn 1 hoặc cùng nhỏ hơn 1. Không giảm tính tổng quát, giả sử $x\geq 1\geq y$.

Ta chứng minh: $x+y+z\geq xy+yz+zx$ (*).

Thật vậy: (*) $\Rightarrow x+y+z+xyz\geq 4\Rightarrow x+y+\left(1+xy\right)\dfrac{4-xy}{x+y+xy}\geq 4$

$\Rightarrow\left(x+y\right)^2+xy\left(x+y\right)-x^2y^2+3xy+4\geq 4\left(x+y\right)+4xy$

$\Rightarrow (x+y-2)^2 + xy(x-1)(1-y) \geq 0$ (luôn đúng do $x \geq 1 \geq y$).

Khi đó $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{x^2}{x(y+z)} + \frac{y^2}{y(z+x)} + \frac{z^2}{z(x+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \frac{x+y+z}{2}$ (điều phải chứng minh)

Bài 31 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – thành phố Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a \leq 2, b \leq 2, c \leq 2; a+b+c=3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{ab(b+c+1)} + \sqrt{bc(c+a+1)} + \sqrt{ca(a+b+1)}$

Lời giải

Ta có $\sqrt{ab(b+c+1)} = \frac{\sqrt{3ab(b+c+1)}}{\sqrt{3}} \leq \frac{3ab+a+b+1}{2\sqrt{3}}$ do Cauchy.

Tương tự và cộng theo từng vế ta có: $P \leq \frac{3(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+3}{2\sqrt{3}}$.

Lại có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$ nên $P \leq \frac{3.3+2.3+3}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

Ta có $(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0$ nên $2ab+2bc+2ca \geq 4+abc \geq 4$.

Vì thế $ab+bc+ca \geq 2$.

Ta có $P^2 \geq ab(b+c+1)+bc(c+a+1)+ca(a+b+1)$.

Khi đó $P^2 \geq ab^2+bc^2+ca^2+3abc+ab+bc+ca \geq ab(b+c)+bc(c+a)+ca(a+b)+2$.

Lại có $a,b,c \leq 2$ nên $a+b,\ b+c,\ c+a \geq 1$ hay $P^2 \geq ab+bc+ca+2 \geq 4$. Vì vậy $P \geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 chẳng hạn khi $a=0, b=1, c=2$.

giá trị lớn nhất của P bằng $3\sqrt{3}$ chẳng hạn khi $a=b=c=1$.

Bài 32 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – Sở GD&ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a \leq 1,\ b \leq 1,\ c \leq 1; a^2+b^2+c^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^4}{bc+2} + \frac{b^4}{ca+2} + \frac{c^4}{ab+2}$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $T \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca+6} = \frac{4}{ab+bc+ca+6}$

Lại có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

Theo bất đẳng thức Cauchy nên $ab+bc+ca\le 2$. Vì vậy $T\ge \dfrac{4}{2+6}=\dfrac{1}{2}$

Lại có $(b-1)(c-1)\ge 0\Rightarrow bc+2\ge b+c+1\ge b+c+a$

Cũng có $a(1-a^3)\ge 0\Rightarrow a^4\le a\ \Rightarrow \dfrac{a^4}{bc+2}\le \dfrac{a}{a+b+c}$

Tương tự và cộng theo từng vế ta có $T\le \dfrac{a}{b+c+a}+\dfrac{b}{c+a+b}+\dfrac{c}{a+b+c}=1$

Vậy $\dfrac{1}{2}\le T\le 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\dfrac{1}{2}$, chẳng hạn khi $a=b=c=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

giá trị lớn nhất của T bằng 1, chẳng hạn khi $a=b=1, c=0$

Bài 33 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2(a+b+c)$

a) Chứng minh rằng $a+b+c\le 6$ và $(a+1)(b+1)(c+1)\le 27$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $F=(a+1)(b+1)(c+1)$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwartz, ta có $2(a+b+c)=a^2+b^2+c^2\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra $0\le a+b+c\le 6$

Từ giả thiết, ta có $2a+2=a^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0\Rightarrow a\ge -1$

Tương tự ta cũng có $b\ge -1; c\ge -1$

Suy ra $a+1, b+1, c+1$ là các số không âm.

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM – GM kết hợp với kết quả $0\le a+b+c\le 6$ vừa chứng minh ở trên, ta được $(a+1)(b+1)(c+1)\le \left(\dfrac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3\le 27$

b) Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$

từ giả thiết ta có $a+b+c\ge 0$

Vì thế $a\ge \dfrac{a+b+c}{3}\ge 0$

Bây giờ, ta có $(b+1)(c+1) = bc + b + c + 1 + \dfrac{a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)}{2}$

$$= \frac{(b+c)^2 + a^2 - 2a + 2}{2} \geq \frac{a^2-2a+2}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức này, ta được $F \geq \dfrac{(a+1)(a^2-2a+2)}{2} = \dfrac{a^3-a^2+2}{2}$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\dfrac{a^3}{2} + \dfrac{a^3}{2} + \dfrac{4}{27} \geq a^2$

Do đó, $F \geq \dfrac{-\dfrac{4}{27}+2}{2} = \dfrac{25}{27}$

Mặt khác, với $a = b = \dfrac{2}{3}, c = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow F = \dfrac{25}{27}$

Vậy $\min F = \dfrac{25}{27}$.

Bài 34 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực không âm và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2a+c}{1+bc} + \dfrac{2b+c}{1+ca}$

Lời giải

Ta đi chứng minh $1+bc \geq \dfrac{a+b+c}{4}$

Thật vậy, ta có: $1+bc \geq \dfrac{a+b+c}{4} \Rightarrow 16(1+bc)^2 \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow 8 + 16b^2c^2 + 30bc \geq 2a(b+c)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+16b^2c^2+30bc \geq 2a(b+c) \Rightarrow a^2+(b+c)^2+16b^2c^2+28bc \geq 2a(b+c)$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo $AM-GM$ và do a,b,c là các số thực không âm.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} c = 0 \\ a = b+c \end{cases}$

Chứng minh tương tự ta được: $1+ca \geq \dfrac{a+b+c}{4}$

Khi đó: $P\le \dfrac{2a+c}{\frac{a+b+c}{4}}+\dfrac{2b+c}{\frac{a+b+c}{4}}=8$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=2\\b=2.\\c=0\end{cases}$

Vậy GTNN của P bằng 8 khi $(a;b;c)=(2;2;0)$.

Bài 35 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Hưng Yên năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases}a>0,b>0,c\ge 2009\\a+b+c=2025\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc$.

Lời giải

$$2025=a+b+\frac{c}{\frac{2009}{8}}+\frac{2001.c}{2009}\ge 3\sqrt[3]{\frac{8abc}{2009}}+2001\Rightarrow 3\sqrt[3]{\frac{8abc}{2009}}\le 24\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8abc}{2009}}\le 8\Rightarrow \frac{8abc}{2009}\le 512$$

$\Rightarrow abc\le 128576$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $a=b=\dfrac{c}{\frac{2009}{8}}\Rightarrow a=b=8;c=2009$

Bài 36 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng $\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\le \dfrac{3x-1}{2}$, với $x\ge 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{z^2}}$, với x,y,z là các số thực không nhỏ hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{xyz}$.

Lời giải

a) Theo bất đẳng thức $AM-GM$ với số dương $\sqrt{2x-2},\sqrt{x+1}$, ta có:

$$\sqrt{2\left(x^2-1\right)}=\sqrt{2x-2}\cdot\sqrt{x+1}\le \frac{2x-2+x+1}{2}=\frac{3x-1}{2},\forall x\ge 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{2x-2}=\sqrt{x+1}\Rightarrow 2x-2=x+1\Rightarrow x=3$.

b) Với $\forall x,y,z\ge 1$. Khi đó kết hợp với câu a), ta có:

$$P=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}+\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}\le \frac{\frac{3x-1}{2\sqrt{2}}}{x}+\frac{\frac{3y-1}{2\sqrt{2}}}{y}+\frac{\frac{3z-1}{2\sqrt{2}}}{z}=\frac{3x-1}{2\sqrt{2}x}+\frac{3y-1}{2\sqrt{2}y}+\frac{3z-1}{2\sqrt{2}z}$$

Từ giả thiết có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{xyz}\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{yz}}+\dfrac{1}{\sqrt{zx}}=1$.

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì:

$$1=\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Rightarrow-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le-1$$

Từ $\left(^*\right)$ ta tiếp tục có: $P\le\frac{9}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot1=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=3$.

Bài 37 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=4$.

a) Chứng minh $4ab+ac+bc\ge4abc$

b) Chứng minh $\frac{2a}{4a+bc}+\frac{2b}{4b+ac}+\frac{3c}{4c+ab}\le\frac{4}{3}$.

Lời giải

a) Ta có: $4ab+ac+bc\ge4abc\ \Rightarrow\frac{4}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge4$

Mà $VT\ge\frac{(2+1+1)^2}{a+b+c}=4=VP$ (điều phải chứng minh)

b) Cần chứng minh: $\frac{2a}{4a+bc}+\frac{2b}{4b+ac}+\frac{3c}{4c+ab}\le\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow\frac{2a}{(a+b+c)a+bc}+\frac{2b}{(a+b+c)b+ac}+\frac{3c}{(a+b+c)c+ab}\le\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{2a(b+c)+2b(a+c)+2c(a+b)}{(a+c)(b+c)(a+b)}\le\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{5ac+5bc+4ab}{(a+c)(b+c)(a+b)}\le\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow15ac+15bc+12ab\le4(a+c)(b+c)(c+b)\Rightarrow0\le4(4-a)(4-b)(4-c)-(15ac+15bc+12ab)$$

$$\Rightarrow0\le-4abc+4ab+ac+bc-64(a+b+c)+256\Rightarrow4abc\le4ab+ac+bc$$

Bất đẳng thức cuối cùng đã được chứng minh ở câu a)

Dấu bằng xảy ra khi $\left(a,\ b,\ c\right)=\left(1,\ 1,\ 2\right)$

Bài 38 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\ge9$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$a^5+\frac{2}{a}=a^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge 3\sqrt[3]{a^5.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}}=3a$$

$$b^5+\frac{2}{b}=b^5+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge 3\sqrt[3]{b^5.\frac{1}{b}.\frac{1}{b}}=3c$$

$$c^5+\frac{2}{c}=c^5+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{c^5.\frac{1}{c}.\frac{1}{c}}=3c$$

Khi đó: $a^5+b^5+c^5+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\ge 3(a+b+c)=9$ (điều phải chứng minh)

Bài 39 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - TP Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $b+c\ge 2\sqrt{bc}$

Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab-1}{bc}}$. Mà $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab-1}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}}\le\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ (1)

Tương tự, ta có $\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}\le\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ (2) và $\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(c-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (3)

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3), ta được đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$.

Bài 40 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Cho ba số thực x,y,z, thỏa mãn: $(x-y)(y-z)(z-x)\ge 2$

Chứng minh rằng, $x^2+y^2+z^2\ge 2$.

Lời giải

Do tính đối xứng vòng quanh của các biểu thức nằm ở vế trái của các bất đẳng thức đã nêu ở đề bài, đối với x,y,z, nên không mất tính tổng quát, giả sử $x=\max\{x,y,z\}$.

Khi đó, $x\ge y$ suy ra $x-y\ge 0$. Do đó, từ giả thiết của bài ra, ta có:

$$2 \le (x-y)\cdot\frac{((y-z)+(z-x))^2}{4} = \frac{(x-y)^3}{4}$$

Suy ra, $x-y \ge 2$; vì vậy $x^2+y^2+z^2 \ge x^2+y^2 = x^2+(-y)^2 \ge \frac{(x-y)^2}{2} \ge \frac{2^2}{2} = 2$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bài 41 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1, y>1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$

Lời giải

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương $(x-1)$ và 1 ta được:

$$x = (x-1)+1 \ge 2\sqrt{(x-1).1} = 2\sqrt{x-1}.$$

Vậy $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \ge 2$ với mọi số thực $x>1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=1 \Rightarrow x=2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương $\frac{x^2}{y-1}$ và $\frac{y^2}{x-1}$ ta được

$$T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}.\frac{y^2}{x-1}} = 2.\frac{x}{\sqrt{x-1}}.\frac{y}{\sqrt{y-1}} \ge 2.2.2 = 8$$

Vậy $\min T = 8$ khi $x=y=2$.

Bài 42 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán + Chuyên Tin – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là ba số thực không âm.

a) Chứng minh rằng $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$.

b) Giả sử $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \le 1$.

Lời giải

a) Với ba số thực không âm a,b,c, ta có

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc;$$

$$(a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được: $2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+bc+ca\right)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$ (điều phải chứng minh)

b) Vì $a+b+c=1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq (a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$2\sqrt{3abc} \leq 2\left(ab+bc+ca\right)$

$\sqrt{3abc} \leq ab+bc+ca$

$3abc \leq (ab+bc+ca)^2$

$3abc\left(a+b+c\right) \leq (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab$

$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab \geq 0$

$2(ab)^2+2(bc)^2+2(ca)^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab \geq 0$

$(ab)^2-2b^2ac+(bc)^2+(bc)^2-c^2ab+(ca)^2+(ca)^2-2a^2bc+(ab)^2 \geq 0$

$(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2 \geq 0.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=b=c \end{cases} \Rightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi số thực không âm a,b,c nên bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq 1$ được chứng minh.

Cách 2: Ta có $a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$$
$$a^2+b^2+c^2=1-2\left(ab+bc+ca\right).$$

Mà $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (theo ý a)) nên $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}\cdot 1^2 = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra $1-2(ab+bc+ca) \le 1-2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực không âm a,b,c, ta có

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow 1 \ge 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \le \frac{1}{27}.$$

Suy ra $2\sqrt{3abc} \le 2\cdot\sqrt{3\cdot\frac{1}{27}} = \frac{2}{3}$.

Tư (1), và (2) suy ra $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \le \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \le 1$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 43 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường Phổ Thông Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+3 = 2(ab+bc+ca)$.

Chứng minh rằng $3 \le a+b+c \le \frac{2(ab+bc+ca)+3}{3}$

Lời giải

Ta có $2(ab+bc+ac) = a^2+b^2+c^2+3 \ge ab+bc+ac+3 \Rightarrow ab+bc+ac \ge 3$.

Do đó $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ac) \ge 9 \Leftrightarrow a+b+c \ge 3$.

Đặt $p = a+b+c$ và $q = ab+bc+ca$. Từ $(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)+3 = 2(ab+bc+ca)$, ta được $p^2+3 = 4q$.

Mặt khác : $a+b+c \le \frac{2(ab+bc+ca)+3}{3} \Rightarrow 3p \le 2q+3 \Rightarrow 3p \le \frac{p^2+3}{2}+3$

$\Rightarrow 6p \le p^2+3+6 \Rightarrow p^2-6p+9 \ge 0 \Rightarrow (p-3)^2 \ge 0$ (đúng)

Như vậy $a+b+c \le \frac{2(ab+bc+ca)+3}{3}$.

Bài 44 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh lần lượt là a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$ và $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải

Đặt $T=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}$

Ta có: $T=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$

$\geq(a+b+c)\cdot\frac{9}{2(a+b+c)}-3=\frac{3}{2}$

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c$

Mà $T=\frac{3}{2}$ nên dấu" =" xảy ra do vậy $a=b=c$ hay ΔABC đều.

Bài 45 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}+\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có: $a^2+2b^2+3=(a^2+b^2)+(b^2+1)+2\geq 2ab+2b+2$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2+2b^2+3}\leq\frac{1}{2ab+2b+2}=\frac{1}{2(ab+b+1)}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{1}{b^2+2c^2+3}\leq\frac{1}{2bc+2c+2}=\frac{1}{2(bc+c+1)}$

$$\frac{1}{c^2+2^2+3}\leq\frac{1}{2ca+2a+2}=\frac{1}{2(ca+a+1)}$$

$\Rightarrow P\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)+\frac{3}{2}\qquad(*)$

Bây giờ ta chứng minh $\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}=1\qquad(**)$

Thật vậy ta có: $\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}$

$$=\frac{abc}{ab+b+abc}+\frac{abc}{bc+abc^2+abc}+\frac{1}{ca+a+1}$$

$$=\frac{ac}{ac+a+1}+\frac{a}{1+ac+a}+\frac{1}{ca+a+1}$$

$$=\frac{ca+a+1}{ca+a+1}=1$$

Như vậy (**) đã được chứng minh.

Từ (*) và (**) ta được $P\le 2$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 khi $a=b=c=1$

Bài 46 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)^2(1+b)^4>\frac{2024}{27}.$$

Lời giải

$$(1+a)^2=\left(1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2\ge\left(3\sqrt[3]{1\frac{a}{2}\frac{a}{2}}\right)^2=9.\sqrt[3]{\frac{a^4}{16}}$$

$$(1+b)^4=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+b\right)^4\ge\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{1}{2}b}\right)^4=81.\sqrt[3]{\frac{b^4}{256}}$$

$$(1+a)^2(1+b)^4\ge 9.\sqrt[3]{\frac{a^4}{4^2}}.81.\sqrt[3]{\frac{b^4}{4^4}}=\frac{729}{16}\sqrt[3]{a^4b^4}=\frac{729}{16}>\frac{1024}{27}\text{ (điều phải chứng minh)}$$

Bài 47 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn tỉnh Khánh Hoà năm học 2024 – 2025)

a. Tìm tất cả số thực $k>0$ sao cho $\frac{x}{xy+2}\le\frac{1}{k}\left(x+\frac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x,y>0$.

b. Cho $a,b,c,x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4$.

Chứng minh: $\frac{x}{ax+2}+\frac{y}{by+2}+\frac{z}{cz+2}\le 1$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{(xy+2)^2}{xy}=\frac{x^2y^2+4xy+4}{xy}=xy+\frac{4}{xy}+4\ge 2\sqrt{4}+4=8$ (AM-GM).

Dấu "$=$" xảy ra khi $xy=2$.

Do đó: $\dfrac{x}{xy+2} \le \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{xy+2}{y}\right) = \dfrac{1}{8}\left(x+\dfrac{2}{y}\right); \forall x,y>0$

Vì $\dfrac{x}{xy+2} \le \dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x,y>0$ nên $0<k\le 8$.

b) Áp dụng câu 4.1: $\dfrac{x}{ax+2}+\dfrac{y}{by+2}+\dfrac{z}{cz+2} \le \dfrac{1}{8}\left(x+\dfrac{2}{a}+y+\dfrac{2}{b}+z+\dfrac{2}{c}\right) = \dfrac{1}{8}(4+4)=1$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $ax=by=cz=2$

Bài 48 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025)

Cho $x\ge 0, y\ge 0, xy\le \dfrac{1}{4}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{1+2\sqrt{xy}} \ge \dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1+2y}$

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $\dfrac{2}{1+2\sqrt{xy}} - \left(\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1+2y}\right) = \left(\dfrac{1}{1+2\sqrt{xy}} - \dfrac{1}{1+2x}\right) + \left(\dfrac{1}{1+2\sqrt{xy}} - \dfrac{1}{1+2y}\right)$

$$= \frac{2x-2\sqrt{xy}}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)} + \frac{2y-2\sqrt{xy}}{(1+2\sqrt{xy})(1+2y)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)} + \frac{2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2y)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+2y) + 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+2x)}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{x}.y-2\sqrt{y}.x)}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})\left((\sqrt{x}-\sqrt{y})-2\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})\right)}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-2\sqrt{xy})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$$

Vì $x\ge 0, y\ge 0, xy\le \dfrac{1}{4}$ nên $\dfrac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-2\sqrt{xy})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \ge 0$ (1) đpcm

Dấu "=" xảy ra trong (1) khi và chỉ khi $x=y\ge 0$ hoặc x, y không âm và $xy=\dfrac{1}{4}$

Cách 2: Đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}\left(a,b\ge 0; ab\le \frac{1}{2}\right)$. Ta cần chứng minh

$$\frac{2}{1+2ab}\ge \frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2b^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+2ab}-\frac{1}{1+2a^2}\ge \frac{1}{1+2ab}-\frac{1}{1+2b^2}$$

$$\frac{a^2-ab}{1+2a^2}\ge \frac{ab-b^2}{1+2b^2} \text{ (do } 1+2ab>0\text{)}$$

$$a(a-b)(1+2b^2)\ge b(a-b)(1+2a^2) \text{ (do } 1+2a^2>0; 1+2b^2>0\text{)}$$

$$(a-b)(a+2ab^2-b-2a^2b)\ge 0$$

$$(a-b)\big((a-b)-2ab(a-b)\big)\ge 0$$

$$(a-b)^2(1-2ab)\ge 0 \qquad (2)$$

Do $(a-b)^2\ge 0$ và $1-2ab\ge 0$ nên (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y\ge 0$ hoặc x, y không âm và $xy=\frac{1}{4}$

Bài 49 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện $2024a+1011b\le 2023$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{20}{a}+\frac{23}{b}-1944a-988b$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
P&=\frac{20}{a}+\frac{23}{b}-1944a-988b\\
&=20\left(\frac{1}{a}+4a\right)+23\left(\frac{1}{b}+b\right)-1944a-988b-80a-23b\\
&=20\left(\frac{1}{a}+4a\right)+23\left(\frac{1}{b}+b\right)-2024a-1011b\\
&\ge 20.2\sqrt{\frac{1}{a}.4a}+23.2\sqrt{\frac{1}{b}.b}-(2024a+1011b)\\
&\ge 20.2.2+23.2-2023=-1897
\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra $\Rightarrow \begin{cases} 2024a+1011b=2023 \\ \dfrac{1}{a}=4a \\ \dfrac{1}{b}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$

Vậy $MinP=-1897$, đạt được khi $a=\dfrac{1}{2}, b=1$.

Bài 50 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{y-1}{y+4}\geq\dfrac{6}{z+5}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(2x+2)(2y+3)(2z+4)$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{x+3-4}{x+3}+\dfrac{y+4-5}{y+4}\geq\dfrac{6}{z+5}\Rightarrow 2\geq\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{5}{y+4}+\dfrac{6}{z+5}(*)$

Từ (*) có $\dfrac{2x+2}{x+3}=2-\dfrac{4}{x+3}\geq\dfrac{5}{y+4}+\dfrac{6}{z+5}\geq 2\sqrt{\dfrac{30}{(y+4)(z+5)}}(1)$

Từ (*) $\dfrac{2y+3}{y+4}=2-\dfrac{5}{y+4}\geq\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{6}{z+5}\geq 2\sqrt{\dfrac{24}{(z+5)(x+3)}}(2)$

$\dfrac{2z+4}{z+5}=2-\dfrac{6}{z+5}\geq\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{5}{y+4}\geq 2\sqrt{\dfrac{20}{(x+3)(y+4)}}(3)$

Nhân vế theo vế của (1), (2), (3) thì: $\dfrac{(2x+2)(2y+3)(2z+4)}{(x+3)(y+4)(z+5)}\geq 8.\dfrac{120}{(x+3)(y+4)(z+5)}$

$\Rightarrow (2x+2)(2y+3)(2z+4)\geq 960$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{4}{x+3}=\dfrac{5}{y+4}=\dfrac{6}{z+5} \\ \dfrac{4}{x+3}+\dfrac{5}{y+4}+\dfrac{6}{z+5}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{7}{2} \\ z=4 \end{cases}$

Vậy $MinP=960$ khi $\begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{7}{2} \\ z=4 \end{cases}$

Bài 51 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - Trường THPT Lê Quý Đôn TP Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Cho các số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\sqrt{ab}+1\le 2\sqrt{b}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{\sqrt{ab}}{2024a+2025b}+\frac{2009a}{b}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{a}=x,\frac{1}{\sqrt{b}}=y$. Ta thu được ngay $x+y\le 2$

Viết lại biểu thức T theo $x,\ y$ ta có: $T=\frac{xy}{2024x^2y^2+2025}+2009x^2y^2$

Đặt $c=xy$, theo bất đẳng thức Cauchy thì $2\sqrt{xy}\le x+y\Rightarrow c\le 1$

Ta có: $\frac{c}{2024c^2+2025}-\frac{1}{4049}=\frac{4049c-2024c^2-2005}{4049(2024c^2+2005)}=\frac{(1-c)(2004c-2005)}{4009(2024c^2+2005)}\le 0$

$2009c^2\le 2009$

Suy ra $T\le\frac{1}{4009}+2009$. Dấu "=" xảy ra tại $a=b=1$

Vậy $T_{\max}=2009+\frac{1}{4009}$

Bài 52 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung - Trường THPT Chuyên KHTN năm học 2024 – 2025)

Với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(a+2)b^2+(b+2)c^2+(c+2)a^2\ge 8+abc$

Chứng minh rằng: $2(ab+bc+ca)\le a^2(a+b)+b^2(b+c)+c^2(c+a)$

Lời giải

Hoán vị vòng quanh a,b,c thì bài toán không thay đổi nên không mất tính tổng quát, giả sử b nằm giữa a và c. Ta có: $ab^2+bc^2+ca^2-abc\le b\left(a^2+c^2\right)\le\frac{b^2+1}{2}\left(a^2+c^2\right)\le\frac{1}{8}\left(a^2+b^2+c^2+1\right)^2$

Từ đây sử dụng giả thiết, ta suy ra được: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{\left(a^2+b^2+c^2+1\right)^2}{8}\ge 8$ hay ta có

$a^2+b^2+c^2\ge 3$.

Ngoài ra $a^2+b^2+c^2+3=\left(a^2+1\right)+\left(b^2+1\right)+\left(c^2+1\right)\geq 2\left(a+b+c\right)$ nên ta có:

$a^2+b^2+c^2\geq a+b+c$

Lại có:

$$a^2\left(a+b\right)+b^2\left(b+c\right)+c^2\left(c+a\right)\geq\frac{\left(a\left(a+b\right)+b\left(b+c\right)+c\left(c+a\right)\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}$$

$$=\frac{\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(ab+bc+ca\right)\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}$$

$$\geq\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)}{2\left(a+b+c\right)}\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.